Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

APROXIMAÇÕES POR SÉRIE DE POTÊNCIA E SÉRIE DE FOURIER

ANDERSON LUIZ RIBEIRO

Uberaba - Minas Gerais

AGOSTO DE 2017

APROXIMAÇÕES POR SÉRIE DE POTÊNCIA E SÉRIE DE FOURIER

ANDERSON LUIZ RIBEIRO

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFTM como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Nunes de Souza.

Uberaba - Minas Gerais

AGOSTO DE 2017

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Ribeiro, Anderson Luiz
R367a Aproximações por série de potência e série de Fourier / Anderson Luiz Ribeiro. -- 2017.
79 f. : il., fig., graf.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2017
Orientador: Prof. Dr. Bruno Nunes de Souza

1. Sequências (Matemática). 2. Séries (Matemática). 3. Cálculo. 4. Integrais (Matemática). 5. ´ . 6. e (O número). 7. ln 2. I. Souza, Bruno Nunes de. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 517.52

ANDERSON LUIZ RIBEIRO

Aproximações por série de potência e série de Fourier

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFTM como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

25 de agosto de 2017.

Banca Examinadora

Bruno Nunes de Souza

Prof. Dr. Bruno Nunes de Souza.
Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Professor
Prof. Dr. Nelson Fernando Inforzato
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Vagner R. de Bessa

Professor
Prof. Dr. Vagner Rodrigues de Bessa
Universsidade Federal de Viçosa

Ao meu pai, José Ribeiro, homem de coragem, honesto, trabalhador, íntegro,
que deu o seu sangue para que eu pudesse ser um vencedor.
E graças a ele eu sou.

"Nenhum atleta será coroado, se não tiver lutado segundo as regras."

II Timóteo 2,5

Agradecimentos

A Deus que, com a sua infinita misericórdia e amor, sempre esteve ao meu lado, manifestando o seu poder, protegendo e ensinando-me a trilhar o caminho certo.

A minha esposa, Marília, e nossas filhas, Rafaela e Gabriela, que são a manifestação do amor de Deus em minha vida.

Aos meus pais, José Ribeiro e Antônia das Graças D. Ribeiro, pelo exemplo, orações e principalmente pela luta que foi criar três filhos diante de tantas dificuldades.

Ao Prof. Dr. Bruno Nunes de Souza, orientador desta dissertação, pela compreensão, sugestões e, acima de tudo, pela paciência a qual fez com que este trabalho fosse concluído com muito sucesso.

A Capes, pelo apoio financeiro por meio de bolsa de estudos. Agradeço a todo o corpo docente do PROFMAT/UFTM, pelo carinho e incetivo que tiveram comigo durante o transcorrer deste curso.

A todos os meus amigos de curso, que sempre estiveram presentes nesta caminhada.

A todos os meus amigos e familiares, que, desde minha infância, fizeram parte da minha vida, ajudaram-me nas horas difíceis e de alguma forma me incentivaram e motivaram a não desistir.

A todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão deste curso.

Resumo

Este trabalho apresenta métodos para calcular um valor aproximado do número π usando séries de potências e Série de Fourier, assim como um valor aproximado para o número de Euler (e) e $\ln 2$, usando Séries de Potências. O principal objetivo é usar a Teoria das Séries de Potências e Séries de Fourier do Cálculo Diferencial e Integral para fazer uma estimativa do valor aproximado destes números conhecidos, π ; e; $\ln 2$.
Palavras-chave: Sucessão; Sequências; Limites; Integrais; Séries; π; e; $\ln 2$.

Abstract

This work presents methods to calculate an approximate value of the number π using power series and Fourier Series. So as an approximate value for the Euler number (e) and $\ln 2$ using Power Series. Its main purpose is to use the Theory of Power Series and Fourier series of Differential and Integral Calculus to estimate the approximate value of these known numbers, π; e; $\ln 2$.
Keywords: Succession; Sequences; Limits; Integrals; Series π; e; $\ln 2$.

Sumário

INTRODUÇÃO **1**

1 SUCESSÃO OU SEQUÊNCIAS **5**

1.1 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS(PA) 7

1.1.1 Termo Geral da PA 7

1.1.2 Soma dos termos de uma PA 8

1.2 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS (PG) 10

1.2.1 Termo Geral da PG 10

1.2.2 Soma dos termos de uma PG finita 11

1.3 LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA INFINITA 12

1.3.1 Algumas propriedades. 16

2 SÉRIES **18**

2.1 DEFINIÇÃO 19

2.1.1 Soma Parcial 19

2.1.2 Séries Geométricas 21

2.2 TESTES DE CONVERGÊNCIA 22

2.2.1 Teste do n-ésimo termo 23

2.2.2 Teste da Comparação 24

2.2.3 Teste da Razão 25

2.2.4 Teste da Série Alternada 27

2.3 SÉRIES DE POTÊNCIAS 29

2.3.1 Derivação e Integração Termo a Termo 31

2.3.2 Séries de Taylor e de Maclaurin 32

3 APROXIMAÇÕES POR SÉRIES DE POTÊNCIAS **34**

3.1 O n-ésimo resto 34

3.1.1 Aproximando Pi 35

3.1.2 Aproximando Funções Exponenciais 36

3.1.3 Aproximando Logaritmos 37

4 APROXIMAÇÕES POR SÉRIES DE FOURIER **41**

4.1 Funções Ortogonais 41

4.2 Série de Fourier 48

4.3 Aproximações para Pi 51

CONSIDERAÇÕES FINAIS **66**

REFERÊNCIAS **67**

Lista de Figuras

1 “Penso Logo Existo” 1
2 Numeração Egípicia 2

1.1 Triângulos 8
1.2 Fragmentos do Olho de Hórus 10

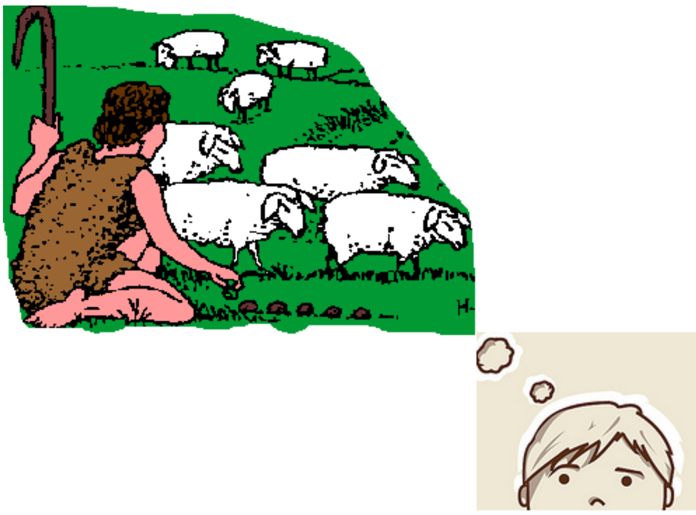
2.1 Subdivisões de um quadrado com suas respectivas áreas. 18

4.1 Gráfico da onda quadrada 52
4.2 Onda quadrada mais o teorema de Fourier 54
4.3 Expansão periódica para $f(x) = x^2$,$-\pi \leq x \leq \pi$. 55
4.4 Expansão periódica da função $f(x) = |x|$,$-\pi \leq x \leq \pi$. 57
4.5 Expansão periódica da função $f(x)$. 61

INTRODUÇÃO

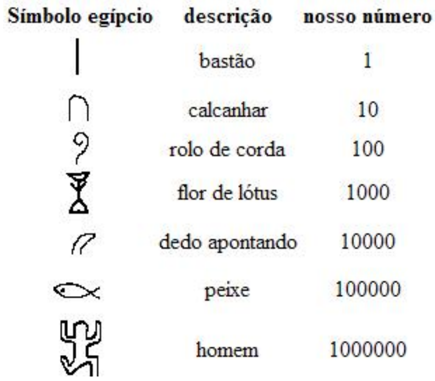
O número é um conceito básico e de extrema importância em matemática construído com a evolução humana. No princípio, não existia uma definição ou um conceito formal de número para representar quantidades. Quem não se lembra daquelas histórias contadas nas séries iniciais do ensino básico sobre pastores que juntavam pedrinhas para comparar o seu rebanho?

Figura 1: "Penso Logo Existo"



À medida que a necessidade de efetuar contagens maiores foi aparecendo o método de contar teve que ser aperfeiçoado. Dessa forma, cada civilização criou um sistema de numeração que satisfizesse as necessidades da época. Como exemplo pode-se observar o sistema de numeração dos egípcios na figura 2 .

Figura 2: Numeração Egípicia



Símbolo egípcio	descrição	nosso número
	bastão	1
	calcanhar	10
	rolo de corda	100
	flor de lótus	1000
	dedo apontando	10000
	peixe	100000
	homem	1000000

O sistema de numeração predominante na atualidade, chamado de sistema decimal, é o Indo-Arábico, criado pelos Hindus e aperfeiçoado pelos árabes. Este sistema sofreu várias modificações ao longo da história, substituindo os já existentes. Os dez algarismos indo-arábicos utilizados no sistema decimal são: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Os conjuntos numéricos foram surgindo gradativamente a partir do momento em que alguns números não satisfaziam certas operações ou necessidades. Por exemplo, o conjunto dos números inteiros, que surgiu como uma noção de quantidades negativas, prejuízos, dívidas. Vale enfatizar que nada aconteceu da noite para o dia, pelo contrário, foi um processo difícil de ser aceito e foi amadurecido com a ajuda de várias pessoas que se interessavam pelo assunto. Como exemplo pode-se observar este grau de dificuldade em (COMO...,1994, p.22):

> Não é nada distinto indicar a soma de duas quantidades da seguinte forma:
>
> $$1 + 1 = 2 \tag{1}$$
>
> Ora, qualquer estudioso de Matemática avançada sabe que:
>
> $$\begin{aligned} 1 &= \ln e \\ 1 &= \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x \qquad \text{e,} \quad \textit{ainda}, \\ 2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$
>
> Assim, a equação (1), de maneira mais científica, será:
>
> $$\ln e + (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \tag{2}$$
>
> Ou, lembrando as relações:
>
> $$1 = \cosh y \sqrt{1 - \tanh^2 y} \qquad \text{e} \qquad e = \lim_{z \to \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z,$$

a equação (2) pode, então, ser simplificada para:

$$\ln \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z + (\,\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh y\sqrt{1-\tanh^2 y}}{2^n}. \qquad (3)$$

É óbvio que a equação (3) é de maior clareza, simplicidade e compreensão do que a equação (1).

Talvez, de todos os conjuntos, o mais estranho é o conjunto dos números irracionais, pois estes números não podem ser escritos na forma inteira e nem fracionária. Como todo começo tem uma história, atribui aos Pitagóricos o descobrimento de um dos primeiros números irracionais, a raiz quadrada de dois, ao tentar descobrir o valor da diagonal de um quadrado de lado um. Mais uma vez o caos estava instaurado, pois os deuses não admitiriam a existência desse número, já que havia, entre eles, um lema que os deuses inventaram os números inteiros e o resto era obra do ser humano. Deixando de lado as controvérsias desta época, sem dúvida alguma o surgimento destes números foi um grande avanço.

Uns dos mais famosos números irracionais é o π, nome dado a uma constante que há mais de 4000 anos já era observado como sendo a razão entre a circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro. No ensino básico seu valor é aproximado para $3,14$. Segundo Singh $(2008, p.67)$:

> π nunca poderá ser escrito com exatidão porque a carreira de decimais se prolonga para sempre sem apresentar qualquer padrão. Uma bonita característica dessa estrutura desordenada é que ela pode ser calculada usando-se uma equação que é extremamente regular:
>
> $$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\cdots\right).$$

Outro número irracional de extrema relevância no estudo da matemática é o número de Euller e, que ao contrário do π, é muito pouco comentado na educação básica.

Segundo Maor (2008, *on-line*):

> As origens de e não são tão claras, elas parecem recuar ao século XVI, quando se percebeu que a expressão $(1 + 1/n)^n$, que aparecia na fórmula dos juros compostos, tendia a um certo limite — cerca de $2,71828$ — à medida que n aumenta. Assim e tornou-se o primeiro número a ser definido por um processo de limite, $e = \lim(1 + 1/n)^n$ conforme $n \longrightarrow \infty$. Durante algum tempo o novo número foi considerado uma curiosidade; então, a bem-sucedida quadratura da hipérbole por Saint-Vincent colocou a função logarítmica e o número e na vanguarda da matemática. O passo crucial foi dado com a invenção do cálculo, quando se percebeu que o inverso da função logarítmica — que depois seria denotado como e^x — era igual à sua própria derivada. Isto, imediatamente, deu ao número e e à função e^x um papel central na análise.

Desta forma, o principal objetivo deste trabalho é determinar aproximações para os números irracionais:

- π por meio de séries de potências e séries de Fourier.
- Número de Euller e por séries de potências.
- Logaritmo natural, $\ln 2$, por séries de potências.

Ou seja, mostrar que:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \operatorname{tg}^{-1}1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \cdots , \\
\frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots , \\
e &\approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} \approx 2,71828, \\
\ln 2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n},
\end{aligned}$$

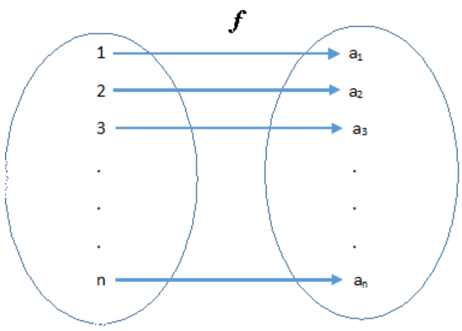
além de outras.

1 SUCESSÃO OU SEQUÊNCIAS

Existem várias definições para sucessão ou sequência, desde as mais elaboradas até as mais simples. Em um sentido mais amplo sucessão ou sequência é qualquer conjunto em que considera-se os elementos em determinada ordem, por exemplo, a escalação de um time de futebol por ordem alfabética ou o conjunto ordenado dos meses do ano. Neste estudo, o foco terá como base os números reais, desta forma, pode-se definir uma sequência numérica como uma função de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{R}$. Onde $\mathbb{N}^*$, domínio da função, é o conjunto dos números naturais a partir do um, ou seja, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ e $\mathbb{R}$, contra-domínio, é o conjunto dos números reais.

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$

$$n \ \to f(n) = a_n$$



Será escrito $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$, ou (a_n), ou $\{a_n\}$ para indicar a sequência, em que a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo, $\ldots$, a_n é o n-ésimo termo ou termo geral da sequência.

Algumas sequências podem ser definidas atribuindo uma fórmula para o termo geral, tal como $a_n = \frac{n}{n+1}$ ou por meio da listagem de seus termos:

$$a_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\right). \tag{1.1}$$

Pode-se observar que cada termo dessa sequência (1.1) é maior que o seu antecessor. Já na sequência

$$b_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right), \tag{1.2}$$

cada termo, a partir do segundo, é menor que o seu antecessor. Desta forma, será dado a seguir uma definição para sequência crescente e decrescente.

Definição 1.0.1. *Uma sequência $\{a_n\}$ é não-decrescente se $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$, sendo não-crescente se $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$, em ambos os casos a sequência é denominada* **monótona**.

Exemplo 1.0.1. *A sequência $(0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, \cdots)$ é monótona não-decrescente.*

Exemplo 1.0.2. *A sequência $(1, 1, 0, 0, -1, -1, \cdots)$ é monótona não-crescente.*

Exemplo 1.0.3. *A sequência $x_n = (-1)^n = (-1, 1, -1, 1, \cdots)$ não é monótona.*

Outras sequências são definidas por recorrência, ou seja, por meio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) seu(s) antecessor(es) imediato(s). Uma famosa sequência definida por recorrência é a de Fibonacci, na qual cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, (n \geq 0),$$

com $F_1 = F_2 = 1$. Logo $F_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots)$.

A título de curiosidade, a sequência $\{F_n\}$, surgiu quando Leonardo Pisa (1170 – 1250), percebeu que esta sequência está diretamente relacionada com o problema da criação de coelhos produzidos por ano. A questão é: quantos pares de coelhos podem ser gerados em um ano, iniciando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?

Assim sendo, utilizando a fórmula $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, (n \geq 0)$, com $F_1 = F_2 = 1$, percebe-se que em um ano haverá 233 casais de coelhos, uma vez que 144 já estarão maduros e 89 serão casais novos.

Fibonacci também percebeu que ao dividir um número desta sequência pelo seu antecessor imediato, à partir do 5, obtêm-se uma aproximação para o famoso número áureo $\phi = 1,618\cdots$, usado em obras da arquitetura clássica, pinturas e esculturas renascentistas.

Definição 1.0.2. *Uma sequência $\{a_n\}$ é limitada superiormente se existir um número M tal que $a_n \leq M$, $\forall n \geq 1$. A sequência é limitada inferiormente se existir um número m de forma que $m \leq a_n$, $\forall n \geq 1$. Se ela for limitada superiormente e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma sequência limitada. Neste caso, chama-se M de cota superior e m de cota inferior.*

Axioma 1.0.1 (Axioma do Completamento)**.** *Todo conjunto não vazio de números reais que tenha um limitante superior, possui um limitante superior mínimo (supremo). Da mesma forma, todo conjunto não vazio de números reais que tenha um limitante inferior, possui um limitante inferior máximo (ínfimo).*

Exemplo 1.0.4. *A sequência (1.2) onde $a_n = \frac{1}{n}$ é limitada superiormente, tendo* 1 *como supremo e limitada inferiormente, sendo* 0 *o ínfimo.*

É comum, no cotidiano, aparecer sequências que sofrem variações iguais ou proporcionais, em intervalos de tempos iguais, por exemplo, pode-se destacar as progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG), que serão definidas a seguir. Aliás, vale ressaltar que foi baseado na idéia de (PA) e (PG) que Thomas Malthus (1766-1834) lançou uma profecia prevendo o fim trágico para a humanidade. Segundo ele "enquanto a produção de alimentos cresce em progressão aritmética, a população cresce em progressão geométrica".

1.1 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS(PA)

Uma PA é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. A esta diferença é dado o nome de razão da progressão. De uma maneira mais formal, defini-se da seguinte maneira: sejam a e r dois números reais. Chama-se Progressão Aritmética à sequência $f(n) = a_n$, tal que:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

portanto, $a_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ ou seja, $a_n = (a, a + r, a + 2r, \ldots)$, em que o número real r chama-se razão da PA.

1.1.1 Termo Geral da PA

Pela definição de PA, pode-se construir as seguintes equações:

1º termo: a_1

2º termo: $a_2 = a_1 + r$

3º termo: $a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$

4º termo: $a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$

5º termo: $a_5 = a_4 + r = a_1 + 4r$

$\vdots$

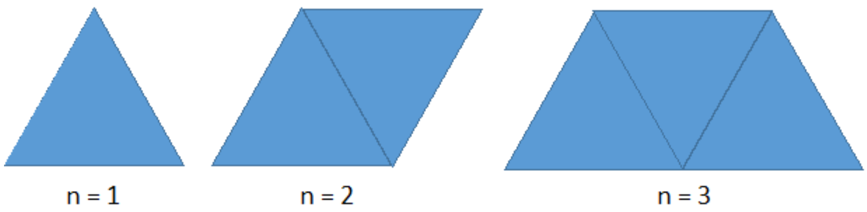
n-ésimo termo ou termo geral: $a_n = a_1 + (n - 1)r$.

Exemplo 1.1.1. *Qual é o décimo quinto termo da PA* $(2, 5, \cdots)$?

Solução: Temos $a_1 = 2$, $r = 5 - 2 = 3$ e $n = 15$. Pela fórmula do termo geral $a_{15} = 2 + (15 - 1)3 = 44$, ou seja o décimo quinto termo é 44.

Exemplo 1.1.2. *Formam-se n triângulos com palitos, conforme a figura* 1.1. *Qual o número de palitos usados para construir n triângulos?*

Figura 1.1: Triângulos



Solução: O aumento de um triângulo acarreta o aumento de dois palitos. Portanto, o número de palitos constitui uma PA de razão 2, com $a_1 = 3$ palitos. Como $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos: $a_n = 3 + (n - 1).2 = 2n + 1$.

1.1.2 Soma dos termos de uma PA

Seja $a_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma PA. O objetivo é determinar uma fórmula para calcular a soma dos seus n primeiros termos.
Seja

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \tag{1.3}$$

Invertendo a soma em (1.3) temos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1. \tag{1.4}$$

Daí, somando (1.3) com (1.4) temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Sabe-se que em uma PA a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, ou seja:

$$\begin{cases} a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n \\ a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n \end{cases}.$$

Sendo assim, todos os parênteses tem o mesmo valor que o primeiro, $(a_1 + a_n)$. Como são n parênteses, tem-se:

$$2S_n = (a_1 + a_n).n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}\cdot \tag{1.5}$$

Desta forma temos que (1.5) é a fórmula para soma geral dos termos de uma PA.

Segundo alguns historiadores, essa fórmula foi usada pela primeira vez por Gauss, quando seu professor, para manter seus alunos ocupados, pediu que somassem todos os números de um a cem. Presumia-se que eles demorassem muito tempo realizando a tarefa. Para sua surpresa, em poucos instantes Gauss deu a resposta correta. O mais surpreendente é que Gauss tinha entre 7 e 8 anos.

Exemplo 1.1.3. *Determine a soma dos termos da sequência* $(1, 2, 3, \cdots, 100)$.

Solução: Nesta sequência temos:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ r &= 1 \\ a_n &= 100. \end{aligned}$$

Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n-1)r$, temos

$$100 = 1 + (n-1)1 \Rightarrow n = 100.$$

Usando a fórmula (1.5) tem-se:

$$S_{100} = \frac{(1 + 100).100}{2} = 5050\cdot$$

Exemplo 1.1.4. *Resolva a equação:* $\log_2 x + \log_2 x^2 + \log_2 x^3 + \cdots + \log_2 x^{100} = 15150.$

Solução: Pelas propriedades de logaritmo verifica-se:

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_2 x^2 + \log_2 x^3 + \cdots + \log_2 x^{100} &= \log_2 x + 2\log_2 x + 3\log_2 x + \cdots + 100\log_2 x \\ &= (1 + 2 + 3 + \cdots + 100)\log_2 x. \end{aligned}$$

Pelo exemplo 1.1.3 tem-se: $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = 5050$,
portanto,

$$\log_2 x(5050) = 15150 \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{15150}{5050} \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8.$$

Ou seja, a solução da equação é $x = 8$.

1.2 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS (PG)

Uma PG é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente é chamado de razão da PG e representado pela letra q. Também define-se uma PG como uma sequência $f(n) = a_n$, tal que:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n.q, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

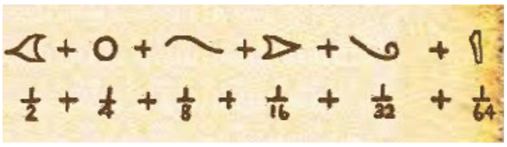
logo, $a_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ ou seja, $a_n = (a_1, a_1.q, a_1.q^2, \ldots, a_1.q^n, \ldots)$.

Exemplo 1.2.1. *A sequência* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\right)$ *é uma PG finita cuja razão é* $q = \frac{1}{2}$.

Exemplo 1.2.2. *A sequência* $(6, -18, 54, -162, \cdots)$ *é uma PG infinita de razão* $q = -3$*, pois* $(-18) \div 6 = 54 \div (-18) = (-162) \div 54 = -3$.

Esta sequência é famosa, pois os egípcios usavam como parte de seu sistema numérico, em que cada fração representava um fragmento do olho de Hórus, divindade da época.

Figura 1.2: Fragmentos do Olho de Hórus



1.2.1 Termo Geral da PG

Seja (a_n) uma PG, com a_1 o primeiro termo e q a razão. Pela definição de PG, pode-se construir as seguintes equações:

1º termo: a_1

2º termo: $a_2 = a_1.q$

3º termo: $a_3 = a_2.q = a_1.q^2$

4º termo: $a_4 = a_3.q = a_1.q^3$

5º termo: $a_5 = a_4.q = a_1.q^4$

$\vdots$

n-ésimo termo ou termo geral: $a_n = a_1.q^{n-1}$.

Exemplo 1.2.3. *Em uma progressão geométrica, temos que o 1º termo equivale a 4 e a razão igual a 3. Determine o 8º termo dessa PG.*

Solução: Observa-se pelo enunciado que $a_1 = 4$, $q = 3$ e $n = 8$. Substituindo na fórmula do termo geral tem-se:

$$a_8 = 4.3^{8-1} = 4.3^7 = 8748.$$

A progressão geométrica está diretamente ligada à matemática financeira, pois no regime de capitalização de juros compostos, os juros são calculados sobre o montante imediatamente anterior à data considerada (FRANCO, 2016).

Exemplo 1.2.4. *Se o valor de um empréstimo hoje é igual a P_1 e rende juro composto de 2% ao mês, qual será o valor deste empréstimo daqui a n meses?*

Solução: Como o valor cresce 2% ao mês, em cada mês o valor é de 102% do valor do mês anterior. Portanto, a cada mês que passa, a quantia sofre uma multiplicação de $102\% = 1,02$, onde $q = 1,02$ é a razão da PG. Como o termo geral da PG é $a_n = a_1.q^{n-1}$, depois de n meses, o que se tem é:

$$P_n = P_1.(1,02)^{n-1}.$$

1.2.2 Soma dos termos de uma PG finita

Considere-se a PG finita $(a_1, a_1.q, a_1.q^2, \ldots, a_1.q^{n-1})$ com $q \neq 1$ e será indicado por S_n a soma dos termos dessa PG. Assim sendo:

$$S_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \cdots + a_1.q^{n-1}. \tag{1.6}$$

Multiplicando ambos os membros por q, obtem-se:

$$q.S_n = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \cdots + a_1.q^{n-1} + a_1.q^n. \tag{1.7}$$

Subtraindo (1.7) de (1.6):

$$\begin{array}{rcll}
q.S_n & = & & a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \cdots + a_1.q^{n-1} + a_1.q^n \\
-S_n & = & -a_1 & -a_1.q - a_1.q^2 - a_1.q^3 + \cdots - a_1.q^{n-1} \\
\hline
q.S_n - S_n & = & a_1.q^n - a_1 &
\end{array}$$

Colocando em evidência S_n e o a_1 tem-se:

$$S_n.(q-1) = a_1.(q^n - 1).$$

Dividindo ambos os lados por $q-1$, chega-se na fórmula da soma dos temos da PG finita:

$$S_n = \frac{a_1.(q^n-1)}{q-1}. \tag{1.8}$$

A fórmula (1.8) permite calcular a soma dos termos de uma PG quando se conhece a_1, q e n.

Exemplo 1.2.5. *Determine a soma dos termos da PG* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\right)$.

Solução: Sabemos que $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ e $n = 6$. Substituindo em (1.8) obtem-se:

$$S_6 = \frac{\frac{1}{2}.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right]}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2}.\left[\frac{1}{64}-1\right]}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2}.\left[\frac{1-64}{64}\right]}{\frac{1-2}{2}} = \frac{\frac{1}{2}.\left[-\frac{63}{64}\right]}{-\frac{1}{2}} = \frac{63}{64}.$$

Exemplo 1.2.6. *Determine o valor de x na igualdade $x + 3x + \cdots + 729x = 5465$, sabendo-se que os termos do primeiro membro formam uma PG.*

Solução:

$$\begin{cases} a_1 = x \\ q = \frac{3x}{x} = 3 \\ a_n = 729x \\ S_n = 5465 \end{cases}$$

Calculando n :

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow 729x = x3^{n-1},$$

como $x \neq 0$ então

$$729 = 3^{n-1} \Rightarrow 3^6 = 3^{n-1} \therefore n = 7.$$

Usando (1.8), tem-se

$$5465 = \frac{x(3^7-1)}{3-1}$$

$$5465 = \frac{x(2187-1)}{2}$$

$$5465 = 1093x \Rightarrow x = 5.$$

1.3 LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA INFINITA

Algumas vezes, os números na sequência se aproximam de um valor único (L) a medida que n aumenta indefinidamente. Neste caso, pode-se dizer que o limite da sequência é L. É o que acontece na sequência (1.1), cujos termos se aproximam de 1 conforme n aumenta. Portanto, de uma maneira informal, o limite de uma sequência $\{a_n\}$ descreve como a_n se comporta quando n cresce infinitamente. Com uma definição mais precisa diz-se que:

Definição 1.3.1. *Uma sequência $\{a_n\}$ tem limite L e se escreve*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

ou

$$a_n \to L \ \ \textit{quando} \ \ n \to \infty$$

se, para cada $\epsilon > 0$, existir um natural correspondente N tal que se $n > N$ então $|a_n - L| < \epsilon$.

Exemplo 1.3.1. *Use a definição 1.3.1 para provar que a sequência $\left(\frac{n}{2n+1}\right)$, tem limite $\frac{1}{2}$.*

Solução: O objetivo é mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$, tal que, se $n > N$, então: $\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$. Mas,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| &< \epsilon \quad \Leftrightarrow \\
\left|\frac{2n-2n-1}{2(2n+1)}\right| &< \epsilon \quad \Leftrightarrow \\
\left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| &< \epsilon \quad \Leftrightarrow \\
\frac{1}{2(2n+1)} &< \epsilon \quad \Leftrightarrow \\
2n+1 &> \frac{1}{2\epsilon} \quad \Leftrightarrow \\
n &> \frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}.
\end{aligned}$$

Assim, basta tomar $N > \left(\dfrac{1-2\epsilon}{4\epsilon}\right)$, pois desta forma se $n > \dfrac{1-2\epsilon}{4\epsilon}$, então

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$$

mostrando, pela definição, que a sequência dada tem limite $\dfrac{1}{2}$.

Com relação a definição da 1.3.1, a sequência $\{a_n\}$ é denominada de sequência convergente e L é dito limite da sequência. Dessa forma, se uma sequência tem limite, diz-se que a sequência é convergente, e que a sequência converge ao limite. Caso contrário, a sequência é divergente.

Exemplo 1.3.2. *Mostre que a sequência* $\{(-1)^n + 1\}$ *é divergente.*

Solução: Observa-se que os primeiros elementos dessa sequência são:

$$(0, 2, 0, 2, 0, 2, \cdots, (-1)^n + 1, \cdots).$$

Ou seja, $a_n = 0$ para n ímpar e $a_n = 2$ para n par.

Suponha por absurdo que a sequência é convergente. Assim, por definição, para todo $\epsilon > 0$ existe um $N > 0$ tal que se n for natural e se $n > N$, então $|a_n - L| < \epsilon$. Em particular, para $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe um número $N > 0$ tal que se n for natural e se $n > N$, então

$$|a_n - L| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < a_n - L < \frac{1}{2}\cdot$$

Como $a_n = 0$ para n ímpar e $a_n = 2$ para n par, verifica-se que

$$\frac{-1}{2} < -L < \frac{1}{2} \quad e \quad \frac{-1}{2} < 2 - L < \frac{1}{2}\cdot$$

Mas se $-L > \frac{-1}{2}$, então $2 - L > 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ e, assim sendo, $2 - L$ não pode ser menor do que $\frac{1}{2}\cdot$ Logo, há uma contradição e a sequência dada é divergente.

Exemplo 1.3.3. *Mostre que a sequência* $\{a_n\}$ *onde* $a_n = \frac{1}{n}$ *converge para zero.*

Solução: Para isso, basta mostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

De fato, seja $\epsilon\ > 0$ dado. O objetivo é mostrar que existe um inteiro N tal que para todo n, se $n > N$ então $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$. Neste caso basta tomar $N > \frac{1}{\epsilon}$, pois para $n > N > \frac{1}{\epsilon}$ temos, $n > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$. Isso prova que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Exemplo 1.3.4. *Mostre que, se* $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ *e* $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, *então* $\{a_n\}$ *é convergente e* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Solução: Seja $\epsilon > 0$. Já que $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$, então existe N_1 tal que $|a_{2n} - L| < \epsilon$ para $n > N_1$. Da mesma forma, já que $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, então existe N_2 tal que $|a_{2n+1} - L| < \epsilon$ para $n > N_2$.

Tome $n > N$ em que $N = max\,\{2N_1, 2N_2 + 1\}$. Se n é par, então $n = 2m$ com $m > N_1$, então

$$|a_n - L| = |a_{2m} - L| < \epsilon.$$

Se n é ímpar, então $n = 2m + 1$, com $m > N_2$, então

$$|a_n - L| = |a_{2m+1} - L| < \epsilon.$$

Desta forma $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ ou seja $\{a_n\}$ é convergente.

O teorema a seguir, é um dos mais importantes sobre limites de sequência.

Teorema 1.3.1. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Suponha que $\{a_n\}$ seja uma sequência monótona não decrescente e limitada, ou seja, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots < M$, para algum $M > 0$. Então, M é uma cota superior para o conjunto A $= \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, de modo que este conjunto possui supremo, digamos sup A $= l$.

Vamos afirmar que $\lim_{n \to \infty} a_n = l$. De fato, seja $\epsilon > 0$, como $l - \epsilon$ não é mais cota superior de A, existe algum elemento de A que é maior que $l - \epsilon$, seja $a_{n_0} > l - \epsilon$. Mas, como $a_{n_0} \leq a_{n_{0+1}} \leq a_{n_{0+2}} \leq \ldots$, concluímos que $a_n > l - \epsilon$, para $n \geq n_0$. Desta forma, para $n \geq n_0$, temos $l - \epsilon < a_n \leq l < l + \epsilon$ ou seja $|a_n - l| < \epsilon$. ■

Exemplo 1.3.5. *Use o teorema 1.3.1 acima para provar que a sequência* $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ *é convergente.*

Solução: Os elementos desta sequência são

$$\left\{\frac{2^1}{1!}, \frac{2^2}{2!}, \frac{2^3}{3!}, \cdots, \frac{2^n}{n!}, \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \cdots\right\}$$

sabe-se que $1! = 1$, $2! = 4$, $3! = 6$. Assim sendo, os elementos da sequência podem ser escritos como

$$\left\{2, 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{2^n}{n!}, \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \cdots\right\}.$$

Então $a_1 = a_2 > a_3 > a_4$; logo, a sequência dada pode ser decrescente. Precisamos verificar se $a_n \geq a_{n+1}$; isto é, precisamos determinar se

$$\frac{2^n}{n!} \geq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \Leftrightarrow \tag{1.9}$$

$$2^n(n+1)! \geq 2^{n+1}n! \Leftrightarrow$$

$$2^n n!(n+1) \geq 2 \cdot 2^n n! \Leftrightarrow$$

$$n + 1 \geq 2. \tag{1.10}$$

Para $n = 1$, a desigualdade (1.10) torna-se $2 = 2$ e (1.10) é verdadeira quando $n > 2$. Como a desigualdade (1.9) é equivalente a (1.10), segue que a sequência dada é decrescente e, portanto, monótona. Um limitante superior para a sequência dada é 2, e um limitante inferior é 0. Desta forma, a sequência é limitada.

A sequência $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ é então, monótona e limitada e, pelo teorema 1.3.1, ela é convergente.

1.3.1 Algumas propriedades.

Suponha que (a_n) e (b_n) são sequências convergentes (começando de mesmo índice), tal que

$$\lim a_n = L \quad e \quad \lim b_n = M$$

então:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L + M.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L - M.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n.b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n. \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L \cdot M.$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (c.a_n) = c. \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot L.$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c.$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L}{M} \cdot \qquad se \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0.$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right]^p = L^p \qquad se\ p > 0 \text{ e } a_n > 0.$
8. Se f é contínua em L então $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = f(L).$

As provas seguem direto da definição e podem ser encontradas em Leithold (1994).

Exemplo 1.3.6. *Calcule* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$

Solução: Dividindo o numerador e o denominador por n e usando as propriedades 6 e 1, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Assim podemos dizer que (1.1) converge para 1.

Exemplo 1.3.7. *Calcule* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{n}}{n^2+1}$

Solução: Colocando o n^2 em evidência e usando as propriedades 8, 7, e 1 vistas acima temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Logo concluímos que a sequência $a_n = \dfrac{n\sqrt{n}}{n^2+1}$ converge para 0.

2 SÉRIES

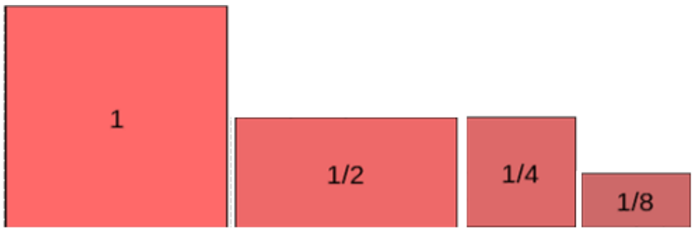
Sabe-se que a dízima periódica $0,3333\ldots$, pode ser escrita na forma de fração igual a $\frac{1}{3}$, mas por outro lado, esta dízima pode ser escrita também como uma soma de números decimais, ou seja:

$$0,3333\ldots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \cdots,$$

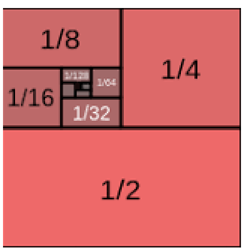
desta forma, nos parece que $\frac{1}{3}$ pode ser escrito como uma soma infinita de números decimais.

Geometricamente, tome um quadrado de lado um e faça sucessivas divisões, como mostra a figura abaixo:

Figura 2.1: Subdivisões de um quadrado com suas respectivas áreas.



Ao somar as áreas: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$, teremos a área do quadrado igual a 1, como pode-se observar na figura abaixo:



Será discutido um pouco mais sobre isso nesta seção.

2.1 DEFINIÇÃO

Dada uma sequência $a_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, chama-se de série a soma

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2.1}$$

com um número infinito de parcelas. Por questões de simplicidade, usa-se o símbolo sigma maiúsculo para representar (2.1) da seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

2.1.1 Soma Parcial

Na maioria das vezes fica muito difícil calcular a soma de um número infinito de termos, por isso é conveniente calcular a soma dos n primeiros termos e observar a que resultado chegamos. A este procedimento damos o nome de soma parcial.

Consideremos a sequência $\{s_n\}$ das seguintes somas parciais:

$$\begin{array}{rcl} s_1 & = & a_1 \\ s_2 & = & a_1 + a_2 \\ s_3 & = & a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots & & \quad \vdots \qquad \ddots \\ s_n & = & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} a_l \end{array} \tag{2.2}$$

Assim, a equação (2.2) representa a n-ésima soma parcial.

Desta forma, se a sequência $\{s_n\}$ converge para um limite S, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$, dizemos que a série converge para S e que S é a soma da série. Caso contrário , a série é dita divergente.

Exemplo 2.1.1. *Seja*

$$a_n = \begin{cases} 1, & se \quad n \text{ for ímpar} \\ -1, & se \quad se\ n \text{ for par}, \end{cases}$$

ou seja, $a_n = (1, -1, 1, -1, \ldots)$. *Determine se* $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, *converge ou diverge.*

Solução: A princípio, temos uma falsa impressão que a soma é zero ou um, pois estamos somando números opostos. Olhando para as somas parciais, percebemos que isso não é verdade. De fato temos:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1-1=0 \\ s_3 &= 1-1+1=1 \\ s_4 &= 1-1+1-1=0 \end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Logo, a sequência das somas parciais é: $\{s_n\} = (1, 0, 1, 0, \ldots)$. Como essa sequência é divergente, temos então que a série dada é divergente.

Exemplo 2.1.2. *Mostre que a série harmônica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

é divergente.

Solução: Vamos usar o método dedicado ao francês Nicole Oresme (1323-1382). O método consiste em considerar as somas parciais $S_2, S_4, S_8, S_{16}, S_{32}, \cdots$ e mostrar que estas somas se tornam grandes.

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2} \\ S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Analogamente, vamos ter $S_{16} = 1 + \frac{4}{2}$, $S_{32} = 1 + \frac{5}{2}$, $S_{64} = 1 + \frac{6}{2}$, e, em geral,

$$S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}.$$

Isso mostra que $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2^n} \to \infty$ quando $n \to \infty$ e assim $\{S_n\}$ é divergente. Portanto, a série harmônica diverge.

Exemplo 2.1.3. *Encontre a soma da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[tg^{-1}(n) - tg^{-1}(n+1)\right]$ *e determine se esta série converge ou diverge.*

Solução: Neste caso temos que a sequência das somas parciais é:

$$s_n = \left[tg^{-1}(1) - tg^{-1}(2)\right] + \left[tg^{-1}(2) - tg^{-1}(3)\right] + \cdots$$

$$\cdots + \left[tg^{-1}(n-1) - tg^{-1}(n)\right] + \left[tg^{-1}(n) - tg^{-1}(n+1)\right].$$

A remoção dos colchetes e o cancelamento dos termos de sinais opostos reduzem a soma para:

$$s_n = [tg^{-1}(1) - tg^{-1}(n+1)].$$

Desta forma

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} tg^{-1}(1) - \lim_{n\to\infty} tg^{-1}(n+1).$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} tg^{-1}(1) = tg^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} tg^{-1}(n+1) = \frac{\pi}{2},$$

temos então

$\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{4}$, ou seja, a série converge para $-\dfrac{\pi}{4}\cdot$

2.1.2 Séries Geométricas

Em algumas séries, cada termo é obtido a partir do anterior pela multiplicação por alguma constante fixa chamada razão. Assim, se o termo inicial da série é $a_1 \neq 0$ e cada termo é obtido multiplicando o termo anterior por q, então a série, dita geométrica, tem a forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \cdots + a_1.q^{n-1} + a_1.q^n + \cdots$$

Se $q = 1$, então $s_n = a_1 + a_1 + a_1 + \cdots + a_1 = na_1$, assim, tem-se que $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$. Como o limite não existe, a série diverge.

Para $q \neq 1$ temos que a soma parcial é dada pela equação (1.8):

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}\cdot$$

Neste caso, para saber se a série geométrica converge ou diverge, temos que separar em dois casos:

1º caso) $0 < |q| < 1$, logo, temos:

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1.q^n}{q - 1} - \frac{a_1}{q - 1}\cdot$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1.q^n}{q-1} - \frac{a_1}{q-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1.q^n}{q-1} - \lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{q-1} \overset{\star}{=} -\frac{a_1}{q-1}.$$

$\star$ Nesta passagem, foi usado o fato de $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ pois $|q| < 1$ e a propriedade:

$$\lim_{n\to\infty}(c.a_n) = c.\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Logo, podemos concluir que para $0 < |q| < 1$ a série converge, e sua soma é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}. \tag{2.3}$$

2º caso) $|q| > 1$, temos $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1.q^n}{q-1} - \frac{a_1}{q-1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1.q^n}{q-1} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1}{q-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1.q^n}{q-1} = +\infty$. Portanto, neste caso a série geométrica é divergente.

Exemplo 2.1.4. *Encontre o número racional representado pela dizima periódica* $0,3333\cdots$.

Solução: Como foi mencionado no início da seção, podemos escrever

$$0,333\cdots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \cdots$$

portanto, a dízima dada é a soma de uma série geométrica com $a_1 = 0,3$ e $q = 0,1$. Fazendo a substituição em (2.3)

$$0,333\cdots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,3}{1-0,1} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 2.1.5. *Supondo que a sequência do exemplo 1.2.1 seja infinita, determine sua soma.*

Solução: A sequência dada é $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\cdots\right)$ em que $q = \frac{1}{2}$ e $a_1 = \frac{1}{2}$. Portanto temos

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2-1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

2.2 TESTES DE CONVERGÊNCIA

Devido ao fato de ser extremamente difícil encontrar uma forma fechada para a n-ésima soma parcial de algumas séries, é aconselhável provar que a série converge, aproximando a soma por uma soma parcial com termos suficientes que atinja o grau de precisão desejado. Para isso, usamos alguns testes de convergência.

2.2.1 Teste do n-ésimo termo

Conforme foi visto anteriormente, dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, referimo-nos a a_n como o n-ésimo termo. O teorema a seguir dá uma condição necessária para a convergência de uma série em função do seu n-ésimo termo.

Teorema 2.2.1. *Se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração:
Dado $\epsilon > 0$, queremos garantir a existência de inteiro positivo N, tal que se $n \geq N$ então $|a_n| < \epsilon$.

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = l$. Pela definição de convergência de uma série, existe N, tal que $n \geq N \Rightarrow |s_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$, onde $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Então, $a_n = s_n - s_{n-1}$ para $n > 1$, e segue da desigualdade triangular que, para $n > N$, $|a_n| \leq |s_n - l| + |l - s_{n-1}| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, ou seja, como queríamos demonstrar.

A recíproca do teorema 2.2.1 não é valida, isto é, há séries divergentes para as quais $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Um exemplo clássico é fornecido pela série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{n}$, que é divergente, discutido no exemplo 2.1.2, apesar do $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, como vimos no exemplo 1.3.3. ■

Teorema 2.2.2. *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *não existir ou se* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

Exemplo 2.2.1. *Determine se as séries abaixo convergem ou divergem*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ ***b)*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$

Solução: a) Como $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$, temos pelo teorema 2.2.2 que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ diverge.

b) Como $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, temos pelo teorema 2.2.2 que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ diverge.

Vale observar que a recíproca do teorema 2.2.2 não é verdadeira, pois a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{n}$, é divergente, apesar do $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2.2.2 Teste da Comparação

Neste caso, a intenção é comparar uma série dada com uma que já se sabe ser convergente ou divergente.

Teorema 2.2.3. *Suponha que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sejam séries com termos positivos.*

(a) se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *for convergente e* $a_n \leq b_n$ *para todo* n*, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *também será convergente.*

(b) se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *for divergente e* $a_n \geq b_n$ *para todo* n*, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *também será divergente.*

Demonstração:

No item (a), por hipótese $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, e $a_n \leq b_n$ para todo n , logo, exite um M tal que $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \leq M$, portanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ forma uma sequência crescente com um limite $L \leq M$. Assim, pelo teorema 1.3.1 temos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

No item (b), suponha por contradição que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Logo, pelo que foi visto no item (a), vai existir um M_1 tal que $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \leq a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq M_1$, desta forma temos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, ou seja, chegou-se a uma contradição. ■

Exemplo 2.2.2. *Determine se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$ *é convergente ou divergente.*

Solução: A série dada é:

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{10} + \frac{4}{28} + \frac{4}{82} + \cdots + \frac{4}{3^n + 1} + \cdots$$

Comparando o n-ésimo termo dessa série com o n-ésimo termo da série geométrica convergente

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \cdots + \frac{4}{3^n} + \cdots \qquad q = \frac{1}{3} < 1$$

temos

$$0 < \frac{4}{3^n + 1} < \frac{4}{3^n}$$

para todo n natural. Desta forma, pelo teste da comparação, a série dada é convergente.

Exemplo 2.2.3. *Determine se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *é convergente ou divergente.*

Solução: A série dada é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

Comparando o n-ésimo termo dessa série com o n-ésimo termo da série harmônica divergente,(ver exemplo 2.1.2) temos

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$$

para todo n natural. Assim sendo, pelo teste da comparação, a série dada é divergente.

2.2.3 Teste da Razão

O teste da razão, que mede a taxa de crescimento ou decrescimento de uma série, é uma composição bem útil do teste da comparação, a qual dá uma condição suficiente para a convergência de uma série de termos não nulos.

Definição 2.2.1. *Uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é dita absolutamente convergente se a série de valores absolutos* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *for convergente.*

O teorema a seguir é conhecido como teste da razão.

Teorema 2.2.4. *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência de termos não nulos, tal que* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

a) Se $l < 1$, *a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *é absolutamente convergente.*

b) Se $l > 1$,*a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *é divergente.*

Demonstração:

a) Para $l < 1$. Seja r um número tal que $l < r < 1$. Assim $\epsilon \ = r - l > 0$, Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, existe um inteiro $N > 0$ tal que se $n \geq N$ então $||\frac{a_{n+1}}{a_n}| - l| < \epsilon$, dessa forma se $n \geq N$ então $0 < |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < l + \epsilon \ = r$ ou seja,

$$\begin{aligned}
a_{N+1} &< ra_N \\
a_{N+2} &< ra_{N+1} < r^2 a_N \\
a_{N+3} &< ra_{N+2} < r^3 a_N \\
&\vdots \\
a_{N+m} &< ra_{N+m-1} < r^m a_N
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Nestas desigualdades pode-se observar que os termos da série, depois do n-ésimo termo, se aproximam de zero mais rápido do que os termos em um série geométrica com razão $r < 1$.

A série $\sum_{m=1}^{\infty} a_N r^m = a_N r + a_N r^2 + \cdots + a_N r^n + \cdots$ é convergente por ser geométrica com razão menor que 1. De (2.3) e do teste da comparação, temos que a série $\sum_{m=1}^{\infty} a_{N+m}$ converge. Como $\sum_{m=1}^{\infty} a_{N+m}$ difere da série $\sum_{N=1}^{\infty} a_N$ somente nos N primeiros termos, temos que $\sum_{N=1}^{\infty} a_N$ converge, portanto ela é absolutamente convergente.

b) Se $l > 1$, então $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, logo existe $N > 0$ tal que se $n \geq N$ então $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$ e $0 < a_N < a_{N+1} < a_{N+2} < \cdots$, assim $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ e portanto pelo teorema 2.2.2, a série é divergente. ■

Exemplo 2.2.4. *Determine se a série é convergente ou divergente.*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ ***b)*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

Solução: a) Aplicando o teorema 2.2.4, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot n!}{(n+1) \cdot n! \cdot 3^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Como $0 < 1$, a série é convergente.

b) Aplicando o teorema 2.2.4, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot n^2}{(n^2+2n+1) \cdot 3^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2+2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Como $3 > 1$, a série diverge.

2.2.4 Teste da Série Alternada

Os testes de convergência mencionados até aqui só podem ser aplicados a séries de termos positivos. Vamos considerar agora séries infinitas que contêm termos positivos e negativos. O tipo mais simples e mais usual de tais séries é a série alternada, em que os termos se alternam no sinal.

Costuma-se representar uma série alternada como

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

ou

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

com $a_k > 0$ para todo k.

Teorema 2.2.5. *A série alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots \qquad a_n > 0$$

é convergente se se verificam as duas condições seguintes:

a) $a_n \geq a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração:
Se n é natural par, ou seja, $n = 2m$, a soma dos n primeiros termos é

$$\begin{aligned} S_{2m} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}) &(2.5)\\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}. &(2.6)\end{aligned}$$

A primeira igualdade (2.5) mostra que S_{2m} é a soma de m termos não negativos, uma vez que cada termo entre parênteses é positivo ou zero. Consequentemente, $S_{2m+2} \geq S_{2m}$, e a sequência $\{S_{2m}\}$ é crescente. A segunda igualdade (2.6) mostra que $S_{2m} \leq a_1$. Como $\{S_{2m}\}$ é crescente e limitada superiormente, pelo teorema 1.3.1, temos que $\{S_{2m}\}$ é convergente, desta forma tem um limite L, ou seja

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m} = L \tag{2.7}$$

Se n é um inteiro ímpar, ou seja, $n = 2m+1$, então a soma dos n primeiros termos é

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}.$$

Como, por hipótese, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, então $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$, logo temos

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} (S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = L + 0 = L \tag{2.8}$$

Combinando os resultados das equações (2.7) , (2.8) e do exemplo 1.3.4, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$ e assim a série converge. ■

Exemplo 2.2.5. *Prove que a série alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

é convergente.

Solução: A série dada é

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + (-1)^{n+2}\frac{1}{n+1} + \cdots$$

Como

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

para todo n inteiro positivo, e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, segue do teorema 2.2.5, que a série alternada dada é convergente.

Vale ressaltar que, embora $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ seja divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ é convergente. Isso mostra que se uma série converge, não significa que converge absolutamente.

2.3 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Até o presente momento foi discutido séries de termos constantes. A seguir trataremos das séries de termos variáveis, denominadas séries de potências, que podem ser consideradas generalização de uma função polinomial. Por questões de tradição ou pura conveniência, usaremos a letra x, para expressar uma variável.

Uma aplicação importante deste tipo de série, consiste em determinar aproximações de números irracionais tais como,

$$\pi, e, ln2,$$

entre outros e até mesmo de funções do tipo $\text{sen}x$, e^x, lnx.

Definição 2.3.1. *Uma série de potência centrada em $x = a$ é uma série da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \tag{2.9}$$

na qual o centro é o ponto a e os coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n$, são constantes.

De uma maneira particular, se $a = 0$ em (2.9), dizemos que a série de potência é centrada em $x = 0$.

Exemplo 2.3.1. *Tomando-se todos os coeficientes iguais a 1 e $a = 0$ na equação (2.9), chegamos na série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que converge para $\frac{1}{1-x}$ com $|x| < 1$ como vimos em (2.3), ou seja:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{2.10}$$

O teorema abaixo fala dos valores de x para os quais a série (2.9) é convergente e a demonstração pode ser vista em Stewart (2009).

Teorema 2.3.1. *Para cada série de potência* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *temos apenas três possibilidades:*

(a) A série converge somente para $x = a$*;*

(b) A série converge para todo x*;*

(c) Existe um número real positivo R *tal que a série converge se* $|x-a| < R$ *e diverge se* $|x-a| > R$*.*

Corolário 2.3.1. *Seja dada uma sequência* (c_n) *de reais não nulos. Se existe* $0 \leq R \leq +\infty$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = R$*, então a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *tem raio de convergência* R*.*

Demonstração:

Como

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}(x-a^{n+1})}{c_n(x-a)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|}{\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|} = \frac{|x-a|}{R},$$

o teste da razão garante que a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge absolutamente se $\frac{|x-a|}{R} < 1$ e diverge se $\frac{|x-a|}{R} > 1$, ou seja, converge absolutamente se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$. Portanto, o teorema anterior garante o raio de convergência da série é igual a R. ■

Definição 2.3.2. *Se uma função* f *for representada como uma série de potências em algum intervalo, então dizemos que a série de potências representa a função* f *naquele intervalo, ou que* f *está representada por uma série de potências naquele intervalo.*

Exemplo 2.3.2. *Pelo exemplo 2.3.1, a série* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ *converge no intervalo aberto* $-1 < x < 1$*. O objetivo aqui é testar a convergência nas extremidades deste intervalo.*

Se $x = 1$*, então* $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$ *, que diverge.*

Se $x = -1$*, então* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ *, que pelo exemplo 2.1.1 diverge.*

Assim o intervalo de convergência é $(-1, 1)$*.*

Exemplo 2.3.3. *Encontre o raio e o intervalo de convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$*.*

Solução: Como foi visto na equação (2.9), temos neste caso uma série de potência, com $c_n = \dfrac{(-2)^n}{\sqrt[4]{n}}\cdot$ Pelo corolário 2.3.1, temos:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-2)^n}{\sqrt[4]{n}}}{\frac{(-2)^{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^n}{\sqrt[4]{n}}\cdot\frac{\sqrt[4]{n+1}}{(-2)^{n+1}}\right| = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Para $x = \dfrac{1}{2}$, temos: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n\cdot\sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$, que converge pelo teste da Série Alternada.

Para $x = \dfrac{-1}{2}$, temos: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{\sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$, que diverge por ser uma p-série com $p = \frac{1}{4} < 1$. Desta forma temos o raio de convergência $R = \dfrac{1}{2}$ e o intervalo de convergência $I = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

2.3.1 Derivação e Integração Termo a Termo

Apresentaremos a seguir dois resultados importantíssimos que nos afirmam que derivar ou integrar uma série de potência, equivale a derivar ou integrar a função correspondente a esta série. Estes resultados nos dão uma ponte entre funções com suas expressões algébricas e as séries de potência, pois muitas vezes é mais fácil derivar ou integrar a série do que a função.

Teorema 2.3.2 (Derivação termo a termo)**.** *Se a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *tem raio de convergência* $R > 0$*, então a função* f *definida por:*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

é diferenciável e, portanto, contínua no intervalo $(a-R, a+R)$ *e:*

$$\boxed{f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}.} \tag{2.11}$$

Teorema 2.3.3 (Integração termo a termo)**.** *Se a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *tem raio de convergência* $R > 0$*, então a função* f *definida por:*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

é diferenciável e portanto contínua no intervalo $(a-R, a+R)$ *e:*

$$\boxed{\int f(x)dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\cdot} \tag{2.12}$$

Os raios de convergência das séries de potências nas Equações (2.11) e (2.12) são ambos R.

2.3.2 Séries de Taylor e de Maclaurin

Entre as séries de potências, temos duas séries de grande importância chamadas séries de Taylor e série de Maclaurin. Estas séries são geradas por funções infinitamente deriváveis, na qual fornecem aproximações polinomiais de grande utilidade das funções geradoras.

Definição 2.3.3. *Seja f uma função com derivadas de todas as ordens em algum intervalo contendo a como um ponto interior. Então a série de Taylor gerada por f em $x = a$ é:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a^n) + \cdots$$

Para $a = 0$ temos a série de Maclaurin gerada por f. Ou seja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Estas séries receberam estes nomes em homenagem aos matemáticos Brook Taylor (1685 - 1731) e Colin Maclaurin (1698 - 1746).
OBSERVAÇÃO: $f^{(n)}(x)$ é a derivada de ordem n da função.

Exemplo 2.3.4. *Encontre a série de Taylor gerada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ em $a = 2$.*

Solução: Precisamos encontrar $f(2), f'(2), f''(2), \cdots, f^{(n)}(2)$.
Derivando, $f(x)$ obtemos:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = x^{-1} & f(2) = 2^{-1} = \dfrac{1}{2} \\
f'(x) = -x^{-2} & f'(2) = -\dfrac{1}{2^2} \\
f''(x) = 2!x^{-3} & \dfrac{f''(2)}{2!} = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} \\
\vdots & \vdots \\
f^{(n)} = (-1)^n n! x^{-(n+1)} & \dfrac{f^{(n)}(2)}{n!} = \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot
\end{array}$$

Assim sendo, a série de Taylor é:

$$f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{(x-2)}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}-\cdots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}+\cdots$$

Esta é uma série geométrica com primeiro termo $\frac{1}{2}$ e razão $q=\frac{-(x-2)}{2}$. Ela converge absolutamente para $|x-2|<2$, e sua soma é

$$\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{2+(x-2)}=\frac{1}{x}.$$

3 APROXIMAÇÕES POR SÉRIES DE POTÊNCIAS

3.1 O n-ésimo resto

Nesta seção será apresentado algumas aproximações, por isso é necessário falar sobre erros destas aproximações. Por conveniência, denotaremos o erro para uma aproximação do tipo $f(x) \approx p(x)$, por $R_n(x)$ (diferença entre $f(x)$ e seu n-ésimo polinômio de Taylor), ou seja,

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

ou escrevendo de outra forma,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x).$$

O teorema abaixo oferece uma forma para a estimativa de $R_n(x)$, sua demonstração pode ser vista em Anton (2007b).

Teorema 3.1.1. *Se a função f é diferenciável $n+1$ vezes em um intervalo I, contendo o ponto x_0 e se M for uma cota superior para $|f^{(n+1)}(x)|$ em I, isto é, se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para todo x em I, então*

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \tag{3.1}$$

para todo x em I.

3.1.1 Aproximando Pi

Para algumas funções, seria bem difícil encontrar as derivadas que são necessárias para obter uma série de Taylor. Como exemplo, seria bem complicado encontrar a série de Maclaurin para $\frac{1}{1+x^2}$. Uma maneira mais fácil de resolver este problema é substituir $-x^2$ na série

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \tag{3.2}$$

assim obtemos:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots se \;\; |x| < 1, \tag{3.3}$$

uma vez que $|-x^2| < 1$ é equivalente a $|x| < 1$ e assim, as equações (3.2) e (3.3) têm o mesmo intervalo de convergência.

Sabemos pelas fórmulas do cálculo que

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{tg}^{-1} x + C,$$

assim, integrando a série de Maclaurin (3.3) termo a termo temos:

$$\operatorname{tg}^{-1} x + C = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \left[1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots\right] dx$$

ou

$$\operatorname{tg}^{-1} x = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right] - C.$$

A constante da integração pode ser calculada substituindo $x = 0$ e usando a condição $arc\, tg0 = 0$, isso nos dá $C = 0$, e assim temos:

$$\operatorname{tg}^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x| < 1. \tag{3.4}$$

Para $x = 1$ temos a série alternada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Como, $\dfrac{1}{2n+1} \geq \dfrac{1}{2(n+1)+1}$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0$, pelo teste da série alternada, teorema 2.2.5, a série (3.4) também é convergente para $x = 1$. Assim sendo, substituindo $x = 1$ em (3.4) chegamos na fórmula de Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}^{-1}1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \cdots \tag{3.5}$$

ou seja:

$$\pi = 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \cdots\right] \approx 3.14159265359 \cdots$$

Usando a ideia de integrais definidas também podemos mostrar que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{tg}^{-1}x \Big|_0^1 = \operatorname{tg}^{-1}1 - \operatorname{tg}^{-1}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

3.1.2 Aproximando Funções Exponenciais

Outro exemplo clássico que nos permite estudar o comportamento da aproximação por serie de Taylor, é o da função exponencial $f(x) = e^x$. Analisando as derivadas da função f ao redor do ponto $a = 0$, temos que:

$$\begin{array}{rcll} f(0) & = & 1 & \\ f'(x) & = & e^x & \quad f'(0) = 1 \\ f''(x) & = & e^x & \quad f''(0) = 1 \\ \vdots & & \vdots & \\ f^n(x) & = & e^x & \quad f^{(n)}(0) = 1 \end{array}$$

Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f"(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Temos então

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Substituindo $x = 1$, acima, temos:

$$f(1) = e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Para determinarmos um valor para e com cinco casas de precisão vamos usar (3.1), ou seja, queremos escolher n tal que o valor do n-ésimo resto em $x = 1$ satisfaça $|R_n(1)| \leq 0,00005$. Como $e < 3$, temos $|R_n(1)| \leq \dfrac{3}{(n+1)!}$, logo $\dfrac{3}{(n+1)!} \leq 0,00005$, ou seja, $(n+1)! \geq 600.000$. Ora, como $9! = 362.880$ e $10! = 3.628.800$, o menor valor de n que satisfaz este critério é $n = 9$. Portanto, com cinco casas decimais de precisão temos:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} \approx 2,71828.$$

3.1.3 Aproximando Logaritmos

Seja b um número real maior do que 0 e diferente de 1, e a um número real positivo. Assim:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a,$$

onde b é a base, a é o logaritmando e x é o logaritmo.

Denominamos logaritmo natural e denotamos por ln quando a base for e. Alguns autores costumam chamar de logaritmo neperiano fazendo referência a John Napier que teve um papel importantíssimo no estudo dos logaritmos. Quando a base for 10, denotamos por $\log x$.

De uma forma mais avançada pode-se definir uma função logarítmica natural de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$f(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

A função logarítmica natural é diferenciável, pois aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo obtemos:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{1}{t} dt\right) = \frac{1}{x}\cdot$$

Pela definição 2.3.3 sabemos que a equação (2.10),

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad (-1 < x < 1),$$

representa uma série de Maclaurin. Fazendo uma mudança de variável, trocando x por $-x$, chegamos na seguinte expressão:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-x)^n + \cdots \qquad (-1 < x < 1).$$

Integrando ambos os lados temos:

$$\ln(1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \tag{3.6}$$

Para $x = 0$ temos $\ln 1 = 0$ e $C = 0$.
Para $x = 1$ temos uma primeira aproximação para $\ln 2$, ou seja:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Para obter uma aproximação um pouco mais rápida, basta mudar a variável outra vez. Tomando novamente $\ln(1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$, e substituindo x por $-x$, temos:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \qquad (-1 < x < 1)\cdot \tag{3.7}$$

Agora, para $x = \frac{1}{2}$ temos:

$$\ln\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} - \frac{1}{64} - \cdots$$

Mas $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$. Assim temos:

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n} \approx 0,6931471805\cdots$$

Para calcular uma aproximação do logaritmo natural de qualquer número positivo vamos subtrair (3.6) de (3.7) e assim obtemos:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad (-1 < x < 1)\cdot \tag{3.8}$$

James Gregory, obteve esta série pela primeira vez em 1668. Onde se pode calcular o ln de qualquer número positivo y tomando

$$y = \frac{1+x}{1-x}\cdot \tag{3.9}$$

Atribuindo o valor para $x = \frac{1}{3}$, obtemos $y = 2$. Assim sendo:

$$\begin{aligned}
\ln 2 &= 2\left[\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7}{7} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^9}{9} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{11} + \cdots\right] \\
&= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} + \frac{1}{11\cdot 3^{11}} + \cdots\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \frac{1}{177147} + \frac{1}{1948617} + \cdots\right) \\
&\approx 2\,(0,333333 + 0,012346 + 0,000823 + 0,000065 + 0,000006 + 0,000001 + \cdots)\,\cdot
\end{aligned}$$

Somando e multiplicando por 2, obtem-se:

$$\ln 2 \approx 0,69315.$$

Pode-se considerar a função $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ para chegar no resultado (3.8) de uma forma mais suave, pois:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\
&= ln(1+x) - ln(1-x) \\
&= \int \frac{dx}{1+x} + \int \frac{dx}{1-x} \\
&= \int \frac{dx}{1-(-x)} + \int \frac{dx}{1-x} \\
&= \int \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n\right] dx \\
&= \int \big[(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots) + (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)\big]\, dx \\
&= \int \big(2 + 2x^2 + 2x^4 + \cdots\big)\, dx \\
&= \int \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n} dx \\
&= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Segundo Ávila (1994), Euler calculou os logaritmos dos inteiros de 2 a 10, atribuindo a x os valores $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$, fazendo com que y (ver equação (3.9)) assumisse os valores $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ e $\frac{5}{4}$ respectivamente. Assim sendo, uma vez calculados os logaritmos desses números pela série (3.8), os logaritmos inteiros de 2 a 10 são calculados assim:

$$\begin{aligned}
\ln 2 &= \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\frac{4}{3}, \\
\ln 3 &= \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln 2, \\
\ln 4 &= \ln 2^2 = 2\ln 2, \\
\ln 5 &= \ln\left(\frac{5}{4}\right) + \ln 4, \\
\ln 6 &= \ln 2 + \ln 3, \\
\ln 8 &= \ln 2^3 = 3\ln 2, \\
\ln 9 &= \ln 3^2 = 2\ln 3, \\
\ln 10 &= \ln 2 + \ln 5.
\end{aligned}$$

Para calcular o logaritmo de 7, Euler substituiu $x = \frac{1}{99}$ na série (3.8), obtendo, $y = \frac{50}{49}$ e dessa forma, o logaritmo de 7 e dado por:

$$\ln 7 = \ln\sqrt{49} = \frac{1}{2}\left(\ln 50 - \ln\frac{50}{49}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln 5 + \ln 10 - \ln\frac{50}{49}\right).$$

4 APROXIMAÇÕES POR SÉRIES DE FOURIER

A ideia da Séries de Fourier é escrever uma função como um somatório não de polinômios, mas como uma combinação de funções trigonométricas.

As séries de Fourier são similares as séries de Taylor no sentido em que ambas proporcionam uma maneira de descrever funções relativamente difíceis em termos de funções mais fáceis. A grande diferença é que a série de Fourier é uniforme e global, isto é, sua convergência é válida para todo o domínio da função. Além disso, a função não precisa ter derivada, muito menos ser contínua. Já as séries de Taylor tem convergência apenas local, ou seja, dentro de um intervalo chamado intervalo de convergência.

As séries de Fourier surgiram quase de uma forma natural no limiar do século XIX, quando Joseph Fourier estava analisando o problema da condução do calor, num contexto da revolução industrial, na qual a questão da dissipação de calor era algo extremamente importante.

4.1 Funções Ortogonais

Sejam $u = (u_1, \cdots, u_n)$ e $v = (v_1, \cdots, v_n)$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Definimos o produto interno como uma função que a cada par de vetores, u e v, em $\mathbb{R}^n$, associa um número real, denotado por $< u, v >$, dado pela fórmula:

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

(Soma dos produtos coordenada a coordenada). Verificam-se facilmente as seguintes propriedades, como apresentado por Abramo e Fernandes (2012).

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall \ \ u, v \in \mathbb{R}^n$;

2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle; u, v, w \in \mathbb{R}^n$;

3. $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0$ se e somente se, $u = \overrightarrow{0}$, em que $\overrightarrow{0}$ é o vetor nulo;

4. $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle; \forall \ \ k \in \mathbb{R}$.

Diremos que os vetores u, v são ortogonais ou perpendiculares se $\langle u, v\rangle = 0$. Desta forma, temos que uma base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ é ortogonal se $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ para $i \neq j$. Bases ortogonais são importantes porque existe um procedimento padrão para se encontrar as coordenadas de um vetor qualquer em relação a elas. Aliás, todo conjunto ortogonal de vetores não nulos é linearmente independente.

Seja $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ e w um vetor qualquer de $\mathbb{R}^n$. Vamos calcular as coordenadas de w em relação à B. Sabemos que existem escalares $k_1, k_2, \cdots, k_n$, tais que:

$$w = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n. \tag{4.1}$$

Queremos calcular a i-ésima coordenada k_i. Façamos então o produto interno dos dois membros da igualdade acima por v_i. Então:

$$\langle w, v_i\rangle = \langle k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n, v_i\rangle.$$

Aplicando a propriedade 2

$$\langle w, v_i\rangle = \langle k_1v_1, v_i\rangle + \langle k_2v_2, v_i\rangle + \cdots + \langle k_iv_i, v_i\rangle + \cdots + \langle k_nv_n, v_i\rangle,$$

e aplicando agora a propriedade 4

$$\langle w, v_i\rangle v = k_1\langle v_1, v_i\rangle + k_2\langle v_2, v_i\rangle + \cdots + k_i\langle v_i, v_i\rangle + \cdots + k_n\langle v_n, v_i\rangle.$$

Como $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ para $i \neq j$, temos então que:

$$\langle w, v_i\rangle = k_i\langle v_i, v_i\rangle$$

ou seja

$$k_i = \frac{\langle w, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle}, \tag{4.2}$$

uma vez que o denominador não pode ser zero, pois $v_i \neq \overrightarrow{0}$ e, assim sendo, temos $\langle v_i, v_i\rangle \neq 0$.

Desta forma, substituindo (4.2) em (4.1) temos:

$$w = \frac{\langle w, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}v_1 + \frac{\langle w, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}v_2 + \cdots + \frac{\langle w, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle}v_n.$$

Vamos considerar agora duas funções contínuas f e g definidas no intervalo fechado $[a, b]$. Como uma integral definida do produto de f por g obedece as propriedades 1 a 4 de produto interno vistos acima, podemos passar para as seguintes definições:

Definição 4.1.1. ***Função Absolutamente Integrável.***
Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é absolutamente integrável em um intervalo $[a, b]$ se

$$\int_a^b |f(x)|dx < \infty.$$

Por exemplo: As funções $f(x) = \cos(mx)$ e $g(x) = \operatorname{sen}(nx)$são absolutamente integráveis sobre intervalos da forma $[a, b]$.

Definição 4.1.2. ***Produto Interno de Funções.***
Sejam f e g funções absolutamente integráveis. O produto interno de f e g em um intervalo $[a, b]$ é o número

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Esta definição satisfaz 1 a 4.

Assim, sabendo que dois vetores são ortogonais quando seu produto interno é zero, então podemos também definir funções ortogonais. Vale ressaltar que, ao contrário do que acontece na análise vetorial, onde a palavra ortogonal é sinônima de perpendicular, no presente contexto, esse termo não se aplica, ou seja, o produto interno de funções não tem significado geométrico.

Definição 4.1.3. ***Funções Ortogonais.***
Duas funções f e g são ortogonais em um intervalo $[a, b]$ se

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Exemplo 4.1.1. *As funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ são ortogonais em todo intervalo do tipo $[-p, p]$.*

Solução: De fato

$$\langle f, g\rangle = \langle x^2, x^3\rangle = \int_{-p}^{p} x^2x^3dx = \int_{-p}^{p} x^5dx = \left.\frac{x^6}{6}\right|_{-p}^{p} = \frac{p^6}{6} - \frac{(-p)^6}{6} = 0.$$

Exemplo 4.1.2. *funções $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) =$ sen(x) são ortogonais em todo intervalo do tipo $[-p, p]$.*

Solução: De fato

$$\langle f, g\rangle = \langle \cos(x), \operatorname{sen}(x)\rangle = \int_{-p}^{p} (\cos(x)\operatorname{sen}(x))dx.$$

Tomando $u = \operatorname{sen}(x)$ temos $du = \cos(x)dx$. Substituindo temos

$$\langle f, g\rangle = \langle \cos(x), \operatorname{sen}(x)\rangle = \int_{-p}^{p} u\ du = \left.\frac{u^2}{2}\right|_{-p}^{p} =$$

$$\left.\frac{(\operatorname{sen}(x))^2}{2}\right|_{-p}^{p} = \frac{(\operatorname{sen}(p))^2}{2} - \frac{(\operatorname{sen}(-p))^2}{2} \overset{\star}{=} \frac{(\operatorname{sen}(p))^2 - (-\operatorname{sen}(p))^2}{2} = 0.$$

$\star$ Nesta passagem foi usado o fato da função $\operatorname{sen}(x)$ ser ímpar, ou seja, $\operatorname{sen}(-p) = -\operatorname{sen}(p)$.

Exemplo 4.1.3. *Cada par de funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas em $[-p, p]$, em que $f(x)$ é par e $g(x)$ é ímpar, são ortogonais em $[-p, p]$.*

Solução: O objetivo aqui é mostrar que $\langle f, g\rangle = 0$. Antes é necessário demonstrar que o produto de uma função par com uma função ímpar resulta em uma função ímpar.

Por definição, sabe-se que se f é par então $f(x) = f(-x)$ e se uma função g é ímpar então $g(-x) = -g(x)$. Seja a função h definida por

$$h(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

em que f é par e g é ímpar. Assim sendo, temos:

$$\begin{aligned} h(-x) &= (f \cdot g)(-x) \\ &= f(-x) \cdot g(-x) \\ &= f(x) \cdot [-g(x)] \\ &= (f(x) \cdot g(x)) \\ &= -(f \cdot g)(x) \\ &= -h(x), \end{aligned}$$

ou seja, a função h é ímpar.

Pela definição 4.1.2 temos que:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-p}^{p} f(x)g(x)dx.$$

Como

$$h(x) = (f \cdot g)(x),$$

então

$$\langle f, g\rangle = \int_{-p}^{p} h(x)dx. \tag{4.3}$$

Mas

$$\int_{-p}^{p} h(x)dx = \int_{-p}^{0} h(x)dx + \int_{0}^{p} h(x)dx = -\int_{0}^{-p} h(x)dx + \int_{0}^{p} h(x)dx. \tag{4.4}$$

Façamos a seguinte mudança de variável $x = -u$ em (4.4), então

$$-\int_{0}^{-p} h(x)dx = \int_{0}^{p} h(-u)du. \tag{4.5}$$

Assim, fazendo a substituição de (4.5) e (4.4) em (4.3)

$$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{p} h(-u)du + \int_{0}^{p} h(x)dx. \tag{4.6}$$

Como $h(x)$ é ímpar e $x = -u$, temos $h(x) = h(-u) = -h(u)$, portanto:

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_{0}^{p} h(-u)du + \int_{0}^{p} h(x)dx \Leftrightarrow \\
\langle f, g\rangle &= \int_{0}^{p} -h(u)du + \int_{0}^{p} h(x)dx \Leftrightarrow \\
\langle f, g\rangle &= -\int_{0}^{p} h(u)du + \int_{0}^{p} h(x)dx \Leftrightarrow \\
\langle f, g\rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Analisando a equação (4.7) e a equação (4.3) e sabendo que $h(x)$ é uma função ímpar, podemos concluir que a integral definida de uma função ímpar em intervalos simétricos vale zero, ou seja, se $h(-x) = -h(x)$ e h é integrável no intervalo $[-p, p]$ então:

$$\int_{-p}^{p} h(x)dx = 0. \tag{4.8}$$

Exemplo 4.1.4. *A função constante com valor* 1 *é ortogonal a todas as funções* $sen(nx)$ *e* $\cos(nx)$*, no intervalo* $[-p, p]$*, em que* n *é um inteiro positivo qualquer.*

Solução: De fato,

$$\int_{-p}^{p} 1 \cdot \operatorname{sen}(nx)dx = \int_{-p}^{p} \operatorname{sen}(nx)dx = 0,$$

pois $\operatorname{sen}(nx)$ é uma função impar, e como vimos em (4.8,) sua integral definida é zero.

Para

$$\int_{-p}^{p} 1 \cdot \cos(nx)dx = \int_{-p}^{p} \cos(nx)dx = \left.\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\right|_{-p}^{p} = 0.$$

Por questão de simplicidade, consideraremos, a partir de agora, o intervalo $[-\pi, \pi]$.

Exemplo 4.1.5. *As funções $f(x) = \cos(nx)$ e $g(x) = \cos(mx)$ são ortogonais no intervalo $[-\pi, \pi]$ para $m \neq n$.*

Solução: O objetivo aqui é mostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\ cos(mx)dx = 0.$$

Sabe-se, pelas identidades trigonométricas que,

$$\begin{aligned} \cos(p) + \cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \Leftrightarrow \\ \frac{\cos(p) + \cos(q)}{2} &= \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Façamos uma mudança de variáveis em (4.9), ou seja,

$$\begin{cases} nx = \dfrac{p+q}{2} \Rightarrow 2nx = p+q & (4.10) \\ mx = \dfrac{p-q}{2} \Rightarrow 2mx = p-q & (4.11) \end{cases}$$

Somando e subtraindo(4.10) com (4.11) obtemos:

$$\begin{cases} p = nx + mx & (4.12) \\ q = nx - mx & (4.13) \end{cases}$$

Fazendo as substituições (4.10), (4.11), (4.12) e (4.13) em (4.9), obtemos:

$$\cos(nx) \cdot \cos(mx) = \frac{\cos(nx+mx) + \cos(nx-mx)}{2}. \tag{4.14}$$

Ao calcular a integral definida no intervalo $[-\pi, \pi]$ em ambos os lados da equação (4.14) temos:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx &= \int_{-p}^{p} \left[\frac{\cos(nx+mx)+\cos(nx-mx)}{2}\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-p}^{p} [\cos(nx+mx)+\cos(nx-mx)]\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\operatorname{sen}(nx+mx)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) + \left((\operatorname{sen}(nx-mx)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\,(\operatorname{sen}((n+m)\pi) - \operatorname{sen}(-(n+m)\pi) + \\
&+ \frac{1}{2}\,(\operatorname{sen}((n-m)\pi) - \operatorname{sen}(-(n-m)\pi) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Visto que $\operatorname{sen}(k\pi) = 0$ se $k \in Z$.

Logo, as funções $f(x) = \cos(nx)$ e $g(x) = \cos(mx)$ são ortogonais em todo intervalo $[-\pi, \pi]$, para $m \neq n$.

Exemplo 4.1.6. *As funções $f(x) = sen(nx)$ e $g(x) = sen(mx)$ são ortogonais em todo intervalo $[-\pi, \pi]$ para $m \neq n$.*

Solução: O objetivo aqui é mostrar que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)dx = 0.$$

Sabe-se pelas identidades trigonométricas que

$$
\begin{aligned}
\cos(p) - \cos(q) &= -2\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \Leftrightarrow \\
\frac{\cos(p)-\cos(q)}{-2} &= \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right). \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

Façamos uma mudança de variáveis em (4.15), ou seja,

$$
\begin{cases}
nx = \dfrac{p-q}{2} \Rightarrow 2nx = p - q & (4.16)\\
mx = \dfrac{p+q}{2} \Rightarrow 2mx = p + q & (4.17)
\end{cases}
$$

Somando e subtraindo(4.16) com (4.17) obtemos:

$$
\begin{cases}
p = nx + mx & (4.18)\\
q = nx - mx & (4.19)
\end{cases}
$$

Fazendo as substituições (4.16), (4.17), (4.18) e (4.19) em (4.15), obtemos:

$$\frac{\cos(nx+mx)-\cos(nx-mx)}{-2} = \operatorname{sen}(nx)\cdot\operatorname{sen}(mx)\cdot \tag{4.20}$$

Calculando a integral definida no intervalo $[-\pi,\pi]$ em ambos os lados da equação (4.20) temos:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)dx &= \int_{-p}^{p}\frac{\cos(nx+mx)-\cos(nx-mx)}{-2}dx \\
&= \frac{-1}{2}\int_{-p}^{p}\cos(nx+mx)-\cos(nx-mx)dx \\
&= \frac{-1}{2}\left[\left(\operatorname{sen}(nx+mx)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)-\left(\operatorname{sen}(nx-mx)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)\right] \\
&= \frac{-1}{2}\left(\operatorname{sen}(nx+mx)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)+\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(nx-mx)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}((n+m)\pi)-\operatorname{sen}(-(n+m)\pi)+\right. \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}((n-m)\pi)-\operatorname{sen}(-(n-m)\pi)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, as funções $f(x) = \operatorname{sen}(nx)$ e $g(x) = \operatorname{sen}(mx)$ são ortogonais em todo intervalo $[-\pi,\pi]$ para $m \neq n$.

Resumidamente, pelo que foi visto do exemplo 4.1.2 ao exemplo 4.1.6 acima, pode-se dizer que dado o conjunto:

$$C = \{1, \cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \cdots, \operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(2x), \operatorname{sen}(3x), \cdots\}, \tag{4.21}$$

duas funções φ_i e φ_j deste conjunto são mutuamente ortogonais para $i \neq j$, no intervalo $[-\pi,\pi]$.

4.2 Série de Fourier

Seja $f(x)$ definida no intervalo $[-p,p]$ e fora desse intervalo definida na forma periódica com período $2p$, ou seja, $f(x) = f(x+2p)$. A Série de Fourier correspondente a $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{(n\pi x)}{p} + b_n\operatorname{sen}\frac{(n\pi x)}{p}\right)\cdot$$

Por questões práticas, consideraremos $f(x)$ como uma função absolutamente integrável, definida no intervalo $[-\pi, \pi]$ e fora desse intervalo definida na forma periódica com período 2π, ou seja, $f(x) = f(x+2\pi)$. Assim sendo, a Série de Fourier correspondente a $f(x)$ é dada por:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))} \tag{4.22}$$

ou

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + \cdots + b_1 \operatorname{sen}(x) + b_2 \operatorname{sen}(2x) + \cdots \tag{4.23}$$

O objetivo desta seção é mostrar como determinar os coeficientes a_0, a_n e b_n na série de Fourier. Para determinar o coeficiente a_0, vamos integrar ambos os lados da equação (4.23). Desta forma temos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + \cdots + b_1 \operatorname{sen}(x) + b_2 \operatorname{sen}(2x) \cdots \right) dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_1 \cos(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_2 \cos(2x)dx + \cdots + \int_{-\pi}^{\pi} b_1 \operatorname{sen}(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_2 \operatorname{sen}(2x)dx + \cdots =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)dx + a_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x)dx + \cdots + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx + b_2 \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(2x)dx + \cdots$$

Foi apresentado em (4.21) que duas funções φ_i e φ_j do conjunto C são mutuamente ortogonais para $i \neq j$, assim sendo, temos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} = a_0 \frac{x}{2}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = a_0 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{(-\pi)}{2} \right) = a_0 \left(\frac{2\pi}{2} \right) = a_0 \pi.$$

Dividindo por π em ambos os lados, temos:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx} \tag{4.24}$$

Para determinar o coeficiente a_n na série de Fourier, vamos calcular o produto interno de ambos os lados de (4.23) com $g(x) = \cos(nx)$ utilizando a definição 4.1.2.

Assim, no lado esquerdo de (4.23) vamos ter:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx.$$

No lado direito teremos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos(nx)dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_1\cos(x)\cos(nx)dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_2\cos(2x)\cos(nx)dx + \cdots +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos(nx)\cos(nx)dx + \cdots + \int_{-\pi}^{\pi} b_1\operatorname{sen}(x)\cos(nx)dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_2\operatorname{sen}(2x)\cos(nx)dx + \cdots$$

Sabemos por (4.21) que $g(x) = cos(nx)$ é ortogonal a todas as funções, com exceção a função $h(x) = a_n cos(nx)$. Assim sendo, no lado direito temos,

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n(\cos^2(nx))dx,$$

ou seja,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n(\cos^2(nx))dx. \tag{4.25}$$

Usando a identidade trigonométrica

$$(\cos^2(nx)) = \frac{1+\cos(2nx)}{2}$$

temos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n(\cos(nx))^2 dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx = a_n\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}dx + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(2x)}{2}dx\right) =$$

$$a_n\left(\frac{x}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\operatorname{sen}(2nx)}{4n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = a_n\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{(-\pi)}{2}\right) + \left(\frac{\operatorname{sen}(2n\pi)}{4n} - \frac{\operatorname{sen}(-2n\pi)}{4n}\right)\right] =$$

$$a_n\left[\left(\frac{\pi+\pi}{2}\right) + 0\right] = a_n\pi,$$

ou seja,

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n(\cos^2(nx))dx = a_n\pi. \tag{4.26}$$

De (4.25) e (4.26) concluímos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = a_n\pi.$$

Dividindo ambos os lados por π temos:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad n = 1, 2, 3\cdots} \tag{4.27}$$

De uma maneira bem semelhante, podemos obter o coeficiente b_n, tomando o produto interno de ambos os lados de (4.23) por $\operatorname{sen}(nx)$. Desta forma, obtemos de modo similar que

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx, \qquad n = 1, 2, 3\cdots} \tag{4.28}$$

Assim sendo, pelas igualdades (4.22), (4.24), (4.27) e (4.28), temos a Série de Fourier correspondente a $f(x)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$, com seus respectivos coeficientes a_0, a_n e b_n:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx))$$

em que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad n = 1, 2, 3\cdots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx, \qquad n = 1, 2, 3\cdots \end{aligned}$$

4.3 Aproximações para Pi

O objetivo desta seção é expressar uma função dada como uma série Fourier e assim determinar uma aproximação para π. Para isto é necessário enunciar um teorema que fornece condições suficientes para a convergência da Série de Fourier de uma função f. A demonstração deste teorema pode ser encontrado no Capítulo 3 de Figueiredo (2014).

Teorema 4.3.1 (Teorema de Fourier)**.** *A série de Fourier da função f, dada em (4.22),* *converge para $f(x)$ em todos os pontos em que f é contínua e converge para* $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$, *em todos os pontos onde f é descontínua.*

A expressão

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\frac{\lim_{t\to x^+} f(t)+\lim_{t\to x^-} f(t)}{2}$$

é o valor médio dos limites à direita e à esquerda no ponto x. Assim sendo, temos:

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\right). \tag{4.29}$$

Exemplo I) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de período 2π, definida por

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se} \quad 0\le x<\pi\\ 0 & \text{se} \quad -\pi\le x<0\end{cases} \tag{4.30}$$

cujo o gráfico está representado pela Figura 4.1 .

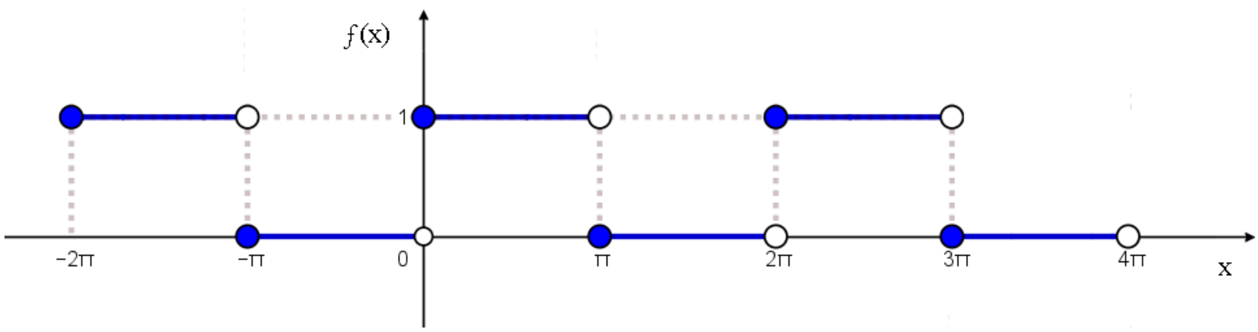


Figura 4.1: Gráfico da onda quadrada

Calculando os coeficientes:

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)dx\right)=$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0dx+\int_{0}^{\pi}1dx\right)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1dx=\frac{1}{\pi}x\Big|_{0}^{\pi}=\frac{1}{\pi}(\pi-0)=\frac{\pi}{\pi}=1,$$

ou seja, $a_0=1$.

Sabemos que

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos(nx)dx, \qquad n=1,2,3\cdots$$

Desta forma, temos:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} 1\cos(nx)dx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi} 1\cos(nx)dx\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}0) = 0,$$

assim, $a_n = 0$.

Para determinar b_n temos:

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx, \qquad n = 1, 2, 3\cdots$$

logo:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\operatorname{sen}(nx)dx + \int_{0}^{\pi} 1\operatorname{sen}(nx)dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi} 1\operatorname{sen}(nx)dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{-\cos(nx)}{n}\bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{n\pi}(-\cos(n\pi) + \cos 0) \\
&= \frac{1}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)),
\end{aligned}$$

ou seja, $b_n = \dfrac{1}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$. Para n par, ou seja, $n = 2k$, temos $b_n = 0$, e para n ímpar, $n = 2k - 1$, temos $b_n = \dfrac{2}{(2k-1)\pi}$, $\qquad k = 1, 2, 3, \cdots$

Substituindo os coeficientes em (4.22), a série de Fourier será:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi}\operatorname{sen}(2k-1)x. \tag{4.31}$$

Para $x = \dfrac{\pi}{2}$ temos $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ e assim:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen}\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \\ 1 - \frac{1}{2} &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \operatorname{sen}\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \\ \frac{\pi}{4} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \operatorname{sen}\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \cdots$$

que é exatamente a mesma expressão encontrada em (3.5), conhecida como a fórmula de Leibniz.

Pelo teorema 4.3.1, temos:

$$\frac{f(-\pi^+) + f(-\pi^-)}{2} = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, o gráfico da função 2.3.1 definida pela série (4.31) é o da Figura 4.2.

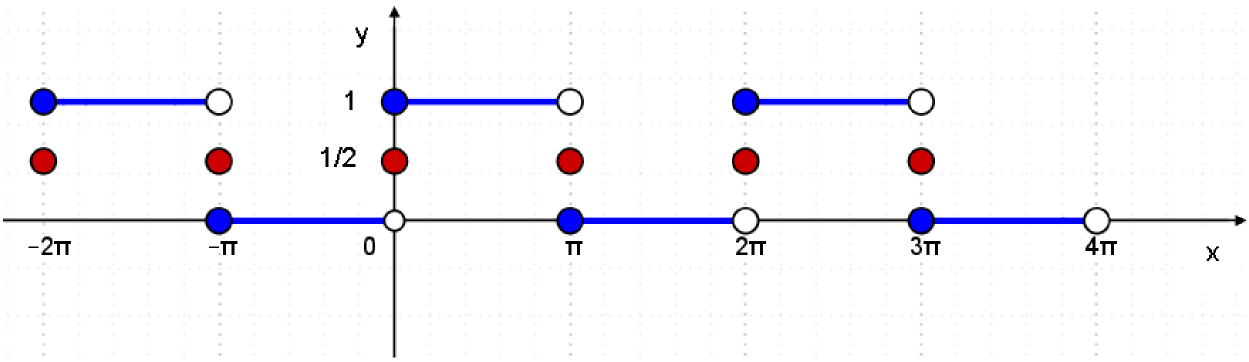


Figura 4.2: Onda quadrada mais o teorema de Fourier

Exemplo II) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2π, definida por

$$f(x) = x^2, \quad para \quad -\pi \leq x \leq \pi, \tag{4.32}$$

cujo gráfico, do prolongamento periódico desta função, está representado pela Figura 4.3.

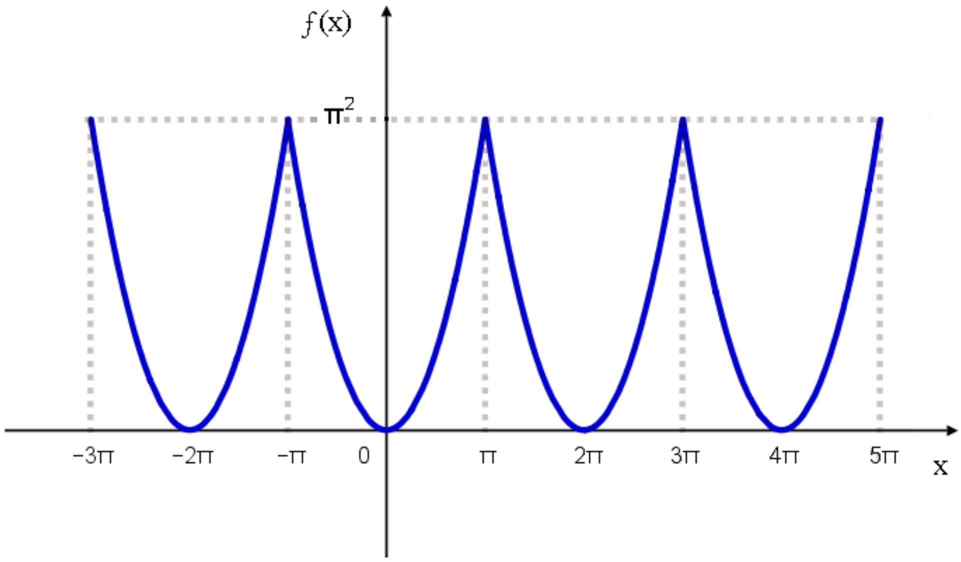


Figura 4.3: Expansão periódica para $f(x) = x^2$,$-\pi \leq x \leq \pi$.

Calculando os coeficientes a_0, a_n e b_n.

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{2\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)dx.$$

Seja,

$$\begin{cases} u = x^2 & \Rightarrow \quad du = 2xdx \\ dv = \cos(nx)dx & \Rightarrow \quad v = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \end{cases}$$

assim temos:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(x^2\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n})2xdx\right),$$

ou seja,

$$a_n = -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}dx.$$

Integrando por partes mais uma vez temos:

$$\begin{cases} u = x & \Rightarrow \quad du = dx \\ dv = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n}dx & \Rightarrow \quad v = -\dfrac{\cos(nx)}{n^2} \end{cases}$$

portanto:

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}dx\\
&= -\frac{2}{\pi}\left(-x\frac{\cos(nx)}{n^2}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)dx\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{(-\pi)\cos(-n\pi)}{n^2} + \frac{1}{n^2}\operatorname{sen}(nx)\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right]\\
&= \frac{2}{n^2}[\cos(n\pi)+\cos(-n\pi)]\\
&= \frac{4(-1)^n}{n^2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}\cdot$$

Foi apresentado no exemplo 4.1.3 que o produto de uma função par com uma função ímpar resulta em uma função ímpar e por 4.8 que a integral definida em intervalos simétricos de uma função impar é zero. Dessa forma temos:

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} x^2\operatorname{sen}(nx)dx = 0$$

pois $x^2\operatorname{sen}(nx)$ é ímpar. Logo substituindo os coeficientes a_0, a_n e b_n em

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx))$$

a série de Fourrier para $f(x) = x^2$ é

$$x^2 = \frac{\frac{2\pi^2}{3}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx) + 0\operatorname{sen}(nx)\right) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx),$$

ou seja,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

ou

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left[-\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{9}\cos(3x) + \cdots\right]$$

Observando o gráfico da figura 4.3, notamos que a função não é diferenciável para $x = \pi$, assim sendo vamos usar o teorema 4.3.1 e a equação 4.29 para determinar o valor da função para $x = \pi$. Como

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right),$$

temos:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{\pi^2 + \pi^2}{2} = \pi^2,$$

assim:

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4\left[-\cos(\pi) + \frac{1}{4}\cos(2\pi) - \frac{1}{9}\cos(3\pi) + \frac{1}{16}\cos(4\pi) - \cdots\right] \Leftrightarrow \\
\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} &= 4\left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right] \Leftrightarrow \\
\frac{2\pi^2}{12} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Exemplo III) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2π, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases} \tag{4.33}$$

cujo gráfico esta representado pela Figura 4.4.

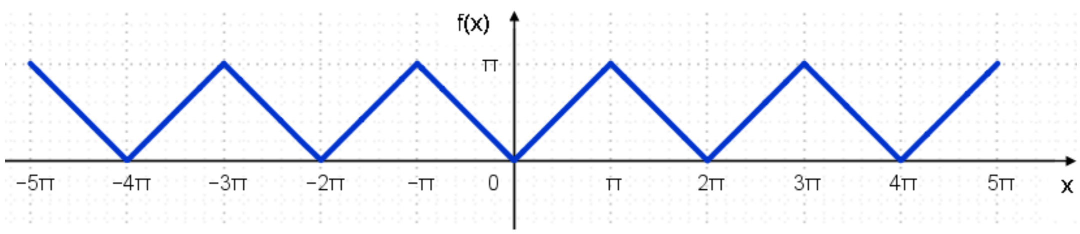


Figura 4.4: Expansão periódica da função $f(x) = |x|, -\pi \leq x \leq \pi$.

Passemos aos cálculos dos coeficientes de Fourier.

• Pela equação (4.24) temos:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -xdx + \int_{0}^{\pi} xdx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\left(\frac{(0^2)^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2}\right) + \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}\right] = \pi,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$a_0 = \pi.$$

• Pela equação (4.27) temos:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\cos(-nx)dx + \int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx\right]. \qquad (4.34)$$

Sabemos que a função cosseno é par, logo, basta determinar a integral de

$$\int x\cos(nx)dx.$$

Seja:

$$\begin{cases} u = x \;\Rightarrow\; du = dx \\ dv = \cos(nx)dx \;\Rightarrow\; v = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \end{cases}$$

assim temos:

$$\int x\cos(nx)dx = x\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} - \int \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}dx = x\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} + C. \qquad (4.35)$$

Substituindo (4.35) em (4.34), temos:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\left[-\left(x\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\bigg|_{-\pi}^{0}\right) + \left(x\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\bigg|_{0}^{\pi} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\bigg|_{0}^{\pi}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\left(0 + \frac{\cos(0)}{n^2} - \frac{\cos(-n\pi)}{n^2}\right) + \left(0 + \frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{\cos(0)}{n^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\left(\frac{1}{n^2} - \frac{\cos(n\pi)}{n^2}\right) + \left(\frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n^2} + \frac{\cos(n\pi)}{n^2} + \frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cdot
\end{aligned} \tag{4.36}
$$

Ou seja,

$$
a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cdot
$$

- Cálculo de b_n pela equação (4.28):

$$
b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\operatorname{sen}(nx)dx + \int_{0}^{\pi} x\operatorname{sen}(nx)dx\right]\cdot \tag{4.37}
$$

Seja:

$$
\begin{cases}
u = x \;\Rightarrow\; du = dx \\
dv = \operatorname{sen}(nx)dx \;\Rightarrow\; v = -\dfrac{\cos(nx)}{n}
\end{cases}
$$

dessa forma:

$$
\int x\operatorname{sen}(nx)dx = -x\frac{\cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n} = -x\frac{\cos(nx)}{n} + \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} + C. \tag{4.38}
$$

Substituindo (4.38) em (4.37), temos:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{\pi}^{0} x\,\mathrm{sen}(nx)dx + \int_{0}^{\pi} x\,\mathrm{sen}(nx)dx\right] \Leftrightarrow \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\left[-\left(-x\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\mathrm{sen}(nx)}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \left(-x\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi} + \frac{\mathrm{sen}(nx)}{n^2}\right)\Big|_{0}^{\pi}\right] \Leftrightarrow \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\left[\left(x\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + 0\right) + \left(-x\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi} + 0\right)\right] \Leftrightarrow \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\left[\left(0\frac{\cos(0)}{n} - (-\pi)\frac{\cos(-n\pi)}{n}\right) + \left(-\pi\frac{\cos(n\pi)}{n} - 0\right)\right] \Leftrightarrow \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\left[\left(\pi\frac{\cos(-n\pi)}{n}\right) + \left(-\pi\frac{\cos(n\pi)}{n}\right)\right] = 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$b_n = 0.$$

Portanto, substituindo os coeficientes na equação (4.22) temos a série de Fourier da função f em (4.33):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(nx)) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos(nx).$$

Assim sendo, temos:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(x) - \frac{4}{9\pi}\cos(3x) - \frac{4}{25\pi}\cos(5x) - \frac{4}{49\pi}\cos(7x) - \cdots$$

Usando o teorema 4.3.1 de Fourier, para $x = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(0) - \frac{4}{9\pi}\cos(0) - \frac{4}{25\pi}\cos(0) - \frac{4}{49\pi}\cos(0) - \cdots \Leftrightarrow \\
-\frac{\pi}{2} &= -\frac{4}{\pi} - \frac{4}{9\pi} - \frac{4}{25\pi} - \frac{4}{49\pi} - \cdots \Leftrightarrow \\
-\frac{\pi}{2} &= -\frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) \Leftrightarrow \\
\frac{\pi^2}{8} &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots
\end{aligned}$$

Exemplo IV) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2π, definida por

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\pi < x < 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 < x < \pi \end{cases} \tag{4.39}$$

cujo gráfico esta representado pela Figura 4.5.

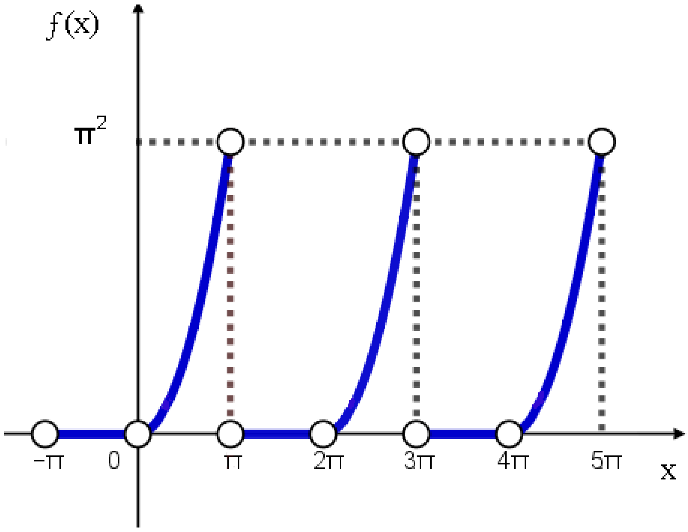


Figura 4.5: Expansão periódica da função $f(x)$.

Calculando os coeficientes a_0, a_n, e b_n.

• Cálculo de a_0 pela equação (4.24):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} x^2dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} x^2dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} x^2dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} - 0\right) \\ &= \frac{\pi^2}{3}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}.$$

• Cálculo de a_n pela equação (4.27):

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} x^2\cos(nx)dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos(nx)dx.
\end{aligned}
$$

Para resolver esta integral, vamos usar o método de tabulação usado para integrais da forma $\int f(x)g(x)dx$, em que f pode ser derivada até se tornar zero e g pode ser integrada de forma rápida. Segundo Anton (2007a, p.517) este método consiste em:

1. Derivar $f(x)$ várias vezes até obter zero, anotando os resultados na primeira coluna da tabela.

2. Integrar $g(x)$ várias vezes, anotando os resultados na segunda coluna da tabela até igualar ao zero da primeira coluna.

3. Traçar uma seta de cada entrada da primeira coluna para a entrada localizada uma linha abaixo na segunda coluna.

4. Identificar as setas como os sinais $+$ e $-$ alternadamente, começando com o sinal $+$.

5. Multiplicar os valores dos extremos inicial e final de cada seta, multiplicando o resultado por $+$ ou $-$, de acordo com o sinal na seta. A soma desses resultados é o valor da integral.

Usando o método de tabulação acima citado, vamos integrar $\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx$.

Derivada		*Integral*
x^2		$\cos(nx)$
	$+$	
$2x$		$\frac{\text{sen}(nx)}{n}$
	$-$	
2		$-\frac{\cos(nx)}{n^2}$
	$+$	
0		$-\frac{\text{sen}(nx)}{n^3}$

Assim sendo, tem-se:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(x^2\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} + 2x\frac{\cos(nx)}{n^2} - 2\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}\right)\Bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(2\pi\frac{\cos(n\pi)}{n^2}\right) \\
&= \frac{2(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$a_n = \frac{2(-1)^n}{n^2}.$$

- Cálculo de b_n pela equação (4.28):

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\operatorname{sen}(nx)dx + \int_0^{\pi} x^2\operatorname{sen}(nx)dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\operatorname{sen}(nx)dx.
\end{aligned}
$$

Resolvendo por tabulação a integral $\int_0^{\pi} x^2\operatorname{sen}(nx)dx$, tem-se:

Derivada		*Integral*
x^2	$+$	$\operatorname{sen}(nx)$
$2x$	$-$	$-\dfrac{\cos(nx)}{n}$
2	$+$	$-\dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$
0		$\dfrac{\cos(nx)}{n^3}$

Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-x^2\frac{\cos(nx)}{n} + 2x\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} + 2\frac{\cos(nx)}{n^3}\right)\Bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\pi^2\frac{(-1)^n}{n} + 2\frac{(-1)^n}{n^3} - \frac{2}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Substituindo os coeficientes a_0, a_n e b_n em (4.22), a série de Fourier para f é:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx)\right) \\
&= \frac{\frac{\pi^2}{3}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos(nx) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2(-1)^n}{n^3} - \frac{2}{n^3}\right)\operatorname{sen}(nx)\right] \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos(nx) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2(-1)^n}{n^3} - \frac{2}{n^3}\right)\operatorname{sen}(nx)\right].
\end{aligned}$$

Tomando $x = \pi$ e utilizando o teorema 4.3.1, obtem-se:

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{0 + \pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Assim sendo, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{2} &= \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2(-1)^n}{n^3} - \frac{2}{n^3}\right)\operatorname{sen}(n\pi)\right] \Leftrightarrow \\
\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi)\right] \Leftrightarrow \\
\frac{2\pi^2}{6} &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n \Leftrightarrow \\
\frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}\cdots$$

Desta forma, nesta seção, mostrou-se algumas aplicações da Série de Fourier, que consiste em representar funções como séries infinitas de senos e cossenos, como também determinar valores aproximados para π.

É de se impressionar como algo que começou com uma preocupação da dissipação do calor tomou tamanha proporção, uma vez que a serie de Fourier apresenta várias outras aplicações em diversas áreas, além da Matemática, tais como: Engenharia, Física, Química Quântica, Acústica, Música, Oceanografia, entre outras.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pode-se observar, ao longo deste trabalho, que para encontrar um valor aproximado para os números irracionais

$$\pi = 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15}\cdots\right] \approx 3.14159265359\cdots,$$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} \approx 2,71828$$

e

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n} \approx 0.69315,$$

passamos por definições e teoremas que se ligam formando uma lógica crescente, começando por sucessão e sequências, PA, PG, (conteúdos vistos na educação básica), Séries de Potências, principalmente a série geométrica

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

produto interno e ortogonalidade de funções e Série de Fourier, (vistos em cálculo mais avançado), refletindo a beleza da Matemática e, principalmente, do Cálculo Diferencial e Integral.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. **Como se Constrói Uma Tábua de Logaritmos**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 26, p. 06-07, 1994.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. v.1, Porto Alegre: Bookman, 8 ed. 2007a.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. v.2, Porto Alegre: Bookman, 8 ed. 2007b.

COMO Valorizar Seus Conhecimentos. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 25, p. 32, 1994.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

FRANCO, Edmilson Nahass. **A Matemática Financeira e o Ensino Médio**. 136 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2016.

HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília de Souza. **Introdução à Álgebra Linear**. Coleção Profmat. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. v.1, 3 ed. São Paulo: Harbra, 1994.

MAOR, Eli. **e: A História de um Número**. 5 ed. Tradução: Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2008.

STEWART, James. **Cálculo**. v.2, 6 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat**. Tradução: Jorge Luiz Calife. 13 ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.