Universidade Federal do triângulo Mineiro
Instituto de Ciências Exatas, Naturais e Edução
Departamento de Matemática

Um estudo sobre o infinito: enumerabilidade e densidade dos conjuntos numéricos

Wysner Max de Lima Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Leonardo de Amorim e Silva
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

2016

UM ESTUDO SOBRE O INFINITO: ENUMERABILIDADE E DENSIDADE DOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

WYSNER MAX DE LIMA SILVA

Dissertação de mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFTM como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador Prof. Dr. Leonardo de Amorim e Silva

Uberaba - Minas Gerais
Junho de 2016

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

S58e

Silva, Wysner Max de Lima
Um estudo sobre o infinito: densidade e enumerabilidade dos conjuntos numéricos / Wysner Max de Lima Silva. -- 2016.
73 f. : il., fig., graf.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2016
Orientador: Prof. Dr. Leonardo de Amorim e Silva

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Teoria dos conjuntos. 3. Números cardinais. 4. Números primos. 5. Funções (Matemática). 6. Geometria. I. Silva, Leonardo de Amorim e. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 51(07)

TERMO DE APROVAÇÃO

Wysner Max de Lima Silva

UM ESTUDO SOBRE O INFINITO: DOS NATURAIS AOS COMPLEXOS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas, Naturais e Educação da universidade Federal do Triângulo Mineiro, pela seguinte banca examinadora:

Uberaba, 24 de junho de 2016

Banca Examinadora:

Leonardo de Amorim e Silva

Prof. Dr. Leonardo de Amorim e Silva
Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Vanessa de Paula Cintra

Profa. Dra. Vanessa de Paula Cintra
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Edson M. Costa Jr.

Prof. Me. Edson Marques da Costa Júnior
Instituto Federal do Triângulo Mineiro

Dedico este trabalho a todas as pessoas que me fortalecem, em especial aos melhores pais do mundo, Célia e Gaspar.

Agradecimentos

Ao finalizar este trabalho, deixo aqui meus mais profundos agradecimentos:

- À minha mãe, que me ensinou valores, que sempre batalhou para que eu estudasse nas melhores escolas e jamais hesitou em custear meus estudos.
- Ao meu pai, que trabalhou duro a vida toda, incentivando e mostrando que o trabalho dignifica o homem.
- A todos os meus amigos que somaram felicidade comigo por saber da conclusão desta etapa em minha vida.
- aos companheiros de classe que, desde então, fazem parte de minha história.
- Aos meus professores da educação infantil, ensinos fundamental e médio ao longo de minha vida estudantil básica. Sem vocês, eu não teria a competência para terminar este trabalho.
- Aos professores da FAMAT - UFU, pelos ensinamentos de matemática e por me conduzirem ao conhecimento desta tão maravilhosa e importante ciência que é a matemática.
- Ao meu orientador, Prof. Dr. Leonardo Amorim, pela atenção, orientação e ensinamentos.
- Aos professores Vanessa e Edson que aceitaram o convite para comporem a banca de minha defesa.
- À Sociedade Brasileira de Matemática, que na busca por uma melhoria do ensino de matemática na educação básica, incentivou a criação e viabilizou a implantação do PROFMAT.

Tão correto e tão bonito,
o infinito é realmente um dos deuses mais lindos.
(Renato Russo)

Resumo

Este trabalho tem por finalidade expôr a história e o surgimento dos conjuntos numéricos, bem como analisar cada um deles mediante o estudo do infinito. Tal conceito é uma barreira para muitos por se tratar de um assunto abstrato e complexo, porém, se compreendido, pode-se perceber o quão importante é esta ferramenta dentro da matemática. Para a realização deste trabalho, foi necessária a utilização de conceitos importantes da matemática tais como enumerabilidade, cardinalidade, números primos, conjuntos numéricos, funções, Binômio de Newton, geometria, geometria analítica e ainda o estudo sobre conjunto de Cantor e cardinais transfinitos.

Palavras-chave: Conjuntos Numéricos, Cardinalidade, Enumerabilidade e Densidade, Cardinais Transfinitos.

Abstract

This study aims to expose the history and the emergence of numerical sets, and to examine each of them through the study of infinity. This concept is a barrier for many due to its complexity and abstraction, however, if well understood, can be noted how important tool in mathematics. For this work, it had been necessary the use of important concepts inside in mathematics as enumerability, cardinality, prime numbers, numerical sets, functions, Newton's Binomial, geometry, analytical geometry as well as the studies about Cantor sets and transfinite cardinal numbers.

Keywords: Numerical Sets, Cardinality, Enumerability and Density, Transfinite Cardinal Number.

Sumário

1 Introdução

Na matemática, a disciplina que estuda as relações entre números, por intermédio de expressões simbólicas gerais, é denominada de ÁLGEBRA e é com esta álgebra que determinados caminhos no universo foram traçados, como, por exemplo, o estudo da astronomia. Para que fosse fundamentada da maneira como temo-la hoje, houve um "amadurecimento"da linguagem matemática por séculos (talvez milênios) e, durante esse processo, foi-se desenvolvendo a matemática pura e abstrata.

O estudo dos conjuntos numéricos é a base do entendimento da matemática pura que, apesar de abstrata, está presente em várias áreas concretas do conhecimento.

Este trabalho foi elaborado com base no estudo da história e teoria dos números e tem como objetivo apresentar um estudo sobre os conjuntos numéricos, resgatando fundamentações e fatos históricos de suas descobertas e demonstrando teoremas importantes dentro da matemática pura. Abordaremos o surgimento de cada um - naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais e complexos - que são a base de nossa estruturação matemática e, posteriormente, estudaremos sua enumerabilidade, cardinalidade e densidade. Apresentaremos também alguns paradoxos que servem como âncora no estudo do infinito que é, ao mesmo tempo, matemático e filosófico, bem como uma apresentação do Conjunto de Cantor e dos Números Cardinais Transfinitos.

Com a finalidade de proporcionar uma visão geral deste trabalho, apresentamos uma breve descrição dos assuntos abordados:

No segundo capítulo expomos fatos históricos do surgimento e da criação dos conjuntos numéricos estudados até o ensino médio, bem como algumas demonstrações importantes como a irracionalidade de $\sqrt{2}$ e a fórmula de Cardano.

No terceiro capítulo fazemos uma breve descrição filosófico-matemática do infinito juntamente com a apresentação de alguns paradoxos famosos. Também são abordados os assuntos enumerabilidade e cardinalidade, Conjunto de Cantor e Cardinais Transfinitos.

No quarto capítulo apresentamos as relações de inclusão e densidade entre conjuntos, bem como demonstrações algébricas.

No quinto capítulo fazemos um estudo específico do corpo dos números complexos, apresentando a forma polar de cada número, sua não ordenação e algumas aplicações.

No sexto capítulo seguimos uma abordagem voltada para o ensino médio utilizando a visão geométrica nas demonstrações de inclusão e densidade de conjuntos.

Esperamos que com este trabalho parte da teoria de números (enumerabilidade, cardinalidade e densidade de conjuntos) e o estudo sobre o infinito, que acreditamos serem vistos como algo abstrato aos olhos dos alunos do ensino médio, tornem-se acessíveis e passíveis de estudo e pesquisa.

2 Um pouco de história

Grande parte das informações apresentadas abaixo foram baseadas nos livros *História da matemática de Carl Benjamin Boyer, 1974* e *Ideias geniais na matemática* de *Surendra Verma*, 2013.

Existe uma suposição de que o homem primeiro aprendeu a contar para depois falar. Via-se a necessidade de enumerar ou agrupar coisas, o que gerou a contagem. Esta era feita na forma de agrupamentos e entende-se que, após certa quantidade de objetos, coisas ou animais, a quantidade era vista como "um monte".

Com a evolução do homem que passou de nômade a adotar locais fixos (estamos nos referindo há pouco mais de 10 mil anos atrás), vivendo em grutas e cavernas para proteger-se da chuva, do frio e de animais selvagens, houve a necessidade do armazenamento e estocagem de alimentos. Passou-se a praticar não somente a caça e coleta de frutos, mas também o cultivo de plantas e a criação de animais. Isso influenciou diretamente na necessidade de uma nova forma de contagem, pois havia a necessidade do homem em controlar o seu rebanho. Alguma novilha ou outro animal poderia fugir, logo, como perceber se a quantidade de animais de "ontem para hoje"se manteve?

A utilização de pedras como objeto de contagem foi aderida através de uma relação bijetora simples (relação um para um): cada animal seria representado por uma pedra. O animal saía para pastar; logo, uma pedra era inserida em um saco. Ao final do dia, à medida que o animal retornara para seu local de origem, as pedras iam sendo retiradas. Desta forma o controle era mantido e, caso sobrasse alguma pedra, percebia-se então que algum animal não havia retornado. Este foi o início da criação do conceito de número.

Nessa época o homem comia o que lhe era oferecido pela natureza. Para registrar os animais mortos numa caçada, os homens faziam marcas em uma vara. Usava-se também ossos de lobos para tais marcações. Quando descobriu o fogo, aprendeu a cozinhar os alimentos e a proteger-se melhor contra o frio. A escrita ainda não tinha sido criada. Isso é um grande indício que nos leva a crer que o homem realmente desenvolveu primeiro a contagem do que a escrita.

Outra maneira adotada era relacionar a quantidade de animais ou itens (divisões em grupos) com a quantidade de dedos das mãos: cinco dedos, cinco peixes, cinco bastões, cinco animais, e assim por diante. A ideia de contagem estava relacionada com os dedos da mão. Assim, ao contar as ovelhas, o pastor separava as pedras em grupos de cinco (sem saber o que era o cinco, pois apenas entendia a quantidade do grupo). Do mesmo modo os caçadores contavam os animais abatidos, traçando riscos na madeira ou fazendo nós em uma corda, também de cinco em cinco.

Devido a este tipo de "contagem" surgiu a palavra cálculo, que, em latim, significa *contas com pedras*.

2.1 O surgimento dos números Naturais

Ao longo da história observa-se o avanço da matemática e a necessidade extrema de contar ou mesmo de relacionar quantidades. Isso instigou o homem a desenvolver símbolos no intuito de expressar inúmeras situações. A origem e a formulação do conceito de Número ocorreu com o próprio desenvolvimento da matemática.

A partir das necessidades diárias do homem, o conceito de número natural surgiu por meio da contagem de objetos. Assim, este conceito foi introduzido pelas nações, em conjunto com o desenvolvimento de suas formas próprias de escrita, criando o sistema de contagem.

Diversos sistemas de numeração foram criados em todo o mundo no decorrer dos tempos, sendo os mais antigos originários do Egito, Suméria e Babilônia. Outros sistemas de numeração bastante conhecidos como Chinês, Maias, Grego, Romano, Indiano e Arábico.

Com o passar dos tempos, o homem passou a buscar algo que representasse de uma forma mais simples tais situações. Após o surgimento dos números naturais houve uma revolução do método de contagem, pois, a partir de então, passou-se a relacionar símbolos a determinadas quantidades. Cada quantidade poderia ser representada por um símbolo numérico.

Mesmo com o passar de tantos anos, ainda hoje existem autores e/ou estudiosos que argumentam se o algarismo "zero" é ou não um número natural. A introdução do zero no conjunto dos números naturais é relativamente nova na história da matemática. Os gregos, romanos, egípcios e babilônios não deixaram evidências claras da existência de um símbolo para designar o zero nos seus sistemas numéricos.

Tais discussões surgem pelo fato de que os números naturais são números da natureza e não é natural utilizar zero como contagem. Não se diz que em determinado local existem "zero carneiros", por exemplo. Já outros afirmam ser natural pois zero seria o primeiro elemento e o divisor central entre os números negativos e positivos. Se zero é ou não natural, isso nunca foi um problema, visto que em qualquer demonstração matemática que necessite do zero, acrescenta-se este a algum conjunto numérico ou não.

Posteriormente o conjunto dos números naturais fora representado pela letra $\mathbb{N}$ da seguinte forma: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

2.2 O surgimento dos números Negativos

Apesar dos egípcios ainda não conhecerem os números negativos, já evidenciavam sua existência por meio das construções de uma malha quadriculada e de pirâmides. Eles tomavam uma linha retilínea rente ao chão como "*linha zero*" e denominavam as linhas acima como sendo cúbicos acima do zero e as linhas abaixo do chão por cúbicos abaixo de zero.

Os chineses tinham alguns métodos para trabalhar com os números negativos ainda "desconhecidos". Estes eram conhecidos como opostos complementares, porém não eram considerados como entes matemáticos e sim uma consequência da necessidade de resolver alguns problemas, tais como a extração das raízes de determinadas equações.

Para os Hindus, a matemática era muito voltada para prática, principalmente na astronomia, porém também houve dedicação nos estudos de equações quadráticas e lineares diofantinas, onde ficou evidente a aceitação dos números negativos como possível solução para essas equações, mesmo desconhecendo-se tais números como conhecemos hoje.

O surgimento dos números negativos, para os gregos, contou com importantes aliados: Tales de Mileto (624 - 548 a.C) e Pitágoras de Samos (570 - 490 a.C), juntamente com as escolas Jônica e Pitagórica. Por isso, na civilização grega, o conceito de número negativo se deu de forma mais evidente, visto que Diofanto já os utilizava nas resoluções de equações. Porém o número não era visto como negativo, mas sim como um número com unidade negativa. Ex.: -10 = 10 unidades negativas.

Com o crescimento do império Árabe, Bagdá se firmara como um centro de produção do conhecimento que era muito influenciado pelo comércio. Este, por sua vez, fora um fator muito importante para aceitação dos números Inteiros Negativos, uma vez que estes números negativos representavam o prejuízo no comércio.

Os ingleses publicaram livros acerca dos números inteiros negativos em que alguns autores defendiam a sua utilização e outros eram totalmente contra o seu uso, não aceitando-os como entes matemáticos. Nessa perspectiva, o assunto fora muito discutido e desencadeou um crescimento de estudos matemáticos acerca do tema.

Diante das produções matemáticas dos ingleses, da forte influência do comércio e dos estudos de resolução de equações, os Números Inteiros Negativos passaram a ser vistos como entes matemáticos em meados do século XVIII, fazendo parte de nossos estudos e de nosso dia-a-dia.

Voltando à história da descoberta e criação dos números negativos, com o início do Renascimento surgiu a expansão comercial, o que motivaram as trocas. Isso aumentou a circulação de dinheiro da época, obrigando os comerciantes a expressarem situações envolvendo lucros e prejuízos. As Ciências necessitavam também de símbolos para representar temperaturas acima e abaixo de 0º C, por exemplo. Astrônomos e físicos procuravam uma linguagem matemática para expressar a atração entre dois corpos e sentidos de movimentos.

No caso das outras ciências, quando um corpo age com uma força sobre outro, este segundo reage com força de mesma intensidade, porém, com sentido contrário. A tarefa não estava somente em criar estes novos números; era preciso encontrar símbolos que permitissem operações matemáticas com fins de veracidade com tais números, de modo prático e eficiente.

Uma nova notação numérica precisaria ser instituída. A maneira que foi encontrada para resolver tais problemas consistia no uso dos símbolos + e -. Escrevia-se algo do tipo n+ (o sinal + à frente do numeral indicava uma compra, temperaturas acima de zero e sentido favorável ao do movimento) ou n- (o sinal - à direita do numeral indicava uma venda, temperaturas abaixo de zero e sentido contrário ao do movimento). Posteriormente foram denominados números positivos e negativos.

Com essa nova simbologia fora instituída uma nova maneira de ver os números. Os matemáticos da época desenvolveram técnicas operatórias capazes de expressar qualquer situação envolvendo tais números. Surgiria então um novo conjunto numérico posteriormente representado pela letra Z de Zahl (número em alemão), sendo formado pelos números positivos (Naturais) e seus respectivos opostos, juntamente com o número neutro podendo ser escrito da seguinte forma: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...\}$.

2.3 A descoberta dos números Racionais

No Egito Antigo, aproximadamente há 3000 antes de Cristo, ocorria um fenômeno interessante: as divisões de terra eram feitas através de marcações no próprio solo pelos geômetras dos faraós, para a sua população. Na época da cheia do Rio Nilo, no período de junho a setembro, a água subia e cobria todas as marcações de terra. Eram marcações com cordas, que seria uma espécie de medida, denominada *estiradores de cordas*. Devido a cheia, os donos das terras eram obrigados remarcarem novamente estas divisões. No entanto, por mais eficazes que tentassem ser, não encontravam uma maneira simples para tal utilizando apenas números inteiros, o que os levou a particionar valores inteiros utilizando frações. As pessoas utilizavam as cordas, esticando-as e assim verificavam quantas vezes determinada unidade de medida estava contida nos lados da área demarcada, mas raramente a medida dava correta no terreno pois não cabia um número inteiro de vezes nos lados do terreno; com isso percebeu-se a necessidade de criar um novo tipo de número - o número fracionário, ou, propriamente dito, as frações.

Diante de tal situação e também outras percebeu-se a necessidade da "criação"de um conjunto numérico que englobasse todos os números inteiros - positivos e negativos - juntamente com os números fracionários e as dízimas periódicas.

Assim, o conjunto representado pela letra $\mathbb{Q}$ que derivada da palavra latina quotiēns, cujo significado é *quantas vezes* e contém todos os números "x"da forma

$$x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0. \tag{2.1}$$

Há quatro formas de se apresentar os números racionais:

- **Frações** (próprias ou impróprias);
- **Números mistos** (que é uma variação das frações impróprias);
- **Números decimais de escrita finita** ou **dízima finita**;
- **Dízimas infinitas**, que são números decimais cuja escrita aparecem períodos numéricos infinitos.

2.4 O surgimento dos números Irracionais

Pitágoras, filósofo e matemático grego, por volta do século VI a.C., formou e fundou a sociedade secreta e mística chamada de "pitagóricos". Os membros de tal sociedade dedicavam-se ao estudo dos números - considerando-os como essências das coisas - por acreditarem que Deus havia seguido padrões numéricos na criação do Universo e que todas as coisas poderiam ser explicadas por meio de números.

A Teoria dos Números surgiu desde então com Pitágoras e seus discípulos estudando as propriedades dos números inteiros. Estes e as frações até então já eram conhecidos, apesar das frações não serem consideradas como frações, propriamente ditas, mas representavam comparações entre duas grandezas de mesma espécie.

De acordo com a relação "para todo e qualquer triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre o seu maior lado é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os outros dois lados", que hoje conhecemos como *Teorema de Pitágoras*, surgiu um problema: o cálculo da diagonal de um quadrado cujo lado mede 1 unidade. Como eles apenas conheciam os números racionais foi com grande surpresa e choque ao descobrirem que haviam segmentos de reta cujas medidas não podiam ser expressas por um número racional. Esta primeira descoberta de um número irracional é atribuída a Hipaso de Metaponto, discípulo de Pitágoras.

Os Pitagóricos consideraram quebrada a harmonia do universo, já que não podiam aceitar a raiz quadrada de dois como um número, mas não podiam negar que esta raiz era a medida da diagonal de um quadrado unitário.

A partir daí os números irracionais entraram na obscuridade e foi só com Eudoxo de Cnido (408 a.C - 355 a.C) que eles voltaram a ser estudados pelos gregos, porém, somente em 1872 que o matemático alemão Dedekind fez entrar na aritmética, em termos rigorosos, os números irracionais que a geometria havia sugerido há mais de vinte séculos.

Hoje este número é conhecido como $\sqrt{2}$ e veremos abaixo uma possível demonstração de tal irracionalidade:

Suponhamos então que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Assim, podemos escrever que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, com a, b $\in$ Z e b $\neq$ 0. Suponhamos que $\frac{a}{b}$ já seja uma fração irredutível, ou seja, mdc (a, b) = 1. Dessa maneira, elevando-se ambos os membros ao quadrado teremos que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Longrightarrow (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Longrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Longrightarrow 2b^2 = a^2. \tag{2.2}$$

Podemos então observar que a^2 é um número par, assim como $2b^2$. Dessa maneira, afirmamos que a = 2k, com k $\in$ Z.

Substituindo a = 2k em (1.2), teremos que

$$2b^2 = (2k)^2 \Longrightarrow 4k^2 = 2b^2 \Longrightarrow 2k^2 = b^2. \tag{2.3}$$

Note que b^2 também é um número par. Dessa forma, como a^2 é um número par e b^2 também é, segue que a e b são números pares, pois se o quadrado de um número é par, isto significa que o número também é. Porém, a e b sendo pares, mdc(a,b) $\neq$ 1. Absurdo.

Portanto, $\sqrt{2}$ não é um número racional; logo, é irracional.

2.5 A fundamentação do conjunto dos números Reais

A união de todos os conjuntos numéricos até então conhecidos originou a criação do conjunto dos números reais, responsável por representar e organizar os números em um único conjunto.

Desde 1958, Dedekind, quando dava aulas de cálculo, se mostrou interessado em problemas que envolviam números irracionais. Para ele, o conceito de limite deveria ser desenvolvido através de uma aritmética pura isenta do uso de geometria.

Dedekind chegou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento de reta se deve a uma propriedade bem forte: *a natureza da divisão do segmento em duas partes por um ponto dado.* Se os pontos de uma reta se dividem em duas classes tais que todos os pontos da primeira estão à esquerda de todos os pontos da segunda, então existe um e somente um ponto que realiza essa divisão em duas classes, isto é, que separa a reta em duas partes. Esta é uma ideia clara sobre **cotas inferiores** e **superiores** da análise que conhecemos hoje.

O domínio dos números racionais pode ser estendido de modo a formar um *continuum* de números reais se supusermos o que agora se chama o axioma de Cantor-Dedekind - que os pontos sobre a reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais. Isso significa que para toda divisão dos números racionais em duas classes A e B tais que todo número da primeira classe A é menor que todo número da segunda classe B, existe um e somente um número real que produz essa classificação. Se A tem um máximo ou se B tem mínimo, o corte define um número racional; mas se A não tem máximo e B não tem mínimo, então o corte define um número irracional. Ele observou que os teoremas fundamentais sobre limites pode ser provados rigorosamente sem apelo à geometria. Foi a geometria que iniciou o caminho para uma definição conveniente de continuidade, mas no fim foi excluída da definição aritmética formal do conceito.

A noção de corte de Dedekind, no sistema de números racionais, ou uma construção equivalente dos números reais, tinha agora substituído a grandeza geométrica na análise.

2.6 Os números Complexos

Até cerca de 1650, as únicas raízes para equações consideradas como verdadeiras eram as que correspondessem à grandezas como comprimentos, áreas, volumes, massas, etc. Porém, na resolução de algumas equações quadráticas encontravam-se raízes que eram divididas em verdadeiras (correspondiam aos reais positivos) e falsas (que correspondiam aos reais negativos e não eram consideradas como legítimas). As únicas e raras ocorrências de raízes negativas nesse período surgiam em problemas de contabilidade, onde eram interpretadas como dívidas.

Em 1545, Cardano, ao tentar resolver a equação $x^3 = 4 + 15\text{x}$, constatou que, mesmo sabendo que x = 4 era uma raiz verdadeira e legítima, a equação

$$\text{x} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{-121})} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{-121})}$$

expunha um valor estranho.

Esta relação é obtida com o uso da regra de dal Ferro-Tartaglia, que é uma solução para equações do terceiro grau.

* Uma breve dedução da fórmula de Cardano

Seja uma equação contendo um polinômio de grau 3 da forma $ay^3 + by^2 + \text{cy} + \text{d} = 0$ com a = 1, ou seja, $y^3 + by^2 + \text{cy} + \text{d} = 0$. Tome a substituição $\text{y} = \text{x} - \dfrac{b}{3}$ de forma a transformar esta equação em uma cúbica sem o termo em x^2.

Feito isso, teremos que

$$\left(x-\frac{b}{3}\right)^3+b\left(x-\frac{b}{3}\right)^2+c\left(x-\frac{b}{3}\right)+d=0\Longrightarrow \tag{2.4}$$

$$x^3-\frac{3x^2b}{3}+\frac{3xb^2}{9}-\frac{b^3}{27}+b\left(x^2-\frac{2xb}{3}+\frac{b^2}{9}\right)+cx-\frac{bc}{3}+d=0\Longrightarrow \tag{2.5}$$

$$x^3+x\left(\frac{-b^2}{3}+c\right)+\frac{2b^3}{27}-\frac{bc}{3}+d=0. \tag{2.6}$$

Esta equação obtida pode ser escrita na forma x^3 + Px + C = 0. É considerada que a raiz desta equação seja dada como uma soma do tipo x = u + v. Dessa maneira, teremos que

$$(u+v)^3+P(u+v)+C=0\Longrightarrow \tag{2.7}$$

$$u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+uP+vP+C=0\Longrightarrow \tag{2.8}$$

$$u^3+v^3+(3uv+P)(u+v)+C=0. \tag{2.9}$$

Como 3uv + P = 0, a solução da equação será dada por u^3 + v^3 = -C. Desta forma, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u^3+v^3=-C \\ 3uv+P=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3+v^3=-C \\ uv=-\dfrac{P}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3+v^3=-C \\ u^3v^3=-\dfrac{P^3}{27} \end{cases}.$$

Dessa maneira temos que u^3 e v^3 são a soma e o produto das raízes de uma equação do segundo grau y^2 + Cy - $P^3.27^{-1}$ = 0. Assim, substituindo tais soluções no método de resolução de equações de segundo grau, teremos que

$$y'=u^3=\frac{-C+\sqrt{C^2+\dfrac{4P^3}{27}}}{2}\ e\ y''=v^3=\frac{-C-\sqrt{C^2+\dfrac{4P^3}{27}}}{2}. \tag{2.10}$$

Dessa maneira, teremos que

$$u=\sqrt[3]{\frac{-C+\sqrt{C^2+\dfrac{4P^3}{27}}}{2}}\ e\ v=\sqrt[3]{\frac{-C-\sqrt{C^2+\dfrac{4P^3}{27}}}{2}}. \tag{2.11}$$

Foi considerado que a raiz desta equação é do tipo x = u + v. Portanto

$$x=u+v=\sqrt[3]{\frac{-C+\sqrt{C^2+\dfrac{4P^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-C-\sqrt{C^2+\dfrac{4P^3}{27}}}{2}}\Longrightarrow \tag{2.12}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-C}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-C}{2} - \sqrt{\frac{C^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}. \tag{2.13}$$

Enfim, esta ficou conhecida como **FÓRMULA DE CARDANO**. Esta fórmula, juntamente com o método de resolução das equações de quarto grau, foi apresentada a público em 1545, no *Ars Magna* (do latim: A Grande Arte), de Cardano, que foi o primeiro livro de Álgebra da Renascença a ir além dos resultados obtidos pelos matemáticos da antiguidade e pelos matemáticos árabes. A publicação desta obra deu um novo impulso ao estudo da álgebra.

Voltando ao nosso problema inicial, ou seja, o de resolver a equação $x^3 = 4 + 15$x, pela fórmula, teremos que

$$x = \sqrt[3]{\frac{-(-4)}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-(-4)}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} \Longrightarrow \tag{2.14}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 + \frac{(-1)^3.5^3.3^3}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 + \frac{(-1)^3.5^3.3^3}{27}}} \Longrightarrow \tag{2.15}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 + -1.5^3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 + -1.5^3}} \Longrightarrow \tag{2.16}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \tag{2.17}$$

Cardano se deparou com uma raiz quadrada de um número negativo, o que o impediu de resolver a equação para chegar que x $= 4$. Daí, pensou-se em escrever $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}}$ de uma outra maneira, algo do tipo

$$a + b\sqrt{-1} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} \tag{2.18}$$

e que

$$a - b\sqrt{-1} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},\ com\ a, b \in \mathbb{R}. \tag{2.19}$$

Elevando a equação (2.18) ao cubo de ambos os lados, obteremos que

$$(a + b\sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121} \Longrightarrow \tag{2.20}$$

$$a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} + 3ab^2(-1) + b^3(-1)\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121} \Longrightarrow \tag{2.21}$$

$$3a^2b\sqrt{-1} - b^3\sqrt{-1} - 11\sqrt{-1} = 2 + 3ab^2 - a^3 \Longrightarrow \tag{2.22}$$

$$\sqrt{-1} = \frac{2 + 3ab^2 - a^3}{3a^2b - b^3 - 11} \Longrightarrow \tag{2.23}$$

$$-1 = \left(\frac{2+3ab^2-a^3}{3a^2b-b^3-11}\right)^2. \tag{2.24}$$

Analogamente, elevando a equação (2.19) ao cubo de ambos os lados, obteremos que

$$a - b\sqrt{-1} = (2-\sqrt{-121})^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow \tag{2.25}$$

$$-1 = \left(\frac{2+3ab^2-a^3}{-3a^2b+b^3+11}\right)^2. \tag{2.26}$$

Como as equações (2.24) e (2.26) são ambas iguais a -1, teremos que

$$\left(\frac{2+3ab^2-a^3}{3a^2b-b^3-11}\right)^2 = \left(\frac{2+3ab^2-a^3}{-3a^2b+b^3+11}\right)^2 \Longrightarrow \tag{2.27}$$

$$\left|\frac{2+3ab^2-a^3}{3a^2b-b^3-11}\right| = \left|\frac{2+3ab^2-a^3}{-3a^2b+b^3+11}\right|. \tag{2.28}$$

Dessa maneira, teremos duas situações:

$$\frac{2+3ab^2-a^3}{3a^2b-b^3-11} = \frac{2+3ab^2-a^3}{-3a^2b+b^3+11} \tag{2.29}$$

ou

$$\frac{2+3ab^2-a^3}{3a^2b-b^3-11} = \frac{2+3ab^2-a^3}{3a^2b-b^3-11}. \tag{2.30}$$

Percebe-se que em (2.30) a igualdade é válida sempre, respeitadas as condições de existência, visto que ambas as expressões são exatamente idênticas. Dessa maneira, iremos resolver a equação (1.29).

$$\frac{2+3ab^2-a^3}{3a^2b-b^3-11} = \frac{-2-3ab^2+a^3}{3a^2b-b^3-11} \Longrightarrow \tag{2.31}$$

$$2+3ab^2-a^3 = -2-3ab^2+a^3 \Longrightarrow \tag{2.32}$$

$$4+6ab^2-2a^3 = 0 \Longrightarrow \tag{2.33}$$

$$2+3ab^2-a^3 = 0. \tag{2.34}$$

O caso em que $\frac{C^2}{2^2} + \frac{p^3}{3^3} > 0$, era chamado na época de *casus irreducibilis* porque qualquer tentativa de calcular de fato o valor da incógnita pela fórmula de Cardano-Tartaglia, sem conhecê-lo antecipadamente levaria, de novo, à equação de terceiro grau original, como podemos observar acima. Porém, este era, em certo sentido, o mais importante de todos, pois era justamente o caso em que a equação considerada tinha três raízes reais.

Foram necessários mais de 25 anos para que Bombelli, em 1572, resolvesse este problema.

Bombelli teve uma ideia bastante ousada para a época de realizar operações utilizando as mesmas condições estabelecidas para os números reais, com a ressalva de que $(\sqrt{-1})^2$=-1, ou seja, adicionou-se uma nova propriedade que não fazia parte do conjunto dos números reais.

Bombelli admitiu que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ pudesse ser escrito na forma $m+n\sqrt{-1}$ e que $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ da forma $m-n\sqrt{-1}$. Feito isso, a equação pode ser resolvida, pois, de (2.19), x = $m+n\sqrt{-1}$ + $m-n\sqrt{-1}$ = 2m, com m = 2, pois x = 4.

$$2+\sqrt{-121}=2+\sqrt{-1.121}=2+\sqrt{-1.11^2}=2+11\sqrt{-1}= \tag{2.35}$$

$$8-6+(12-1)\sqrt{-1}=2^3+3.2.(\sqrt{-1})^2+2^2.3\sqrt{-1}-\sqrt{-1}= \tag{2.36}$$

$$2^3+2^2.3\sqrt{-1}+3.2.(\sqrt{-1})^2+(\sqrt{-1})^3=(2+\sqrt{-1})^3. \tag{2.37}$$

Logo, tem-se que

$$2+\sqrt{-121}=(2+\sqrt{-1})^3. \tag{2.38}$$

Analogamente, tem-se que

$$2-\sqrt{-121}=(2-\sqrt{-1})^3. \tag{2.39}$$

De fato, pois

$$(2-\sqrt{-1})^3=2^3-3.2^2\sqrt{-1}+3.2.(\sqrt{-1})^2-(\sqrt{-1})^3= \tag{2.40}$$

$$8-12\sqrt{-1}-6+\sqrt{-1}=2-11\sqrt{-1}. \tag{2.41}$$

Portanto, a = 2 e b = 1 em (2.18) e (2.19) e, de (2,17), encontra-se que

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{-1})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{-1})^3}= \tag{2.42}$$

$$2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=2+2=4. \tag{2.43}$$

O próprio Bombelli não estava muito seguro de sua criação, até porque, para os demais matemáticos da época, estes números negativos no interior de uma raiz quadrada eram vistos de maneira suspeita, ou seja, eram tolerados na falta de coisa melhor.

"*Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número. (...) A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova.*"

Albert Girard, em 1629, utilizou, efetivamente, o símbolo $\sqrt{-1}$ quando enunciou as relações entre raízes e coeficientes de uma equação. Em 1797, Caspar Wessel (dinamarquês) representou, pela primeira vez, os números complexos de forma geométrica, estabelecendo uma correspondência objetiva entre estes e os pontos do plano.

O símbolo i, para a representação de $\sqrt{-1}$, foi criado por Leonard Euler, mas, somente após o seu uso por Gauss em 1801, é que foi efetivamente aceito.

Enfim, em 1832, Gauss introduziu a nomenclatura número complexo.

3 O Infinito

3.1 Paradoxos: uma maneira contraditória de enxergar o infinito

No nosso entendimento, o infinito, muitas vezes, acaba sendo um obstáculo para alguns estudiosos, para outros, a solução e, para a grande maioria das pessoas, um desconhecido. Existem estudos a respeito do infinito que abordam conceitos bem avançados. Acredito que na matemática o infinito seja visto de maneira exótica. Esse pode ser numérico ou geométrico, pois pode-se imaginar um conjunto com infinitos números ou mesmo uma reta infinita, contendo assim, infinitos pontos.

No final do século XIX e o início do XX, apareceram na matemática vários resultados estranhos e/ ou nada intuitivos. Alguns destes resultados geraram grandes contradições, denominados genericamente de paradoxos, que são pensamentos, proposições ou argumentos que contrariam os princípios básicos e gerais que costumam orientar o pensamento humano.

Alguns paradoxos são bem famosos tais como o **Paradoxo do Hotel Infinito de Hilbert** que diz que um hotel com infinitos quartos sempre poderá receber mais gente. Se os infinitos quartos já estiverem cheios com infinitos hóspedes e um novo cliente adentrar ao hotel, pede-se aos hóspedes que se mudem para o quarto seguinte, ou seja, se um hóspede estiver no quarto de número x, este se mudará para o quarto de número $x + 1$, com $x \in \mathbb{N}$. Desta maneira, o hóspede do quarto 1 vai para o quarto 2 e assim sucessivamente. Isto será possível para todos já que existem infinitos quartos e dessa forma o 1° quarto ficará vazio para o novo hóspede. Caso este chegue um número infinito, pedir-se-á aos que estão alocados trocarem de quarto, porém, desta vez, indo para o quarto cujo número é o 2x. Dessa forma ficarão quartos suficientes (todos os que têm número ímpar) para os infinitos novos hóspedes.

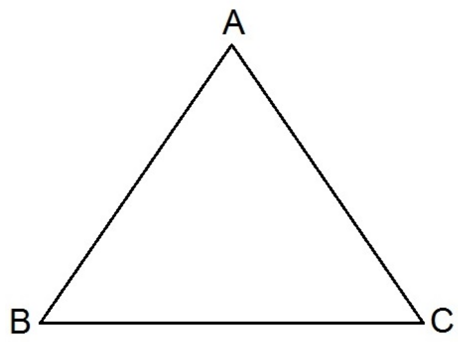
Temos também o **Paradoxo do mentiroso** que diz o seguinte: Epiménides é cretense (nascido na ilha de Creta) e afirma que todos os cretenses mentem. Se Epiménides for cretense e se todos os cretenses mentem então, quando Epiménides afirma que todos os cretenses mentem ela está dizendo a verdade, mas, por outro lado, Epiménides é cretense e por isso também mente! logo, ela mente e diz a verdade.

O **Paradoxo de Zenão** conta uma história da corrida entre Aquiles e uma tartaruga. Aquiles, um o herói grego e a tartaruga, uma simples tartaruga, decidem apostar uma corrida, porém, como a velocidade de Aquiles era bem maior que a da tartaruga, esta começaria a corrida à frente da linha de largada, ou seja, à frente de Aquiles. Daí surge o paradoxo: quando Aquiles chegar à posição inicial da tartaruga, esta encontra-se mais a frente, numa outra posição. Quando Aquiles chegar a esta nova posição, a tartaruga já não estará mais lá, pois avançou para uma terceira nova posição e assim sucessivamente, *ad infinitum*, o que nos leva a concluir que Aquiles, virtualmente, alcançaria a tartaruga, mas nessa linha de raciocínio, não importa quanto tempo se passe, Aquiles jamais a alcançaria, quão menos a ultrapassaria.

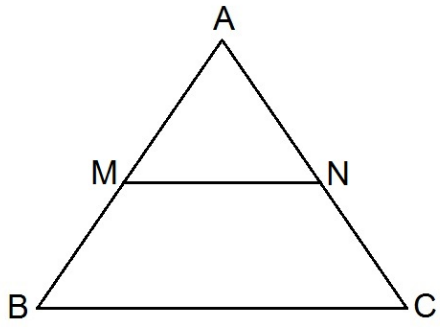
Percebemos que ao afirmar, por tal argumento, "Aquiles nunca alcançará a tartaruga", Zenão desconsiderou qualquer reflexão sobre o que é o tempo. A conclusão de que a tartaruga sempre estará a frente se sustenta sobre o argumento de infinitos deslocamentos simultâneos, tanto de Aquiles quanto da tartaruga (argumento filosófico). Matematicamente, supondo que o tempo transcorrido para cada deslocamento seja de $\frac{1}{x}$, com x $\in \mathbb{N}$, tem-se que o tempo transcorrido é uma progressão geométrica de razão inferior a "um", o que significa que somando-se os infinitos intervalos de tempo dessa progressão, haverá um valor limite ao qual o somatório converge. Encontra-se, então, uma incoerência no paradoxo, pois este define que a tartaruga jamais seria alcançada, o que é um absurdo. A análise temporal demonstra que isto acontecerá apenas em um intervalo fixo de tempo.

O **Paradoxo de Galileu** diz que "o todo é maior do que a parte". Este foi aceito e aplicado em diferentes contextos e já foi usado para negar a existência de totalidades infinitas. A princípio nem parece ser um paradoxo, pois se assemelha a uma afirmação precisa e incontestável, visto que, se uma parte é parte de um todo, logo, tal parte estaria dentro do todo, o que, por sua vez, faz-se maior do que a parte. A respeito de matemática, esta frase não é verdadeira. Vejamos um breve contra-exemplo:

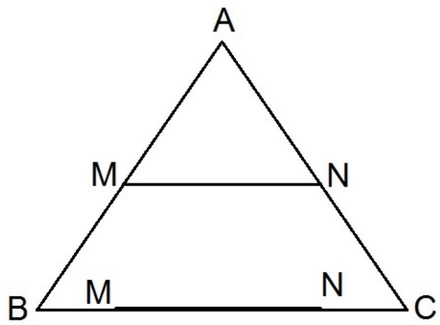
Suponha um triângulo ABC qualquer, não necessariamente isósceles, sendo BC a sua base.



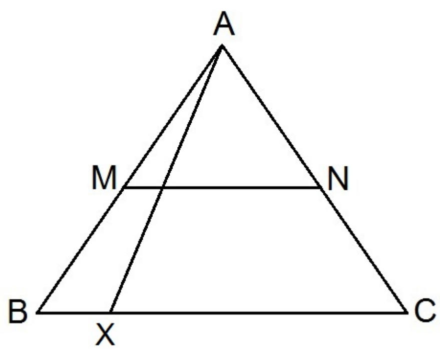
Tracemos um segmento de reta MN, paralelo a BC, de forma que M e N sejam os pontos médios de AB e AC, respectivamente.



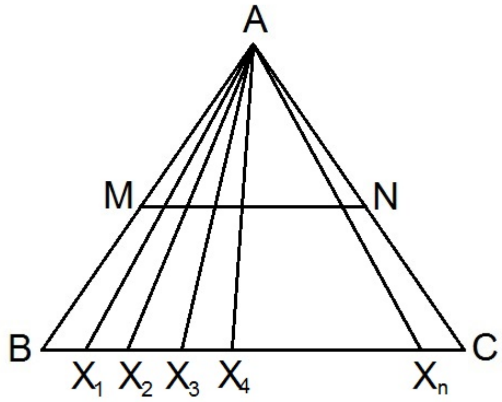
Desta forma, por semelhança de triângulos, sabe-se que a medida do segmento BC é o dobro da medida do segmento MN. Como $\overline{BC}= 2\overline{MN}$, segue que $\overline{MN} < \overline{BC}$, ou seja, é possível transportar o segmento MN e colocá-lo dentro de BC.



Tratando-se de comprimento, não há o que se contestar, porém, com relação à quantidade de pontos que cada segmento apresenta, é errado dizer que o número de pontos de BC é o dobro da quantidade de pontos de MN. Na verdade, ambos apresentam a mesma quantidade de pontos. A partir de A, pode-se traçar o segmento AX, com X $\in$ BC.



Podemos traçar infinitos segmentos partindo de A até BC.



É fato que, para que os segmentos da forma AX_i, com $X_i \in BC$ e $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ sejam construídos, é necessário interceptar MN. Em outras palavras, $MN \bigcap AX_i \neq \emptyset$, qualquer que seja X_i.

Suponhamos que seja possível preencher o triângulo ABC com todos os segmentos AX_i. Desta forma, haverão tantas interseções de AX_i com MN quanto X_i em BC, visto que a interseção sempre será única e exclusiva, o que nos mostra, intuitivamente, que MN possui a mesma quantidade de pontos que BC. Logo, a parte não é sempre menor do que o todo. Nessa direção, George Cantor afirmou que sempre que for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de dois conjuntos distintos, estes sempre terão a mesma quantidade de elementos. É trivial notar que se os conjuntos não forem distintos, estes serão iguais e possuirão a mesma quantidade de elementos.

3.2 Cardinalidade e enumerabilidade

Cardinalidade é o termo utilizado para se atribuir quantidade de elementos de um determinado conjunto, ou seja, associar cada elemento de um conjunto a um número natural único e exclusivo. Enumerabilidade é a capacidade ou não de se numerar e/ ou contar tais elementos.

É possível atribuir com exatidão o número natural que representa a quantidade em 12 pessoas ou em três dezenas de gatos ou em meia dúzia de frutas, pois trata-se de um universo discreto. Porém, ao medir-se o tempo gasto a partir de um momento zero, a resposta não será dada por meio de um número natural, pois não existem blocos inteiros ou sequenciais de tempo. Este é contínuo, assim como a medida de massa de um objeto ou sua velocidade. Tais medidas são mensuráveis no universo dos números reais.

Definição 3.1. *: Dizemos que um conjunto A é enumerável se for finito ou se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números naturais e A, ou seja, se* $\exists\ f\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$.

Definição 3.2. *Um conjunto contável é um conjunto finito ou enumerável.*

Na teoria de conjuntos, quando nos referimos à enumerabilidade nos remetemos precisamente ao ato de "enumerar" os elementos de tal conjunto, ou seja, associar cada elemento à uma posição ordenada (1° elemento, 2° elemento, 3° elemento, etc.). Quando dois conjuntos A e B possuem a mesma "quantidade de elementos", tais conjuntos possuem a mesma cardinalidade ($\#A = \#B$). É interessante frisar que a cardinalidade de um conjunto está diretamente ligada à quantidade de elementos que o conjunto possui e não ao fato de conseguirmos contar esta quantidade ou não.

Teorema 3.1. *A união de conjuntos enumeráveis é enumerável*

Demonstração. Sejam A e B dois conjuntos enumeráveis. Sendo A e B enumeráveis, existem $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ e $g : \mathbb{N} \longrightarrow B$. Se A e B forem disjuntos, ou seja, $A \cap B = \emptyset$, segue que $f(n_k) \neq g(n_p)$, $\forall\ n, p \in \mathbb{N}$.

Pela definição 3.1, temos que um conjunto é enumerável se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto e $\mathbb{N}$. Logo, em particular, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto $\mathbb{N}$ e o $2\mathbb{N}$, pois, os números naturais pares podem ser ordenados. Utilizando raciocínio análogo, também há uma correspondência entre $\mathbb{N}$ e o (2n+1)$\mathbb{N}$.

Assim, como $f(n_k) = a \in A$ e $g(n_p) = b \in B$, basta associarmos os elementos $f(n_k)$ de A ao conjunto $2\mathbb{N}$ e os elementos $g(n_p)$ de B ao conjunto $(2n+1)\mathbb{N}$. Logo, basta tomar a função

$$h(x) = \begin{cases} f(n), n = 2x \\ g(n), n = 2x+1 \end{cases}$$

sendo $h : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B$.

Se A e B não forem disjuntos, então $A \cap B \neq \emptyset$. Seja $C = A - B$. Assim, $A \cup B = C \cup B = (A - B) \cup B$. Assim, C e B são conjuntos disjuntos, logo, enumerável. Portanto, se $C \cup B$ é enumerável, segue que $A \cup B$ também é. □

Teorema 3.2. *Dado um conjunto A enumerável, qualquer subconjunto B, finito ou infinito de A, também será enumerável. Reciprocamente, se um conjunto B não for enumerável e estiver contido em outro conjunto D, D não será enumerável.*

Demonstração. Sejam A um conjunto enumerável e B um subconjunto infinito de A. Sendo A enumerável, existe uma bijeção da forma $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$. Queremos então determinar uma $g : \mathbb{N} \longrightarrow B$, com $B = \{g(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Como B é subconjunto de A, $\exists\ b_p \in B$ tal que $b_p = f(n_k) = a \in A$, com $p, k \in \mathbb{N}$. Logo, há uma sobrejeção associando os elementos de B à elementos de $\mathbb{N}$. Dessa forma, podemos escrever que $B = \{b_p = f(n_k) \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } f(n_k) \in A\}$, ou seja, $b_1 = f(n_t)$, $b_2 = f(n_q), ..., b_p = f(n_k)$.

Por outro lado, como $b_p = f(n_k) = a$, se $b_q = f(n_k) = a$, segue que $a = b_p = b_q$. Logo, $b_p = b_q$, o que mostra que há um injetividade de $\mathbb{N}$ em B. Portanto, havendo uma injetividade e uma sobrejetividade de $\mathbb{N}$ em B, há uma bijeção de $\mathbb{N}$ em B, o que nos define $g : \mathbb{N} \longrightarrow B$. Logo, B é enumerável. □

3.3 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são conjuntos enumeráveis

É trivial que $\mathbb{N}$ é enumerável, pois $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ e é possível estabelecer uma bijeção de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$.

A enumerabilidade de $\mathbb{Z}$ pode ser verificada estabelecendo-se a seguinte relação biunívoca com o conjuntos dos $\mathbb{N}$: seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, com $\mathbb{Z} = \{f(0), f(1), f(2), ..., f(n)\}$. Associe $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = -1, f(3) = 2, f(4) = -2$, etc., ou seja,

$$f(n) = \begin{cases} f(n) = n - \dfrac{(n-1)}{2}, \text{ para n ímpar} \\ f(n) = -\dfrac{n}{2}, \text{ para n par.} \end{cases}$$

Associamos os números naturais ímpares aos inteiros negativos e os naturais pares ao inteiros não-negativos. Desta forma, nota-se a enumerabilidade de $\mathbb{Z}$ e que $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N}$.

O conjunto dos números racionais é enumerável pois pode-se estabelecer uma bijeção $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}+$ da seguinte forma:

Sabemos que toda fração racional é da forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$ e como já foi visto, o conjunto dos números inteiros é enumerável. Assim, consideremos o seguinte agrupamento, com $mdc(a, b) = 1$:

- Frações cuja soma entre a e b é 3: $\frac{2}{1}$ e $\frac{1}{2}$. Logo, $S_3 = \{\frac{1}{2}\ , 2\}$.
- Frações cuja soma entre a e b é 4: $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{1}$. Logo, $S_4 = \{\frac{1}{3}, 3\}$.
- Frações cuja soma entre a e b é 5: $\frac{1}{4}; \frac{4}{1}; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}$. Logo, $S_5 = \{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\ , \frac{3}{2}, 4\}$.
- Frações cuja soma entre a e b é 6: $\frac{1}{5}; \frac{5}{1}$. Logo, $S_6 = \{\frac{1}{5}, 5\}$.
- Frações cuja soma entre a e b é 7: $\frac{1}{6}; \frac{6}{1}; \frac{2}{5}; \frac{5}{2}; \frac{3}{4}; \frac{4}{3}$. Logo, $S_7 = \{\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, 6\}$.

E assim sucessivamente, adicionando o conjunto $\{0, 1\}$ em nosso agrupamento. Note que, como todo número inteiro pode ser escrito como soma de outros inteiros, o que nos garante todas as somas possíveis, ou seja, todo e qualquer número inteiro poderá ser obtido e todas as frações são possíveis de serem construídas. De fato:

Com $a = b = 1$ tem-se a fração 1.

Dado um número k, existem a, $b \in \mathbb{Z}$ tais que $a + b = k$. Dessa forma, somando-se 1 de ambos os lados, $a + b + 1 = k + 1 \longrightarrow (a + 1) + b = k + 1$, ou seja, dado qualquer inteiro, sempre haverá uma soma possível afim de obtê-lo. Logo, todas as frações poderão ser agrupadas em conjuntos com uma quantidade de elementos enumeráveis. Analogamente podemos enumerar o conjunto $\mathbb{Q}_-$, tomando as somas com números na forma $(-a)$ e $(-b)$, com a, $b \in \mathbb{Z}$. Desta forma, nota-se a enumerabilidade de $\mathbb{Q}$ e que $\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$.

3.4 $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ não são enumeráveis

Para mostrar que $\mathbb{R}$ não é enumerável, basta mostrarmos que existe um subconjunto de $\mathbb{R}$ não enumerável, pois, de acordo com teorema 3.2, se um conjunto B não for enumerável e estiver contido em outro conjunto D, D não será enumerável. Assim, basta demostrarmos o teorema abaixo:

Teorema 3.3. *O intervalo aberto* $]0, 1[$ *de números reais é um conjunto não enumerável.*

Demonstração. No intervalo $]0, 1[$, todos os números são da forma $\frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, são escrito como $0, a_1a_2a_3a_4a_5...a_k...$, sendo $0 \leq a_k \leq 9$, com $k \in \mathbb{N}$. Todo número desse tipo pode ser escrito como uma dízima periódica da forma $0, a_1a_2a_3a_4a_5...a_k...99999... = 0, a_1a_2a_3a_4a_5...a_k...a_p$, sendo a_p o primeiro algarismo diferente de 9 da dízima da última sequência de noves deste número.

Suponhamos agora que este intervalo seja enumerável. Logo, existe uma correspondência biunívoca $f : \mathbb{N} \longrightarrow]0, 1[$. Sendo assim, é possível ordenar todos os números contidos neste intervalo da seguinte maneira:

$$f(n) = \begin{cases} f(1) = 0, a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1k}... \\ f(2) = 0, a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2k}... \\ f(3) = 0, a_{31}a_{32}a_{33}...a_{3k}... \\ f(4) = 0, a_{41}a_{42}a_{43}...a_{4k}... \\ ... \\ f(k) = 0, a_{k1}a_{k2}a_{k3}...a_{kk}... \\ f(k+1) = 0, a_{(k+1)1}a_{(k+1)2}a_{(k+1)3}...a_{(k+1)k}... \\ ... \end{cases}$$

Consideremos agora o número $d = 0, a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}...a_{kk}...$ formado pelos algarismos dos números listados tomados em diagonal a partir de a_{11}. Este número também pertence ao intervalo $]0, 1[$, porém, não faz parte do conjunto de números acima citados.

Suponhamos que exista algum $f(t) = d$, com $t \in \mathbb{N}$. Dessa maneira, tem-se que $f(t) = 0, a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}...a_{kk}... = 0, a_{t1}a_{t2}a_{t3}a_{t4}...a_{tk}...$. Logo, o dígito a_{tt} faz parte desta dízima. Sem perda de generalidade, podemos supor que $t < k$. logo, conclui-se que $d = 0, a_{t1}a_{t2}a_{t3}a_{t4}...a_{tt}...a_{kk}...$, ou seja, teríamos 2 elementos da forma a_{tt} cujas linha e coluna são iguais, o que é um absurdo. Sendo assim, foi um absurdo supor que o intervalo $]0,1[$ fosse enumerável. Portanto, O intervalo aberto $]0,1[$ não é enumerável. Pelo teorema 3.2, como $]0,1[\subset \mathbb{R}$, segue que $\mathbb{R}$ não é enumerável. □

Tal demonstração é conhecida como o elegante método denominado de diagonal, proposto por George Cantor em 1874.

Novamente pelo teorema 3.2, como $\mathbb{R}$ não é enumerável e $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, segue que $\mathbb{C}$ não é enumerável.

3.5 Equipotência e Cardinais Transfinitos

Uma outra maneira de contrariar a informação de que *a parte é sempre menor do que o todo*, foi dada por Galileu em 1638, em que ele estabeleceu uma bijeção entre os números naturais e seus quadrados da seguinte forma:

Considere a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, de maneira que $f(x) = x^2$.

- Associa-se 1 a 1^2, ou seja, $f(1) = 1$.
- Associa-se 2 a 2^2, ou seja, $f(2) = 4$.
- Associa-se 3 a 3^2, ou seja, $f(3) = 9$.

  ...
- Associa-se n a n^2, ou seja, $f(n) = n^2$.

Dessa maneira, como $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito, pressupõe-se que $\mathbb{N}^2$ também seja, pois há uma relação biunívoca entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^2$. A partir disso, Galileu concluiu que há tantos quadrados quantos são os números. Por esse fato, essa demonstração é conhecida como paradoxo de Galileu.

Definição 3.3. *Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A é equipotente ao conjunto B se existe uma bijeção $f : A \to B$. Denotamos dois conjuntos equipotentes por $A \sim B$ e diremos nesse caso que eles têm a mesma cardinalidade. Observe também que a relação de equipotência é uma relação de equivalência.*

Sendo assim, os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^2$ possuem a mesma quantidade de elementos.

Enfim, diz-se que um conjunto é infinito se este puder ser colocado em correspondência biunívoca com alguma de suas partes próprias. Tal definição foi estabelecida por Richard Dedekind (1831-1916). Atualmente, esta é base para muitas demonstrações na teoria de números.

George Cantor (1845 a 1918) estudou sistematicamente o conceito de potências de conjuntos e concluiu que os conjuntos infinitos não são todos equipotentes entre si, ou seja, os conjuntos infinitos podem apresentar uma infinidade de tamanhos.

Proposição 3.1. *Sejam S um conjuntos e $P(S) = \{A; A \subset S\}$ o conjunto das partes de S. Então S não é equipotente a $P(S)$.*

Demonstração. Suponha por contradição que $S \sim P(S)$. Logo, existe uma bijeção $f : S \to P(S)$. Seja $A = \{x \in S; x \notin f(x)\}$. Denotemos $f(x) = B_x \subset S$. Assim, $A = \{x \in S; x \notin B_x\}$. Portanto $A \subset P(S)$. Como f é bijetora, existe $p \in S$ tal que $f(p) = A$.

Se $p \in A \Rightarrow p \notin f(p) = B_p = A$ o que é uma contradição.

Se $p \notin A \Rightarrow p \in f(p) = B_p = A$ o que novamente é uma contradição.

Logo, não pode existir $f : S \to P(S)$ bijetora. $\square$

Corolário 3.1. *Dado qualquer conjunto S, temos que $\#S < \#P(S)$, ou seja, dado qualquer cardinal, sempre existe um número maior que o número dado.*

Demonstração. Observe que a função $f : S \to P(S)$, definida por $f(x) = \{x\}$, é injetora. Logo $\#S \leq \#P(S)$. Mas, pela proposição anterior S não é equipotente a $P(S)$, logo $\#S \neq \#P(S)$, ou seja, $\#S < \#P(S)$. $\square$

Cantor desenvolveu uma teoria dos números cardinais transfinitos, representados pela letra $\aleph$ (alef), primeira letra do alfabeto grego. Assim como os cardinais finitos 1, 2, 3, 4, etc, os cardinais infinitos também possuem uma ordem $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, etc, afinal são números cardinais. Assim como existe uma relação de ordem nos cardinais finitos, ou seja, $1 < 2 < 3 < 4 <... < \text{n} < ...$ existe uma mesma relação de ordem entre os cardinais infinitos, ou seja, $\aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < ... < \aleph_n < ...$, de forma que não existe nenhum outro $\aleph_i$ entre $\aleph_n$ e $\aleph_{n+1}$.

Um número cardinal mede a grandeza de um conjunto, ou seja, quantos elementos este possui, seja finito ou não; os cardinais transfinitos medem as grandezas de conjuntos infinitos.

O conjunto $\mathbb{N}$ é infinito. Este será tomado como sendo a referência menor entre todos os $\aleph_i$. Assim, a ele e a todos os conjuntos equivalentes serão atribuídos o cardinal infinito $\aleph_0$, o que chamamos de possança de $\mathbb{N}$ (número de elementos de $\mathbb{N}$). Vale ressaltar que $\aleph_0$ é um número infinito e que não pode ser comparado com um número natural.

O cardinal $\aleph_0$ também é atribuído a todos os conjuntos $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{N}^3$,..., $\mathbb{N}^n$, com $\text{n} \in \mathbb{N}$, pois, assim como fora feito acima, por indução, percebe-se que qualquer subconjunto $\mathbb{N}^n$ de $\mathbb{N}$ obtido a partir da função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, de maneira que $f(x) = x^n$, estabelece uma relação biunívoca entre seus elementos e o conjunto dos números naturais, bem como subconjuntos do tipo $\mathbb{N}^n$.

É simples verificar que $\mathbb{Z}$ possui a mesma possança de $\mathbb{N}$. Basta escrever a sucessão $... - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...$ na forma $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ..., -n, n$. Dessa maneira, nota-se que os elementos em posições pares são os positivos e que os negativos se situam nas posições ímpares.

Assim como foi feito anteriormente, ordenando-se as frações racionais na forma

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \frac{1}{6}, ...$$

e eliminando-se todas as frações repetidas, ou seja, as não irredutíveis, percebe-se que $\mathbb{Q}$ possui a mesma possança de $\mathbb{N}$, ou seja, a possança de Q é $\aleph_0$.

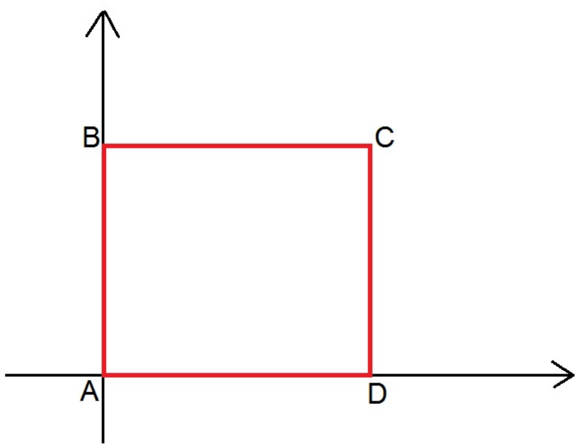
Ao analisar-se os conjuntos infinitos obtidos com base em $\mathbb{N}$, se fôssemos montar um conjunto agrupando conjuntos ordenados segundo a soma de seus elementos, não seria possível incluir os subconjuntos infinitos dos números naturais. Esta percepção induziu Cantor a propôr um conjunto com possança $\aleph_1$, ou seja, um conjunto infinito em que não se estabelece uma correspondência biunívoca com $\mathbb{N}$.

Surge aí a "Hipótese do Contínuo"(*teorema 3.3*), que atribui a possança dos números reais como sendo $\aleph_1$. Assim como existem outros conjuntos derivados de $\mathbb{N}$ que possuem possança $\aleph_0$, existem outros conjuntos que possuem possança $\aleph_1$. Qualquer segmento contínuo tomado em uma reta real terá possança $\aleph_1$ (*ver "paradoxo de Galileu" em 2.1*).

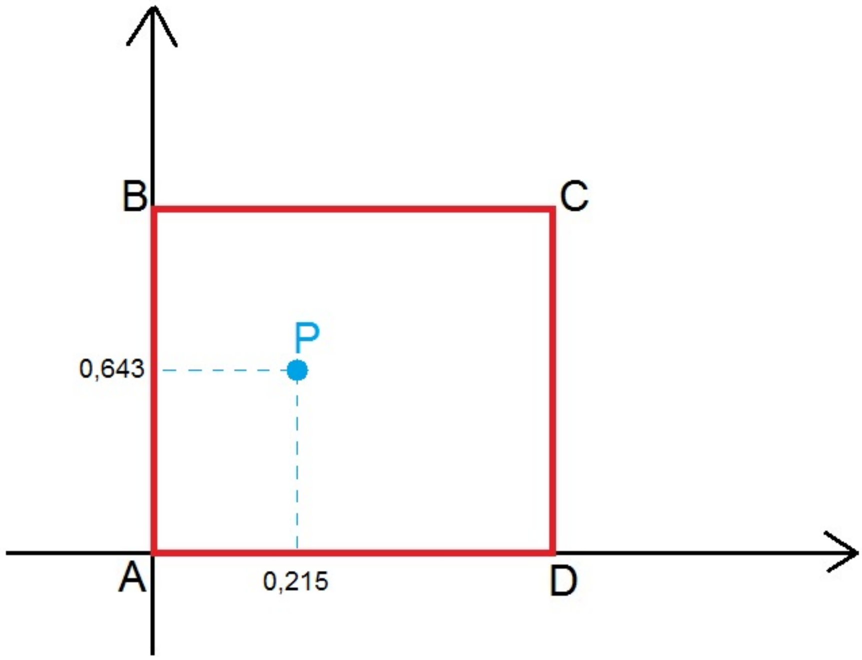
Teorema 3.4. *O espaço também possui possança* $\aleph_1$.

Demonstração. Primeiramente, iremos provar que os quatro lados de um quadrado possuem tantos pontos quanto um de seus lados, o que é similar à demonstração do "paradoxo de Galileu".

Considere um quadrado $ABCD$ de lado 1, com A situado em $(0, 0)$, B em $(0, 1)$, C em $(1, 1)$ e D em $(1, 0)$.



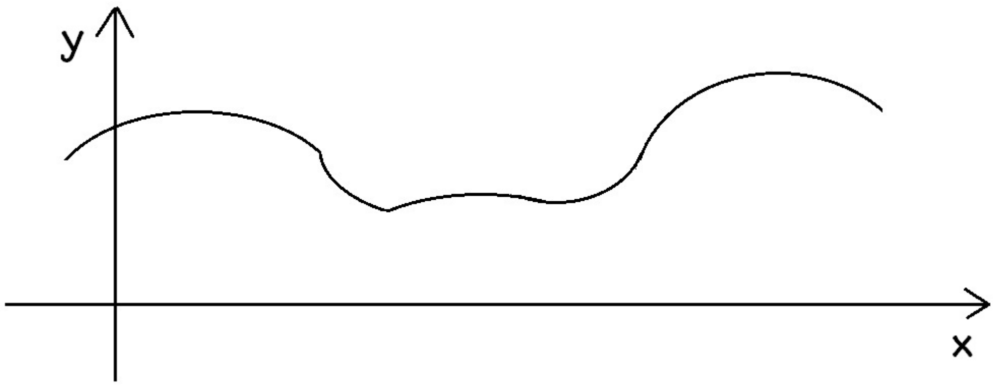
Considere agora um ponto P no interior desde quadrado. Sem perda de generalidade, suponha que este ponto esteja nas coordenadas $P(0, 215; 0, 643)$.



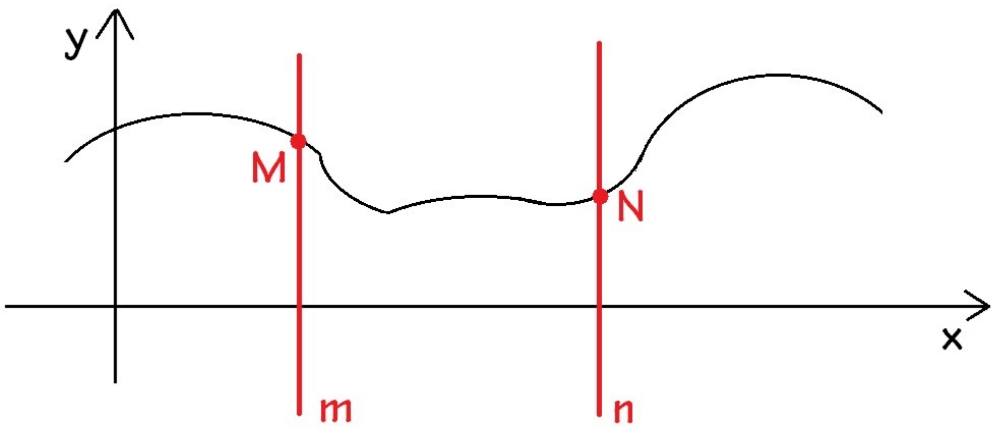
A ideia agora é criar números entre 0 e 1 com tais coordenadas, com 6 casas decimais formadas pelos dígitos dos números das coordenadas de P. Podemos formar os números $0,215643$ e $0,425136$, por exemplo. Tais números são únicos. Dado um número real entre 0 e 1 contendo 6 dígitos, também podemos criar 2 números com 3 dos 6 desses dígitos cada. Do número $0,463327$ pode-se criar os números $0,432$ e $0,763$ utilizados para representar um ponto no interior deste quadrado. Tal ponto é único, assim como qualquer outro que for criado. Logo, existe uma correspondência biunívoca entre os pontos no interior do quadrado e os pontos em um de seus lados. Portanto, sua possança é $\aleph_1$. Para demonstrarmos a mesma ideia no espaço, bastaria tomarmos um cubo de dimensões 1 e um ponto em seu interior, contendo agora 3 coordenadas. Podemos assim imaginar n dimensões com n coordenadas, possuindo também possança $\aleph_1$. $\square$

Em termos gerais, quaisquer conjuntos de pares, trios, quadras, ... , n-uplas ordenadas de números reais possuem a mesma possança do conjunto contínuo em questão.

Agora, o conjunto dos subconjuntos dos números reais possuiria possança $\aleph_2$. Ao encontrar um conjunto não equivalente a $\mathbb{N}$ e nem a $\mathbb{R}$, a possança de tal não pode ser nem $\aleph_0$ e nem $\aleph_1$. Tal possança será superior à $\aleph_1$, visto tratar-se de uma cardinalidade transfinita. Um exemplo é o conjunto dos polinômios de ordem n que são representados, graficamente, por curvas em um plano.



Considere duas retas paralelas m e n ao eixo vertical y, interceptando a curva nos pontos M e N, respectivamente.



Por cada ponto da reta m pode-se traçar uma curva, de forma que cada curva também intercepte n. Existirão curvas partindo de m que interceptarão n no mesmo ponto excluindo assim a biunivocidade existente entre os pontos de m e de n. Ou seja, existem mais polinômios do que números reais, propriamente ditos. Logo, a possança de tais polinômios é $\aleph_2$. Sucessivamente, obtém-se conjuntos com possanças $\aleph_3$, $\aleph_4$, etc. Portanto,

- O conjunto de números naturais possui o menor número cardinal transfinito;
- O conjunto de números reais tem um número cardinal transfinito maior;
- O conjunto de todos os subconjuntos do conjunto de números reais tem um número cardinal transfinito ainda maior;
- Etc.

3.6 Operações com Cardinais Transfinitos

- Considere o cardinal transfinito $\aleph_i$, com i $\in \mathbb{N}$ e n $\in \mathbb{R}$. Segue que $\aleph_i \pm$ n $= \aleph_i$.

Prova: Não é absurdo supor que $\aleph_i + 1 = \aleph_i$, visto que uma unidade não tornaria um cardinal transfinito maior do que ele já é. Sendo assim, podemos escrever $\aleph_i + 2 = \aleph_i + 1 + 1 = (\aleph_i + 1) + 1 = \aleph_i + 1 = \aleph_i$. Seguindo esta linha raciocínio, podemos afirmar que $\aleph_i + 1 + 1 + \ldots\ 1 = \aleph_i +$ m.1 $= \aleph_i +$ m $= \aleph_i$. Logo, a soma de um cardinal transfinito $\aleph_i$ com um número inteiro m é $\aleph_i$. Como n é um número real, podemos escrevê-lo como a soma de um inteiro e um real decimal, ou seja, n = x + $\dfrac{1}{p}$, sendo x, p $\in \mathbb{Z}$. Como $\aleph_i +$ x $= \aleph_i$, segue que $\aleph_i +$ x $+ \dfrac{1}{p} = \aleph_i + \dfrac{1}{p} = \aleph_i$, pois $\frac{1}{p} < 1$. Analogamente mostra-se que $\aleph_i$ - n $= \aleph_i$. Logo, $\aleph_i \pm$ n $= \aleph_i$.

- Considere o cardinal transfinito $\aleph_i$, com i $\in \mathbb{N}$. Segue que $\aleph_i + \aleph_i = \aleph_i$.

Prova: Suponhamos que $\aleph_i + \aleph_i = \aleph_j$, com i,j $\in \mathbb{N}$ e j $>$ i. Dessa maneira, poderíamos escrever que 2.$\aleph_i = \aleph_j$, ou seja, $\aleph_j$ seria o dobro de $\aleph_i$, ou, em outras palavras, que a metade de $\aleph_j$ seria $\aleph_i$. Absurdo, pois não se pode mensurar um infinito à sua metade. logo, $\aleph_i + \aleph_i = \aleph_i$.

- Considere o cardinal transfinito $\aleph_i$, com i $\in \mathbb{N}$ e n $\in \mathbb{R}$. Segue que $\aleph_i$. n $= \aleph_i$.

Prova: esta demonstração é uma generalização da propriedade anterior. Suponha que n = m + $\frac{1}{p}$, com p $\in \mathbb{N}$ e p $\neq 0$. Como $\aleph_i + \aleph_i = \aleph_i$, segue que $\aleph_i + \aleph_i + \aleph_i = (\aleph_i + \aleph_i) + \aleph_i = \aleph_i + \aleph_i = \aleph_i$. Sem perda de generalidade, teremos que $\aleph_i + \aleph_i + \ldots + \aleph_i =$ m . $\aleph_i = \aleph_i$. Se isso ocorre, é óbvio concluir que $\aleph_i = \dfrac{1}{p}\aleph_i$. Portanto, tem-se que $\aleph_i$. n $= \aleph_i$.

- Considere o cardinal transfinito $\aleph_i$, com i $\in \mathbb{N}$. Segue que $\aleph_i$. $\aleph_i = \aleph_i$.

Prova: Vimos anteriormente que $\aleph_i$.n $= \aleph_i$. Sem perda de generalidade, podemos escrever que $\aleph_i$.n.n = ($\aleph_i$.n).n = $\aleph_i$.n $= \aleph_i$. Seguindo tal linha de raciocínio, teremos que $\aleph_i$.n.n. ... .n $= \aleph_i$. Não obstante disso, ao multiplicarmos $\aleph_i$ por uma infinidade de n, sempre teremos que, a cada $\aleph_i$.n, obteremos $\aleph_i$. Diante disso, podemos escrever que $\aleph_i.\aleph_i = \aleph_i$.

- Considere o cardinal transfinito $\aleph_i$ com i $\in \mathbb{N}$ e n $\in \mathbb{R}$. Segue que $\aleph_i^n = \aleph_i$.

Prova: esta propriedade generaliza a anterior. Como $\aleph_i.\aleph_i = \aleph_i$, segue o produto $\aleph_i.\aleph_i.\aleph_i = (\aleph_i.\aleph_i).\aleph_i = \aleph_i.\aleph_i = \aleph_i$. Seguindo tal linha de raciocínio, teremos então que $\aleph_i^n = \aleph_i$.

- Considere os cardinais transfinitos $\aleph_i$ e $\aleph_j$, com i,j $\in \mathbb{N}$, sendo i $>$ j. Assim, $\aleph_i \pm \aleph_j = \aleph_i$.

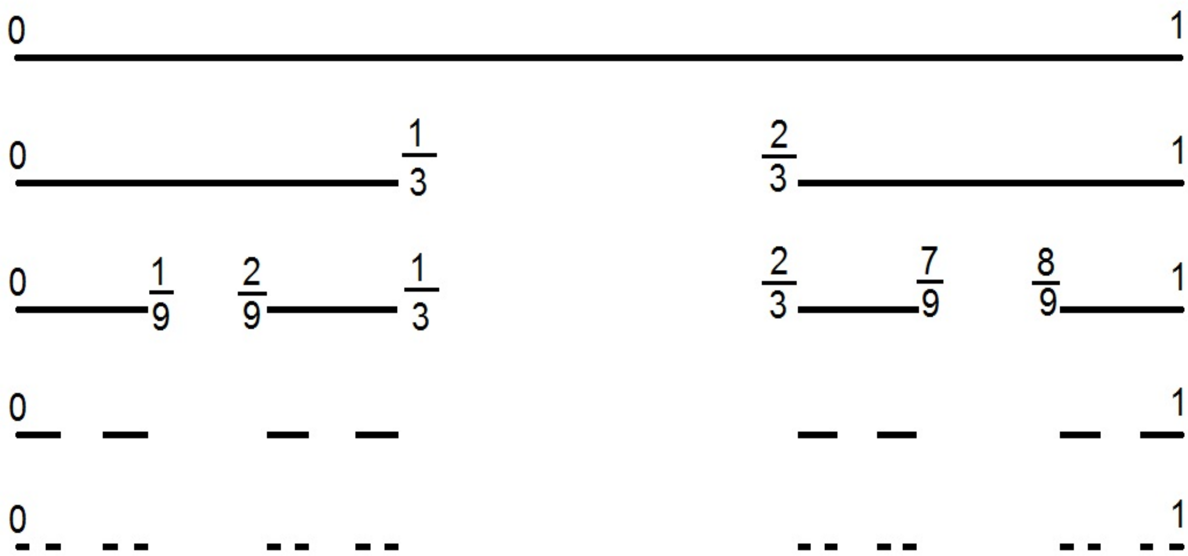
Prova: Vimos anteriormente que $\aleph_i + \aleph_i = \aleph_i$. Como $\aleph_{i+1} > \aleph_i$, pode-se afirmar que $\aleph_i + \aleph_{i+1}$ não resulta em $\aleph_i$. Dessa forma, como $\aleph_i + \aleph_i = \aleph_i$, $\aleph_i + \aleph_{i+1}$ também não resulta em $\aleph_{i+k}$, com k $\in \mathbb{N}$ e k $>$ 1, pois $\aleph_{i+1} + \aleph_{i+1} = \aleph_{i+1}$. Sendo assim, tem-se que $\aleph_i + \aleph_{i+1} = \aleph_{i+1}$. Seguindo a mesma linha infinita de raciocínio, mostra-se que $\aleph_i + \aleph_j = \aleph_i$, se i $>$ j. De forma análoga mostra-se que $\aleph_i - \aleph_j = \aleph_i$, se i $>$ j.

- Considere os cardinais transfinitos $\aleph_i$ e $\aleph_j$, com i,j $\in \mathbb{N}$, sendo i $>$ j. Segue que $\aleph_i.\aleph_j = \aleph_i$.

Prova: Vimos anteriormente que $\aleph_i^n = \aleph_i$. Como $\aleph_{i+1} > \aleph_i$, pode-se afirmar que $\aleph_i$. $\aleph_{i+1}$ não resulta em $\aleph_i$. Dessa forma, como $\aleph_i$. $\aleph_i = \aleph_i$, $\aleph_i$. $\aleph_{i+1}$ também não resulta em $\aleph_{i+k}$, com k $\in \mathbb{N}$ e k $>$ 1, pois $\aleph_{i+1}$. $\aleph_{i+1} = \aleph_{i+1}$. Portanto, teremos que $\aleph_i$. $\aleph_{i+1}$ $= \aleph_{i+1}$. Seguindo a mesma linha de raciocínio, mostra-se que $\aleph_i.\aleph_j = \aleph_i$, se i $>$ j.

3.7 O Conjunto de Cantor

Considere o conjunto real fechado $[0, 1]$. Divida tal segmento em 3 segmentos idênticos e retire deste a parte do meio, ficando assim apenas com dois segmentos: a primeira e terceira partes que vão, respectivamente, de 0 a $\frac{1}{3}$ e de $\frac{2}{3}$ a 1. Repita o processo em ambas as partes, ficando assim com 4 segmentos que vão de 0 a $\frac{1}{9}$, de $\frac{2}{9}$ a $\frac{1}{3}$, de $\frac{2}{3}$ a $\frac{7}{9}$ e de $\frac{8}{9}$ a 1.



O conjunto de cantor é o conjunto formado pelos elementos restantes após infinitas retiradas. Note que, independente de quantas partes sejam eliminadas, os extremos de cada segmento permanecerão. Em outras palavras, 0, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$, ... permanecerão e farão parte do conjunto de Cantor. Se abstrairmos um pouco mais, perceberemos que tal conjunto é constituído por infinitos de infinitos de pontos, por mais redundante que seja.

4 Relações de inclusão e densidade

Em uma crescência, podemos afirmar que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Logo, observamos que o conjunto dos números naturais é o menor - no sentido de estar inteiramente contido - dentre os principais conjuntos numéricos até então conhecidos. Coincidentemente, os conjuntos numéricos "menores" foram fundamentados antes de outros "maiores" do que eles, ou seja, as descobertas, por assim dizer, seguiram uma "sequência de tamanho".

Dizemos que um conjunto numérico é denso em um segundo conjunto se, dados 2 números deste segundo conjunto, sempre houver um elemento do primeiro entre estes números dados.

4.1 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não são densos em $\mathbb{N}$

Sejam 2 números naturais consecutivos a e b, com a $<$ b. Logo, por serem consecutivos, já são diferentes. Desta maneira, devido ao princípio da boa ordenação, sabemos que se b $>$ a, com a e b consecutivos, então b $=$ a $+$ 1. Desta forma, dado **c** $> 1 \in \mathbb{Z}$, ou c $<$ a, ou a $<$ c $<$ b (essa possibilidade já não seria possível) ou b $>$ c, para c $\neq$ a e c $\neq$ b. Se c $<$ a ou c $>$ b, então c não está entre a e b. Porém, sabemos que não é possível que a $<$ c $<$ b, pois se c $=$ a $+ t_1$ e b $=$ c $+ t_2$, com t_1 e $t_2 \geq 1$, logo, concluiu-se que b - t_2 $=$ a $+ t_1 \Rightarrow$ b - a $= t_1 + t_2 \geq 2$. Absurdo, pois a e b são consecutivos. Isso mostra que $\mathbb{Z}$ não é denso em $\mathbb{N}$. Obviamente, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ também não são pois não há valores entre a e b do tipo a $+ \dfrac{1}{n}$, com n $\in \mathbb{Z}$.

4.2 $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não são densos em $\mathbb{Z}$

Analogamente mostra-se que $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não são densos em $\mathbb{Z}$, visto que $\mathbb{Z}$ é um conjunto numérico formado por todos os a $\in \mathbb{Z}$ e -a; logo, se c não puder estar entre a e b, -c também não poderá estar entre -b e -a.

4.3 $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ não são densos em $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$

Consideremos m e n $\in \mathbb{Q}$, sendo m $= \frac{x}{y}$ e n $= \frac{p}{q}$, com x, y, p, q $\in \mathbb{Z}$ e y.q $\neq 0$. A ideia de densidade se refere a possuir um número de um conjunto entre dois números quaisquer de outro. Assim sendo, sem perda alguma de generalidade, podemos supor que x = p = q = 1 e y = 2, ou seja, podemos assumir a sequência de racionais $Q_1 = \{\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, ... , \frac{1}{2}, 1\}$, com n, n-1, n-2, ..., 1 naturais. Esta sequência está inteiramente contida no intervalo $]0, 1] \subset \mathbb{R}$. É notório perceber que não há números naturais além de 1 neste intervalo, pois $1 \in]0, 1]$ e $0 \notin]0, 1[$. Como não há números naturais entre 0 e 1, segue que não existe nenhum natural neste intervalo dado além de 1, o que implica também que não há nenhum número de Q_1 inteiro, à exceção de 1. Dessa forma, ao assumirmos a sequência $Q_2 = Q_1$ - $\{1\}$, teremos que todos os elementos de Q_2 estarão em $]0, 1[\in$ R. Assim, existe um intervalo real que não contém nenhum número inteiro ou natural. Logo, o conjunto Q_2 também não possui nenhum número inteiro ou natural, ou seja, dados dois números racionais, nem sempre há um número inteiro ou natural entre eles. Consequentemente, a mesma ideia se aplica ao conjunto dos números reais.

Notemos então que:

1. o conjunto dos números complexos, reais, racionais e inteiros não são densos no conjuntos dos números naturais;

2. o conjunto dos números complexos, reais, racionais e naturais não são densos no conjuntos dos números inteiros;

3. os conjunto dos números naturais e inteiros não são densos nos conjuntos dos números racionais ou reais;

4.4 $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$

Mostremos então que, dados dois números reais, sempre haverá um número racional entre eles. Em outras palavras, dado um intervalo aberto real, este intervalo contém pelo menos um número racional. Sejam a e b números reais, de forma que a $<$ b. Desta maneira, devemos mostrar que existe m $\in \mathbb{Q}$ / m $\in$]a,b[. Como]a,b[é um intervalo real, segue que c $\in$]a,b[se, e somente se, a $<$ c $<$ b. Se a e b tiverem sinais opostos, é fato que 0 $\in$]a,b[. Como 0 é um número racional, segue que existe um racional no intervalo]a,b[. Se a e b tiverem o mesmo sinal, zero não pertence ao conjunto.

Analisemos então duas possíveis situações:

- a e b são positivos.

- a e b são negativos.

Se a e b forem números positivos: consideremos um número racional r de maneira que r $<$ b - a. Defina o conjunto X $= \{$ x $\in \mathbb{N}$ / x.r $>$ a$\}$. Seja k o menor elemento deste conjunto X. Assim, (k - 1).r $\leq$ a. Se kr $\notin$]a,b[, segue que kr $\geq$ b, já que kr $>$ a. Como (k - 1).r $\leq$ a, então -(k - 1).r $\geq$ - a. Adicionando b em ambos os lados, teremos que b -(k - 1).r $\geq$ b - a. Dessa maneira, já que kr $\geq$ b, então kr -(k - 1).r $\geq$ b -(k - 1).r $\geq$ b - a $\Longrightarrow$ kr -(k - 1).r $\geq$ b - a $\Longrightarrow$ kr - kr + r $\geq$ b - a, ou seja, r $\geq$ b - a. Absurdo, pois supomos que r $<$ b - a. Portanto, kr $\in$]a,b[. Como r é um número racional e k é um número natural, segue que kr é um número racional pertencente a intervalo]a,b[.

Se a e b forem números negativos: sendo negativos, a $<$ b $<$ 0 $\Longrightarrow$ 0 $<$ -b $<$ -a. Como -a e -b são positivos segue que existe um número racional q / q $\in$]-b, -a[, ou seja, -b $<$ q $<$ -a $\Longrightarrow$ a $<$ -q $<$ b. Portanto, como q é um número racional, segue que um número racional pertencente a intervalo]a,b[.

4.5 $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$

Sejam a e b números reais bem próximos, com a $<$ b. Dessa forma, b - a $>$ 0. Tome m $\in \mathbb{N}$ suficientemente grande de maneira que m(b - a) $>$ 1. Sem perda alguma de generalidade, $\exists$ m $\in \mathbb{N}$ / m(b - a) $> \sqrt{2} \Longrightarrow$ b - a $> \dfrac{\sqrt{2}}{m}$. Dessa maneira, $\exists$ n $\in \mathbb{N}$ / $\dfrac{n\sqrt{2}}{m} >$ b. Como (a,b) é um intervalo bem pequeno, podemos supor, sem perda alguma de generalidade, que (n - 1).$\dfrac{\sqrt{2}}{m} <$ a.

Com isso, podemos escrever a desigualdade (n - 1).$\dfrac{\sqrt{2}}{m} <$ a $<$ b $< \dfrac{n\sqrt{2}}{m}$ o que implica em b - a $< \dfrac{n\sqrt{2}}{m}$ - (n - 1).$\dfrac{\sqrt{2}}{m} = \dfrac{n\sqrt{2} - n\sqrt{2} + \sqrt{2}}{m} = \dfrac{\sqrt{2}}{m}$, ou seja, b - a $< \dfrac{\sqrt{2}}{m}$. Absurdo. Logo, teremos que (n - 1).$\dfrac{\sqrt{2}}{m} >$ a $\Longrightarrow$ a $<$ (n - 1).$\dfrac{\sqrt{2}}{m} <$ b. Sendo assim, existe (n - 1).$\dfrac{\sqrt{2}}{m} =$ t $\in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ / a $<$ t $<$ b, ou seja, o conjunto dos irracionais são densos nos reais.

4.6 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Todos os conjuntos numéricos conhecidos anteriormente (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais) fazem parte do conjunto dos números complexos. Podemos dizer mais ainda, que tais conjuntos são os números complexos cuja parte imaginária é nula. Para mostrar isso, ao trazer esta ideia para a geometria analítica, sem perda alguma de generalidade, podemos exibir uma reta real horizontal (eixo x), pois esta contém todos os números reais.

Utilizemos a reta vertical (eixo y) como sendo a reta que contém todas as representações possíveis imaginárias puras, ou seja, o conjunto dos números reais que serão a parte imaginária de cada complexo. Desta maneira, o ponto (0,0) é o número complexo zero e origem do plano.

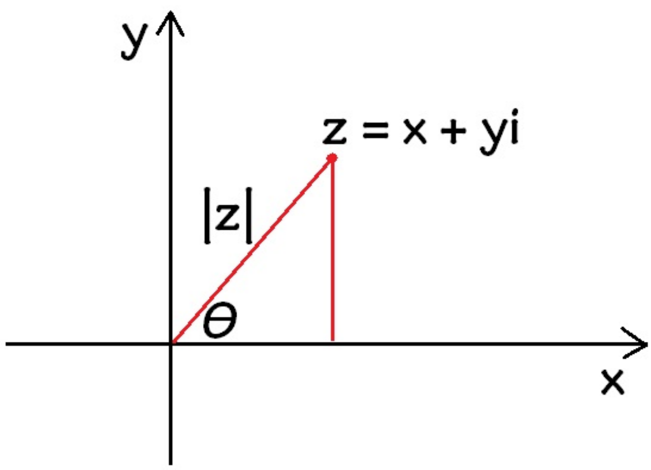
É possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o eixo horizontal e o vertical, visto que cada um contém todo o conjunto dos números reais. Logo, ambas as retas possuem a mesma representatividade numérica em termos de números reais. Podemos até dizer que ambas as retas possuem a mesma infinidade de números. Desta forma, para cada número x existente no eixo horizontal existirá o seu correspondente y no eixo vertical, tal que $x = y$.

Logo, podemos assumir que todos os números reais estão representados no eixo horizontal e que todos os números complexos imaginários puros (cuja parte real vale zero) estão representados no eixo vertical. Diante disso, pode-se afirmar que para cada y_n dado, com $n \in N$, existem infinitos números reais que correspondem com ele. Este conjunto de pontos será obtido unindo-se todos os pontos da reta $y = y_0$, por exemplo, paralela ao eixo horizontal. Como existem infintas retas horizontais no plano cartesiano, podemos assim assumir que para cada número real y_n que representa uma parte imaginária de um complexo existem infinitos números reais associados a ele, o que nos garante que o conjunto dos números complexos é bem maior que o conjunto dos números reais, ou seja, o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos, porém, o contrário não ocorre, o que nos impede de supor uma possível igualdade $\mathbb{C} = \mathbb{R}$.

5 Os Números Complexos

5.1 Forma polar dos números Complexos

Consideremos o número complexo z = x + yi. Tomemos sua representação no plano cartesiano como sendo Z(x,y). Vale salientar que poderíamos escolher quaisquer coordenadas para Z, ou seja, poderíamos tomá-lo em qualquer quadrante. Sabe-se que o módulo de um número é a distância deste à origem. Assim, denota-se por |z| a distância do ponto Z ao ponto (0,0). Módulo é uma distância, logo, podemos dizer tratar-se de um segmento de reta. Dessa forma, podemos dizer que tal segmento faz parte de uma reta de mesma direção e sentido; logo, existe uma inclinação θ para tal. Dá-se o nome de argumento de z para tal ângulo e inclinação.



De acordo com a figura, utilizando o Teorema de Pitágoras, temos que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Podemos também atribuir as seguintes relações trigonométricas:

$$sen\theta = \frac{y}{|z|} \Longrightarrow y = |z|sen\theta$$
$$cos\theta = \frac{x}{|z|} \Longrightarrow y = |z|cos\theta$$

Dessa maneira, como z = x + yi, segue que a forma polar ou forma trigonométrica de um número complexo é dada por

$$z = |z|(cos\theta + isen\theta)$$

Temos também que $tg\theta = \frac{y}{x}$, ou seja, $\theta = arctg\frac{y}{x}$.

5.2 O corpo dos Números Complexos

Dados z_1 = a + bi e z_2 = c + di complexos, com a, b, c, d $\in \mathbb{R}$, definem-se as operações de adição e multiplicação no conjunto dos números complexos da seguinte maneira:

Adição: $z_1 + z_2$ = a + bi + c + di = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d)i, ou seja, somam-se parte real com parte real e imaginária com imaginária de cada número.

Multiplicação: $z_1.z_2$ = (a + bi).(c + di) = ac + bci + adi + bidi = ac + bci + adi + bdi^2 = ac + bci + adi - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.

Sendo $\mathbb{C}$ um corpo, este satisfaz as seguintes propriedades:

- **Comutativa para a adição**: $\forall$ x, y $\in \mathbb{C}$, teremos que x + y = y + x.

Sejam z_1 = a + bi e z_2 = c + di complexos, com a, b, c, d $\in \mathbb{R}$.
$z_1 + z_2$ = (a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di =
(a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i,
visto que $\mathbb{R}$ é um corpo.
Daí, c + a + di + bi = (c + di) + (a + bi) = $z_2 + z_1$.

- **Comutativa para a multiplicação**: $\forall$ x, y $\in \mathbb{C}$, teremos que xy = yx.

Sejam z_1 = a + bi e z_2 = c + di complexos, com a, b, c, d $\in \mathbb{R}$.
$z_1.z_2$ = (a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i, por definição.
Logo, $z_2.z_1$ = (c + di).(a + bi) = (ca - db) + (da + cb)i, também por definição.
Como $\mathbb{R}$ é um corpo, ac = ca, bd = db, ad = da e bc = cb.

Dessa maneira, teremos que
$z_1.z_2$ = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ca - db) + (da + cb)i = $z_2.z_1$.

- **Associativa para a adição**: $\forall$ x, y, z $\in \mathbb{C}$, teremos que (x + y) + z = x + (y + z).

Sejam z_1 = a + bi, z_2 = c + di e z_3 = m + ni complexos, com a, b, c, d, m, n $\in \mathbb{R}$.
$z_1 + z_2 + z_3 = (z_1 + z_2) + z_3$ = [(a + bi) + (c + di)] + (m + ni) =
[(a + c) + (bi + di)] + (m + ni) = (a + c) + (bi + di) + (m + ni) =
(a + c) + m + (bi + di) + ni = (a + c + m) + (bi + di + ni)=

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = (\text{a} + \text{bi}) + [(\text{c} + \text{di}) + (\text{m} + \text{ni})] =$$
$$(\text{a} + \text{bi}) + [(\text{c} + \text{m}) + (\text{di} + \text{ni})] = (\text{a} + \text{bi}) + (\text{c} + \text{m}) + (\text{di} + \text{ni}) =$$
$$\text{a} + (\text{c} + \text{m}) + \text{bi} + (\text{di} + \text{ni}) = (\text{a} + \text{c} + \text{m}) + (\text{bi} + \text{di} + \text{ni}) =$$
$$(z_1 + z_2) + z_3.$$

- **Associativa para a multiplicação**: $\forall$ x, y, z $\in \mathbb{C}$, teremos que (xy)z = x(yz).

Sejam z_1 = a + bi, z_2 = c + di e z_3 = m + ni complexos, com a, b, c, d, m, n $\in \mathbb{R}$.

$$z_1.z_2.z_3 = (z_1.z_2).z_3 = [(\text{a} + \text{bi}).(\text{c} + \text{di})].(\text{m} + \text{ni}) =$$
$$[(\text{ac - bd}) + (\text{ad} + \text{bc})\text{i}].(\text{m} + \text{ni}) =$$
$$[(\text{ac - bd})\text{m - }(\text{ad} + \text{bc}).\text{n}] + [(\text{ac - bd}).\text{n} + (\text{ad} + \text{bc}).\text{m}]\text{i} =$$
$$[(\text{acm - bdm}) - (\text{adn} + \text{bcn})] + [(\text{acn - bdn}) + (\text{adm} + \text{bcm})]\text{i}.$$

$$z_1.(z_2.z_3) = (\text{a} + \text{bi}).[(\text{c} + \text{di}).(\text{m} + \text{ni})] =$$
$$(\text{a} + \text{bi}).[(\text{cm - dn}) + (\text{cn} + \text{dm})\text{i}] =$$
$$[\text{a}(\text{cm - dn}) - \text{b}(\text{cn} + \text{dm})] + \text{a}(\text{cn} + \text{dm}) + \text{b}(\text{cm - dn})]\text{i} =$$
$$[(\text{acm - adn}) - (\text{bcn} + \text{bdm})] + (\text{acn} + \text{adm}) + (\text{bcm - bdn})]\text{i} =$$
$$[(\text{acm - adn - bcn - bdm})] + (\text{acn} + \text{adm} + \text{bcm - bdn})]\text{i}.$$

Como $\mathbb{R}$ é um corpo, acm - adn - bcn - bdm =

acm - bdm - adn - bcn = acm - bdm - (adn + bcn)

e

acn + adm + bcm - bdn = acn - bdn + adm + bcm.

Dessa maneira, segue que

$$[(\text{acm - adn - bcn - bdm})] + (\text{acn} + \text{adm} + \text{bcm - bdn})]\text{i} =$$
$$[(\text{acm - bdm}) - (\text{adn} + \text{bcn})] + (\text{acn - bdn}) + (\text{adm} + \text{bcm})]\text{i} =$$
$$(z_1.z_2).z_3.$$

- **Distributiva**: $\forall$ x, y, z $\in \mathbb{C}$, teremos que x(y + z) = xy + xz e que (y + z)x = yx + zx.

Sejam z_1 = a + bi, z_2 = c + di e z_3 = m + ni complexos, com a, b, c, d, m, n $\in \mathbb{R}$.

$$z_1.(z_2 + z_3) = (\text{a} + \text{bi}).(\text{c} + \text{di} + \text{m} + \text{ni}) =$$
$$(\text{a} + \text{bi}).(\text{c} + \text{m} + \text{di} + \text{ni}) = (\text{a} + \text{bi}).[(\text{c} + \text{m}) + (\text{d} + \text{n})\text{i}] =$$
$$[\text{a}(\text{c} + \text{m}) - \text{b}(\text{d} + \text{n})] + [\text{a}(\text{d} + \text{n}) + \text{b}(\text{c} + \text{m})]\text{i} =$$
$$[(\text{ac} + \text{am}) - (\text{bd} + \text{bn})] + [(\text{ad} + \text{an}) + (\text{bc} + \text{bm})]\text{i} =$$
$$[(\text{ac} + \text{am - bd - bn})] + [(\text{ad} + \text{an} + \text{bc} + \text{bm})]\text{i}.$$
$$(z_2 + z_3).z_1 = (\text{c} + \text{di} + \text{m} + \text{ni}).(\text{a} + \text{bi}) = (\text{c} + \text{m} + \text{di} + \text{ni}).(\text{a} + \text{bi}) =$$
$$[(\text{c} + \text{m}) + (\text{d} + \text{n})\text{i}].(\text{a} + \text{bi}) = [(\text{c} + \text{m}).\text{a - }(\text{d} + \text{n}).\text{b}] + [(\text{c} + \text{m}).\text{b} + (\text{d} + \text{n}).\text{a})]\text{i} =$$
$$[(\text{ca} + \text{ma}) - (\text{db} + \text{nb})] + [(\text{cb} + \text{mb}) + (\text{da} + \text{na})]\text{i} =$$
$$[(\text{ca} + \text{ma - db - nb})] + [(\text{cb} + \text{mb} + \text{da} + \text{na})]\text{i}.$$

Como $\mathbb{R}$ é um corpo, ca = ac, ma = am, db = bd e bn = nb .

Logo, [(ca + ma - db - nb)] + [(cb + mb + da + na)]i =
[(ac + am - bd - bn)] + [(bc + bm + ad + an)]i =
[(ac + am - bd - bn)] + [(ad + an + bc + bm)]i =
$z_1.(z_2 + z_3)$.

- **Elemento neutro da adição**: $\forall$ x $\in \mathbb{C}$, $\exists$ e $\in \mathbb{C}$ de maneira que x + e = e + x = x.

Seja z = a + bi complexo, com a, b $\in \mathbb{R}$.
Como $\mathbb{R}$ é um corpo, a + 0 = 0 + a = a e b + 0 = 0 + b = b.

Assim, z = a + bi = (a + 0) + (b + 0)i =
(0 + a) + (0 + b)i = 0 + a + 0i + bi =
0 + 0i + a + bi = (0 + 0i) + z.

Logo, existe o elemento neutro 0 + 0i $\in \mathbb{C}$.

(0 + 0i) + z_1 = 0 + 0i + a + bi = 0 + a + 0i + bi =
(0 + a) + (0 + b)i = (a + 0) + (b + 0)i =
a + 0 + bi + 0i = a + bi + 0 + 0i = z_1 + 0 + 0i = z_1.

- **Elemento neutro da multiplicação**: $\forall$ x $\in \mathbb{C}$, $\exists$ 1 $\in \mathbb{C}$ / x1 = 1x = x.

Seja z = a + bi complexo, com a, b $\in \mathbb{R}$.
Devemos buscar um número complexo z_1 de maneira que z.z_1 = z_1.z = z.
Basta tomarmos z_1 = 1 + 0i.

z.z_1 = (a + bi)(1 + 0i) = (a.1 - b.0) + (a.0 + b.1)i = a + bi = z.
z_1.z = (1 + 0i)(a + bi) = (1.a - 0.b) + (1.b + 0.a)i = a + bi = z.z_1 = z.

- **Elemento simétrico**: $\forall$ x $\in \mathbb{C}$, $\exists$ -x tal que x + (-x) = -x + x = 0.

Sejam z_1 = a + bi, z_2 = c + di complexos, com a, b, c, d $\in \mathbb{R}$.
Se z_1 = z_2, então a + bi = c + di $\Longrightarrow$ a = c e b = d $\Longrightarrow$ a - c = 0 e b - d = 0,
visto que $\mathbb{R}$ é um corpo.

Dessa maneira, c = é o simétrico de a e d é o simétrico de b nos reais.
Portanto, existe z_3 = -a - bi.

z_1 + z_3 = a + bi + (-a - bi) = a + bi -a - bi = a - a + bi - bi = 0 + (b - b)i = 0 + 0i.
z_3 + z_1 = -a - bi + (a + bi) = -a - bi + a + bi = -a + a - bi + bi =
0 + (-b + b)i = 0 + 0i = z_1 + z_3.

- **Elemento inverso**: x $\in \mathbb{C}$, $\exists$ $x^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que x. x^{-1} = x^{-1}.x = 1.

O inverso de um número é a troca do numerador pelo denominador e vice-versa, desde que essa fração ou número seja diferente de zero. Logo, dado z_1 = a + bi complexo, com a, b $\in \mathbb{R}$, devemos buscar z^{-1} de maneira que z.z^{-1} = z^{-1}.z = 1.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{(a+bi)} = \frac{1}{(a+bi)}.\frac{(a-bi)}{(a-bi)} = \frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} \Longrightarrow$$
$$z^{-1} = \frac{(a-bi)}{a^2-(bi)^2} = \frac{(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

$$z.z^{-1} = (\mathrm{a} + \mathrm{bi}).\frac{(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{(a+bi)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1 = 1.\ z^{-1}.z$$
$$1.z^{-1}.z = \frac{(a-bi)}{a^2+b^2}.(\mathrm{a} + \mathrm{bi}) = \frac{(a-bi)(a+bi)}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1 = 1.z.z^{-1}.$$

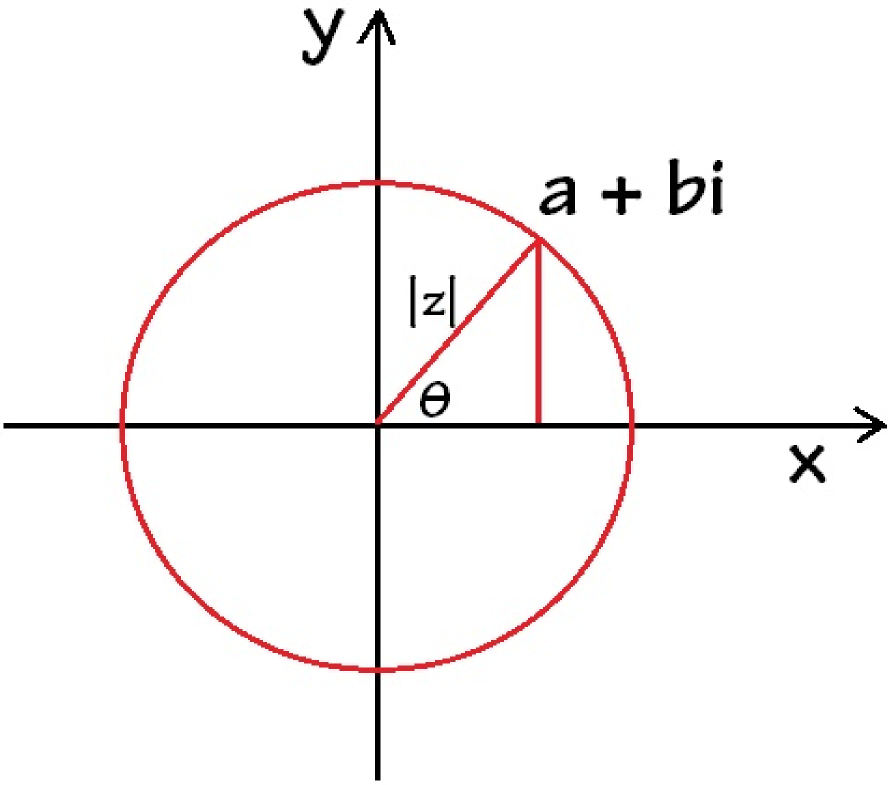
5.3 $\mathbb{C}$ não é ordenado

Dizer que um conjunto A não é ordenado é afirmar que existem n, m, p $\in \mathbb{A}$ / n + p não pode ser comparado com m, ou vice-versa.

Se $\mathbb{C}$ fosse ordenado, haveria uma forma de ordená-lo, ou seja, dados z = a + bi e w = c + di, com a, b, c, d $\in \mathbb{R}$, seria possível estabelecer alguma relação do tipo z < w ou z > w. Podemos afirmar sim que z = w se a = c e b = d, simultaneamente, porém, não é possível estabelecer outra forma de comparação entre eles.

Em $\mathbb{R}_+$ temos que se x < y, então |x| < |y|. Suponhamos que z < w se |z| < |w|: em $\mathbb{R}_+$, x < y $\Longrightarrow \exists$ m $\in \mathbb{R}_+$ tal que x + m = y $\Longrightarrow$ x = y - m = n $\Longrightarrow$ x = n (unicidade). Supondo haver um t $\in \mathbb{C}$ de maneira que z + t = w, significaria dizer que z = w - t = p.

|z| = $\sqrt{a^2+b^2}$ = |p|, porém, $a^2 = (-a)^2$ e $b^2 = (-b)^2$, ou seja, z_1 = a + bi, z_2 = -a + bi, z_3 = a - bi e z_4 = -a - bi possuem o mesmo módulo. Logo, existem, pelo menos, 4 números complexos que possuem o mesmo módulo. Desta forma, não há unicidade em z = p, o que nos mostra que, se fosse possível comparar dois números complexos como sendo um maior do que o outro devido o valor de seus módulos, haveriam números complexos ocupando a mesma posição em uma ordenação numérica. Na verdade, haveriam infinitos, pois todos os números complexos cujo módulo é |z| = $\sqrt{a^2+b^2}$ pertencem à circunferência a seguir:

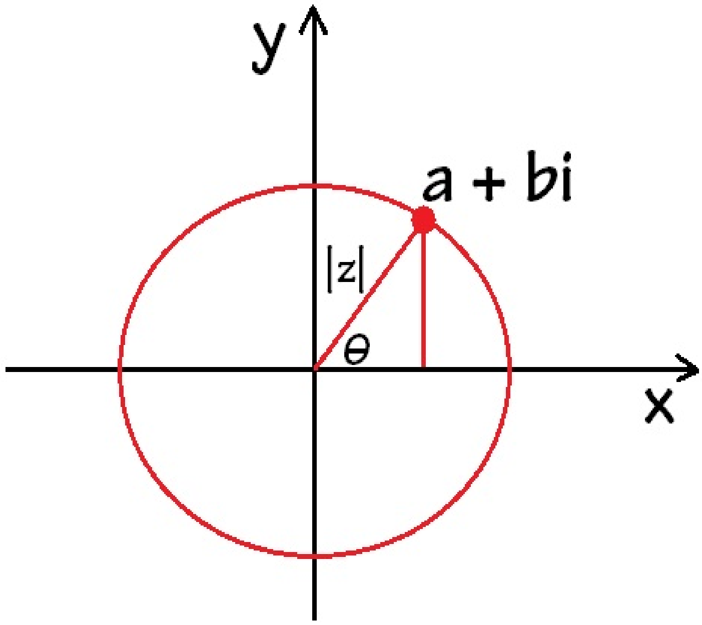


O módulo de um número complexo representa a medida de um raio de uma circunferência. Logo, é possível dizer que uma circunferência possui raio maior que outra, porém, não é possível estabelecer uma comparação de ordem entre seus pontos.

5.4 Algumas aplicações do conjunto dos Números complexos

Muitos acreditam que os números complexos possuem pouca aplicabilidade em algumas áreas, o que não é verdade. Os números complexos são utilizados em várias áreas do conhecimento, tais como engenharia, eletromagnetismo, física quântica, teoria do caos e, claro, além da própria matemática. Nesta última podemos citar o uso dos números complexos na geometria (como localização ou posição).

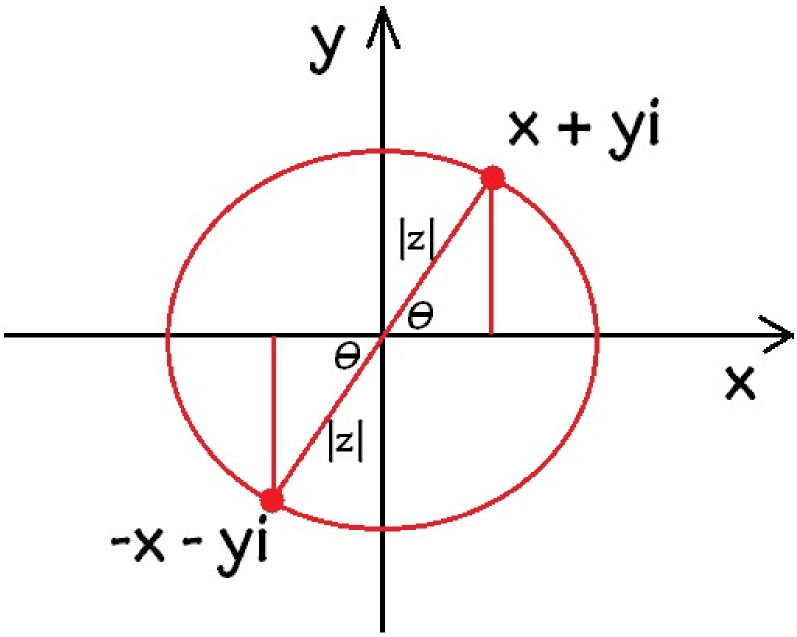
- **Rotação de coordenadas no plano;**



A forma trigonométrica destes números é a alternativa de se rotacionar coordenadas no plano, ou seja, caminhar com um ponto por sobre uma circunferência. Na multiplicação de dois números complexos em sua forma trigonométrica, multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos devido ao padrão ocorrido no círculo trigonométrico à medida que se executam os giros horários ou anti-horários.

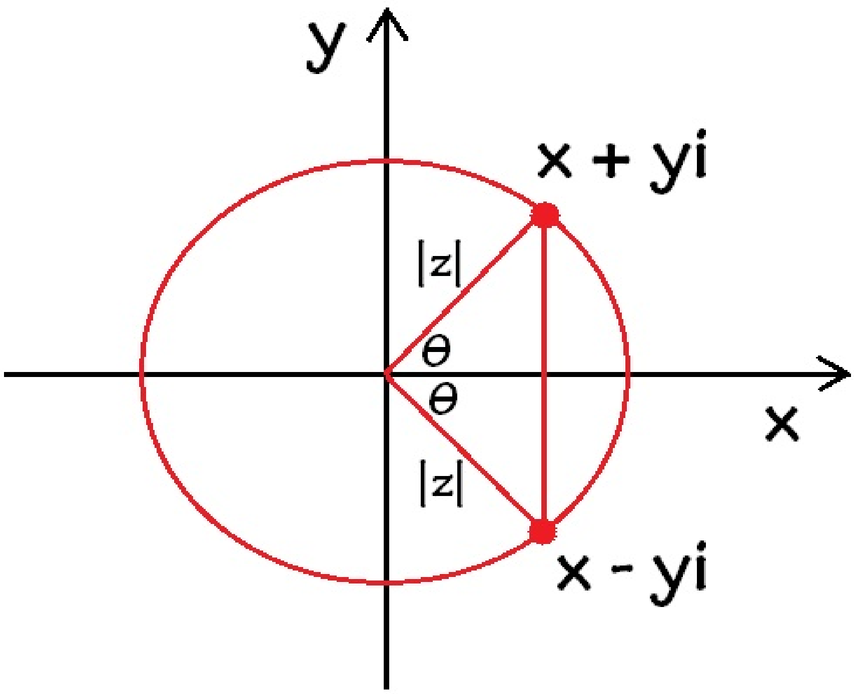
- **Simétrico de um número complexo;**

Dado um número complexo z = a + bi, o simétrico será -z = -a - bi. Atribuindo os pontos que representam tais números, (a,b) e (-a,-b) são simétricos em relação à origem. Logo, haverá um giro de 180° no sentido anti-horário em relação ao posicionamento de tais pontos. Portanto, o simétrico de z será escrito, em sua forma trigonométrica, por -z = |z|[cos(θ+180°)+isen(θ+180°)]. Se considerarmos que houve um giro no sentido horário, teremos que -z = |z|[cos(θ-180°)+isen(θ-180°)].



- **Conjugado de um número complexo;**

Dado um número complexo z = a + bi, o conjugado será $\overline{z}$ = a - bi. Atribuindo os pontos que representam tais números, (a,b) e (a, -b) são simétricos em relação ao eixo das abcissas. Logo, haverá uma reflexão do ponto em questão a partir do próprio eixo das abcissas. Portanto, o conjugado do número complexo z será escrito, em sua forma trigonométrica, por $\overline{z} = |z|[\cos(-\theta)+i\text{sen}(-\theta)]$.



* Fórmula de De Moivre: uma breve demonstração

Abraham De Moivre nasceu na França e por muitos anos ganhou a vida na Inglaterra como professor particular e tornou-se amigo íntimo de Isaac Newton. De Moivre é conhecido principalmente por suas obras *Annuities upon Lives*, que teve um papel importante na história da matemática, *Doctrine of Chances*, material sobre teoria das probabilidades e *Miscellanea analytica*, em que há contribuições em trigonometria analítica.

A fórmula $(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^n = \cos(\mathrm{n}\theta) + \mathrm{i}\ \operatorname{sen}(\mathrm{n}\theta)$, para $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$, se tornou chave na trigonometria analítica. Vamos demonstrá-la por indução.

Como para n = 1 a identidade seria óbvia, pois é a própria fórmula, testemo-la para n = 2. Daí, segue que $\mathrm{z}^2 = [|\mathrm{z}|(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)]^2 = |\mathrm{z}|^2(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^2$.

Desenvolvendo o quadrado perfeito, teremos que

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^2 = (\cos^2\theta + 2\mathrm{i}\cos\theta.\operatorname{sen}\theta + (\mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^2) =$$

$$(\cos^2\theta + 2\mathrm{i}\cos\theta.\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^2\theta).$$

Como $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos(2\theta)$ e $2.\cos\theta.\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(2\theta)$,

segue que $(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^2 = \cos(2\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(2\theta)$,

ou seja, $\mathrm{z}^2 = |\mathrm{z}|^2[\cos(2\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(2\theta)]$.

Suponhamos agora que a relação seja válida para n = k, ou seja,

$$\mathrm{z}^k = |\mathrm{z}|^k[(\cos(k\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(k\theta)].$$

Devemos então mostrar que esta relação é válida para n = k + 1.

Multiplicando z de ambos os lados da equação, teremos que

$$\mathrm{z}.\ \mathrm{z}^k = \mathrm{z}.|\mathrm{z}|^k[\cos(k\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(k\theta)] \Longrightarrow$$

$$\mathrm{z}^{k+1} = |\mathrm{z}|(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta).|\mathrm{z}|^k[\cos(k\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(k\theta)] \Longrightarrow$$

$$\mathrm{z}^{k+1} = |\mathrm{z}|^{k+1}[\cos(k\theta)\cos\theta + \mathrm{i}\cos\theta\operatorname{sen}(k\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta.\mathrm{co}(\mathrm{k}\theta) - \operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}(\mathrm{k}\theta)].$$

Tomando $\mathrm{k}\theta = \mathrm{t}$, reescreveremos a equação da seguinte maneira:

$$\mathrm{z}^{k+1} = |\mathrm{z}|^{k+1}[\cos(\mathrm{t})\cos\theta + \mathrm{i}\cos\theta\operatorname{sen}(\mathrm{t}) + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta.\cos(\mathrm{t}) - \operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}(\mathrm{t})].$$

Como $\cos(\mathrm{t})\cos\theta - \operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}(\mathrm{t}) = \cos(\mathrm{t}+ \theta)$

e $\cos\theta\operatorname{sen}(\mathrm{t}) + \operatorname{sen}\theta.\cos(\mathrm{t}) = \operatorname{sen}(\mathrm{t} + \theta)$,

segue que

$$\mathrm{z}^{k+1} = |\mathrm{z}|^{k+1}[\cos((k+1)\theta) + \mathrm{ise}((\mathrm{k}+1)\theta)].$$

Dessa maneira, fica provada a fórmula de De Moivre. Analogamente tem-se que

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}}.[(\cos(\frac{\theta}{n}) + i\text{sen}(\frac{\theta}{n})].$$

- **"Soma de pontos"no plano;**

Uma outra ideia bem interessante é a de somar pontos no plano. a soma de pontos na geometria plana é algo abstrato, visto que a ideia de ponto é postulada. Temos o ponto como a menor unidade matemático-geométrica possível; logo, a soma de pontos não faz tanto sentido quanto a soma de dois segmentos de reta, por exemplo.

- **Áreas de triângulos;**

Devido à associação dos números complexos a pares ordenados do plano cartesiano, essa ideia pode ser abordada e com um significado maior: dados dois números complexos z = a + bi e t = c + di. A soma z + t = a + c + (b + d)i. Sendo assim, z + t pode ser associado ao ponto S(a+c, b+d).

Em geometria analítica sabemos que a área de um triângulo é dada em módulo por: $A = \frac{1}{2}.|DET(M)|$, sendo

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ a+c & b+d & 1 \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo este determinante, teremos que $A = \frac{1}{2}|ad + cb + cd + ab + bc - ad - cd - ab - ad - cb| = |\frac{bc - ad}{2}|$, ou seja, dados dois números complexos, a área do triângulo formada entre os pontos representados por estes dois números e um terceiro ponto equivalente à soma de ambos sempre poderá ser calculada dessa maneira. Geometricamente, sempre que as coordenadas de um vértice for a soma das coordenadas dos outros dois vértices a área será dada por $A= |\frac{bc - ad}{2}|$, sendo (a,b) e (c,d) os pontos dados, com (a+c, b+d) o vértice obtido pela soma das coordenadas dos anteriores.

De forma análoga, dado o número complexo z = a + bi e seu conjugado $\overline{z}$ = a - bi. A soma z + $\overline{z}$ = a + bi + a - bi = 2a. Sendo assim, a + $\overline{z}$ pode ser associado ao ponto P(2a, 0). Daí, calculando-se a área do triângulo formado pelos pontos (a,b) , (a, -b) e P que são representações dos números complexos são z, $\overline{z}$ e z + $\overline{z}$, teremos que A = |DET $\frac{1}{2}$.M|, sendo

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ a & -b & 1 \\ 2a & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo este determinante, teremos que $A = \frac{1}{2}|-ab + 2ab + 2ab - ab| = ab$, ou seja, dado um número complexo, a área do triângulo formada entre os pontos representados por este e seu conjugado e um terceiro ponto equivalente à soma de ambos sempre poderá ser calculada dessa maneira. Geometricamente, **sempre que as coordenadas de um vértice for a soma das coordenadas dos outros dois vértices, cujas ordenadas são simétricas e de mesma abcissa**, a área será dada por A= ab, sendo (a,b) e (a, -b) os pontos dados, sendo (2a, 0) o vértice obtido pela soma das coordenadas dos anteriores. Observemos que tal triângulo formado sempre será isósceles com sua altura sobre o eixo das abcissas.

6 Densidade e enumerabilidade aos olhos do Ensino Médio

Neste capítulo propomos demonstrações informais sobre densidade e também apresentamos uma ideia sobre os cardinais transfinitos para auxiliar no processo de aprendizagem e na compreensão do assunto para alunos do ensino médio.

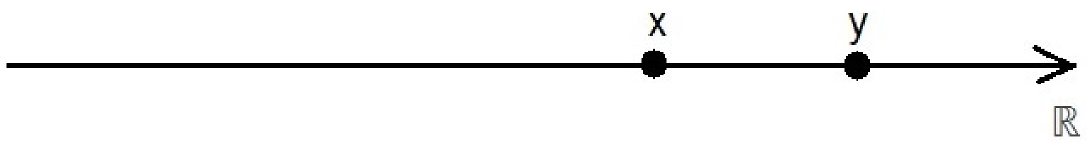
6.1 Uma proposta de demonstração informal da densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ para alunos do Ensino médio

Acreditamos que demonstrações como foram feitas anteriormente (*ver 5.4*) não são, de maneira geral, compreendidas por alunos do ensino médio. Sendo assim, trazemos de forma mais acessível afim de auxiliar na compreensão de densidade entre conjuntos para alunos do ensino médio por meio do uso da geometria.

Intuitivamente falando, dizer que um conjunto é denso em outro é o mesmo que dizer que o primeiro está espalhado por todo o outro, em qualquer lugar que você imagine. No caso, falar que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ significa dizer que, para quaisquer dois números reais que você imagine, existe um número racional entre eles.

Considere um reta numérica real, aquela mesma reta numérica que o aluno aprende no ensino fundamental II.

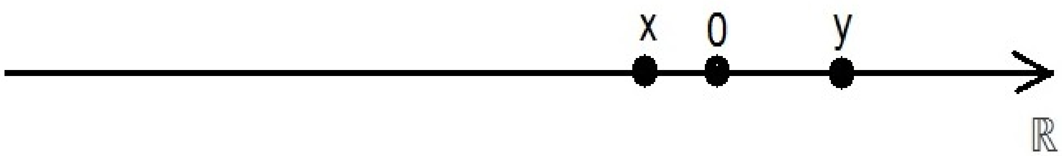
Solicite a um aluno que escolha dois números racionais quaisquer na reta dada. Feito isso, tal aluno acabou por selecionar um segmento qualquer de tamanho qualquer, pois ao marcarmos dois pontos em uma reta, posicionando-os de acordo com os números escolhidos, tem-se um segmento. Como esses números poderiam ser escolhidos aleatoriamente e, caso outro aluno fosse selecionado, provavelmente escolheria outros dois, deixe-mo-los indicados de maneira genérica por x e y, com x, y $\in \mathbb{Q}$, justamente para deixar claro que a escolha dos números em questão não iria interferir no resultado.



Tais números x e y podem ser ambos negativos, positivos ou possuírem sinais contrários. Sendo assim, a referência de onde está o zero é de suma importância para tal ideia. Separemos então nossa "demonstração intuitiva"em três possibilidades:

- **x e y possuem sinais opostos**.

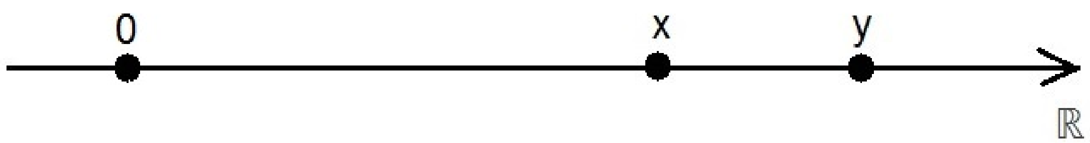
Dessa maneira, o zero estaria dentro do segmento em questão.



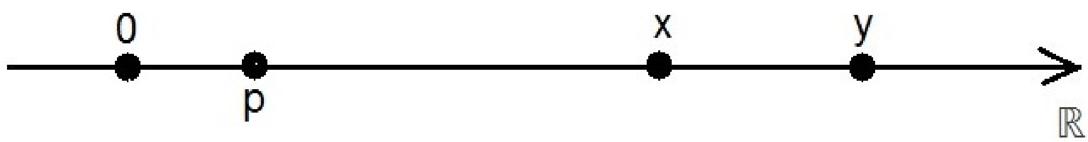
Nesta situação, como $0 \in \mathbb{Q}$ e $x < 0 < y$, fica claro que existe um número racional entre dois reais quaisquer, no caso, o zero.

- **x e y são positivos**.

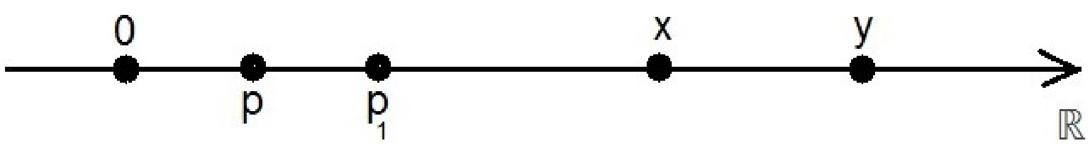
Dessa maneira, o zero estaria à esquerda de x. Sem perda alguma de generalidade, poder-se-ia marcar o zero em qualquer lugar desta reta, desde que à esquerda de x. Para melhor compreensão, recomenda-se colocá-lo com uma distância suficiente para a construção de segmentos pré-delimitados.



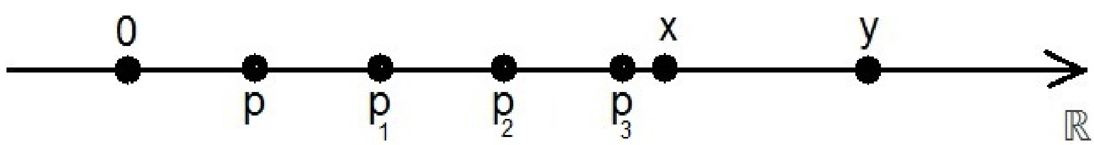
Feito isso, solicite a um aluno que selecione um segmento de certo tamanho p $\in \mathbb{Q}$ a partir de zero, desde que menor que o tamanho de x até y. Pode ocorrer que o aluno em questão não compreenda a princípio o que foi sugerido. Recomendamos então que o professor induza o aluno e medir um segmento contido naquele formado pelos pontos de extremidades x e y e o transfira para o local como indicado na imagem a seguir.



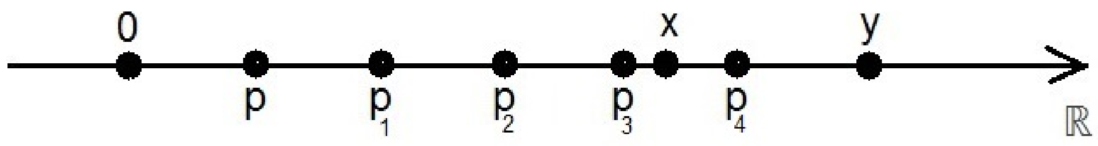
É claro que este segmento possui tamanho p, pois a distância de 0 a p é p - 0 = p. Agora, a ideia é caminhar pela reta da esquerda para a direita acrescentando tal segmento de tamanho p. Assim, marcamos um ponto p_1 à direita de p de maneira que p seja o ponto médio deste novo segmento. Caso seja de interesse do professor, o aluno poderá fazê-lo.



Continuemos tal processo com a finalidade de construirmos o máximo de segmentos possíveis de tamanho p até quase chegar em x.



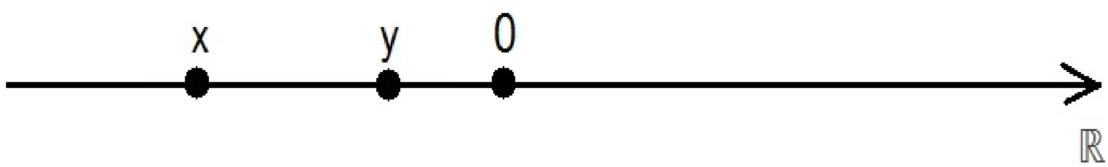
É fato que para construirmos o próximo segmento de tamanho p, o ponto p_4 teria de ser construído no interior do segmento de tamanho y - x, ou seja, x $< p_4 <$ y.



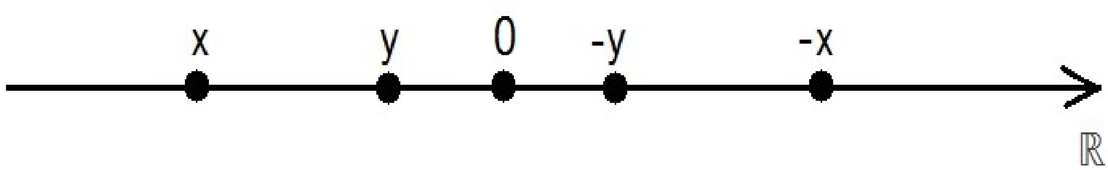
Como todos os segmentos construídos a partir de p têm tamanho p, segue que p_1 = 2p, p_2 = 3p, etc. Em outras palavras, p é um número racional. Desta maneira, 2p, 3p, etc também são números racionais, o que implica no fato de que p_4 = 5p (neste caso aqui apresentado) também é um número racional. Desta forma, existe um número racional entre os reais x e y.

- **x e y são negativos**.

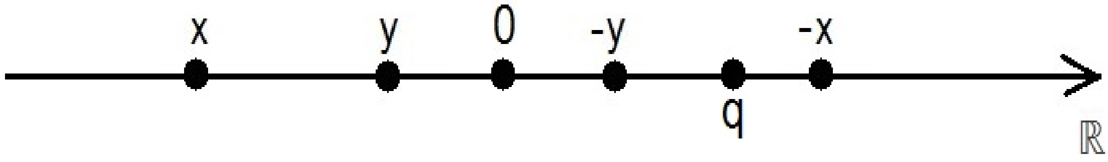
Dessa maneira, o zero estaria à direita de y. Sem perda alguma de generalidade, poder-se-ia marcar o zero em qualquer lugar desta reta, desde que à direita de y.



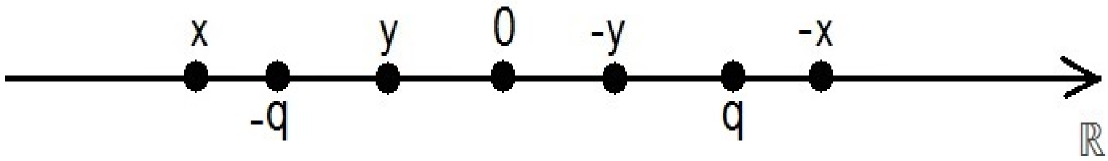
Feito isso, marquemos os simétricos de x e y em relação à origem na reta. Como x e y estão à esquerda de zero, estes são negativos. Logo, para tornarem-se positivos, é necessário que sejam multiplicados por -1.



Vimos anteriormente que um segmento delimitado por dois números reais e que esteja à direita de zero possui um número racional em seu interior. Sendo assim, podemos marcar o ponto representando o número q entre -y e -x.



Assim, assinalando o simétrico de q na reta, teremos o racional -q entre y e x, o que mostra que existe um racional entre dois números reais negativos.



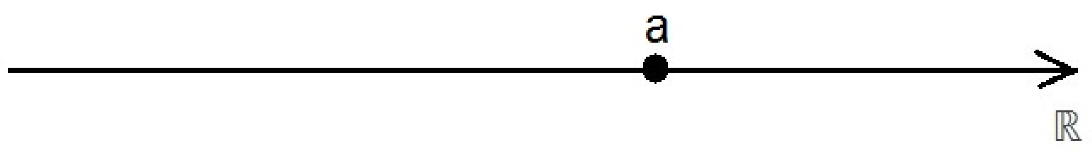
Ou seja, mostramos ao aluno, por intuição geométrica, que dados dois números reais positivos, negativos ou com sinais opostos, sempre haverá um número racional entre ambos.

6.2 Uma proposta de demonstração informal sobre densidade de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ para alunos do ensino médio

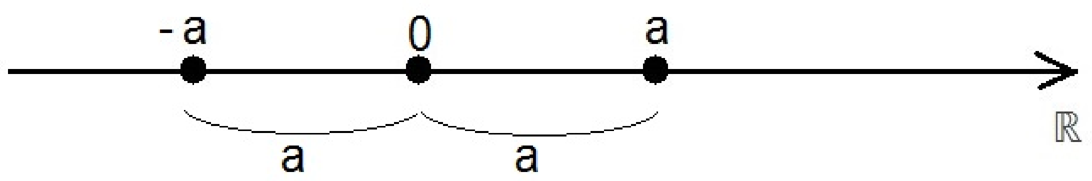
Antes de propormos a demonstração, vale ressaltar a dificuldade de alunos do ensino médio em compreender como esta demonstração é feita em (*ver 5.5*).

Consideremos novamente um reta numérica real, assim como feita anteriormente.

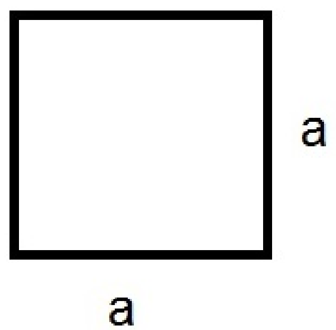
Peça a um aluno que escolha um número racional e diferente de zero qualquer na reta dada. Como esse número poderia ser escolhido aleatoriamente e, caso outro aluno fosse selecionado, provavelmente escolheria outro. Por isso, novamente deixe-mo-los indicado de maneira genérica por a, com a $\in \mathbb{R}$, justamente para deixar claro que a escolha dos números em questão não iria interferir no resultado. Depois assinale o local na reta como descrito a seguir.



Tal número poderia ser negativo ou positivo. Construa o segmento de tamanho a. Como |a| = |-a| = a, o fato de ser negativo ou positivo não iria interferir em nada.

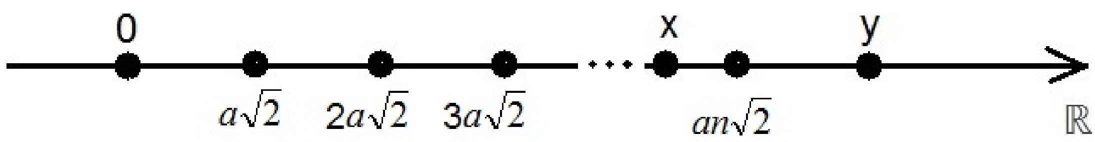


Com este segmento de tamanho a, construamos um quadrado de lado a.

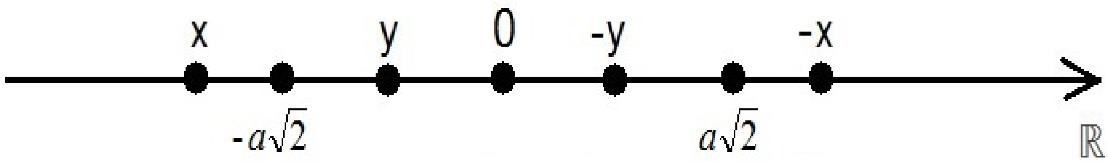


Feito isso, sabemos que a diagonal de um quadrado de lado a é dada por a$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, pois $\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e a $\neq 0$. A ideia agora é utilizar o mesmo procedimento usado para mostrar que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Toma-se este segmento de medida a$\sqrt{2}$ na reta real a partir de zero. Selecionam-se outros dois números x e y, com x > a$\sqrt{2}$ e y - x > a$\sqrt{2}$, ao construirmos novos segmentos de medida a$\sqrt{2}$, encontraremos que o número an$\sqrt{2}$ estaria entre x e y, com n $\in \mathbb{N}$.

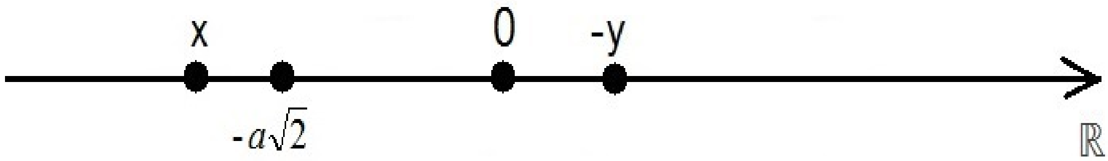
- **x e y possuem sinais positivos**.



- **x e y possuem sinais negativos**.



- **x e y possuem sinais opostos** (basta desconsiderar os números -x e y).



6.3 Uma analogia sobre o estudo dos cardinais transfinitos aos olhos do ensino médio

Acreditamos que, para alunos do ensino médio, os infinitos possuem o mesmo tamanho (seria esta a palavra utiliza por eles, visto que não conhecem o termo possança). Ressaltamos que é possível ensinar sobre os cardinais transfinitos para estes alunos, desde que a abordagem utilizada seja mais acessível a eles, ou seja, de fácil compreensão.

Vimos anteriormente que Cantor desenvolveu uma teoria de números cardinais transfinitos, representados pela letra $\aleph$ (alef), primeira letra do alfabeto grego. Vimos também que os cardinais infinitos possuem uma ordem $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, etc, por serem números cardinais. Tais números medem a grandeza de um conjunto, ou seja, quantos elementos este possui.

Para entendermos melhor estes cardinais transfinitos, visualizemos a seguinte situação: suponhamos que para uma dezena de grãos de milho atribuamos o símbolo C_1; para duas dezenas, o símbolo C_2 e assim sucessivamente. Existe a possibilidade de não termos uma dezena completa, pois podemos ter 58 grãos, por exemplo, que representam cinco dezenas mais oito unidades de grãos de milho. Sendo assim, iremos combinar que os símbolos C_i, com i $\in \mathbb{N}$, sejam utilizados apenas para expressar dezenas completas. Caso hajam unidades que não completem uma dezena, no caso, a próxima, manteremos o símbolo para representar as dezenas completas. Assim, 51 a 59 grãos de milho seriam representados por C_5. Seguindo esta analogia, para cada dezena de grãos de milho de $i0$ a $i9$, seria atribuído o símbolo C_i, com $i \in \mathbb{N}$.

Suponhamos agora que, para cada centena de grãos de milho de $i00$ a $i99$, seja atribuído o símbolo C_i, com $i \in \mathbb{N}$. Logo, havendo 123 grãos de milho, esta centena seria representada por C_1. Havendo 188 grãos, esta também seria representada por C_1. Se houvessem 361 grãos, tal quantidade seria expressa por C_3 e assim por diante.

Analogamente, se atribuíssemos cardinais M_i a quantidades de milhares, M_5 representaria uma quantidade de 5832 grãos, por exemplo. Seguindo tal raciocínio, poderíamos simbolizar as dezenas de milhares, as centenas de milhares, os milhões, bilhões, trilhões, etc. A ideia agora é imaginar que existam números muito grandes que possam ser representados por G_i, com $i \in \mathbb{N}$. Estendendo-se tal ideia para conjuntos infintos, utilizam-se os $\aleph_i$.

7 Conclusão

Assim como tudo o que existe, a matemática possui sua história. Mediante as dificuldades e limitações encontradas em outras épocas, o estudo da matemática sempre esteve presente e este auxilou em várias descobertas que são utilizadas até hoje. Algumas dessas levaram séculos para serem fundamentadas.

A matemática está diretamente ligada à filosofia (esta presente em todas as demais ciências), pois, assim como ela, utiliza de abstração, dedução, indução e abdução. Apresentamos alguns paradoxos famosos afim de entendermos um "infinito cíclico"e, no estudo sobre o infinito, podemos perceber que, tanto na filosofia quanto na matemática, uma primeira tarefa seria tentar defini-lo. Como não poderia deixar de ser, uma primeira visão remete a quantificar esse infinito. Fala-se em infinito potencial (como algo que pode tornar-se infinito) e em um infinito atual (a quantidade de um todo equivale a qualquer uma de suas partes). Podemos citar também um infinito relativo (sem nenhum limite assinalável) e um infinito absoluto (sem nenhum limite possível).

Com relação ao estudo de cardinalidade e enumerabilidade de conjuntos, podemos observar uma quantificação de elementos em cada um dos conjuntos numéricos, quando possível, e uma idealização dos diferentes tamanhos de diferentes infinitos.

A densidade entre conjuntos nos fez aproximar o longínquo do ligeiramente próximo, visto que demonstrar a existência de um número entre outros dois, em conjuntos ordenados, nos faz remeter à seguinte indagação: o infinito pode ser encontrado até mesmo em pequenas partes.

Este trabalho também me fez observar que é possível expôr aos alunos do ensino médio e aos que se interessarem por matemática uma visão menos complexa, ou seja, lúdica, de estudos abstratos da matemática, tais como teoria de números e o estudo do infinito. Compreendemos que o desinteresse pela matemática começa no não entendimento dessa ciência e, ao compreendermos melhor certos fatos que são desconhecidos (ou não acessíveis) para muitos, o olhar a respeito de determinado assunto passa a ser diferente. Ressaltamos que o estudo da matemática em si não é simples, porém, com dedicação e força de vontade, é possível superar dificuldades e desafios.

Como foi proposto, o objetivo deste trabalho foi o de apresentar um estudo sobre os conjuntos numéricos, resgatar fundamentações e fatos históricos de suas descobertas e demonstrar teoremas importantes dentro da matemática pura. Estudar os conjuntos numéricos compreendendo um pouco de sua história (descoberta e fundamentação) traz uma visão diferenciada a respeito deles.

É importante perceber que a linguagem matemática que se tem hoje passou por uma série de alterações. A partir das contribuições de Pitágoras, Hipaso de Metaponto, Dedekind, Cardano, Bombelli, Girard, Cantor, dentre tantos outros, temos as ferramentas matemáticas (teoremas, definições e propriedades) utilizadas na contemporaneidade.

Observar demonstrações dentro da matemática pura e procurar entendê-las pode despertar um interesse maior por matemática.

Por fim, indicamos que ter conhecimentos algébricos e aritméticos é fundamental para compreender a matemática, por isso, em momento algum, podemos desprezar a base de nosso conhecimento, pois, sem esta, o estudo sobre densidade, enumerabilidade, cardinalidade e o infinito se tornam cada vez distantes.

Referências

[1] ÁVILA, G. *Cálculo I: Funções de uma variável*, 6ª edição, Editora Ltc, 1994. Páginas 24 a 26.

[2] ÁVILA, G. *Análise Matemática para Licenciatura*, Editora Edgard Blücher Ltda., 2001.

[3] BAUMGART, J. K. Algebra, *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*, Volume 4. Editora Atual, São Paulo, 1994.

[4] BEZERRA, M. J. *Matemática para o Ensino Médio*, Volume Único, São Paulo, Editora Scipione, 2001.

[5] BOYER, C. B. *História da matemática.* Tradução: Elza F. Gomide, São Paulo. Editora Edgard Blücher, 1974.

[6] CARMO, M. P. do, MORGADO, A. C., WAGNER, E. *Trigonometria e Números Complexos*, IMPA-VITAE, Brasil, 1992.

[7] EVES, H. *Introdução a História da Matemática*, Volume 5, Editora da Unicamp, 2011.

[8] FIGUEIREDO, D. *Números Irracionais e Transcendentes.* Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

[9] GARBI, G. *A Rainha das Ciências - Um Passeio Histórico Pelo Maravilhoso Mundo da Matemática.* 1ª ed, Editora Livraria Da Física, 2006.

[10] HIGIDIO, P. O. *Análise na reta*, 2013. Acesso em http://www.ufpr.br/ higidio.

[11] IEZZI, G. DOLCE, O. MURAKAMI, Carlos, *Fundamentos de Matemática Elementar*, São Paulo, Atual Editora Ltda, edição 1977.

[12] RADICE, L. L. *O Infinito: de Pitágoras a Cantor itinerários filosóficos matemáticos de um conceito base.* Lisboa: Editorial Notícias, 1981.

[13] VON RÜCKERT, E. *Cardinais transfinitos: a "possança"ou o número de elementos de um conjunto infinito*, 1968. Acesso em http://www.ruckert.pro.br/texts

[14] VERMA, S. *Ideias Genais na Matemática - Maravilhas, curiosidade, enigmas e soluções brilhantes da mais fascinante das ciências*. Tradução: Amanda Pavani. Editora Gutenberg, 2013.

[15] YARNELLE, J. E. *Thinking With Mathematics: An Introduction Transfinite Mathematics*, D.D Health and Company, 1964.