

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO



**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL**



PROFMAT

Arinaldo de Oliveira

**AJUSTE DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE A DADOS DE
PRECIPITAÇÕES PLUVIOMÉTRICAS MENSAIS NA
FAZENDA ESMERIL - PATROCINIO-MG**

UBERABA-MG

2013

ARINALDO DE OLIVEIRA

AJUSTE DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE A DADOS DE PRECIPITAÇÕES
PLUVIOMÉTRICAS MENSAIS NA FAZENDA ESMERIL - PATROCÍNIO-MG

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nelson Fernando Inforzato

Coorientador: Prof. Dr. Ednaldo Carvalho
Guimarães

UBERABA-MG

2013

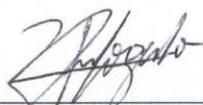
ARINALDO DE OLIVEIRA

AJUSTE DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE A DADOS DE PRECIPITAÇÕES
PLUVIOMÉTRICAS MENSAS NA FAZENDA ESMERIL - PATROCINIO-MG

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Uberaba, 15 de abril de 2013.

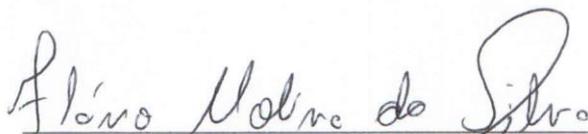
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Nelson Fernando Inforzato (orientador)
Universidade Federal do Triângulo Mineiro – ICTE/UFTM



Prof. Dr. Ednaldo Carvalho Guimarães (coorientador)
Universidade Federal de Uberlândia – FAMAT/UFU



Prof. Dr. Flávio Molina da Silva
Universidade Federal do Triângulo Mineiro – ICTE/UFTM

*As minhas filhas Talita e Larissa,
Minha esposa Elaine,
as fontes de amor e perseverança
da minha vida.*

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida.

A minha família, minha esposa Elaine, minhas filhas Talita e Larissa, pelo amor, compreensão e estímulo.

A Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM pela oportunidade de realizar esse curso.

Ao Instituto Federal do Triângulo Mineiro – IFTM pela flexibilização de horário que permitiu a realização desse curso.

A CAPES pelo apoio financeiro durante o curso.

Aos professores da banca, Dr. Nelson Fernando Inforzato, Dr. Ednaldo Carvalho Guimarães e Dr. Flávio Molina da Silva, pela leitura do trabalho, críticas, sugestões e contribuições.

Ao amigo, prof. Edilson Pimenta Ferreira – IFTM/Campus Uberlândia, pela generosa contribuição com o resumo em Língua Inglesa.

Aos meus colegas de curso, turma 2011: Airton Monte Serrat Borin Junior, Ana Paula da Silva Maffessoni, Cauê Ramiceli Medeiros, Eleide Leile de Andrade Paiva, Joao Gilberto da Silva, Joaquim Barbosa Júnior, José Ricardo Rocha Fabiano, Luís Gustavo da Silva, Mário Roberto Filho, Neilon José de Oliveira, Raquel Oliveira Bodart, Rosangela Maria Alvarenga Silva, Victor Fernando de Matos, Walley Mendonça, pela amizade e companheirismo.

A Terezinha Severino da Silva sempre prestativa, eficiente, alegre e colaboradora. É a referência administrativa da UFTM para os alunos do PROFMAT.

A profa. Dra. Marcela Luciano Vilela de Souza pela serenidade e atenção aos alunos na coordenação do PROFMAT-UFTM.

Aos professores da turma 2011, por compartilhar com os alunos seus conhecimentos, sem os quais não seria possível realizar esse curso.

Ao prof. Nelson por aceitar me orientar na realização desse trabalho, pela paciência, pela atenção, pelas contribuições nos cálculos desse trabalho.

Ao prof. Ednaldo, por aceitar coorientar incondicionalmente, pela dedicação, paciência durante a coorientação desse trabalho, pela oportunidade de estar sempre aprendendo com sua grande experiência e pela relação amigável com que me permitiu desenvolver esse trabalho.

RESUMO

O comportamento pluvial pode determinar a atividade agrícola a ser desenvolvida em determinada região. Na Fazenda Esmeril município de Patrocínio-MG, a atividade predominante é a agropecuária, sendo o café o principal produto agrícola. Caracterizar o regime de chuvas e auxiliar no planejamento das atividades agrícolas são objetivos que podem ser alcançados com o estudo do comportamento das séries de precipitações mensais. Este trabalho buscou ajustar algumas distribuições de probabilidade a série temporal de precipitações pluviométricas para as variáveis: média mensal, total mensal e máximo mensal. A base de dados utilizada foi a da Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG. As observações referem-se às precipitações pluviais diárias expressas em altura de lâmina d'água (mm), abrangendo o período de janeiro de 2000 a dezembro de 2012, num total de 13 anos. Foi feita a análise descritiva da série, teste de normalidade, ajuste das distribuições Exponencial, Gama, Weibull, Log-Normal, Gumbel e a aderência foi verificada pelo teste qui-quadrado. Verificou-se que não houve ajuste das distribuições citadas, usando o teste qui-quadrado, para a média mensal e nem para o máximo mensal, o total mensal apresentou melhor aderência para a distribuição gama. Verificou-se ainda que com o teste Kolmogorov-Smirnov houve ajustes de distribuições de probabilidade para as três variáveis, média mensal, total mensal e máximo mensal. Conclui-se que a não aderência da maioria das distribuições testadas, pelo teste qui-quadrado e a aderência pelo teste Kolmogorov-Smirnov, pode estar relacionada aos procedimentos dos testes, entretanto, o conhecimento do comportamento da série deve ser buscado, pois este é de fundamental importância nas inferências estatística.

Palavras-chave: Probabilidades. Precipitação (Meteorologia) – Variabilidade.

ABSTRACT

The pluvial behaviour may determine the agricultural activity to be carried out in a specific region. At Esmeril farm, in Patrocínio-MG, the predominant activity is the agriculture, mainly the cultivation of coffee. Characterizing the rain regime and helping the agriculture activity planning are aims that can be achieved with the study of the behaviour of the series of monthly precipitation. This study aimed at adjusting some distributions of probability to the temporal series of pluviometric precipitations to the variables: monthly average, monthly total and monthly maximum. The database used in this study was the Esmeril Farm, in Patrocínio, Minas Gerais. The observations refer to the daily pluvial precipitations expressed in water blade height (mm), comprehending the period between January 2000 and December 2012, in a total of 13 years. The descriptive analysis of the series was carried out as well as the normality test, exponential distribution adjustment, gamma, Weibull, Normal Log, Gumbel, and the adherence was verified by the chi-squared test. It was verified that there was no adjustment of the distributions mentioned, using the chi-squared test, for the monthly average or to the monthly maximum, the monthly total presented better adherence for the gamma distribution. It was also verified that with the Kolmogorov-Smirnov test, there was an adjustment of probability distributions for the three variables, monthly average, monthly total and monthly maximum. It can be concluded that the noncompliance of most of the tested distributions, by the chi-squared test and the Kolmogorov-Smirnov test adherence can be related to the test procedures, however, the behaviour of the series must be understood as it represents a fundamentally important piece of information for the statistical inference importance.

Key-words: Probability. Precipitation (Meteorology) – Variables.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Distribuição Normal	13
Figura 2 – Distribuição Exponencial	14
Figura 3 – Distribuição Gama	16
Figura 4 – Distribuição de Weibull	17
Figura 5 – Distribuição Log-Normal	18
Figura 6 – Distribuição Gumbel	19
Figura 7 – Comportamento da série: média mensal	26
Figura 8 – Comportamento da série: total mensal	27
Figura 9 – Comportamento da série: máximo mensal	28
Figura 10 – Histograma da média mensal	30
Figura 11 – P-P-Plot: média mensal	30
Figura 12 – Box-plot média mensal	31
Figura 13 – Histograma do total mensal	32
Figura 14 – P-P-Plot: total mensal	32
Figura 15 – Box-plot total mensal	33
Figura 16 – Histograma do máximo mensal	34
Figura 17 – P-P-Plot: máximo mensal	34
Figura 18 – Box-plot máximo mensal	35
Figura 19 – Histograma da média mensal – Distribuição Exponencial	36
Figura 20 – Histograma da média mensal – Distribuição Gama	37
Figura 21 – Histograma da média mensal – Distribuição de Weibull	38
Figura 22 – Histograma da média mensal – Distribuição Log-normal	39
Figura 23 – Histograma da média mensal – Distribuição Gumbel	40
Figura 24 – Histograma do total mensal – Distribuição Exponencial	41
Figura 25 – Histograma do total mensal – Distribuição Gama	42
Figura 26 – Histograma do total mensal – Distribuição Weibull	43
Figura 27 – Histograma do total mensal – Distribuição Log-normal	44
Figura 28 – Histograma do total mensal – Distribuição Gumbel	45
Figura 29 – Histograma do máximo mensal – Distribuição Exponencial	46
Figura 30 – Histograma do máximo mensal – Distribuição Gama	47
Figura 31 – Histograma do máximo mensal – Distribuição Weibull	48

Figura 32 – Histograma do máximo mensal – Distribuição Log-Normal	49
Figura 33 – Histograma do máximo mensal – Função Gumbel	50

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REFERENCIAL TEÓRICO	13
2.1	DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE	13
2.1.1	Distribuição Normal	13
2.1.2	Propriedades da Distribuição Normal	14
2.1.3	Distribuição Exponencial	14
2.1.4	Propriedades da Distribuição Exponencial	15
2.1.5	Distribuição Gama	15
2.1.6	Propriedades da Distribuição Gama	16
2.1.7	Distribuição Weibull	16
2.1.8	Distribuição Log-Normal	17
2.1.9	Distribuição Gumbel	18
2.2	TESTES DE ADERÊNCIA	19
2.2.1	Teste Qui-quadrado	19
2.2.2	Teste de Kolmogorov-Smirnov	20
2.2.3	Teste de Lilliefors	21
2.3	APLICAÇÕES DE AJUSTES DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE	21
3	MATERIAL E MÉTODOS	24
3.1	A SÉRIE	24
3.2	ANÁLISE DESCRITIVA	24
3.3	AJUSTE DAS DISTRIBUIÇÕES	25
3.4	TESTE DE AJUSTE	25
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	26

4.1	DESCRIÇÃO GERAL DA SÉRIE	26
4.2	ANÁLISE DESCRITIVA E TESTE DE NORMALIDADE	28
4.3	AJUSTE DAS DISTRIBUIÇÕES: EXPONENCIAL, GAMA, WEIBULL. LOG-NORMAL E GUMBEL	36
4.3.1	Média mensal	36
4.3.2	Total mensal	41
4.3.3	Máximo mensal	46
4.4	TESTES DE ADERÊNCIA	51
5	CONCLUSÃO	55
5.1	TRABALHOS FUTUROS	55
	REFERÊNCIAS	57
	APÊNDICE A – TABELAS 5, 6 e 7	59
	APÊNDICE B – TABELAS 8, 9 e 10	61
	APÊNDICE C – TABELAS 11, 12 e 13	62
	APÊNDICE D – TABELAS 14, 15 e 16	63
	APÊNDICE E – TABELAS 17, 18 e 19	64
	APÊNDICE F – TABELAS 20, 21 e 22	65

1 INTRODUÇÃO

O conhecimento das precipitações pluviométricas mensais é importante para subsidiar ações que interferem na produção agrícola. A irrigação, o preparo do solo, as datas de plantio e de colheita, são fatores que dependem das chuvas e podem determinar a atividade agrícola a ser desenvolvida em determinada região.

A caracterização da duração e intensidade das chuvas também podem determinar o dimensionamento de canais, vertedouros, barragens, galerias pluviais, controle de erosão e o planejamento de uso dos recursos hídricos.

Neste sentido, o estudo e conhecimento do comportamento da série de precipitações pluviométricas mensais, se torna uma etapa de fundamental importância nas atividades agrícolas e nos planejamentos urbanos, recebendo especial atenção em estudos hidrológicos e climatológicos. Este comportamento está diretamente ligado à decisão do tipo de análise inferencial que deve ser utilizada para a tomada de decisões.

Na estatística a metodologia a ser utilizada na análise dos dados está diretamente associada a este comportamento, ou seja, ao tipo de distribuição de probabilidade da variável. Campus (1976) argumenta que as metodologias estatísticas paramétricas estão associadas à distribuição normal da variável aleatória, já a metodologia não paramétrica e chamada de distribuição livre e são utilizadas, principalmente, quando a distribuição de probabilidade da variável se afasta da normalidade ou quando esta variável for qualitativa.

A atividade cafeeira tem grande importância agrícola no Triângulo Mineiro e a região de Patrocínio – MG se destaca na produção de café na região e no Brasil. Essa cultura, assim como diversas outras culturas agrícolas, é altamente dependente do regime hidrológico, justificando a necessidade de se acompanhar o regime pluviométrico da região.

Na Fazenda Esmeril, assim como no restante do município de Patrocínio-MG, a atividade predominante é a agropecuária, sendo o café o principal produto agrícola. Considerando a importância do conhecimento do comportamento da precipitação pluviométrica para a cultura do café, os administradores da Fazenda vêm registrando as informações dessa variável climatológica desde o ano de 2000.

Caracterizar o regime de chuvas e auxiliar no planejamento das atividades agrícolas e/ou urbanas são objetivos que podem ser alcançados com o estudo da série de precipitações mensais através de ajustes de modelos de comportamento dos dados, sendo que técnicas de

séries temporais e de distribuições de probabilidades são frequentemente utilizadas nestes estudos.

Este trabalho buscou analisar séries temporais no domínio do tempo, com os seguintes objetivos:

- Descrever o comportamento da série temporal da precipitação pluviométrica da Fazenda Esmeril, com foco nas variáveis: média mensal, total mensal e máximo mensal;
- Verificar quais das principais distribuições de probabilidade se ajustam aos dados da série de precipitações pluviométricas mensais da Fazenda Esmeril;
- Usar os testes de aderência para verificar quais distribuições melhor ajustou aos dados da série de precipitações pluviométricas em análise;
- Determinar a função de probabilidade das distribuições que melhor ajustaram aos dados da série de precipitações pluviométricas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, será apresentado um referencial teórico de algumas distribuições de probabilidade, testes de aderência e também algumas aplicações de ajuste de distribuições à precipitação.

2.1 DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Os dados de precipitação pluviométrica serão ajustados às distribuições: Normal, Exponencial, Weibull, Log-Normal e Gumbel apresentadas a seguir.

2.1.1 Distribuição Normal

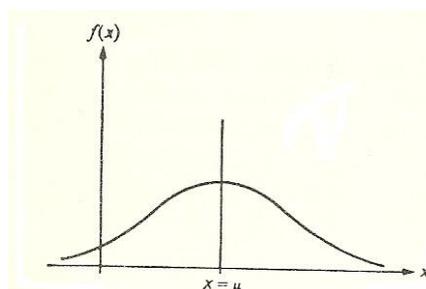
De acordo com Meyer (2001) uma variável aleatória X , que tem todos os valores reais $-\infty < x < \infty$, tem uma distribuição normal se sua fdp (função densidade de probabilidade) for da forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right), \quad -\infty < x < \infty. \quad (1)$$

A média μ e o desvio padrão σ devem satisfazer as seguintes condições $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$. Usaremos a seguinte notação: $N(\mu, \sigma^2)$ para a variável X que tem distribuição normal com média μ e desvio padrão σ .

A figura 1 mostra o gráfico dessa distribuição. Ele apresenta a forma de sino e é simétrico em relação à média μ .

Figura 1 – Distribuição Normal



Aspecto do gráfico da curva normal da variável aleatória X com média μ e desvio padrão σ .

Fonte: Meyer [(2001)]

2.1.2 Propriedades da Distribuição Normal

A distribuição normal cuja função está representada na figura 1 tem as propriedades:

- (a) A função f dada pela eq. (1) é uma fdp, pois $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.
- (b) O gráfico de f é simétrico em relação à reta $x = \mu$, de concavidade para baixo, quando $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \rightarrow 0$, assintoticamente e $x = \mu \pm \sigma$ são os pontos de inflexão.
- (c) A variável aleatória X tem esperança $E(X) = \mu$ e variância $V(X) = \sigma^2$.
- (d) Se X tiver distribuição $N(0, 1)$ ela será dita normal reduzida e é tabelada. Sempre que X tiver a distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, poderemos obter a forma reduzida pela adoção de uma função linear de X .

2.1.3 Distribuição Exponencial

Para Meyer (2001) uma variável aleatória contínua X , cujos valores são não negativos, terá uma distribuição exponencial com parâmetro $\alpha > 0$, se sua fdp for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Esta distribuição é muito utilizada na descrição de uma grande quantidade de fenômenos, como por exemplo, duração de componentes eletrônicos, aplicações na teoria da confiabilidade, etc. O gráfico dessa distribuição está representado na figura 2.

Figura 2 – Distribuição Exponencial

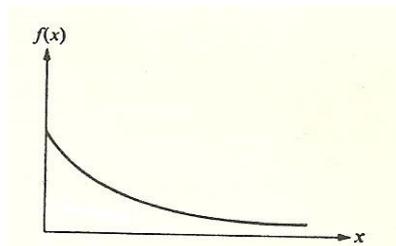


Gráfico da distribuição exponencial com parâmetro α .
Fonte: Meyer [(2001)]

2.1.4 Propriedades da Distribuição Exponencial

Algumas propriedades da distribuição exponencial estão descritas abaixo:

(a) A fd F (função distribuição) da distribuição exponencial é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

(b) O valor esperado de X é $E(X) = \frac{1}{\alpha}$ (4)

(c) A variância de X é $V(X) = \frac{1}{\alpha^2}$ (5)

(d) Considere quaisquer $s, t > 0$. Temos:

$$P(X > s+t | X > s) = P(X > t) = e^{-\alpha t} \quad (6)$$

A propriedade (6) é chamada de falta de memória. Dentre as distribuições contínuas, a exponencial é a única a possuir tal propriedade.

2.1.5 Distribuição Gama

De acordo com Meyer (2001) a função gama, denotada por Γ , é assim definida:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \text{ definida para } p > 0. \quad (7)$$

Ou ainda: $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$ (8)

Seja X uma variável aleatória contínua, que tome somente valores não negativos.

Diremos que X tem uma distribuição de probabilidade gama, se sua fdp for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\Gamma(r)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

Esta distribuição depende de dois parâmetros, $r \geq 1$ e $\alpha > 0$. O gráfico de $f(x)$ é mostrado na figura 3 para alguns valores de r e $\alpha > 1$.

Figura 3 – Distribuição Gama

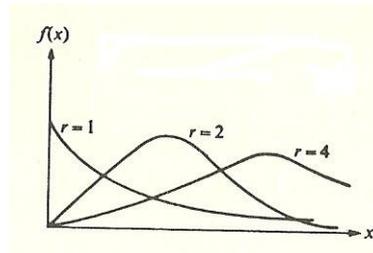


Gráfico da fdp de gama para $r = 1$, $r = 2$, $r = 4$ e $\alpha > 1$.
Fonte: Meyer [(2001)]

2.1.6 Propriedades da Distribuição Gama

Algumas propriedades da distribuição gama estão apresentadas abaixo:

- (a) Se $r = 1$, a eq. (9) fica assim $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, mostrando que a distribuição exponencial é um caso particular da distribuição gama.
- (b) Sendo r um número inteiro, a fd da distribuição gama pode ser expressa em termos da fd tabelada da distribuição de Poisson da seguinte maneira:

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} e^{-\alpha x} (\alpha x)^k / k!, \quad x > 0. \quad (10)$$

- (c) Se X tiver uma distribuição gama, dada pela eq. (2.8) teremos a esperança igual a:

$$E(X) = \frac{r}{\alpha} \text{ e variância } V(X) = \frac{r}{\alpha^2}. \quad (11)$$

2.1.7 Distribuição Weibull

Seja T uma variável aleatória contínua, com valores não negativos. De acordo com Meyer (2001) T tem uma distribuição de Weibull, se sua fdp for dada por:

$$f(t) = (\alpha\beta)t^{\beta-1}e^{-\alpha t^\beta}, \quad t > 0 \quad (12)$$

A figura 4 mostra alguns casos particulares da fdp dessa distribuição.

Figura 4 – Distribuição de Weibull

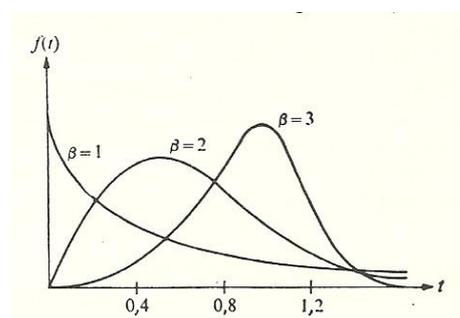


Gráfico da distribuição de Weibull para $\alpha = 1$ e $\beta = 1, 2, 3$.
 Fonte: Meyer [(2001)]

A distribuição exponencial é um caso particular da distribuição de Weibull, pois obteremos a distribuição exponencial se fizermos $\beta = 1$ na eq. (12).

Se a variável T tiver uma distribuição de Weibull, com fdp dada pela eq. (12), teremos:

$$E(T) = \alpha^{-1/\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right), \text{ para a esperança de } T \text{ e a variância será dada por:} \quad (13)$$

$$V(T) = \alpha^{-2/\beta} \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right\}, \text{ sendo } \Gamma(\alpha) \text{ a função gama para } \alpha > 0. \quad (14)$$

2.1.8 Distribuição Log-Normal

De acordo com Walpole (2009) o nome da distribuição sugere que o logaritmo de uma variável com distribuição Log-Normal com parâmetros μ e σ tem uma distribuição Normal com média μ e desvio padrão σ . Esta relação significa que dados provenientes de uma distribuição Log-Normal podem ser analisados segundo uma distribuição Normal se trabalhar com o logaritmo dos dados ao invés dos valores originais.

Uma variável aleatória X tem distribuição Log-Normal se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \text{ com } x > 0. \quad (15)$$

Sendo μ é a média e $\sigma > 0$ é o desvio padrão.

A figura 5 mostra o gráfico da distribuição Log-Normal.

Figura 5 – Distribuição Log-Normal

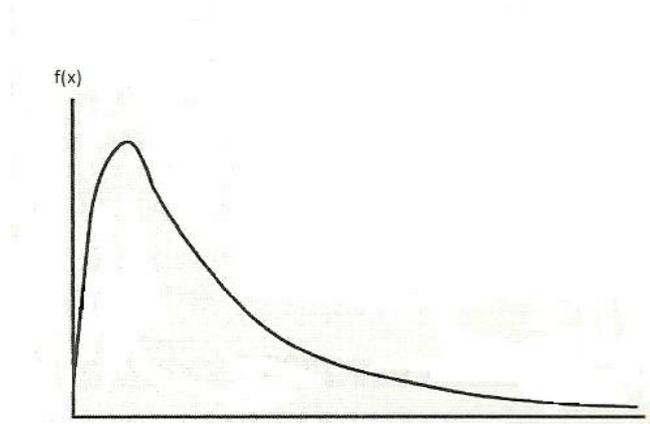


Gráfico da distribuição Log-Normal.
Fonte: Walpole [(2009)]

A distribuição Log-Normal da variável aleatória X , tem esperança e variância dada respectivamente por:

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right); \quad (16)$$

$$V(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1). \quad (17)$$

2.1.9 Distribuição Gumbel

De acordo com o Hann (1994) essa distribuição também é chamada de distribuição do valor Extremo e surge quando se toma o logaritmo de uma variável com a distribuição Weibull.

Uma variável Y tem distribuição Gumbel se tiver função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{x-\mu}{\sigma} - \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right], \text{ sendo } x \in R, \sigma = 1/\delta \text{ e } \mu = \log(\alpha). \quad (18)$$

O gráfico a seguir mostra a distribuição Gumbel com parâmetros $\mu = 0,5$ e $\sigma = 2$.

Figura 6 – Distribuição Gumbel

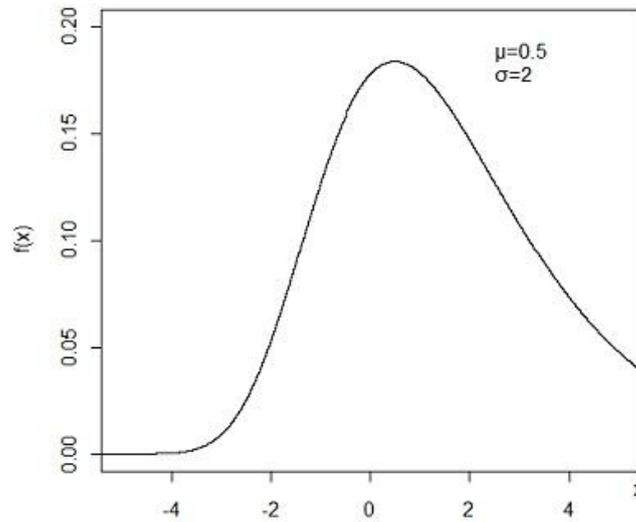


Gráfico da distribuição Gumbel para $\mu = 0,5$ e $\sigma = 2$.
 Fonte: Hann [(2001)]

Seja X uma variável aleatória com distribuição Gumbel. O valor esperado e a variância são dados, respectivamente, por:

$$E(X) = \mu - v\sigma; \quad (19)$$

$$V(X) = \frac{\pi^2 \sigma^2}{6}, \text{ sendo que } v = 0,5772\dots, \text{ denominada constante de Euler.} \quad (20)$$

2.2 TESTES DE ADERÊNCIA

Os testes de aderência permitem verificar se uma determinada distribuição de probabilidade aderiu aos dados de uma série, isto é, se a função dessa distribuição consegue explicar o comportamento da série.

2.2.1 Teste Qui-quadrado

De acordo com Campos (1976) é um teste amplamente utilizado em análise de dados provenientes de experimentos onde o interesse está em observar frequências em pelo menos duas categorias. É uma prova de aderência útil para comprovar se a frequência observada difere significativamente da frequência esperada. Esta geralmente especificada por uma distribuição de probabilidade.

O teste exige:

- Quando o número de categorias é igual a $k = 2$ as frequências esperadas devem ser superiores a 5;
- Quando $k > 2$, o teste que Qui-Quadrado não deve ter mais de 20% das frequências esperadas abaixo de 5 e nenhuma frequência esperada igual a zero;
- Para evitar frequências esperadas pequenas deve-se combinar as categorias (juntar) até que as exigências sejam atendidas;
- Caso as categorias sejam combinadas em apenas duas e mesmo assim as exigências não tenham sido atendidas, deve-se utilizar o Teste Binomial;
- As observações devem ser independentes.

Após se definir a hipótese nula como a proporção esperada definida pela distribuição de probabilidade em questão, testamos se as frequências observadas diferem muito das frequências esperadas da seguinte forma:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}, \text{ em que: } \begin{cases} k = \text{número de categorias (classes)} \\ o_i = \text{frequência observada na categoria } i \\ e_i = \text{frequência esperada na categoria } i \end{cases} \quad (21)$$

Quanto maior o valor de χ^2 maior será a probabilidade de as frequências observadas estarem divergindo das frequências esperadas. A estatística do teste χ^2 tem distribuição Qui-quadrado com v graus de liberdade onde:

$v = k - 1$ se as frequências esperadas puderem ser calculadas sem precisar estimar os parâmetros distribucionais;

$v = k - m - 1$ se as frequências esperadas só puderem ser calculadas após a estimação dos m parâmetros populacionais.

2.2.2 Teste de Kolmogorov-Smirnov

De acordo com Campos (1976) Kolmogorov-Smirnov é um teste que avalia a concordância entre a distribuição observada da amostra e uma determinada distribuição teórica. Avalia se os dados amostrais se aproximam razoavelmente de uma determinada distribuição. Para isso utilizamos a função distribuição acumulada observada, compara-se com a teórica, determina-se o ponto em que estas distribuições mais divergem, e testamos se essa divergência é aleatória ou não.

O teste exige que os dados devam seguir ao menos uma escala ordinal.

Seja $F_o(X)$ uma distribuição teórica acumulada e $S_n(X)$ uma distribuição observada em uma amostra de n observações (distribuição empírica). Encontra-se a seguir o maior valor das diferenças entre $F_o(X)$ e $S_n(X)$, ou seja,

$$D = \text{máx} |F_o(X) - S_n(X)| \quad (22)$$

Compara-se o valor observado com o valor crítico (tabelado). Na tabela associa-se o valor observado com o seu valor-p.

2.2.3 Teste de Lilliefors

De acordo com Campos (1976) Lilliefors é um teste usado para testar normalidade, sendo que a média e a variância não são previamente especificadas, mas sim estimadas através dos dados da amostra. A aderência da distribuição observada à distribuição teórica é verificada com base na distribuição padronizada, ou seja, distribuição com média zero e desvio padrão 1.

O procedimento de teste é análogo ao Kolmogorov-Smirnov, porém utiliza uma tabela própria e leva em consideração as observações anteriormente citadas.

2.3 APLICAÇÕES DE AJUSTES DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

A distribuição gama foi utilizada por Moreira et al. (2010) para definir diferentes níveis de probabilidade de precipitação na região de Nova Maringá-MT. Para avaliação do ajuste entre a distribuição de frequências associadas aos valores observados da precipitação nos vários períodos temporais analisados e a distribuição Gama, foi realizado o teste de qualidade do ajuste de Kolmogorov-Smirnov, com 5% de significância.

A estimativa da precipitação pluvial mensal em Itapetinga e Vitória da Conquista-BA, foi testada por Murta et al. (2005) usando o modelo de Distribuição Gama. As distribuições ajustadas foram para estimar as probabilidades de chuva para cada mês, comparando-as aos valores observados. Para verificar o ajuste dos dados estimados aos observados, utilizou o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov (2003), cujo resultado foi significativo ($p < 0,01$).

A estimativa da precipitação provável com 75% de probabilidade nos períodos decendiais no estado do Paraná, fazendo uso das distribuições Gama e Log-normal foi feita por Sampaio et al. (2006). Os testes de Qui-quadrado e Kolmogorov-Smirnov, ambos com 5% de significância, foram utilizados para verificar a aderência das distribuições às condições

pluviométricas decendiais do estado do Paraná. Os resultados mostraram que a distribuição Gama ajustou-se mais adequadamente às condições pluviométricas do estado nos períodos estudados.

A série de dados históricos de 1972 a 1996, de precipitação de uma estação climatológica situada no município de Cascavel-PR, foi analisada por Longo et al. (2006) visando contribuir com o planejamento de atividades que são influenciadas pela quantidade de água precipitada, em que os resultados condicionam decisões de ordem tática ou estratégica em atividades como agropecuária, construção civil e turismo. Utilizaram as distribuições de log-normal, distribuição de Gumbel e o método de desagregação de chuvas da CETESB para determinar a equação de chuvas intensas. Essa equação pode ser utilizada em projetos de obras hidráulicas.

Dados de 982 estações meteorológicas situadas no estado de Minas Gerais foram utilizados por Catalunha et al. (2002) para analisar as distribuições de probabilidade exponencial, gama, log-normal (a dois e três parâmetros), normal e Weibull. Os testes, não paramétricos, de qui-quadrado e de Kolmogorov-Smirnov foram utilizados para verificar a aderência das probabilidades estimadas aos dados observados. Foram considerados, para fins de análise, a precipitação diária e total para os períodos decendiais e mensais de janeiro a dezembro. Para os valores diários de precipitação, observou-se a superioridade do ajustamento da distribuição Weibull, com exceção dos decêndios do período seco, em que predominou a distribuição exponencial. No caso dos valores totais de precipitação para o período seco, houve predominância da distribuição exponencial; no período chuvoso, prevaleceram às distribuições Weibull, exponencial, gama e normal, respectivamente; esta última aparecendo somente em dois meses.

O ajuste de séries históricas de radiação solar global mensal no período de 1970 a 2007, em Mossoró, RN, foi verificado por Batista et al. (2012) a sete modelos de distribuição densidade de probabilidade Normal, Log-Normal, Beta, Gama, Log-Pearson (Tipo III), Gumbel e Weibull, através dos testes Kolmogorov-Smirnov, Qui-quadrado, Cramer Von-Mises, Anderson Darling, Kuiper, e do Logaritmo da Máxima Verossimilhança. Verificou-se a superioridade do ajustamento das distribuições Gumbel, Weibull e Log-Normal, quando comparada com as outras seis distribuições. No geral, os critérios de ajuste concordaram com a aceitação da hipótese de aderência a distribuição, no entanto, deve-se salientar que o teste de Kolmogorov-Smirnov apresenta um nível de aprovação de uma distribuição sob teste muito

elevado, o que gera certa insegurança aos critérios do teste, mas neste estudo como os dados são aproximadamente simétricos ele é o mais recomendado.

Os modelos de distribuições Exponenciais e o de Weibull foram utilizados por Souza (2012) para comparar qual deles ajustaria melhor aos dados de precipitação pluviométrica mensal da cidade de Campina Grande-PB, no período de 1978 a 1997. Observou-se que para os meses de outubro, novembro e dezembro a distribuição exponencial poderia ser adequada para modelar os dados. No entanto, quando se usou o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov para avaliar a adequacidade do modelo, observou-se que o mesmo não se ajustou, da mesma forma, para os demais meses. Assim, foi proposta uma nova abordagem usando a distribuição de Weibull. O teste de aderência indicou que o modelo de Weibull se adequou bem para ajustar os dados.

Séries históricas de dados pluviométricos de 74 cidades do Estado do Pará foram utilizadas por Souza et al. (2012) obtidas no Sistema de Informações Hidrológicas da Agência Nacional de Águas-ANA, com o objetivo de obtenção das relações de intensidade, duração e frequência de precipitação pluvial para o Estado do Pará, utilizando-se a metodologia da desagregação da chuva de 24h. Os dados de precipitação máxima foram ajustados ao modelo de distribuição de Gumbel. Após a verificação da aderência dos dados à distribuição de Gumbel para cada série de duração de chuva realizaram-se as estimativas das chuvas máximas para períodos de retorno de 5, 10, 20, 50, 100, 1.000 e 10.000 anos. A análise de aderência da distribuição de Gumbel foi feita pelo teste de Kolmogorov-Smirnov.

3 MATERIAL E MÉTODOS

Este capítulo mostra a origem da série de dados em estudo e os procedimentos: da análise descritiva realizada, das distribuições de probabilidade ajustadas as observações e dos testes utilizados para verificar a qualidade dos ajustes.

3.1 A SÉRIE

O conjunto de dados utilizados neste trabalho são observações obtidas na Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG.

O município de Patrocínio está situado na latitude 18° 56' S e longitude 46° 59' W e altitude média 972 metros acima do mar. O clima da região segundo a classificação Koppen é Aw, tropical com verão quente e úmido e inverno mais frio e seco (Mendes, 2001).

As observações referem-se às precipitações pluviiais diárias expressas em altura de lâmina d'água (mm), abrangendo o período de janeiro de 2000 a dezembro de 2012, num total de 13 anos.

Os registros das precipitações diárias foram agrupados em registros mensais e a série foi constituída de 156 valores mensais sucessivos de precipitação pluviométrica; seus valores estão expostos nas tabelas 5, 6 e 7 do Apêndice A.

3.2 ANÁLISE DESCRITIVA

A análise descritiva da série de precipitações pluviométricas da Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, foi feita com a média mensal, total mensal e máximo mensal. Para isto foi construído histogramas, box-plot e foram calculadas as estatísticas: média, mediana, moda, mínimo, máximo, desvio padrão, assimetria e curtose.

Esta análise descritiva inicial objetivou explorar visualmente as informações da série para detectar comportamentos e verificar a presença de observações atípicas, ou seja, esta etapa teve a finalidade de conhecer as variáveis analisadas. Autores como Bussab e Morettin (2002) e Triola (2009) enfatizam a necessidade e a importância da análise descritiva das variáveis analisadas antes de qualquer análise inferencial, pois, fatos como a presença de valores atípicos, o tipo de comportamento da variável analisada e até mesmo os erros de

digitação em bancos de dados, podem distorcer os resultados da análise inferencial, provocando conclusões incorretas ou não precisas.

Todas as análises descritivas foram realizadas nos programas Estatística 8 e Excel 2010, seguindo procedimentos básicos descritos em Bussab e Morettin (2002).

3.3 AJUSTE DAS DISTRIBUIÇÕES

Após as análises descritivas as variáveis média mensal, total mensal e máximo mensal da série de precipitações pluviométricas foram submetidas ao ajuste das seguintes distribuições: Normal eq. (1), Exponencial eq. (2), Gama eq. (9), Gumbel eq. (18), Log-Normal eq. (15) e Weibull eq. (12), utilizando as metodologias descritas em Mayer (2001), Walpole (2009) e Hann (1994). Os ajustes foram feitos nos softwares Estatística 8 e Excel 2010, utilizando a metodologia dos mínimos quadrados.

3.4 TESTE DE AJUSTE

A verificação da qualidade das distribuições de probabilidades em explicar o comportamento dos dados observados foi realizada por meio dos testes de aderência.

Na literatura estatística, conforme se encontra em Campos (1976), os principais testes de aderência utilizados são: qui-quadrado eq. (21), Kolmogorov-Smirnov eq. (22) e Lilliefors, este, mais rigoroso que o Kolmogorov-Smirnov e adequado para estimativa de amostras. Portanto, no presente trabalho foi utilizado, em cada variável analisada, pelo menos um dos testes acima citados. Nota-se no item 2.3 que estes testes são amplamente utilizados em aplicações práticas de ajustes de distribuições.

A aplicação dos testes de aderência foram feitos nos softwares Estatística 8 e Excel 2010, utilizando, como referência, o valor-p de 5%.

Nos testes de χ^2 os graus de liberdade para a obtenção dos valores tabelados (valores de referência) estão em função dos parâmetros estimados para a distribuição e do número de classes conforme descrito em 2.2.1. Para o teste Kolmogorov-Smirnov, descrito em 2.2.2, a estatística $D(tab)$ é obtida em função do número de dados ajustados por meio da equação $D(tab) = 1,21/\sqrt{n}$.

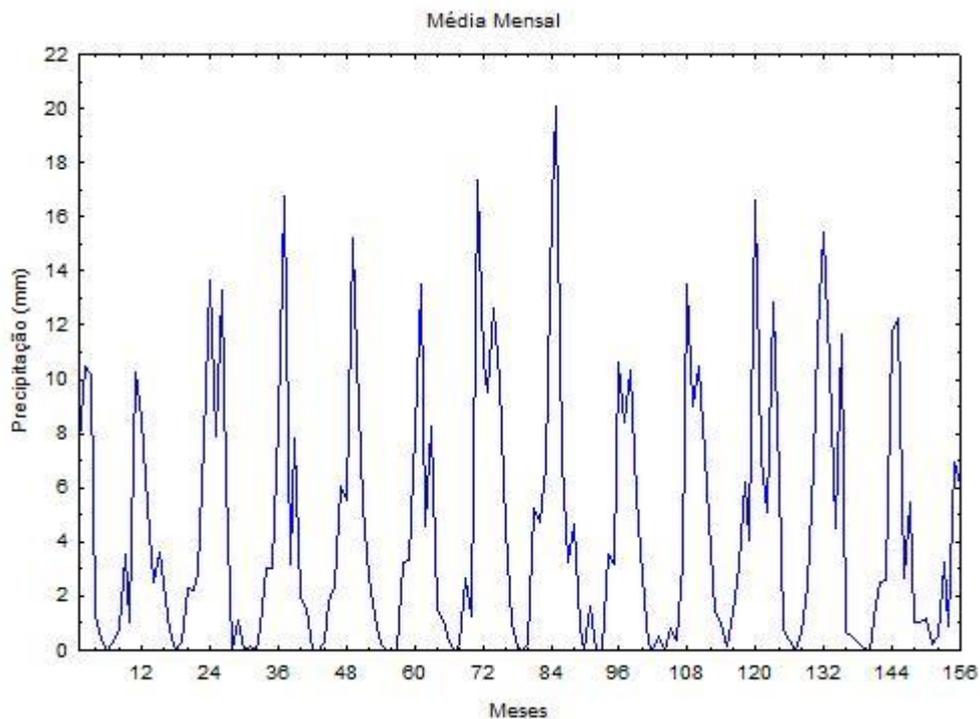
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com o estudo da série de precipitações pluviométricas da Fazenda Esmeril, com a descrição geral da série, análise descritiva, teste normalidade, ajuste das distribuições Exponencial, Gama, Weibull, Log-normal, Gumbel e testes de aderência para as variáveis média mensal, total mensal e máximo mensal.

4.1 DESCRIÇÃO GERAL DA SÉRIE

A série em estudo, com a média mensal de precipitações pluviométricas, mostrada na figura 7, não apresenta tendência, apenas sazonalidade com periodicidade anual e com alta variabilidade.

Figura 7 – Comportamento da série: média mensal



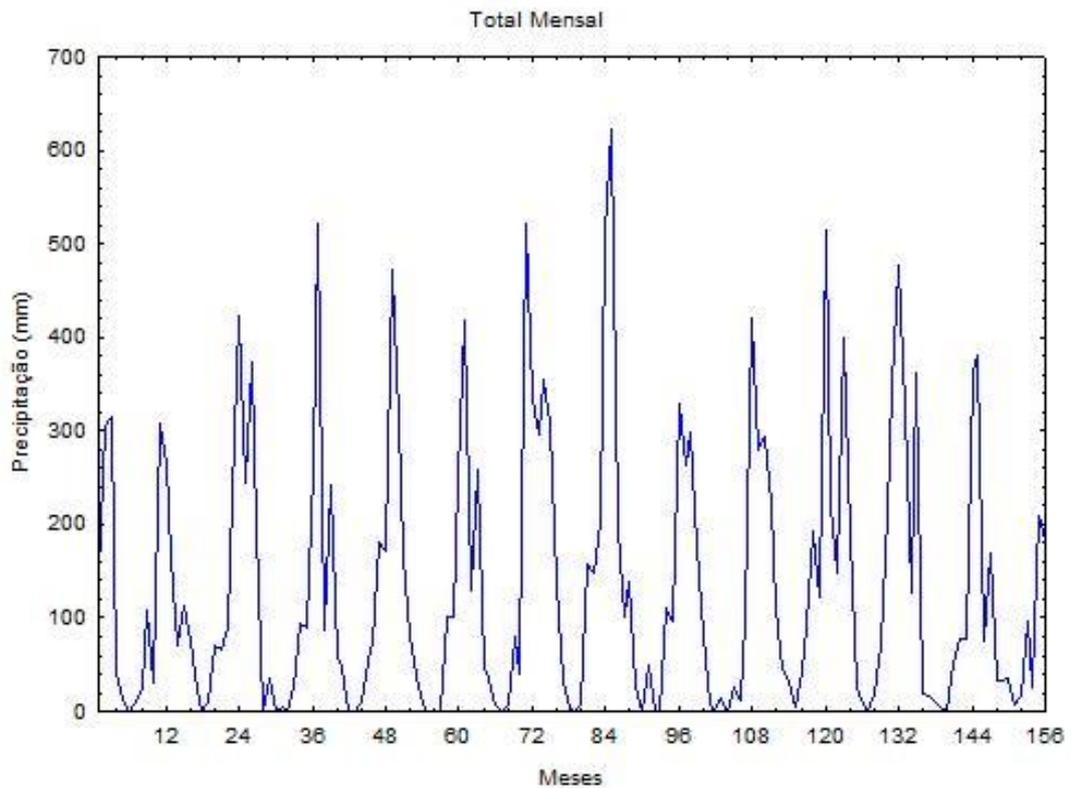
Representação gráfica, das médias mensais, da série de precipitações pluviométricas, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Fonte: O autor.

A média mensal de precipitações pluviométricas mostrada na figura 7 e o total mensal mostrado na figura 8 são visualmente muito semelhantes, justificando-se pela proporcionalidade de cálculo existente entre essas variáveis. As semelhanças são quanto à

sazonalidade, periodicidade e variabilidade, diferenciando apenas pelos valores absolutos assumidos pelas observações da variável.

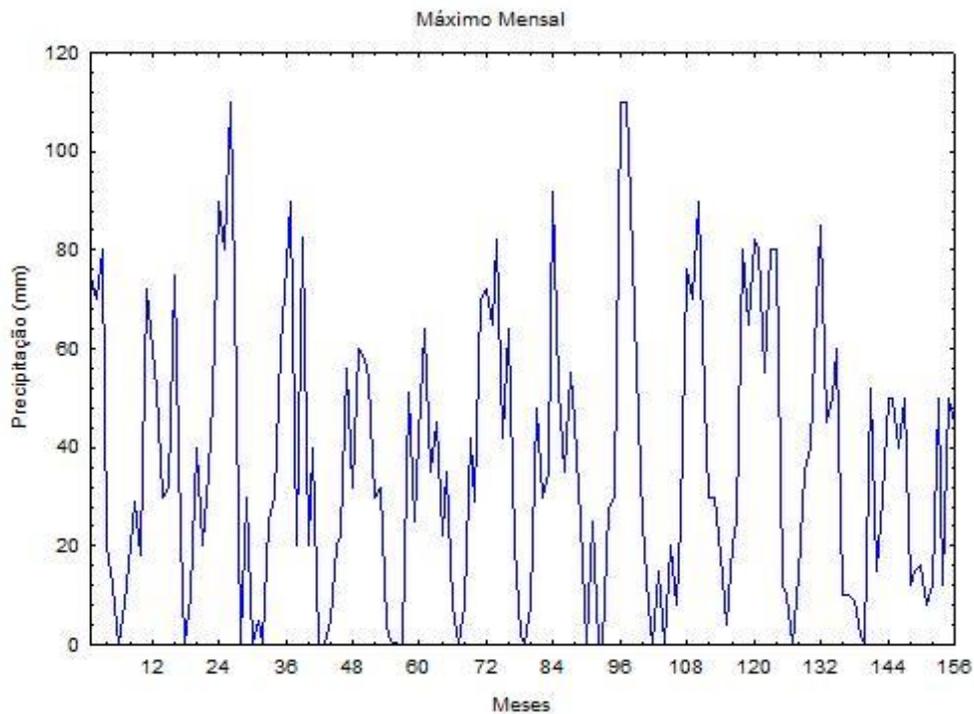
Figura 8 – Comportamento da série: total mensal



Representação gráfica, dos totais mensais, da série de precipitações pluviométricas, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.
Fonte: O autor.

A figura 9 mostra que o comportamento geral da série em estudo, com os máximos mensais de precipitações pluviométricas, de forma análoga as variáveis média e total mensal, esta série não apresenta tendência, apenas sazonalidade com periodicidade anual e com grande variabilidade. Entretanto, visualmente o comportamento geral da precipitação máxima mensal se diferencia da média mensal observado na figura 7 e do total mensal mostrado na figura 8.

Figura 9 – Comportamento da série: máximo mensal



Representação gráfica, dos máximos mensais, da série de precipitações pluviométricas, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.
Fonte: O autor.

4.2 ANÁLISE DESCRITIVA E TESTE DE NORMALIDADE

A tabela 1 mostra algumas estatísticas que descrevem a série de precipitações pluviométricas analisada. Como esperado, pela proporcionalidade existente entre as variáveis, os coeficientes de variação das precipitações média e total são valores próximos e respectivamente iguais a 105,8% e 106,6%, mostrando alta variabilidade da série para estas variáveis. O máximo também tem alta variabilidade, porém 26,3% menor que a média e o total de precipitações. O fato das variáveis apresentarem alta variabilidade indica que a média aritmética pode não representar adequadamente a variável Triola (2009) e também pode ser um primeiro indicativo de que a distribuição de probabilidade normal não é adequada para realizar as estimativas, portanto, conforme argumenta Campos (1976) métodos paramétricos podem não ser adequados na análise inferencial.

Com relação ao grau da variabilidade dos atributos Gomes (1990) apresenta uma classificação geral, com base em produções de culturas agrícolas, e considerada que atributos que apresentem coeficiente de variação (CV) acima de 40% como sendo de alta variabilidade,

contudo, Garcia (1989) e Amaral et al. (1997) argumentam que essa classificação deve ser utilizada com cautela e ressalva, pois, a variabilidade inerente a cada atributo faz com que essas faixas tenham amplitudes diferenciadas, ou seja, para cada atributo avaliado as faixas de classificação de CV devem ser calculadas e adaptadas para uso, pois podem sofrer alterações significativas de valores.

A precipitação média tem 50% dos valores abaixo de 2,77 mm, sendo o máximo dessa variável 20,05 mm, no caso do total, esses valores são multiplicados por 30, 31, 28 ou 29, dependendo do mês avaliado. A variável máximo mensal tem metade dos valores abaixo de 30,00 mm, sendo 110 mm a quantidade máxima de chuva diária durante o período analisado.

A tabela 1 mostra ainda que o menor valor das três variáveis analisadas é 0 mm e este é o valor que aparece com maior frequência na série de precipitações pluviométricas, isto significa que, em vários anos ocorreu pelo menos um mês sem chuva na Fazenda Esmeril.

Observando que os coeficientes de assimetria na tabela 1 são todos positivos e ainda $\text{moda} < \text{mediana} < \text{média}$, a distribuição dos dados da série de precipitações pluviométricas é assimétrica positiva, ou assimétrica à direita. A curtose mostra que a curva de distribuição de frequências é leptocúrtica para as variáveis média mensal e total mensal, mas para a variável máximo mensal a distribuição de frequências é platicúrtica. Deve-se lembrar de que esta classificação é feita pelo Software Statistica em relação ao 0 (zero), isto é, curtose maior que zero distribuição leptocúrtica, curtose igual a zero distribuição mesocúrtica e curtose menor que zero distribuição platicúrtica Statistica 7 (2007).

Resultados de análise descritiva semelhantes aos deste trabalho são relatados em Ferraz (1999), Araujo et al. (2009) e Oliveira e Guimarães (2012).

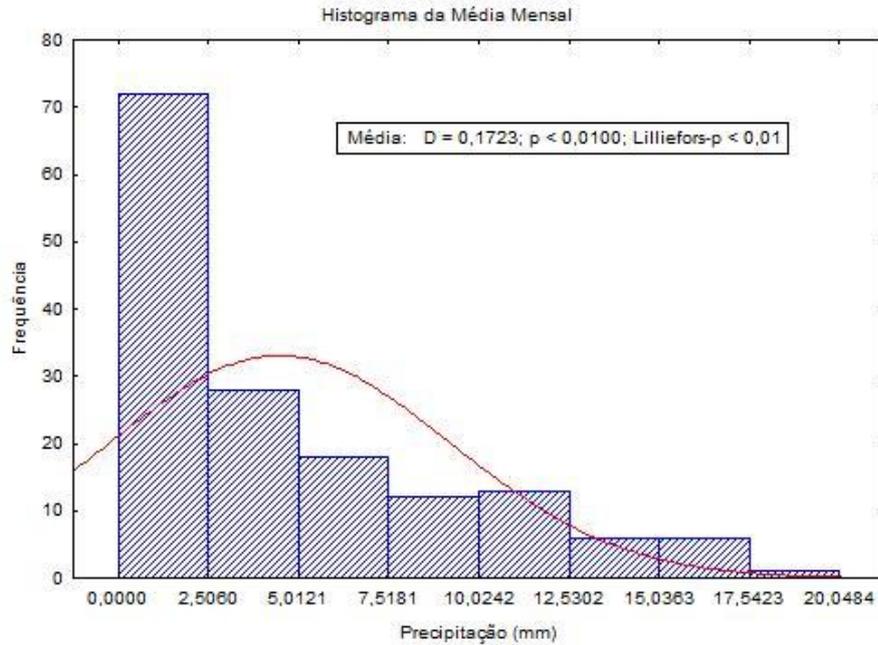
Tabela 1. Estatística Descritiva para precipitação média mensal, total mensal e Máximo mensal para a Fazenda Esmeril – Patrocínio-MG								
Prec.	Estatísticas							
	Média	Mediana	Moda	Min.	Max.	D. P.	Ass.	Cur.
Média	4,46	2,77	0,00	0,00	20,05	4,72	1,13	0,47
Total	135,05	83,00	0,00	0,00	621,50	144,00	1,18	0,63
Máximo	36,67	30,00	0,00	0,00	110,00	28,59	0,54	-0,61

Prec. – Precipitação, Min. – Mínimo, Max. – Máximo, D.P. – Desvio Padrão, Ass. – Assimetria, Cur. - Curtose

Fonte: O autor.

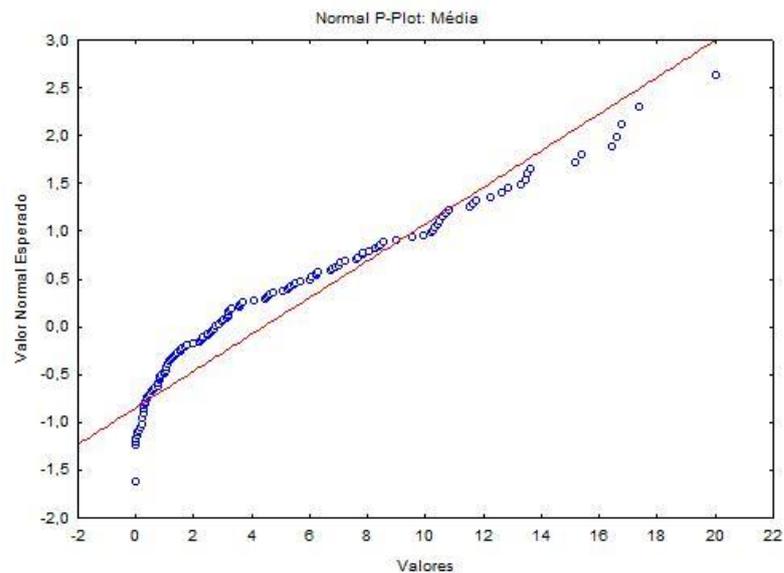
As figuras 10 e 11 mostram o teste de normalidade para a média mensal da série de precipitações pluviométricas em estudo.

Figura 10 – Histograma da média mensal



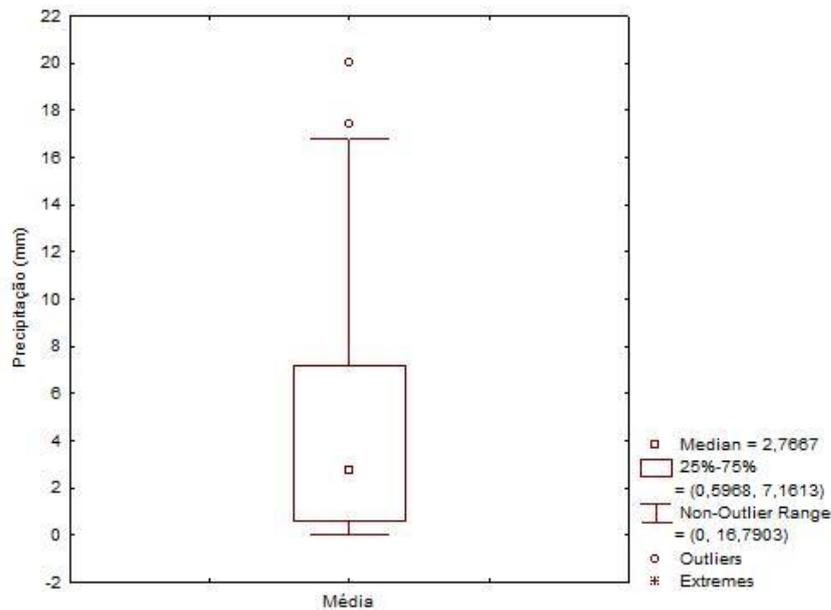
Histograma da série de precipitações pluviométricas, médias mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.
Fonte: O autor.

Figura 11 – P-P-Plot: média mensal



Representação gráfica da normalidade da série de precipitações pluviométricas, médias mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.
Fonte: O autor.

Figura 12 – Box-plot média mensal



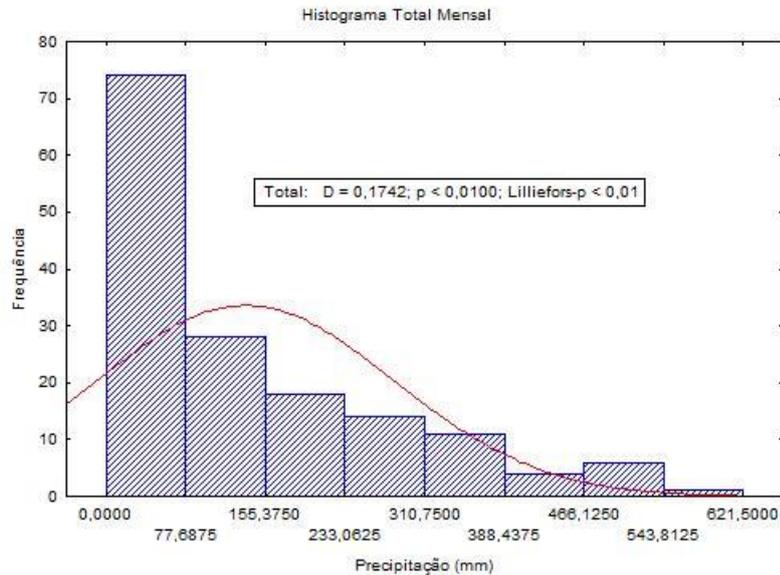
Box-plot da série de precipitações pluviométricas, médias mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.
Fonte: O autor.

A figura 10 mostra que a série de precipitações pluviométricas, variável média mensal, não apresenta normalidade dos dados, pois o histograma da precipitação média observada não tem os seus valores simétricos em relação à média da distribuição que é 4,46 mm. O valor-p para os testes de Kolmogorov-Smirnov e Lilliefors menores que 1% mostrados na figura 10 e o gráfico papel de probabilidade (PPLOT) com valores observados se afastando da reta normal mostrados na figura 11, confirmam a rejeição da normalidade dos dados.

A figura 12 mostra que 50% das médias das precipitações mensais estão abaixo de 2,77 mm e que 75% das precipitações médias estão abaixo de 7,16 mm. A referida figura mostra ainda que acima de 16,79 mm tem dois valores, os quais são chamados de “outliers” ou valores discrepantes e que, para a série de precipitações em estudo, são os valores que estão no intervalo de 16,79 a 26,85 mm. Os outliers da série de precipitações em estudo são precisamente 17,38 mm média de precipitação de novembro de 2005 e 20,05 mm correspondente a média de precipitação de janeiro de 2007, conforme tabela 5 do apêndice A. Vale ressaltar que conforme argumentam Morettin e Tolo (2005), valores discrepantes em amostras de dados podem comprometer as análises inferenciais, ou seja, podem comprometer o modelo estatístico que descreve a variável, entretanto, a decisão de eliminação ou substituição desses valores devem ser feitas após análise criteriosa dessas observações.

As figuras 13 e 14 mostram o teste de normalidade para o total mensal.

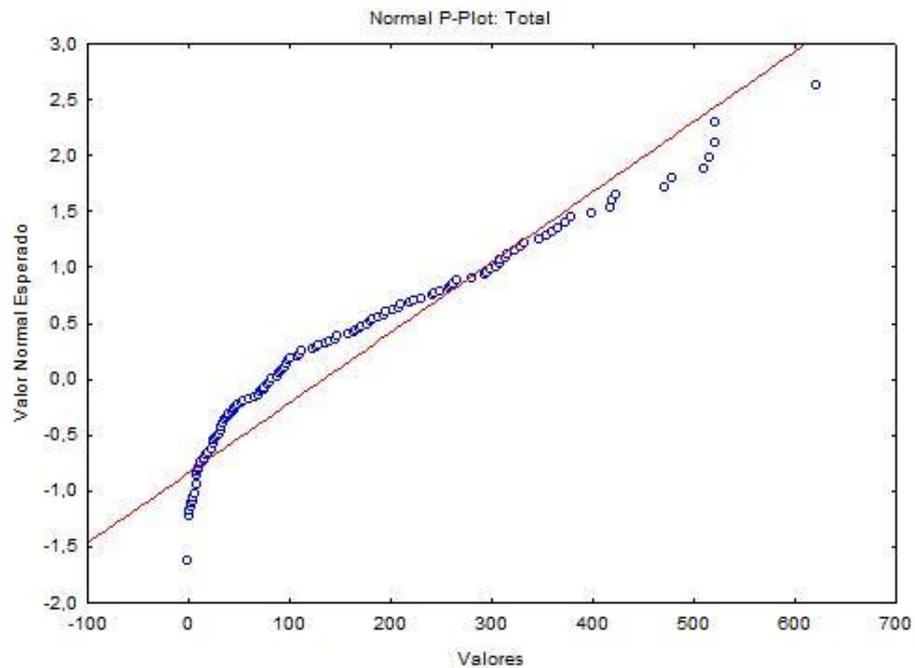
Figura 13 – Histograma do total mensal



Histograma da série de precipitações pluviométricas, totais mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Fonte: O autor.

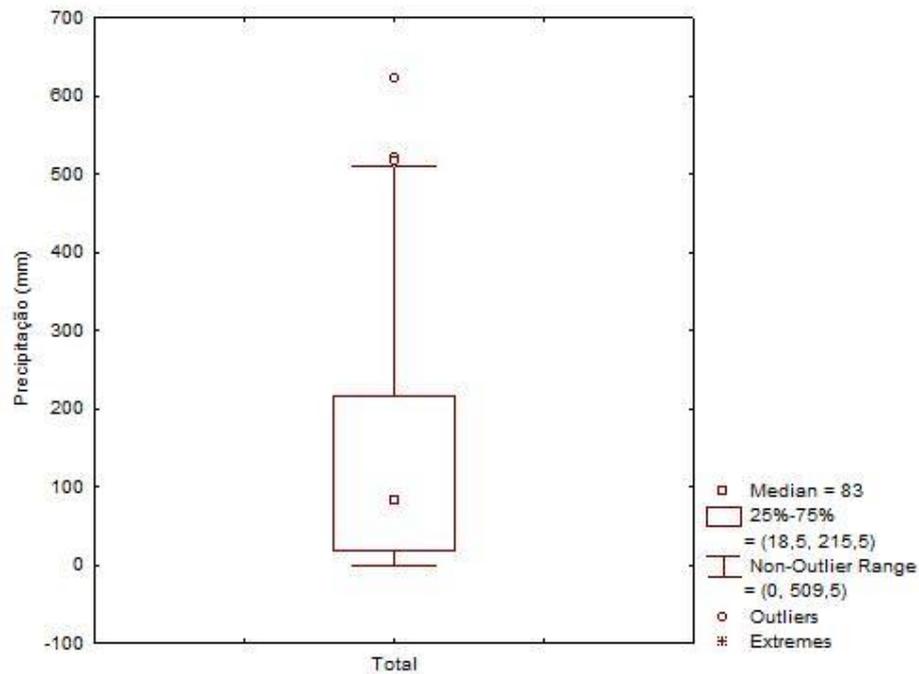
Figura 14 – P-P-Plot: total mensal



Representação gráfica da normalidade da série de precipitações pluviométricas, totais mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Fonte: O autor.

Figura 15 – Box-plot total mensal



Box-plot da série de precipitações pluviométricas, totais mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

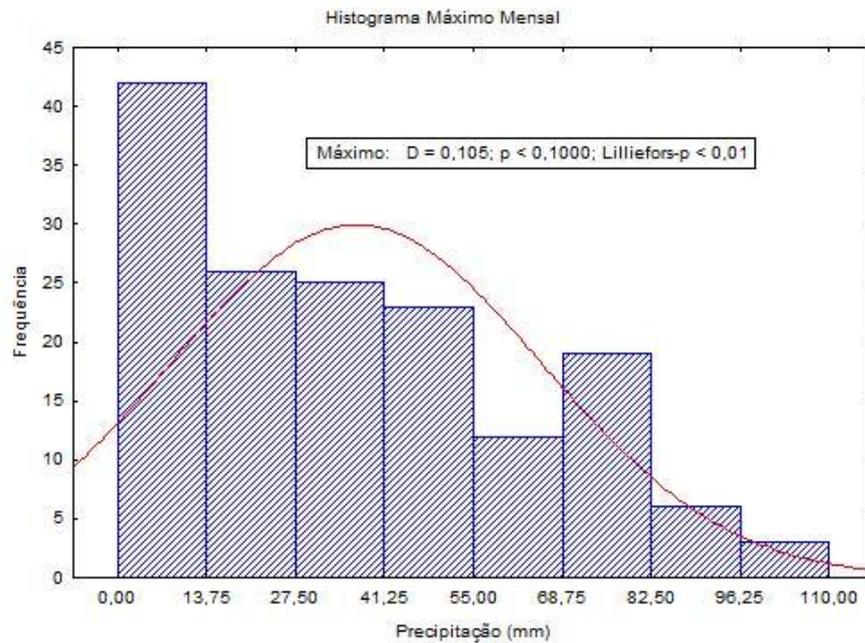
Fonte: O autor.

De forma análoga a variável média, a figura 13 mostra que a série de precipitações pluviométricas, para a variável total mensal, não apresenta normalidade dos dados, pois a curva normal não tem os seus valores de precipitação total, simétricos em relação à média da distribuição que é 135,05 mm, além do valor-p para os testes de Kolmogorov-Smirnov e Lilliefors menores que 1%, indicando a rejeição da normalidade dos dados. Este resultado é confirmado na figura 14 em os dados de precipitação total não seguem a linha da distribuição normal.

A figura 15 mostra que 50% dos totais das precipitações mensais estão abaixo de 83 mm e que 75% das precipitações totais estão abaixo de 215,5 mm. A figura 15 mostra ainda que acima de 509,5 mm tem alguns valores “outliers” e que para a série de precipitações em estudo, variável total mensal, são os valores que estão no intervalo de 509,5 a 806,5 mm, mostrados na tabela 6 do apêndice A.

As figuras 16, 17 e 18 mostram o teste de normalidade para a variável máximo mensal da série de precipitações em estudo.

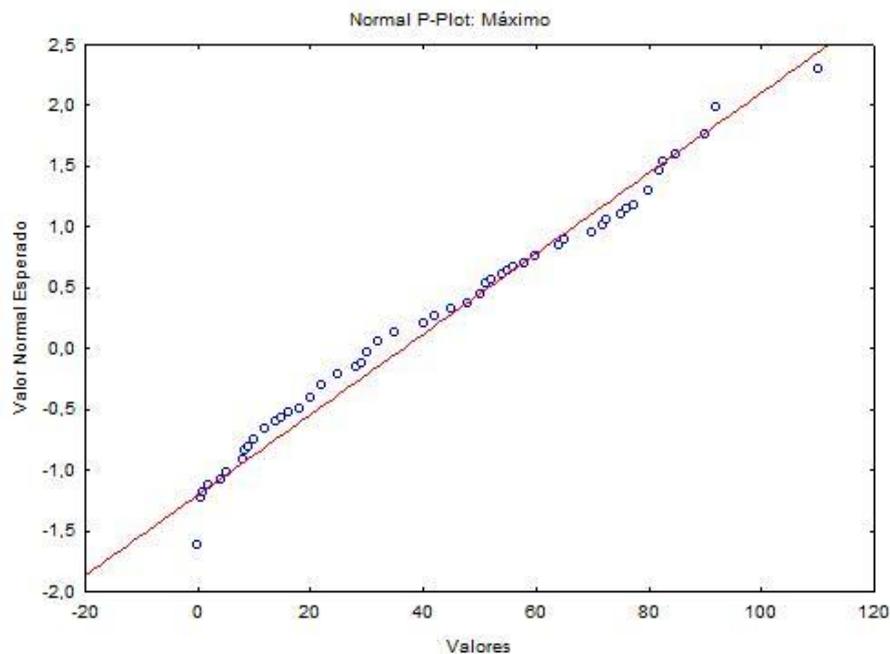
Figura 16 – Histograma do máximo mensal



Histograma da série de precipitações pluviométricas, máximos mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Fonte: O autor.

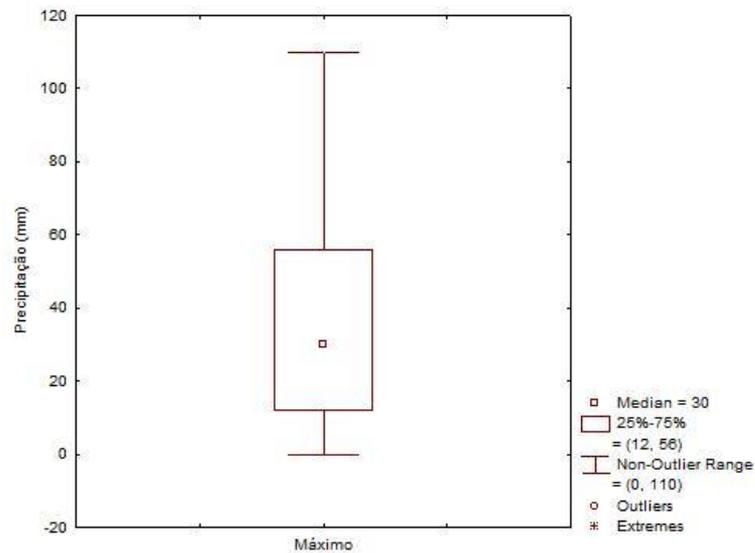
Figura 17 – P-P-Plot: máximo mensal



Representação gráfica da normalidade da série de precipitações pluviométricas, totais mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Fonte: O autor.

Figura 18 – Box-plot máximo mensal



Box-plot da série de precipitações pluviométricas, máximos mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012. Fonte: O autor.

As figuras 16 e 17 mostram que a série de precipitações pluviométricas, variável máximo mensal, não apresenta normalidade dos dados, da mesma forma que as variáveis média e total mensal vistas anteriormente. O teste Kolmogorov-Smirnov apresenta valor-p menor que 10%, podendo-se pensar em aceitar a normalidade dos dados. No entanto observa-se que o teste de Lilliefors apresenta valor-p menor que 1%, rejeitando a hipótese de normalidade, que pode ser visualizada na figura 17 onde os dados não seguem a linha da distribuição normal.

A figura 18 mostra que 50% dos totais das precipitações mensais estão abaixo de 30 mm e que 75% das precipitações totais estão abaixo de 56 mm por mês. Esta figura mostra ainda que esta variável não possui valores “outliers” e nem valores extremos.

Esses resultados mostram que nenhuma das variáveis da série de precipitações pluviométricas em estudo, média mensal, total mensal ou máximo mensal tem distribuição normal. Cabe ressaltar que nos trabalhos desenvolvidos por Sampaio et al. (2006); Souza (2012) e Souza et al. (2012) também não foram observadas distribuição normal da precipitação pluviométrica. Este fato pode ser generalizado para qualquer série de precipitações pluviométricas, pois as precipitações são sempre positivas, não apresentando, a simetria da curva normal.

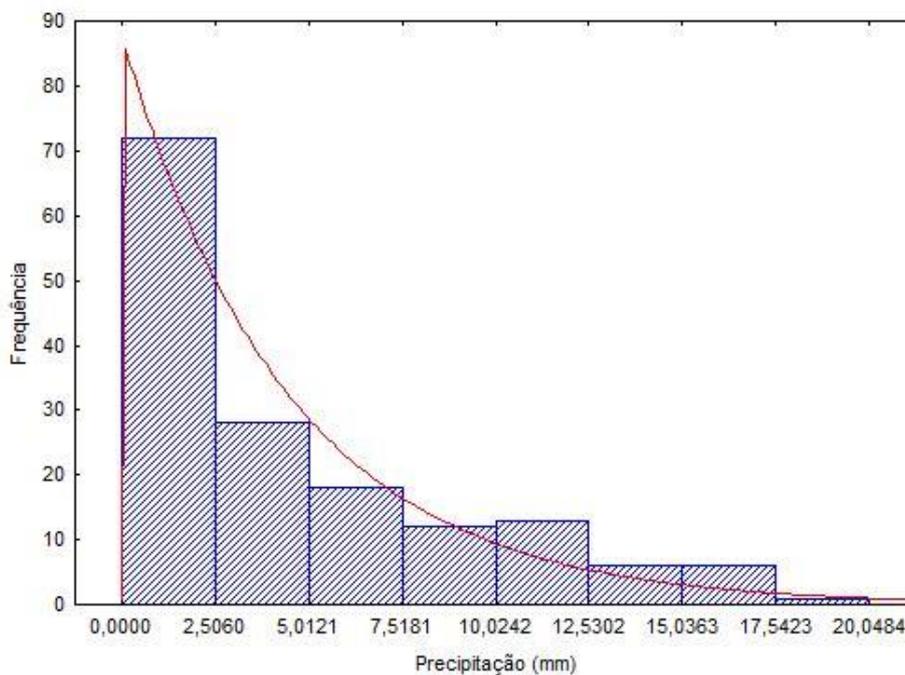
4.3 AJUSTE DAS DISTRIBUIÇÕES: EXPONENCIAL, GAMA, WEIBULL, LOG-NORMAL E GUMBEL

No item anterior verificou-se que os dados da série de precipitações pluviométricas em estudo não ajustaram a distribuição normal. Nos próximos itens serão verificados os ajustes para as distribuições: Exponencial, Gama, Weibull, Log-Normal e Gumbel, para as três variáveis em estudo: média mensal, total mensal e máximo mensal.

4.3.1 Média mensal

A figura 19 mostra a proposta de ajuste da distribuição Exponencial para a precipitação média mensal da Fazenda Esmeril.

Figura 19 – Histograma da média mensal – Distribuição Exponencial



Histograma da série de precipitações pluviométricas, médias mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Fonte: O autor.

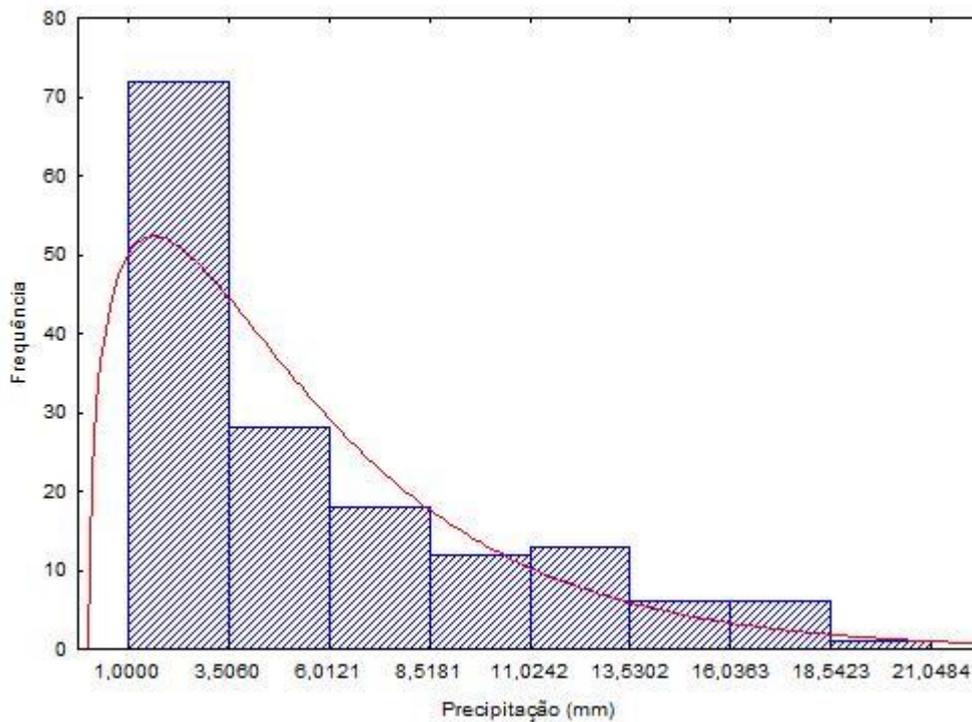
A eq. (2) dá a função densidade de probabilidade geral da distribuição exponencial. Para a média mensal, o parâmetro para essa distribuição de probabilidade foi $\alpha = 0,2242$, o que gerou a curva ajustada ao histograma, conforme Figura 19, daí obteve-se:

$$f(x) = 0,2242e^{-0,2242x} \quad (23)$$

A média estimada de precipitações da série em estudo, considerando a distribuição exponencial e obtida de acordo com a eq. (4) é igual a 4,46 mm e a variância eq. (5) é igual a 19,91 mm².

A figura 20 mostra a proposta de ajuste da distribuição gama para a série de precipitações para a média mensal da Fazenda Esmeril.

Figura 20 – Histograma da média mensal – Distribuição Gama



Histograma da série de precipitações pluviométricas, médias mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Fonte: O autor.

A eq. (9) mostra $f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(r)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x}$, que é a função densidade de probabilidade

da distribuição gama. Podemos observar na figura 20 a função densidade de probabilidade da distribuição gama escrita da forma:

$$f(z) = (z/b)^{c-1} e^{-(z/b)} [1/b\Gamma(c)] \quad (24)$$

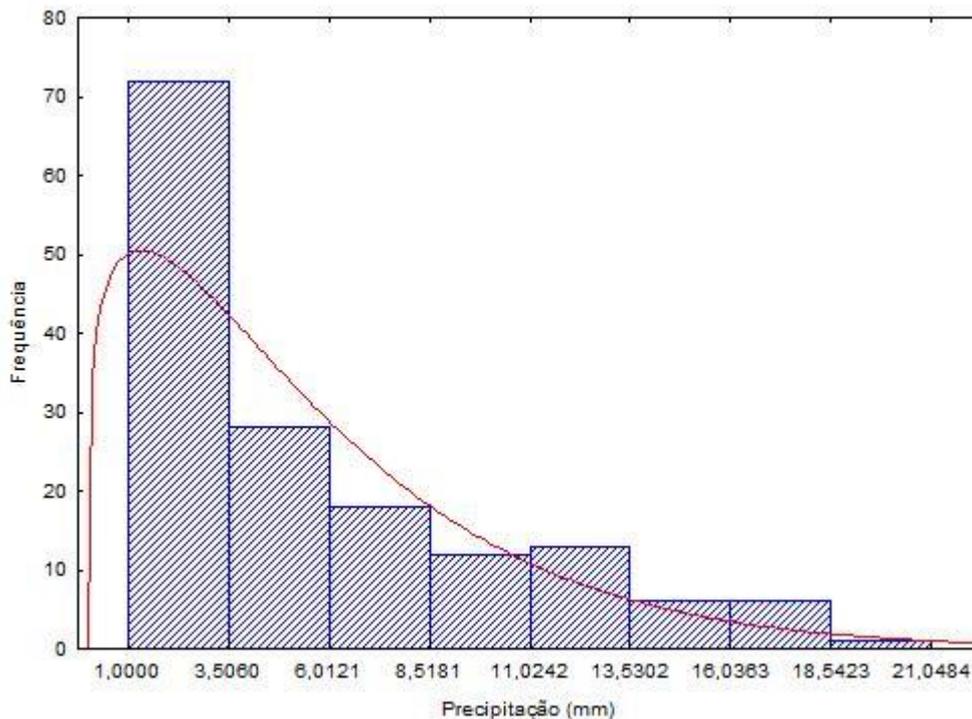
Comparando a eq. (9) com a eq. (24), podemos afirmar que os parâmetros: $r = c$ e $\alpha = 1/b$. Sendo $b = 3,8306$; $c = 1,4258$ e $z = x + 1$, encontramos:

$$f(z) = 0,2945325 \cdot (0,2610z)^{0,4258} \cdot e^{-0,2610 \cdot z} \quad (25)$$

A eq. (25) é a função densidade de probabilidade da distribuição gama ajustada aos dados observados. Para a série em estudo, de acordo com a eqs. (7) e (9) a média de precipitações pluviométricas para essa distribuição é igual 5,46 mm e variância 20,93 mm².

As figuras 21, 22 e 23 mostram respectivamente a proposta de ajuste das distribuições de Weibull, Log-normal e Gumbel para a série de precipitações pluviométricas em estudo.

Figura 21 – Histograma da média mensal – Distribuição de Weibull



Histograma da série de precipitações pluviométricas, médias mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Fonte: O autor.

A eq. (12) representa a função densidade de probabilidade da distribuição de Weibull

$$f(t) = (\alpha\beta)t^{\beta-1}e^{-\alpha t^\beta}, t > 0.$$

A figura 21 mostra a função densidade de probabilidade dessa distribuição escrita assim:

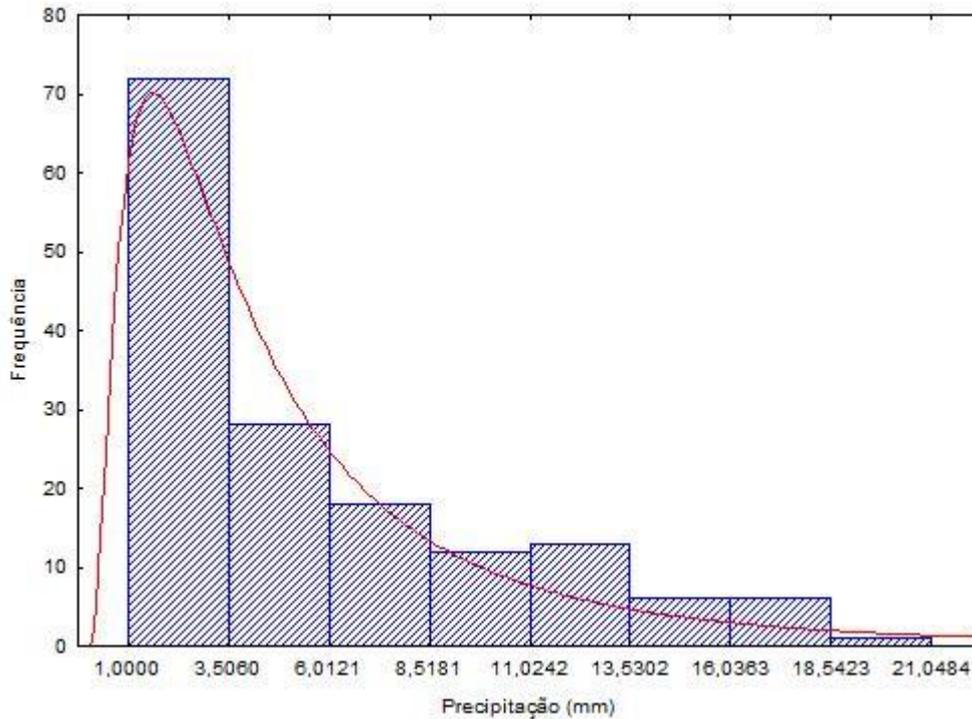
$$f(x) = c/b[(x-\theta)/b]^{(c-1)} e^{-[(x-\theta)/b]^c}, \text{ sendo } \theta < x, b > 0, c > 0 \text{ e } x = t + 1. \quad (26)$$

Para calcular os valores de α , β e θ , compara-se a eq. 12 com a eq. 26, encontrando: $\theta = 0$, $\alpha = 0,1203$ e $\beta = 1,2008$. A partir desses valores a função densidade de probabilidade da distribuição de Weibull ajustada é:

$$f(t) = 0,1445t^{0,2008} e^{-0,1203t^{1,2008}}, t > 0. \quad (27)$$

Através das eqs. (13), (14) e da função ajustada acima pode-se calcular a média e a variância para a série de precipitações pluviométricas em estudo, para a variável média mensal, que neste caso, são respectivamente 5,486476 mm e 21,0574 mm².

Figura 22 – Histograma da média mensal – Distribuição Log-normal



Histograma da série de precipitações pluviométricas, médias mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.
Fonte: O autor.

A função densidade de probabilidade da distribuição log-normal, mostrada na eq. (15)

é a função $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, com $x > 0$. A figura 22 mostra o gráfico da

função densidade de probabilidade da distribuição log-normal $f(y)$, sendo $y = x+1$.

$$f(y) = 1/[y\sigma(2\pi)^{1/2}] e^{\{-[\log(y) - \mu]^2/2\sigma^2\}}, \text{ sendo: } 0 < x < \infty, \mu > 0, s > 0. \quad (28)$$

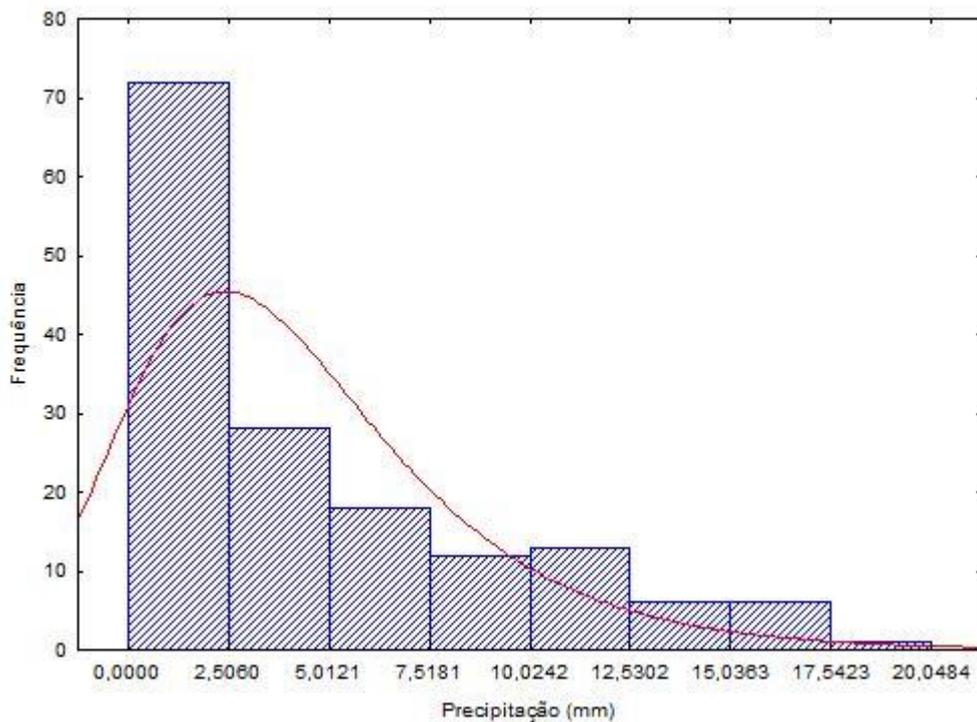
Os parâmetros μ e σ , observados no gráfico acima, são respectivamente iguais a 1,3076 e 0,9144.

Então a função densidade de probabilidade da distribuição log-normal ajustada fica assim:

$$f(y) = \frac{1}{2,2921y} \exp\left[\frac{-(\log(y)-1,3076)^2}{1,6723}\right], \text{ com } y > 0. \quad (29)$$

As eq. (16) e (17) permitem calcular a média e a variância da série de precipitações pluviométricas em estudo que são respectivamente iguais a 5,62 mm e 41,24 mm².

Figura 23 – Histograma da média mensal – Distribuição Gumbel



Histograma da série de precipitações pluviométricas, médias mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.
Fonte: O autor.

A eq. (18) mostra a função densidade de probabilidade da distribuição gumbel,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{x-\mu}{\sigma} - \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right], \text{ com } x \in R. \text{ A figura 23 mostra a função densidade}$$

de probabilidade dessa distribuição escrita da seguinte forma:

$$f(x) = 1/b \exp(-(x-a)/b) \exp[-e^{-(x-a)/b}], \text{ sendo } -\infty < x < \infty \text{ e } b > 0. \quad (30)$$

Comparando as funções das eq. (18) e (30) e observando os parâmetros do gráfico da figura 23, temos que $\sigma = b = 3,1685$, $\mu = a = 3,4062$ e $z = x + 1$. Estes valores permitem determinar a função densidade de probabilidade da distribuição gumbel ajustada.

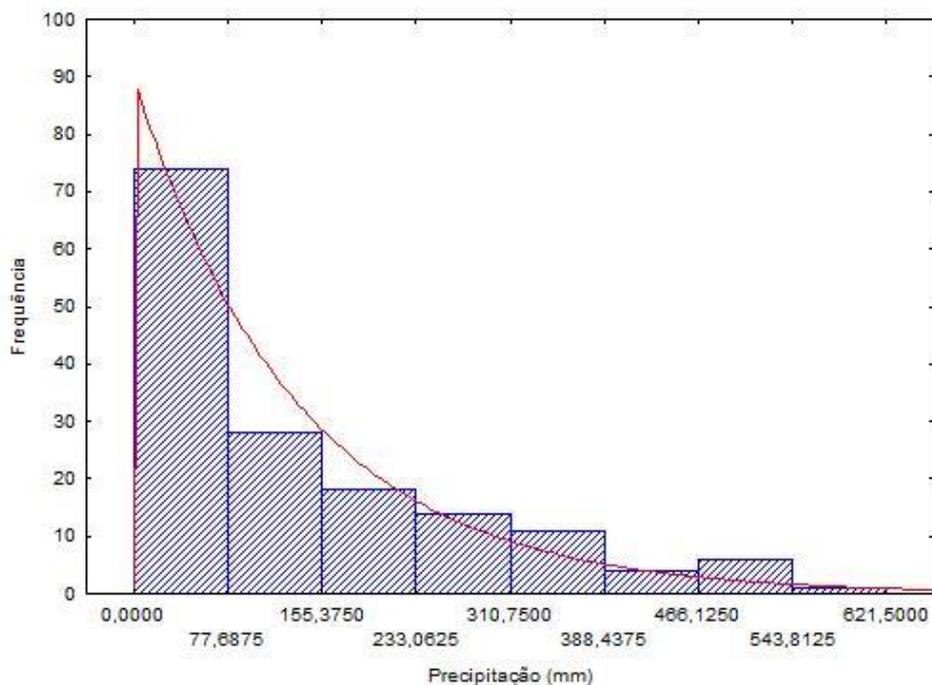
$$f(z) = \frac{1}{3,1685} \exp \left[-\frac{z-3,4062}{3,1685} - \exp \left(-\frac{z-3,4062}{3,1685} \right) \right], \text{ com } z \in R. \quad (31)$$

De acordo com as eqs. (19) e (20), a série de precipitações pluviométricas em estudo, variável média mensal, para a função ajustada tem média igual a 1,58 mm e a variância 16,51 mm².

4.3.2 Total mensal

Neste item vamos mostrar as propostas de ajuste das distribuições: exponencial, gama, Weibull, log-normal e gumbel para o total mensal, respectivamente nas figuras 24, 25, 26, 27 e 28.

Figura 24 – Histograma do total mensal – Distribuição Exponencial



Histograma da série de precipitações pluviométricas, totais mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Fonte: O autor.

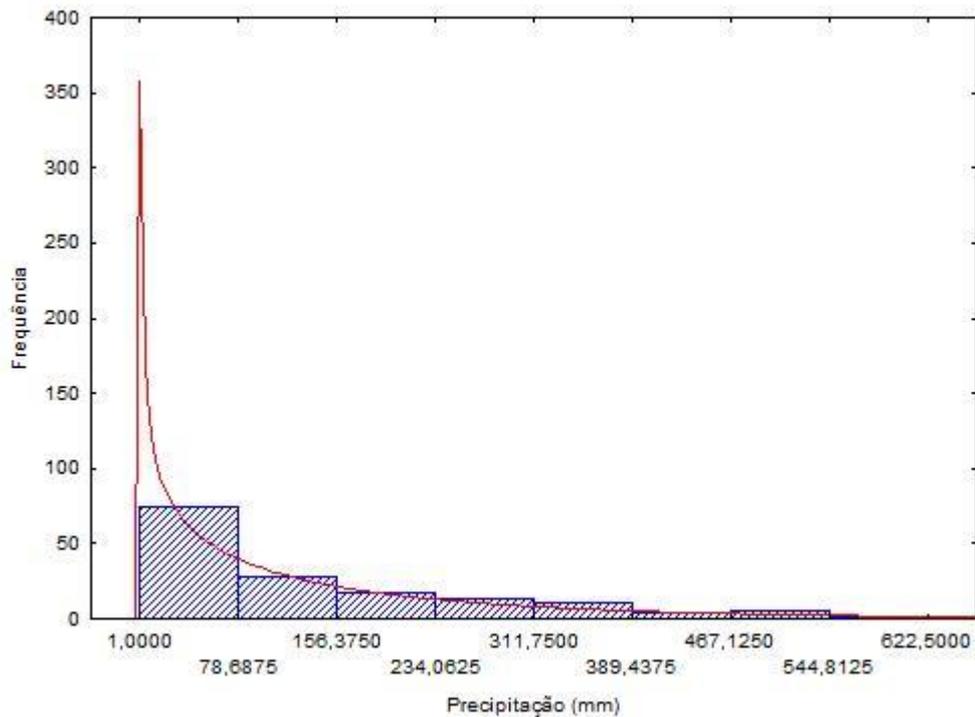
Na eq. (2) temos a função densidade de probabilidade da distribuição exponencial, $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, sendo $x > 0$.

A figura 24 mostra o histograma e o gráfico da distribuição exponencial para a variável total mensal com $\alpha = 0,0074$, daí:

$$f(x) = 0,0074e^{-0,0074x}, \text{ sendo } x > 0. \quad (32)$$

A eq. (32) é a função densidade de probabilidade ajustada da distribuição exponencial para a variável total mensal da série de precipitações pluviométricas em estudo. A média da variável total mensal, dessa distribuição, de acordo com a eq. (4) é igual a 135,14 mm e a variância eq. (5) é igual a 18261,50 mm².

Figura 25 – Histograma do total mensal – Distribuição Gama



Histograma da série de precipitações pluviométricas, totais mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Fonte: O autor.

Na eq. (9) $f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(r)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x}$, é a função densidade de probabilidade da

distribuição gama. A figura 25 mostra a função densidade de probabilidade da distribuição gama escrita da forma:

$$f(z) = (z/b)^{c-1} e^{-(z/b)} [1/b\Gamma(c)] \quad (33)$$

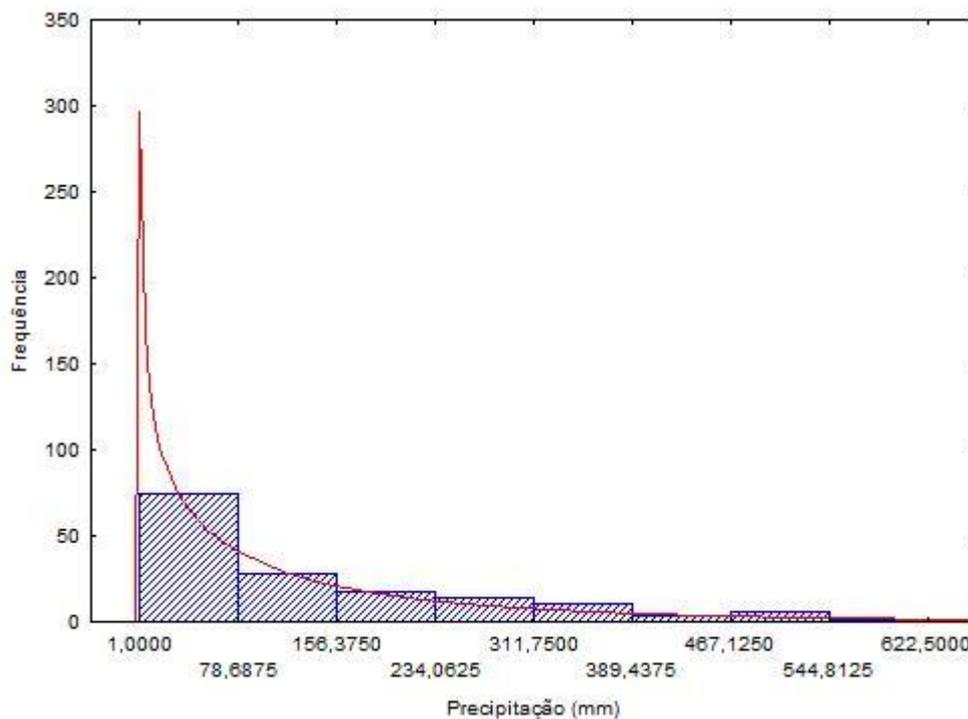
Comparando a eq. (9) com a eq. (33), podemos afirmar que os parâmetros: $r = c$ e $\alpha = 1/b$. Sendo $b = 219,956$; $c = 0,6186$ e $z = x + 1$, encontramos:

$$f(z) = 0,003139481 \cdot (0,004546z)^{-0,3814} \cdot e^{-0,004546z} \quad (34)$$

Na eq. (34) $f(z)$ é a função densidade de probabilidade da distribuição gama ajustada, para a variável total mensal da série em estudo.

De acordo com a eq. (11) a média de precipitações pluviométricas para essa distribuição, variável total mensal é igual 136,08 mm e variância 29.933,06 mm².

Figura 26 – Histograma do total mensal – Distribuição Weibull



Histograma da série de precipitações pluviométricas, totais mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.
Fonte: O autor.

A eq. (12) representa a função densidade de probabilidade da distribuição de Weibull

$$f(t) = (\alpha\beta)t^{\beta-1}e^{-\alpha t^\beta}, \quad t > 0.$$

Na figura 26 a função densidade de probabilidade dessa distribuição é apresentada da seguinte forma:

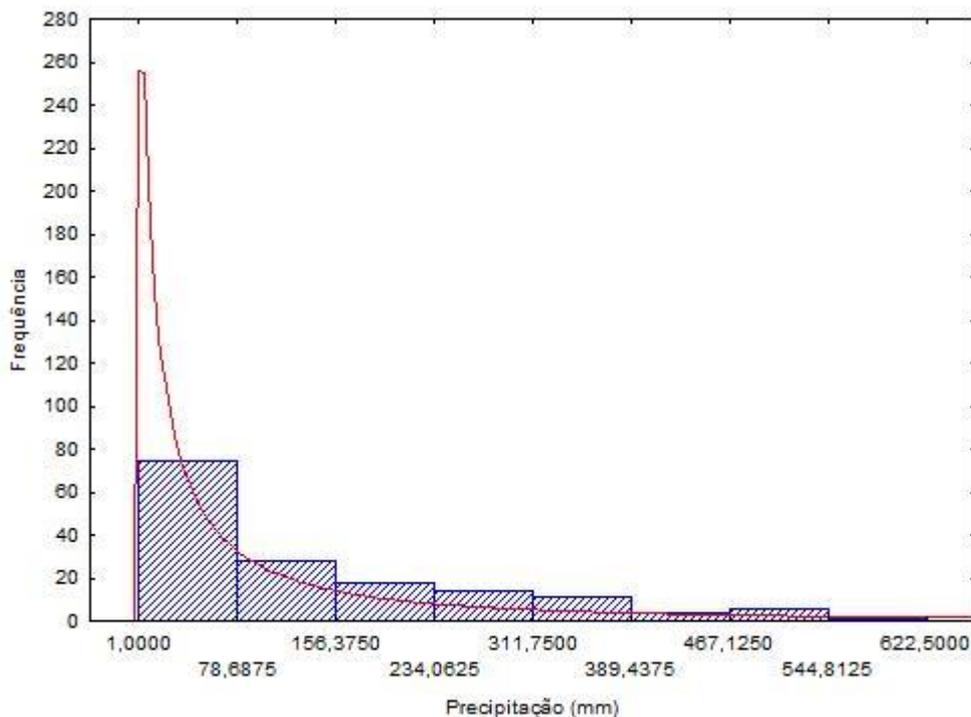
$$f(x) = c/b[(x-\theta)/b]^{(c-1)} e^{-[(x-\theta)/b]^c}, \quad \text{sendo } \theta < x, b > 0, c > 0 \text{ e } x = t + 1. \quad (35)$$

Para calcular os valores de α , β e θ , compara-se a eq. (12) com a eq. (35), encontrando: $\theta = 0$, $\alpha = 0,0297$ e $\beta = 0,7399$. A partir desses valores a função densidade de probabilidade da distribuição de Weibull ajustada é:

$$f(t) = 0,0220t^{-0,2601}e^{-0,0297t^{0,7399}}, t > 0. \quad (36)$$

Através das eqs. (13), (14) e da função ajustada acima se pode calcular a média e a variância para a série de precipitações pluviométricas em estudo, que neste caso, são respectivamente 139,5767 mm e 36754,86839 mm².

Figura 27 – Histograma do total mensal – Distribuição Log-normal



Histograma da série de precipitações pluviométricas, totais mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.
Fonte: O autor.

A função densidade de probabilidade da distribuição log-normal, mostrada na eq. (15)

é a função $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, com $x > 0$. A figura 27 mostra o gráfico da

função densidade de probabilidade da distribuição log-normal $f(y)$, para a variável total mensal, sendo $y = x+1$.

$$f(y) = 1/[y \sigma (2\pi)^{1/2}] e^{\{-[\log(y) - \mu]^2/2\sigma^2\}}, \text{ sendo: } 0 < x < \infty, \mu > 0, \sigma > 0. \quad (37)$$

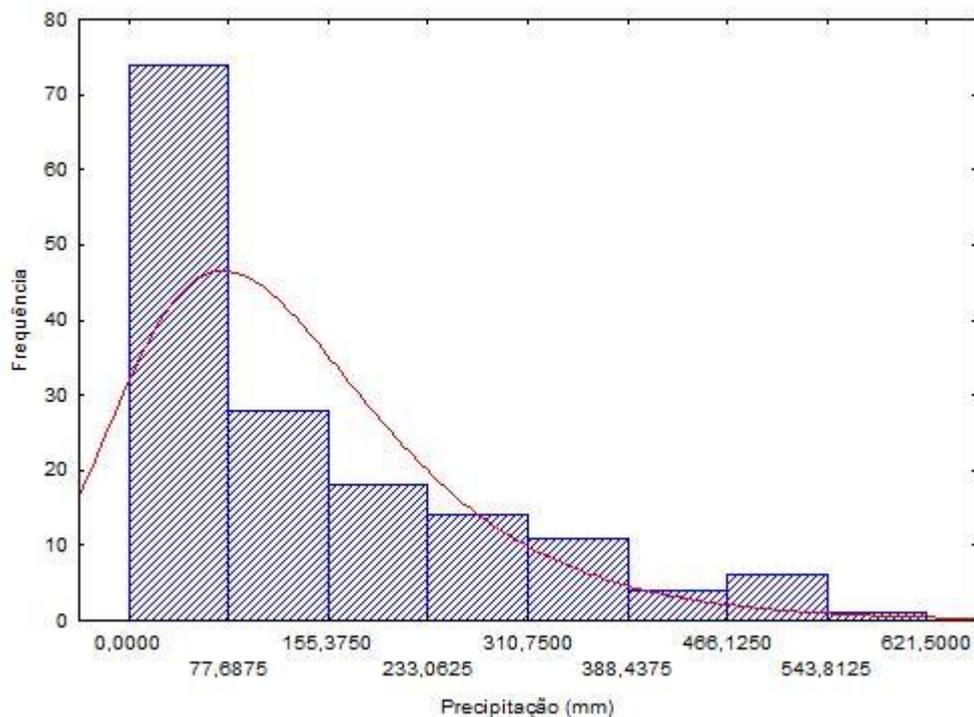
Os parâmetros μ e σ , observados no gráfico acima, são respectivamente iguais a 3,9187 e 1,8601.

Então a função densidade de probabilidade da distribuição log-normal ajustada é:

$$f(y) = \frac{1}{4,6626y} \exp\left[\frac{-(\log(y) - 3,9187)^2}{6,9199}\right], \text{ com } y > 0. \quad (38)$$

As eq. (16) e (17) permitem calcular a média e a variância da série de precipitações pluviométricas em estudo, variável total mensal, que são respectivamente iguais a 283,92 mm e 2.484.069,83 mm².

Figura 28 – Histograma do total mensal – Distribuição Gumbel



Histograma da série de precipitações pluviométricas, totais mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Fonte: O autor.

Na eq. (18) a função densidade de probabilidade da distribuição gumbel é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{x-\mu}{\sigma} - \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right], \text{ com } x \in \mathbb{R}. \text{ A figura 28 mostra a função densidade}$$

de probabilidade dessa distribuição da seguinte forma:

$$f(x) = 1/b \exp(-(x-a)/b) \exp[-e^{-(x-a)/b}], \text{ sendo } -\infty < x < \infty \text{ e } b > 0. \quad (39)$$

Comparando as funções das eq. (18) e (39) e observando os parâmetros do gráfico da figura 28, temos que $\sigma = b = 95,8388$, $\mu = a = 72,6837$.

Estes valores permitem determinar a função densidade de probabilidade da distribuição gumbel ajustada. A partir da equação 18 temos:

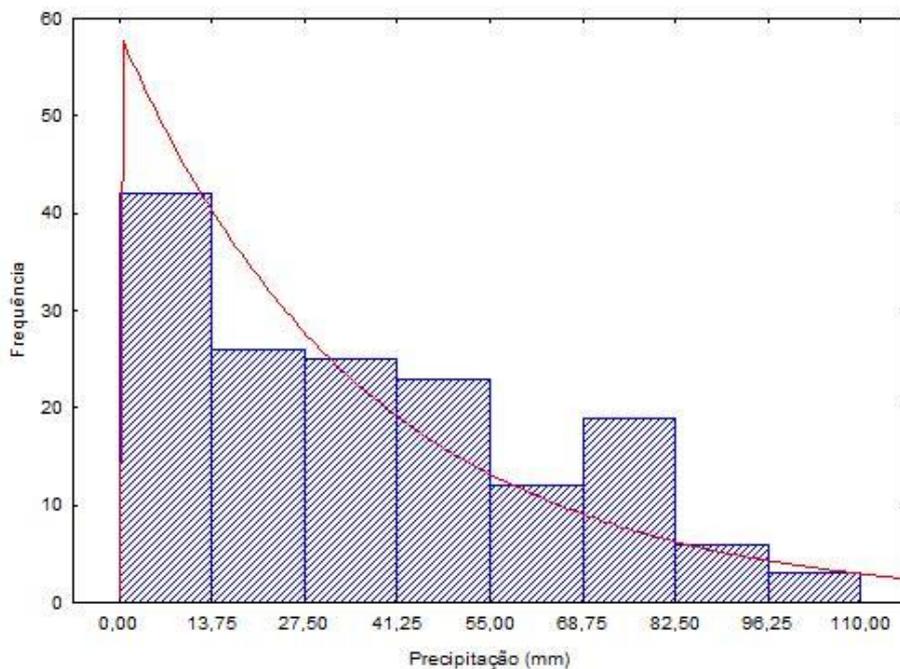
$$f(z) = \frac{1}{95,8388} \exp\left[-\frac{z-72,6837}{95,8388} - \exp\left(-\frac{z-72,6837}{95,8388}\right)\right], \text{ com } z \in R. \quad (40)$$

Para a série de precipitações pluviométricas em estudo, variável total mensal, a função ajustada, de acordo com as eqs. (19) e (20), tem média igual a 17,3655 mm e variância 15.108,84 mm².

4.3.3 Máximo mensal

Nas figuras 29, 30, 31, 32 e 33 estão respectivamente as propostas de ajuste das distribuições: exponencial, gama, Weibull, log-normal e gumbel para o máximo mensal.

Figura 29 – Histograma do máximo mensal – Distribuição Exponencial



Histograma da série de precipitações pluviométricas, máximos mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Fonte: O autor.

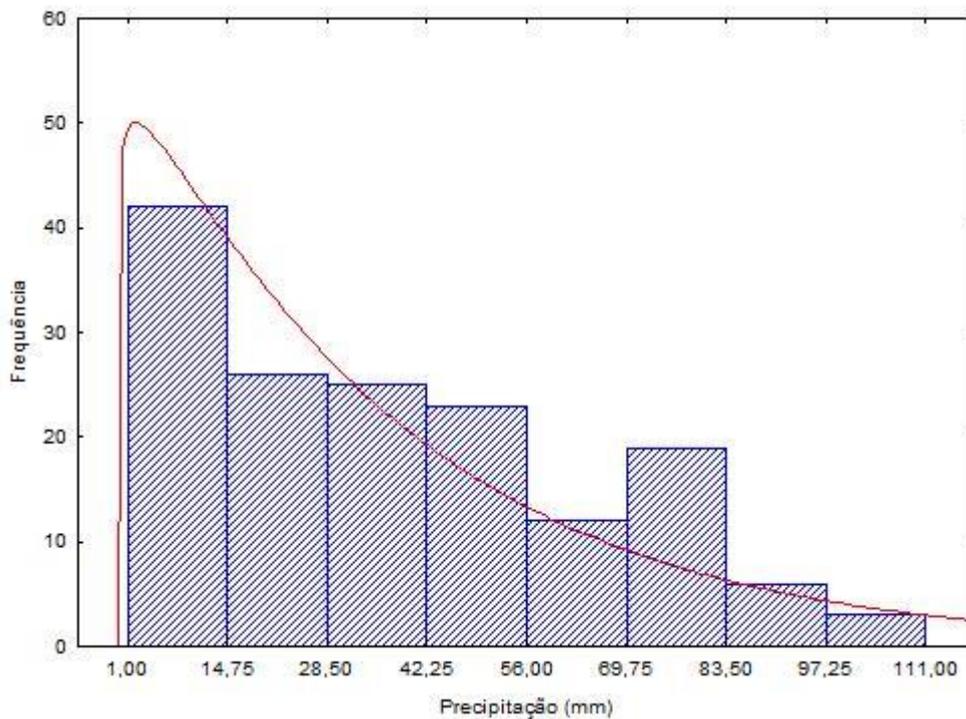
Na eq. (2) temos a função densidade de probabilidade da distribuição exponencial, $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, sendo $x > 0$.

A figura 29 mostra o histograma e o gráfico da função densidade de probabilidade da distribuição exponencial, variável máximo mensal, com $\alpha = 0,0273$, então podemos escrever a função densidade de probabilidade ajustada dessa distribuição para o máximo mensal, assim:

$$f(x) = 0,0273e^{-0,0273x}, \text{ sendo } x > 0. \quad (41)$$

A série de precipitações pluviométricas em estudo, para essa distribuição, variável máximo mensal, tem média, de acordo com a eq. (4) é igual a 36,63 mm e a variância, de acordo com a eq. (5) é igual a 1.341,76 mm².

Figura 30 – Histograma do máximo mensal – Distribuição Gama



Histograma da série de precipitações pluviométricas, máximos mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.
Fonte: O autor.

Na eq. (9) $f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(r)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x}$, é a função densidade de probabilidade da distribuição gama. A figura 30 mostra a função densidade de probabilidade da distribuição gama da seguinte forma:

$$f(z) = (z/b)^{c-1} e^{-(z/b)} [1/b\Gamma(c)] \quad (42)$$

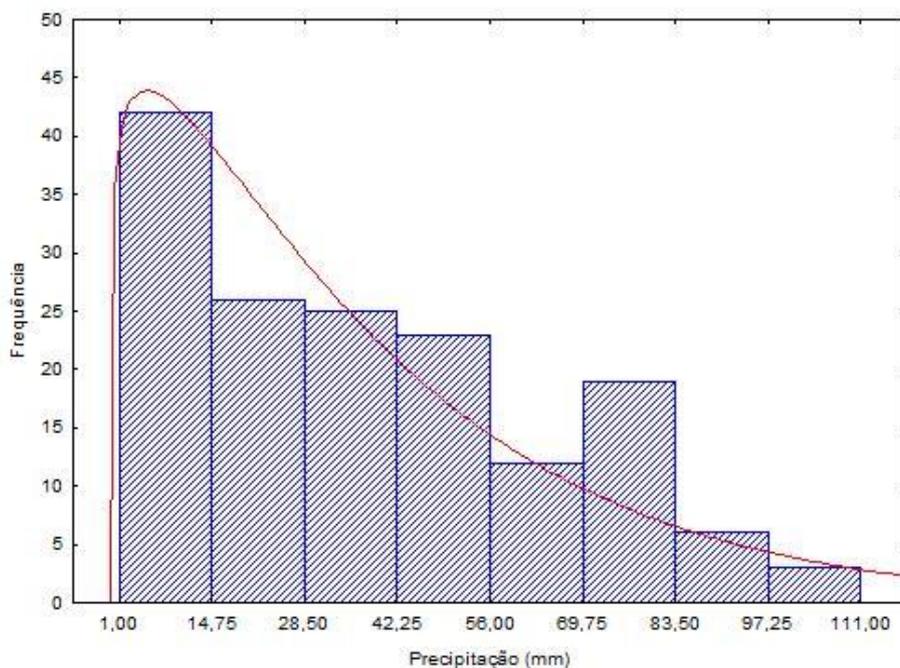
Observando a eq. (9) e a eq. (42), podemos afirmar que os parâmetros: $r = c$ e $\alpha = 1/b$. Sendo $b = 35,7755$; $c = 1,0529$ e $z = x + 1$, temos:

$$f(z) = 0,02880 \cdot (0,02880z)^{0,0529} \cdot e^{-0,02880 \cdot z} \quad (43)$$

Na eq. (34) $f(z)$ é a função densidade de probabilidade da distribuição gama ajustada, para a variável máximo mensal da série em estudo.

De acordo com a eq. (11) a média de precipitações pluviométricas para essa distribuição, variável máximo mensal, é igual 37,60 mm e a variância 1.342,98 mm².

Figura 31 – Histograma do máximo mensal – Distribuição Weibull



Histograma da série de precipitações pluviométricas, máximos mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.
Fonte: O autor.

A eq. (12) mostra a função densidade de probabilidade da distribuição de Weibull da seguinte maneira: $f(t) = (\alpha\beta)t^{\beta-1}e^{-\alpha t^\beta}$, $t > 0$.

Na figura 31 a função densidade de probabilidade dessa distribuição, variável máximo mensal é apresentada da seguinte forma:

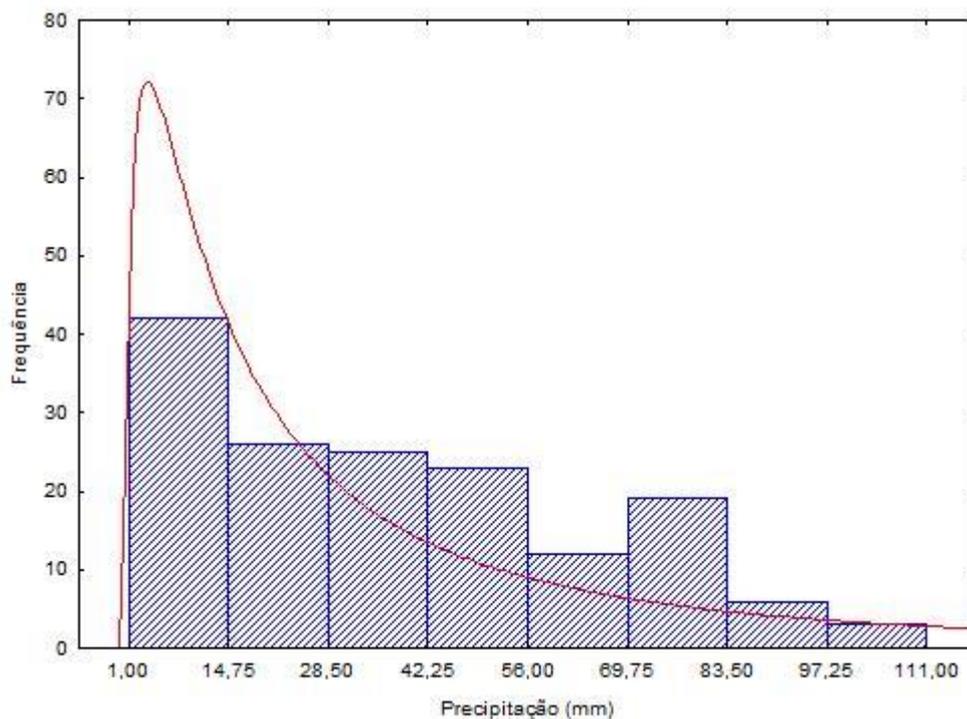
$$f(x) = c/b[(x-\theta)/b]^{(c-1)} e^{-[(x-\theta)/b]^c}, \text{ sendo } \theta < x, b > 0, c > 0 \text{ e } x = t + 1. \quad (44)$$

Para calcular os valores de α , β e θ , compara-se a eq. (12) com a eq. (44), encontrando: $\theta = 0$, $\alpha = 0,0170$ e $\beta = 1,1128$. A partir desses valores a função densidade de probabilidade da distribuição de Weibull ajustada é:

$$f(t) = 0,0189t^{0,1128}e^{-0,0170t^{1,1128}}, t > 0. \quad (45)$$

Usando a eq. (13), a eq. (14) e a função ajustada acima podemos calcular a média e a variância da série de precipitações pluviométricas em estudo, variável máximo mensal, que neste caso, são respectivamente 37,4135 mm e 1134,0324 mm².

Figura 32 – Histograma do máximo mensal – Distribuição Log-normal



Histograma da série de precipitações pluviométricas, máximos mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Fonte: O autor.

A função densidade de probabilidade da distribuição log-normal, mostrada na eq. (15)

$$\text{é a função } f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \text{ com } x > 0.$$

A figura 32 mostra o gráfico da função densidade de probabilidade da distribuição log-normal $f(y)$, para a variável máximo mensal, com $y = x+1$.

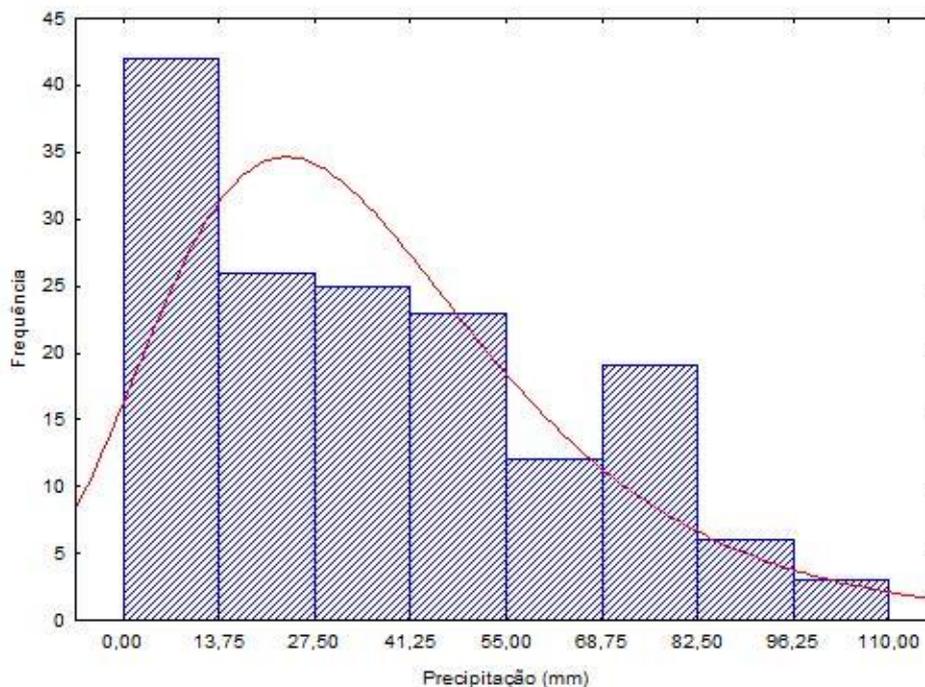
$$f(y) = 1/[y\sigma(2\pi)^{1/2}] e^{\{-[\log(y) - \mu]^2/2\sigma^2\}}, \text{ sendo: } 0 < x < \infty, \mu > 0, \sigma > 0. \quad (46)$$

Os parâmetros μ e σ , observados no gráfico acima, são respectivamente iguais a 3,0838 e 1,349. Com estes parâmetros, a função densidade de probabilidade da distribuição log-normal ajustada para a variável máximo mensal, está apresentada abaixo por:

$$f(y) = \frac{1}{3,3814y} \exp\left[\frac{-(\log(y) - 3,0838)^2}{3,6396}\right], \text{ com } y > 0. \quad (47)$$

As eq. (16) e (17) permitem calcular a média e a variância da série de precipitações pluviométricas em estudo, variável máximo mensal, que são respectivamente iguais a 54,26 mm e 15.220,46 mm².

Figura 33 – Histograma do máximo mensal – Função Gumbel



Histograma da série de precipitações pluviométricas, máximos mensais, em milímetros d'água, Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.
Fonte: O autor.

Na eq. (18) a função densidade de probabilidade da distribuição gumbel é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp \left[-\frac{x-\mu}{\sigma} - \exp \left(-\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right], \text{ com } x \in R.$$

A figura 33 mostra a função densidade de probabilidade dessa distribuição da seguinte maneira:

$$f(x) = 1/b \exp(-(x-a)/b) \exp[-e^{-(x-a)/b}], \text{ sendo } -\infty < x < \infty \text{ e } b > 0. \quad (48)$$

Usando as funções das eq. (18) e (48) e observando os parâmetros do gráfico da figura 33, temos que $\sigma = b = 22,7868$, $\mu = a = 23,2492$ e $z = x + 1$.

Estes valores permitem determinar a função densidade de probabilidade da distribuição gumbel ajustada. A partir da equação 18 temos:

$$f(z) = \frac{1}{22,7868} \exp \left[-\frac{z-23,2492}{22,7868} - \exp \left(-\frac{z-23,2492}{22,7868} \right) \right], \text{ com } z \in R. \quad (49)$$

Para a série de precipitações pluviométricas em estudo, variável máximo mensal, a função ajustada, de acordo com as eqs. (19) e (20), tem média igual a 10,0967 mm e variância 854,11 mm².

Neste capítulo foi feito o ajuste das distribuições: Exponencial, Gama, Weibull, Log-normal, Gumbel para série de precipitações pluviométricas da Fazenda Esmeril, com foco nas variáveis média mensal, total mensal e máximo mensal. Encontrou-se a função densidade de probabilidade para cada uma dessas distribuições. Os testes de aderência do próximo capítulo medem a qualidade desses ajustes.

4.4 TESTES DE ADERÊNCIA

Neste item será verificado se as distribuições: Exponencial, Gama, Weibull, Log-normal e Gumbel, se ajustam adequadamente, ou seja, se a aderência da distribuição teórica é estatisticamente significativa, aos dados da série de precipitações pluviométricas em estudo, para as variáveis média mensal, total mensal e máximo mensal.

A tabela 2 mostra as distribuições de probabilidade com os respectivos valores do teste qui-quadrado tabelado e calculado, além do valor-p para a precipitação média mensal. Como os valores do teste qui-quadrado calculado ($\chi^2(cal)$) são maiores do que os valores do teste

qui-quadrado tabelado ($\chi^2(tab)$), as distribuições não se ajustaram adequadamente aos dados da série de precipitações pluviométricas em estudo, para a média mensal. Os valores-p menores que 5% confirmam que as distribuições não se ajustaram a série em estudo para o referido teste. A tabela 2 mostra também que pelo teste Kolmogorov-Smirnov as distribuições: Exponencial, Weibull e Log-Normal ajustaram a série de dados em estudo, para a variável média mensal. Essas distribuições possui D(cal) menor que D(tab) e os valores-p maiores que 5%, mostrando a aderência dessas distribuições aos dados da série em estudo.

Tabela 2 – Teste de ajuste – média mensal

Distribuições	Teste Qui-quadrado				Teste Kolmogorov-Smirnov		
	$\chi^2(tab)$	v(gl)	$\chi^2(cal)$	Valor-p	D(tab)	D(cal)	Valor-p
Exponencial	11,14	4	12,44	0,0143	0,102	0,088	p > 0,05
Gama	9,35	3	19,48	0,0002	0,097	0,102	p < 0,05
Weibull	9,35	3	20,48	0,0001	0,097	0,096	p > 0,05
Log-normal	9,35	3	16,64	0,0008	0,097	0,083	p > 0,05
Gumbel	9,35	3	45,98	0,0000	0,102	0,171	p < 0,05

Testes de Ajuste – Qui-quadrado e Kolmogorov-Smirnov das distribuições: Exponencial, Gama, Weibull, Log-normal e Gumbel para série de precipitações pluviométricas, média mensal, da Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Fonte: O autor.

Diferentemente da média mensal e do máximo mensal, a tabela 3 mostra três valores do teste qui-quadrado calculado ($\chi^2(cal)$) menor que os respectivos valores do teste qui-quadrado tabelado ($\chi^2(tab)$), indicando que as distribuições: exponencial, gama e Weibull ajustaram aos dados da série de precipitações pluviométricas em estudo, para o total mensal, com base nesse teste. O valor-p de 16,49% mostra que a distribuição gama foi a que melhor se ajustou aos dados da série em estudo. Essa tabela mostra também que as três distribuições citadas ajustam aos dados da série quando o teste é o Kolmogorov-Smirnov.

Resultados parecidos foram encontrados por Souza (2012) que ao analisar dados de precipitação pluviométrica mensal da cidade de Campina Grande-PB, no período de 1978 a 1997, observou que a distribuição exponencial previamente selecionada para modelar os dados não se ajustou adequadamente para a maioria dos meses do ano. Foi proposta uma nova abordagem usando a distribuição de Weibull, a qual se verificou ajustar aos dados.

Tabela 3 – Teste de ajuste – total mensal

Distribuições	Teste Qui-quadrado				Teste Kolmogorov-Smirnov		
	$\chi^2(tab)$	v(gl)	$\chi^2(cal)$	Valor-p	D(tab)	D(cal)	Valor-p
Exponencial	11,14	4	8,67	0,0699	0,102	0,084	p > 0,05
Gama	9,35	3	5,09	0,1649	0,097	0,064	p > 0,05
Weibull	9,35	3	7,32	0,0623	0,097	0,076	p > 0,05
Log-normal	7,38	3	31,90	0,0000	0,097	0,127	p < 0,05
Gumbel	9,35	3	41,02	0,0000	0,102	0,104	p < 0,05

Testes de Ajuste – Qui-quadrado e Kolmogorov-Smirnov das distribuições: Exponencial, Gama, Weibull, Log-normal e Gumbel para série de precipitações pluviométricas, total mensal, da Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Fonte: O autor.

A tabela 4 mostra todos os valores do teste qui-quadrado calculado ($\chi^2(cal)$), para todas as distribuições, maiores que os valores do teste qui-quadrado tabelado ($\chi^2(tab)$), indicando que nenhuma distribuição ajustou aos dados da série de precipitações pluviométricas em estudo, para o total mensal. Os valores-p muito próximos de zero ou iguais a zero, mostram a rejeição da hipótese de aderência das distribuições aos dados da série de precipitações pluviométricas em estudo para o teste qui-quadrado. A tabela 4 mostra também que as distribuições gama e Weibull ajustaram aos dados da série pelo teste Kolmogorov-Smirnov.

Tabela 4 – Teste de ajuste – máximo mensal

Distribuições	Teste Qui-quadrado				Teste Kolmogorov-Smirnov		
	$\chi^2(tab)$	v(gl)	$\chi^2(cal)$	Valor-p	D(tab)	D(cal)	Valor-p
Exponencial	12,83	5	23,97	0,0002	0,102	0,156	p < 0,05
Gama	11,14	4	22,35	0,0002	0,097	0,089	p > 0,05
Weibull	11,14	4	19,19	0,0007	0,097	0,089	p > 0,05
Log-normal	11,14	4	59,79	0,0000	0,097	0,145	p < 0,05
Gumbel	11,14	4	27,90	0,0000	0,102	0,106	p < 0,05

Testes de Ajuste – Qui-quadrado e Kolmogorov-Smirnov das distribuições: Exponencial, Gama, Weibull, Log-normal e Gumbel para série de precipitações pluviométricas, máximo mensal, da Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Fonte: O autor.

Moreira et al. (2010) também obteve ajuste usando a distribuição gama para definir diferentes níveis de probabilidade de precipitação na região de Nova Maringá-MT. Murta et al. (2005) também obteve ajustes usando o modelo de distribuição gama para a estimativa da precipitação pluvial mensal em Itapetinga e Vitória da Conquista-BA. Os resultados obtidos por Sampaio et al. (2006) para a estimativa da precipitação provável nos períodos decendiais

no estado do Paraná, mostraram que a distribuição gama também ajustou-se mais adequadamente às condições pluviométricas do estado nos períodos estudados.

O tamanho da série, apenas treze anos, pode explicar a falta de ajuste das distribuições de probabilidade para as variáveis média mensal e máximo mensal aos dados da série de precipitações pluviométricas em estudo, quando o teste usado foi o qui-quadrado. A Organização das Nações para a Alimentação e a Agricultura – FAO recomenda, para que se tenha resultados mais consistentes com a realidade de precipitações pluviométricas do local onde os dados foram coletados, que a série de dados em estudo tenha no mínimo trinta anos.

O teste Kolmogorov-Smirnov mostrou que houve ajuste de distribuições de probabilidade as três variáveis: média mensal, total mensal e máximo mensal. Esse teste trabalha diretamente com os dados observados, usando frequências acumuladas. Este pode ser o motivo de o teste conseguir mostrar aderência de distribuições de probabilidade aos dados da série em estudo. O teste qui-quadrado trabalha com distribuições de frequências com os dados agrupados em classes. Esta forma de trabalhar com os dados perde informação, pois é usado o ponto médio como representante da classe de acordo com a hipótese tabular básica.

5 CONCLUSÃO

A partir das análises feitas na série de precipitações pluviométricas para as variáveis, média mensal, total mensal e máximo mensal chegou-se as seguintes conclusões:

1. Os dados da série de precipitações não seguem a distribuição normal, não apresenta tendência, apenas sazonalidade com periodicidade anual e com alta variabilidade.
2. Nenhuma distribuição ajustou aos dados da série de precipitações pluviométricas para a média mensal e o máximo mensal, quando a verificação foi feita pelo teste qui-quadrado. O teste Kolmogorov-Smirnov mostrou que a média mensal é ajustada pelas distribuições Exponencial, Weibull e Log-normal, no caso do máximo mensal, o ajuste foi verificado para as distribuições: Gama e Weibull.
3. As distribuições: Exponencial, Gama e Weibull ajustaram aos dados da série de precipitações pluviométricas em estudo, para o total mensal, tanto para o teste qui-quadrado quanto para o teste Kolmogorov-Smirnov.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

A realização desse trabalho permitiu observar a série de dados de precipitações pluviométricas estudada, os testes usados, os ajustes as distribuições: normal, exponencial, gama, Weibull, log-normal e gumbel, os testes de aderência e os resultados obtidos. Com essas observações propomos alguns trabalhos futuros que podem ser realizados:

- a) Ajustar outras as distribuições de probabilidade a serie de dados;
- b) Usar outros testes de aderência para verificar os ajustes das distribuições de probabilidade utilizadas neste trabalho;
- c) Verificar se a série de dados do município de Patrocínio-MG ajusta a essas distribuições;
- d) Usar o período de janeiro de 2000 a dezembro de 2012, isto é, o mesmo período da série dados desse trabalho, para verificar se a série de precipitações pluviométricas do município de Patrocínio-MG ajusta as mesmas distribuições de probabilidades utilizadas nessa dissertação.

- e) Comparar os resultados dos ajustes das distribuições de probabilidades da série de dados da Fazenda Esmeril, com os resultados dos ajustes, com as mesmas distribuições, com uma série de dados de outra fazenda do município de Patrocínio-MG.

REFERÊNCIAS

- AMARAL, A.M., MUNIZ, J.A., SOUZA, M. Avaliação do coeficiente de variação como medida da precisão na experimentação com citros. **Pesq. Agropec. Bras.**, Brasília, vol.32, n.12, p.1221-1225, 1997
- ARAÚJO, M. F. C. et al. Precipitação pluviométrica mensal no estado do rio de janeiro: sazonalidade e tendência. **Biosci. J.**, Uberlândia, v. 25, n. 4, p. 90-100, Jul./Ago. 2009.
- BATISTA, B. D. O. Ajuste de seis distribuições densidade de probabilidade à séries históricas de radiação solar, em Mossoró/RN. **Revista Verde de Agroecologia e Desenvolvimento Sustentável**, v. 5, n. 4, 2012.
- BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. O. **Estatística básica**. 4. ed. São Paulo: Atual, 1987. 320 p.
- CAMPOS, H. **Estatística experimental não-paramétrica**. 2. ed. Piracicaba: Esalq, 1976.
- CATALUNHAA, M. J. et al. Avaliação de cinco funções densidade de probabilidade a séries de precipitação pluvial no Estado de Minas Gerais. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, v. 10, n. 1, p. 153-162, 2002.
- DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: um curso introdutório**. 3. ed. São Paulo: Edusp, 2008.
- Microsoft Office Home and Student. Versão 14.0.6129.5000. [S.l.]: Microsoft Corporation, 2010.
- FERRAZ, Marcelo Inácio Ferreira. **Uso de modelos de séries temporais na previsão da série de precipitação pluviiais mensais no município de Lavras-MG**. 1999. 97 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Curso de Pós-graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, Universidade Federal de Lavras, Lavras, 1999.
- GOMES, P. F. **Curso de estatística experimental**. 12. ed. Piracicaba: Nobel, 1990. 467 p.
- GARCIA, C. H. **Tabelas para classificação do coeficiente de variação**. Piracicaba: IPEF, 1989. 12 p. (Circular técnica, 171).
- HAAN, C. T. **Statistical Methods in Hydrology**. 6. ed. Ames: Iowa University Press, 1994. 378p.
- LONGO, A. J.; SAMPAIO, S. C.; SUSZEK, M. Equação de chuvas intensas e precipitação provável para o município de Cascavel-PR. **Varia Scientia**, v. 6, n. 12, p. 119-127, 2006.
- MENDES, P. C. **A gênese espacial das chuvas na cidade de Uberlândia – MG**. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2001. 237 p. Dissertação (Mestrado em Geografia).
- MEYER, P. L. **Probabilidade: aplicações à estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 1981.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. **Séries Temporais**. São Paulo: Atual, 2005. 420 p.

MOREIRA, P. S. P. et al. Distribuição e probabilidade de ocorrência das chuvas no município de Nova Maringá-MT. **Revista de Ciências Agroambientais**, Alta Floresta, v. 8, n. 1, p. 9-20, 2010.

MURTA, R. M. et al. Precipitação pluvial mensal em níveis de probabilidade pela distribuição gama para duas localidades do sudoeste da Bahia. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 29, n. 5, p. 988-994, 2005.

OLIVEIRA, A.; GUIMARÃES, E. C. **Uso de séries temporais para previsão das precipitações pluviais médias mensais na fazenda esmeril - Patrocínio-MG**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA AGRÍCOLA CONBEA, XLI, 2012, Londrina-PR. **Anais...** Londrina: CONBEA, 2012. CD-ROM.

ROSS, S. **Probabilidade: um curso moderno com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

SAMPAIO, S. C. et al. Estimativa e distribuição de precipitações decendiais para o Estado do Paraná. **Irriga**, Botucatu, v. 12, n. 1, p. 38-53, 2007.

SOUZA, R. O. R. M. et al. Equações de chuvas intensas para o Estado do Pará. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 16, n. 9, p. 999-1005, 2012.

STATISTICA for Windows. Release 8. Copyright Stat Soft, Inc. 1984 – 2007.

TRIOLA, M. F. **Introdução à estatística**. Tradução: Alfredo Alves de Faria. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999. 410 p.

WALPOLE, R. E. **Probabilidade & estatística para engenharia e ciências**. 8. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

APÊNDICE A – TABELAS 5, 6 e 7

Tabela 5 – Série de precipitações pluviométricas, médias mensais na Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Ano	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.
2000	7,61	10,50	10,19	1,35	0,42	0,00	0,27	0,81	3,58	1,00	10,30	8,55
2001	5,29	2,52	3,63	2,50	0,77	0,00	0,32	2,26	2,22	2,90	7,70	13,65
2002	7,87	13,30	6,32	0,02	1,13	0,00	0,16	0,02	0,85	3,00	3,00	8,42
2003	16,79	3,14	7,82	2,00	1,55	0,00	0,00	0,27	1,80	2,34	6,03	5,55
2004	15,21	10,81	5,35	2,77	1,23	0,23	0,03	0,00	0,00	3,23	3,33	8,06
2005	13,48	4,61	8,31	1,53	1,13	0,27	0,00	0,26	2,67	1,29	17,38	10,74
2006	9,53	12,64	9,94	4,53	1,03	0,08	0,00	0,26	5,27	4,74	6,77	16,44
2007	20,05	7,00	3,26	4,63	0,90	0,00	1,61	0,00	0,00	3,58	3,20	10,61
2008	8,45	10,31	5,71	2,77	0,26	0,00	0,48	0,00	0,83	0,40	3,23	13,55
2009	9,03	10,50	7,23	3,70	1,44	1,07	0,13	1,39	3,07	6,23	4,10	16,61
2010	7,10	5,07	12,87	6,27	0,81	0,37	0,00	0,65	2,33	6,81	11,57	15,42
2011	10,45	4,50	11,65	0,67	0,52	0,30	0,06	0,00	1,73	2,52	2,60	11,77
2012	12,24	2,70	5,48	1,07	1,06	1,20	0,26	0,55	3,23	0,85	6,93	6,10

Fonte: O autor.

Tabela 6 – Série de precipitações pluviométricas, totais mensais na Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Ano	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.
2000	144,5	304,5	316,0	40,5	13,0	0,0	8,5	25,0	107,5	31,0	309,0	265,0
2001	164,0	70,5	112,5	75,0	24,0	0,0	10,0	70,0	66,5	90,0	231,0	423,0
2002	244,0	372,5	196,0	0,5	35,0	0,0	5,0	0,5	25,5	93,0	90,0	261,0
2003	520,5	88,0	242,5	60,0	48,0	0,0	0,0	8,5	54,0	72,5	181,0	172,0
2004	471,5	313,5	166,0	83,0	38,0	7,0	1,0	0,0	0,0	100,0	100,0	250,0
2005	418,0	129,0	257,5	46,0	35,0	8,0	0,0	8,0	80,0	40,0	521,5	333,0
2006	295,5	354,0	308,0	136,0	32,0	2,5	0,0	8,0	158,0	147,0	203,0	509,5
2007	621,5	196,0	101,0	139,0	28,0	0,0	50,0	0,0	0,0	111,0	96,0	329,0
2008	262,0	299,0	177,0	83,0	8,0	0,0	15,0	0,0	25,0	12,5	97,0	420,0
2009	280,0	294,0	224,0	111,0	44,5	32,0	4,0	43,0	92,0	193,0	123,0	515,0
2010	220,0	147,0	399,0	188,0	25,0	11,0	0,0	20,0	70,0	211,0	347,0	478,0
2011	324,0	126,0	361,0	20,0	16,0	9,0	2,0	0,0	52,0	78,0	78,0	365,0
2012	379,5	75,5	170,0	32,0	33,0	36,0	8,0	17,0	97,0	26,5	208,0	183,0

Fonte: O autor.

Tabela 7 – Série de precipitações pluviométricas, máximos mensais na Fazenda Esmeril, município de Patrocínio-MG, no período de 2000 a 2012.

Ano	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.
2000	75,0	70,0	80,0	20,0	12,0	0,0	8,5	20,0	29,0	18,0	72,0	60,0
2001	52,0	30,0	32,0	75,0	22,0	0,0	10,0	40,0	20,0	35,0	50,0	90,0
2002	80,0	110,0	72,5	0,5	30,0	0,0	5,0	0,5	25,0	30,0	60,0	77,5
2003	90,0	20,0	82,5	20,0	40,0	0,0	0,0	5,0	20,0	22,0	56,0	32,0
2004	60,0	58,0	54,0	30,0	32,0	4,0	1,0	0,0	0,0	51,0	25,0	42,0
2005	64,0	35,0	45,0	22,0	35,0	8,0	0,0	8,0	42,0	29,0	70,0	72,0
2006	65,0	82,0	42,0	64,0	20,0	2,0	0,0	8,0	48,0	30,0	35,0	92,0
2007	52,0	35,0	55,0	45,0	25,0	0,0	25,0	0,0	0,0	28,0	30,0	110,0
2008	110,0	90,0	56,0	25,0	8,0	0,0	15,0	0,0	20,0	8,0	25,0	76,0
2009	70,0	90,0	50,0	30,0	30,0	18,0	4,0	20,0	25,0	80,0	65,0	82,0
2010	80,0	55,0	80,0	80,0	12,0	10,0	0,0	14,0	35,0	40,0	60,0	85,0
2011	45,0	50,0	60,0	10,0	10,0	9,0	2,0	0,0	52,0	15,0	30,0	50,0
2012	50,0	40,0	50,0	12,0	15,0	16,0	8,0	12,0	50,0	12,0	50,0	45,0

Fonte: O autor.

APÊNDICE B – TABELAS 8, 9 e 10

Tabela 8 – Distribuição Exponencial – média mensal.

Intervalos – Média mensal (eq. 26)	Probabilidade	Freq. obs.	Freq. esp.
0,0000 a 2,5060	0,4298	72	67,0488
2,5060 a 5,0121	0,2451	28	38,2356
5,0121 a 7,5181	0,1397	18	21,7932
7,5181 a 10,0242	0,0797	12	12,4332
10,0242 a 12,5302	0,0454	13	7,0824
12,5302 a 20,0484	0,0491	13	7,6569

Fonte: O autor.

Tabela 9 – Distribuição Exponencial – total mensal.

Intervalos – Total mensal (eq. 32)	Probabilidade	Freq. obs.	Freq. esp.
0,0000 a 77,6875	0,4372	74	68,2032
77,6875 a 155,3750	0,2461	28	38,3916
155,3750 a 233,0625	0,1385	18	21,6060
233,0625 a 310,7500	0,0779	14	12,1524
310,7500 a 388,4375	0,0439	11	6,8484
388,4375 a 621,5000	0,0464	11	7,2364

Fonte: O autor.

Tabela 10 – Distribuição Exponencial – máximo mensal.

Intervalos – Máximo mensal (eq. 41)	Probabilidade	Freq. obs.	Freq. esp.
0,0000 a 13,7500	0,3130	42	48,8280
13,7500 a 27,5000	0,2150	26	33,5400
27,5000 a 41,2500	0,1477	25	23,0412
41,2500 a 55,0000	0,1015	23	15,8340
55,0000 a 68,7500	0,0697	12	10,8732
68,7500 a 82,5000	0,0479	19	7,4724
82,5000 a 110,0000	0,0555	9	8,6618

Fonte: O autor.

APÊNDICE C – TABELAS 11, 12 e 13

Tabela 11 – Distribuição Gama – média mensal.

Intervalos – Média mensal	Probabilidade	Freq. obs.	Freq. esp.
1,0000 a 3,5060	0,319498	72	49,84169
3,5060 a 6,0121	0,234358	28	36,55985
6,0121 a 8,5181	0,146766	18	22,8955
8,5181 a 11,0242	0,086801	12	13,54096
11,0242 a 13,5302	0,049808	13	7,770048
13,5302 a 21,0484	0,052254	13	8,151624

Fonte: O autor.

Tabela 12 – Distribuição Gama – total mensal.

Intervalos – Total mensal	Probabilidade	Freq. obs.	Freq. esp.
1,0000 a 78,6875	0,478839	74	74,6989
78,6875 a 156,3750	0,185735	28	28,9747
156,3750 a 234,0625	0,106489	18	16,6123
234,0625 a 311,7500	0,065633	14	10,2387
311,7500 a 389,4375	0,041844	11	6,52766
389,4375 a 622,5000	0,057061	11	8,90151

Fonte: O autor.

Tabela 13 – Distribuição Gama – máximo mensal.

Intervalos – Máximo mensal	Probabilidade	Freq. obs.	Freq. esp.
1,00 a 14,75	0,29142	42	45,4621
14,75 a 28,50	0,21139	26	32,9764
28,50 a 42,25	0,14778	25	23,0535
42,25 a 56,00	0,10235	23	15,9671
56,00 a 69,75	0,07057	12	11,0095
69,75 a 83,50	0,04853	19	7,57099
83,50 a 111,00	0,05616	9	8,76034

Fonte: O autor.

APÊNDICE D – TABELAS 14, 15 e 16

Tabela 14 – Distribuição Weibull – média mensal.

Intervalos – Média mensal	Probabilidade	Freq. obs.	Freq. esp.
1,0000 a 3,5060	0,30551	72	47,6592
3,5060 a 6,0121	0,22674	28	35,3716
6,0121 a 8,5181	0,14771	18	23,0424
8,5181 a 11,0242	0,09014	12	14,0625
11,0242 a 13,5302	0,05263	13	8,21059
13,5302 a 21,0484	0,05480	13	8,54880

Fonte: O autor.

Tabela 15 – Distribuição Weibull – total mensal.

Intervalos – Total mensal	Probabilidade	Freq. obs.	Freq. esp.
1,0000 a 78,6875	0,49933	74	77,8947
78,6875 a 156,3750	0,18512	28	28,8779
156,3750 a 234,0625	0,10119	18	15,785
234,0625 a 311,7500	0,06106	14	9,52505
311,7500 a 389,4375	0,03889	11	6,06653
389,4375 a 622,5000	0,05508	11	8,59061

Fonte: O autor.

Tabela 16 – Distribuição Weibull – máximo mensal.

Intervalos – Máximo mensal	Probabilidade	Freq. obs.	Freq. esp.
1,00 a 14,75	0,2709	42	42,2602
14,75 a 28,50	0,21865	26	34,1097
28,50 a 42,25	0,15866	25	24,7516
42,25 a 56,00	0,11089	23	17,2992
56,00 a 69,75	0,07577	12	11,8204
69,75 a 83,50	0,05095	19	7,94804
83,50 a 111,00	0,05607	9	8,74770

Fonte: O autor.

APÊNDICE E – TABELAS 17, 18 e 19

Tabela 17 – Distribuição Log-normal – média mensal.

Intervalos – Média mensal	Probabilidade	Freq. obs.	Freq. esp.
1,0000 a 3,5060	0,397457	72	62,0033
3,5060 a 6,0121	0,225433	28	35,1675
6,0121 a 8,5181	0,115932	18	18,0854
8,5181 a 11,0242	0,063621	12	9,92488
11,0242 a 13,5302	0,037217	13	5,80585
13,5302 a 21,0484	0,047598	13	7,42529

Fonte: O autor.

Tabela 18 – Distribuição Log-normal – total mensal.

Intervalos – Total mensal	Probabilidade	Freq. obs.	Freq. esp.
1,0000 a 78,6875	0,577335	74	90,0643
78,6875 a 156,3750	0,133962	28	20,8981
156,3750 a 234,0625	0,066793	18	10,4197
234,0625 a 311,7500	0,040871	14	6,37588
311,7500 a 389,4375	0,027784	11	4,3343
389,4375 a 622,5000	0,047506	11	7,41094

Fonte: O autor.

Tabela 19 – Distribuição Log-normal – máximo mensal.

Intervalos – Máximo mensal	Probabilidade	Freq. obs.	Freq. esp.
1,00 a 14,75	0,374403	42	58,4069
14,75 a 28,50	0,192664	26	30,0556
28,50 a 42,25	0,10943	25	17,0711
42,25 a 56,00	0,069784	23	10,8863
56,00 a 69,75	0,047906	12	7,47334
69,75 a 83,50	0,034609	19	5,399
83,50 a 111,00	0,046011	9	7,1777

Fonte: O autor.

APÊNDICE F – TABELAS 20, 21 e 22

Tabela 20 – Distribuição Gumbel – média mensal.

Intervalos – Média mensal	Probabilidade	Freq. obs.	Freq. esp.
1,0000 a 3,5060	0,26146	72	40,7876
3,5060 a 6,0121	0,26499	28	41,3377
6,0121 a 8,5181	0,17492	18	27,2875
8,5181 a 11,0242	0,09426	12	14,7046
11,0242 a 13,5302	0,04624	13	7,21344
13,5302 a 21,0484	0,03632	13	5,6659

Fonte: O autor.

Tabela 21 – Distribuição Gumbel – total mensal.

Intervalos – Total mensal	Probabilidade	Freq. obs.	Freq. esp.
1,0000 a 78,6875	0,27	74	42,1197
78,6875 a 156,3750	0,26772	28	41,7645
156,3750 a 234,0625	0,17193	18	26,8208
234,0625 a 311,7500	0,09022	14	14,0735
311,7500 a 389,4375	0,0432	11	6,73842
389,4375 a 622,5000	0,03282	11	5,1185

Fonte: O autor.

Tabela 22 – Distribuição Gumbel – máximo mensal.

Intervalos – Máximo mensal	Probabilidade	Freq. obs.	Freq. esp.
1,00 a 14,75	0,16378	42	25,5497
14,75 a 28,50	0,21786	26	33,9863
28,50 a 42,25	0,19572	25	30,5328
42,25 a 56,00	0,14087	23	21,9753
56,00 a 69,75	0,08961	12	13,9793
69,75 a 83,50	0,05325	19	8,30684
83,50 a 111,00	0,04757	9	7,4205

Fonte: O autor.