Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Programa de Pós-Graduação em Educação - Mestrado

Valéria Ciabotti

Elaboração de livro paradidático para o Ensino de Probabilidade: o trilhar de uma proposta para os anos finais do Ensino Fundamental

Uberaba - MG
Fevereiro de 2016

Valéria Ciabotti

Elaboração de livro paradidático para o Ensino de Probabilidade: o trilhar de uma proposta para os anos finais do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação, sob a orientação do Professor Dr. Ailton Paulo de Oliveira Júnior.

Uberaba - MG

Fevereiro de 2016

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Ciabotti, Valéria

C49e Elaboração de livro paradidático para o ensino de probabilidade: o trilhar de uma proposta para os anos finais do ensino fundamental / Valéria Ciabotti. – 2016.

153 f. : il., fig., tab.

Dissertação (Mestrado em Educação). – Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2016

Orientador: Prof. Dr. Aílton Paulo de Oliveira Júnior

1. Probabilidades – Estudo e ensino. 2. Ensino fundamental. 3. Livros didáticos. I. Oliveira Júnior, Aílton Paulo de. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 519.2(07)

Valéria Ciabotti

Elaboração de livro paradidático para o Ensino de Probabilidade: o trilhar de uma proposta para os anos finais do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação, sob a orientação do Professor Dr. Ailton Paulo de Oliveira Júnior.

Uberaba, 17 de fevereiro de 2016.

Banca Examinadora:

Ailton Paulo de Oliveira Junior

Prof. Dr. Ailton Paulo de Oliveira Junior
Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM

Prof. Dr. Wagner Wey Moreira
Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM

Cileda Coutinho

Prof.ª Dr.ª Cileda de Queiroz e Silva Coutinho
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC – SP

Dedico esse trabalho ao meu professor e amigo Ailton, meu maior incentivador na superação dos meus limites.

Que sua luz brilhe para sempre!

AGRADECIMENTOS

Agradecer é admitir que em algum momento se precisou de alguém; é reconhecer que não possuímos o dom de ser autossuficientes e que ninguém se faz sozinho. Precisamos de pessoas que nos ofereçam um olhar de apoio, uma palavra de estímulo, um gesto de compreensão, uma atitude de amor.

Tudo isso foi proporcionado a mim por todas as pessoas com as quais convivi nesse período de estudos e muito mais de perto pelo meu orientador, Professor Doutor Ailton, a quem carinhosamente chamo somente de Ailton. O crescimento do ser humano depende do alicerce em que ele está apoiado, e foram momentos de buscas constantes, lágrimas, sorrisos, ilusões, sonhos partilhados entre nós que fizeram com que eu tivesse outro olhar para o mundo. Tenho muito a agradecer a você, principalmente por acreditar e confiar nas minhas ideias e compartilhar comigo o mundo da pesquisa. Obrigada!

A oportunidade de participar do PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) como professora supervisora desde 2010 proporcionou o desejo de amenizar minhas inquietações quanto à inserção dos futuros docentes no âmbito escolar e ao mesmo tempo investir em minha formação e desenvolvimento profissional na docência e, por meio dessa participação, obtive para a escrita do paradidático o apoio e a colaboração de pibidianos que agora agradeço de forma muito carinhosa.

Agradeço aos meus colegas de Mestrado por se constituírem diferentes enquanto pessoas e tão iguais em suas essências. Aprendemos a respeitar as diferenças e a admirar a beleza íntima de cada um. E quando duvidarmos ou sentirmos receio de enfrentar o futuro, surgirá em nossa frente a certeza que tudo valeu a pena, pois a diversidade constituiu nossa formação através de diferentes olhares para uma mesma realidade.

Em especial, quero agradecer à amiga de orientação do Mestrado, Edmeire, pela companhia nos momentos de estudos e nas viagens para participar de eventos, no apoio em todas as situações de dúvidas e incertezas, que às vezes me tirava o ânimo para prosseguir.

Minha gratidão às Professoras Doutoras Váldina Gonçalves da Costa, Helena de Ornellas Sivieri Pereira, Maria Célia Borges e Regina Maria Rovigati Simões e ao Professor Doutor Acir Mário Karwoski, pelo incentivo, dedicação e presteza no auxílio às discussões em suas disciplinas, nos mostrando a importância do trabalho em grupo na consolidação dos conhecimentos. O desprendimento de vocês e o espírito inovador e empreendedor na tarefa de multiplicar seus conhecimentos fizeram a diferença. Extensivos ao Professor Doutor Wagner Wey Moreira e à Professora Doutora Cileda de Queiroz e Silva Coutinho por aceitarem o convite para participar da minha banca e pelas ricas contribuições para a finalização da minha pesquisa.

Agradeço a todos que participam como secretários, especialmente à coordenadora, Profa. Dra. Martha Maria Prata Linhares, do Programa de Pós-graduação da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, pelas informações e orientações dadas desde o início do curso.

Agradeço os meus alunos e meus amigos das escolas onde trabalho por suportar meu mau humor matinal, quando passava noites em claro estudando, minhas reclamações na construção dessa pesquisa quando o cansaço prevalecia. Vocês foram importantes em cada gesto, obrigada pelo carinho e amizade que me disponibilizaram.

Obrigada, mãe Leila, que, apesar de sua condição de saúde, acamada e com grandes confusões mentais, expressou através do seu olhar e das suas palavras, o carinho e a confiança de que eu necessitava em todos os momentos que necessitei do aconchego do seu colo. Agradeço às suas cuidadoras, que carinhosamente demonstraram companheirismo na divisão das minhas obrigações para com você.

Ao meu querido irmão Hernani, com todas as suas limitações originadas por sua saúde mental, que me abraçou e compartilhou comigo dos meus medos e receios em não conseguir concluir meu tão sonhado curso de Mestrado.

À minha irmã Silvana que, mesmo distante, disponibilizou seu tempo tão explorado pela dedicação ao seu trabalho, momentos em que, quando olhava para os lados e me sentia sozinha, ela estava logo atrás, me fazendo acreditar que tudo passa, e caso eu caísse, estaria ali para segurar minha mão.

Agradeço aos amigos, àqueles que não fazem parte do processo de estudos, àqueles que você não fala sobre pesquisa, dissertação, leituras e mais leituras, por terem aceitado se privar da minha companhia nas ocasiões de festas e reuniões, concedendo a mim a oportunidade de realização pessoal em querer estudar mais.

A minha eterna gratidão aos meus filhos: Leonardo, Valesca e Henrique.

Ao Leo pela disposição e desejo em ajudar na construção do paradidático, cedendo sua imaginação e criatividade na criação dos personagens e partilhando comigo cada conquista no processo de aprendizagem durante o curso.

À Valesca pelos presentes que me oferecia, ao enviar vídeos e fotos dos meus amados netinhos, no meio de uma leitura ou de uma escrita, e que, sem saber, alegrava meu coração, me fazendo sorrir. Luís Miguel e Gustavo, meus netos queridos, um dia vocês entenderão a causa que muitas vezes os deixei com lágrimas nos olhos, me despedindo para voltar para casa a fim de estudar.

Ao Henrique pela disponibilidade e dedicação nas leituras dos textos que eu escrevia, e com sua facilidade na língua portuguesa quando fazia correções. Com seu abraço e cuidados foi meu maior motivador, e se muitas vezes pensei não continuar, chegava e me dava forças para enfrentar o dia e continuar no dia seguinte.

Obrigada, meus filhos!

Ao meu companheiro, amigo e confidente, Zé, pessoa que amo partilhar a vida. Você me faz sentir viva de verdade. Obrigada pelo carinho, a paciência e por sua capacidade de trazer paz à minha mente, através do seu sorriso e das músicas que você canta para aquietar meu coração.

Não posso deixar de agradecer às pessoas desconhecidas que me deram um “Bom dia” ou “Tenha uma boa aula” nos estacionamentos ou na cafeteria entre uma aula e outra.

Obrigada, meu falecido pai Leonardo, onde quer que esteja. Você foi um exemplo de alegria de viver, de superação e de luta, e através dos seus ensinamentos me guiou na busca por meus objetivos de vida. Saudades eternas!

E, finalmente, a Deus por permitir que tudo isso fosse possível. Perdoe-me se em alguns momentos procurei por Ti e pensei não ter sua Companhia. Não sou mais a mesma e hoje tenho certeza que o Senhor fundamentou minha vitória.

“Vai, meu pequeno livro. Que possa sobreviver à Autora e ter a glória de ser lido por gerações que hão de vir de gerações que vão nascer.”

Cora Coralina

CIABOTTI, Valéria. *Elaboração de livro paradidático para o Ensino de Probabilidade: o trilhar de uma proposta para os anos finais do Ensino Fundamental*. 2016. 153 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2016.

RESUMO

A presente pesquisa está inserida no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência, PIBID, subprojeto Matemática – Linha de Pesquisa: Tratamento da Informação da Universidade Federal do Triângulo Mineiro. Neste subprojeto, definiu-se como objetivo analisar o processo de elaboração de livro paradidático para subsidiar o ensino de conteúdos probabilísticos dos anos finais do Ensino Fundamental, seguindo os princípios da Teoria Antropológica do Didático – TAD de Chevallard (1996, 2001), na organização praxeológica didática e matemática (probabilística). A questão orientadora da investigação foi apresentar o processo de elaboração de um livro paradidático no Ensino de Probabilidade para os anos finais do Ensino Fundamental sob a luz da TAD na organização praxeológica didática e matemática (probabilística) que contemple aspectos relacionados aos conteúdos probabilísticos e que atendam às necessidades de compreensão e assimilação por parte dos alunos que estão terminando um ciclo de estudos. Acredita-se ser necessário investigar e buscar uma compreensão mais ampla e fundamentada sobre o uso de livros paradidáticos, tanto no desenvolvimento da leitura quanto na escrita, e consequentemente, nos conteúdos de Probabilidade que se ensina no Ensino Fundamental. De acordo com Menezes e Santos (2002), os paradidáticos são livros e materiais que, sem serem propriamente didáticos, são utilizados para este fim. Partindo desse pressuposto, buscamos organizar os conteúdos com base na Teoria Antropológica do Didático, apresentando a elaboração de livro paradidático, composto por situações problema ou *tarefas*, constituída de uma sequência de subtarefas, que podem ser realizadas utilizando diversas *técnicas,* justificadas pela *tecnologia* que se utiliza da *Teoria* da *Probabilidade* como objeto de estudo. O desenvolvimento desse trabalho está caracterizado pela elaboração de atividades desenvolvidas a partir da produção do livro paradidático com o título “Jogando na Olimpíada Nacional de Probabilidade”, que foram divididos em quatro capítulos e em que cada um deles será apresentado uma das etapas de uma Olimpíada que contemple aspectos relacionados aos conteúdos probabilísticos com o intuito de proporcionar aos alunos a vivência dos processos apontados por Nacarato e Lopes (2005), ou seja, que processos como comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações de significados sejam utilizados. As ações utilizadas no livro paradidático foram elaboradas tomando como base alguns jogos que, a nosso ver, são importantes para agregar motivação às atividades e também relacionar os conteúdos probabilísticos a serem abordados. A intenção da construção do paradidático não é substituir o livro didático e sim, complementá-lo, e inserir este material com elementos essenciais na formação dos alunos da Educação Básica em relação aos conteúdos probabilísticos. É necessário ressaltar a importância de o aluno ter contato com a leitura e interpretação de textos em sua educação inicial, podendo ser auxiliada com o livro paradidático, assim ele trabalhará os conceitos probabilísticos de uma forma mais prazerosa.

Palavras-Chave: Livro Paradidático. Ensino de Probabilidade. Ensino Fundamental. Teoria Antropológica do Didático.

CIABOTTI, Valéria. *Development of a book paradidactic to Probability teaching: the tread of a proposal for the final years of elementary school*. 2016. 153 p. Dissertation (Master of Education) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2016.

ABSTRACT

This research is part of the Institutional Scholarship Program Introduction to Teaching, PIBID – Mathematics subproject - Research line: Treatment of Information of Universidade Federal do Triângulo Mineiro. In this subproject, it was defined as objective analyze the process of elaboration of paradidactic book to subsidize the education of probabilistic content of the final years of elementary school following the principles of Anthropological Theory of Didactic of Chevallard (1996, 2001), in teaching and mathematics (probabilistic) praxeological organization. The guiding question of the research was to elaborate a paradidactic book on Probability of education in the light of Anthropological Theory of Didactic in the didactic and mathematics (probability) praxeological organization that contemplates aspects related to the probabilistic content and that meet the understanding of needs and assimilation by the students who are completing elementary school. It believed to be necessary to investigate and seek a broader understanding and based about using paradidactic books both in the development of reading how writing and consequently the probability of content that is taught in elementary school. According to Menezes and Santos (2002), paradidactic are books and materials, without being properly teaching are used for this purpose. Based on this assumption we seek to organize content based on the Anthropological Theory of Didactic, with the development of paradidactic book, composed of problem situations or tasks, consisting of a sub-tasks sequence, which can be performed using various techniques justified by technology which uses the Probability theory as an object of study. The development of this work is characterized by the development of activities from the production of paradidactic book entitled "Playing in the National Olympics probability" that were divided into four chapters and each of them will be presented of the stages of the Olympics that contemplates aspects related to the probabilistic content in order to provide students with the experience of the processes mentioned by Nacarato and Lopes (2005), namely that processes such as communication of ideas, interactions, discursive practices, mathematical representations, arguments meanings are used. The shares used in paradidactic book have been prepared, based on some games that we believe are important to add motivation to the proposed activities and also be able to relate the probabilistic content to be addressed. The intention of the construction of paradidactic is not to replace the textbook but rather complement it and enter this material as essential elements in the training of students of Basic Education in relation to probabilistic content. It is necessary to emphasize the importance of the student have contact with reading and interpreting texts in their initial education, and can be helped with paradidactic book where he will work probabilistic concepts in a more pleasant way.

Keywords: Book paradidactic. Teaching Probability. Elementary School. Anthropological Theory of Didactic

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

MEMORIAL DECRITIVO

Viajando no tempo e relembrando momentos que inundam meu coração de lembranças... minha formação inicial docente.

Fim do colegial... 1979. Casar ou fazer faculdade?

A nosso ver, ainda prevalecia o legado materno da procriação para as filhas e a responsabilidade de se profissionalizar e assumir uma família para os filhos.

Meu pai? Não, esse dizia:

— Antes do namoro em casa, passar no Vestibular!!!

Daí a primeira obrigação: “prestar Vestibular”.

Não tive dúvidas... “Quero ser professora e vou ensinar Matemática”, afinal já realizava essa tarefa com minhas bonecas, na infância e nas escolas com minhas amigas; aquelas que tinham dificuldades em aprender Matemática. Era um prazer sentar-me ao lado das amigas durante o primário e o ginásio para explicar todos os conteúdos.

Obedecendo ao meu pai e realizando seu pedido, passei no Vestibular!!!

Iniciava então minha formação inicial dentro de uma faculdade, e meu primeiro namoro “em casa”. Tudo acontecia de forma inusitada. Na faculdade, disciplinas e conteúdos me levavam a pensar: “ensina-se a ensinar?”.

A cada semestre eu aguardava uma oportunidade de entender como aquele curso iria me ensinar “Como ensinar?”; “Qual o primeiro passo depois que sair da faculdade?”.

Por outro lado, no namoro rodeavam a insistência dos sonhos, desejos e o domínio dos pensamentos maternos do casamento.

Fim da faculdade... 1982. Licenciatura curta e liberação para assumir uma sala de aula com dois anos e seis meses de formação.

Vence então o tão sonhado desejo de casar de véu e grinalda.

Diploma? Na gaveta...

Formação inicial da maternidade... Uma vez, duas vezes, três vezes...

Diploma? Na gaveta...

Desperta o desejo adormecido pelos afazeres profissionais: “dar aulas”.

Dúvidas! “Como?”; “Por onde começar?”.

Diploma guardado por 11 anos. “Meu Deus o que faço?”

Chega um momento em que temos que fazer uma *blitz*, refletir, parar e avaliar o que foi feito. Conferir se o rumo está correto ou se é necessário adequação às exigências das políticas educacionais, no meu caso, por exemplo.

A vida segue muito veloz e não damos conta do que já fizemos, do que queríamos fazer ou do que ainda queremos. E meu sonho de ser professora, engavetado?

No início da década de 90 já se discutia a importância de introduzir os futuros professores nas salas de aula antes mesmo de adquirirem o tão sonhado diploma. Fato que não aconteceu na minha formação inicial.

Conforme o contexto muda, a necessidade de novos conhecimentos surge, e as mudanças ocorridas na contemporaneidade acontecem de forma muito rápida e em qualquer lugar. Hoje um bom educador é aquele que gera conhecimento em todas as esferas da Educação.

Reinício da formação inicial... 1998. Plenificação em Matemática e mais um ano de estudos, depois de tantos anos fora do banco da faculdade.

Minha primeira especialização aconteceu em 2000, no curso “Metodologia do Ensino da Matemática” e mais recente, em 2011, no curso de Pós-graduação *lato-sensu* em “Gestão da Aprendizagem Escolar”.

Com minha participação como professora supervisora do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID desde 2010, e mais perto da Universidade, veio o desejo de estudar, pensando mais no sentido de pesquisar “como utilizar livros paradidáticos no ensino da Matemática?”

Daí surge a oportunidade de fazer o Mestrado em Educação pela Universidade Federal do Triângulo Mineiro.

Trajetória com um período adormecido, por estar fora do contexto escolar. Hoje, diante da convicção que tenho sobre minhas limitações, envolvo-me com dedicação exclusiva, com dois cargos efetivos: um na rede municipal e outro na rede estadual, participando em cursos, programas, eventos, etc., com o objetivo de buscar aperfeiçoar-me para uma educação transformadora.

Depois desse reinício, a paixão por ser professora, que ficou diminuída pela opção do casamento, tornou-se novamente a fazer parte dos meus sonhos, e desde então, sou “alimentada” por cada situação de aprendizagem - quer seja como professora, quer seja como aluna.

Queria ser professora, e hoje me considero educadora...

INTRODUÇÃO

A presente pesquisa está inserida na linha de pesquisa “Fundamentos e práticas educacionais” e é um subprojeto ligado ao Grupo de Estudos em Educação Estatística e Matemática – GEEM, ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM e ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência, PIBID, subprojeto Matemática – Linha de Pesquisa: Tratamento da Informação da Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM.

As pesquisas relacionadas aos anos finais do Ensino Fundamental, principalmente no ensino de Probabilidade, representam uma grande contribuição para a área da Educação Matemática, contudo, percebe-se que há, ainda, muitas lacunas a serem preenchidas. Tal constatação provoca a necessidade de se estudar, pesquisar e produzir material didático para apoiar o Ensino de Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental.

Tendo em vista o tema e o problema de pesquisa, o objetivo geral deste trabalho foi analisar o processo de elaboração de livro paradidático para subsidiar o ensino de conteúdos probabilísticos dos anos finais do Ensino Fundamental seguindo os princípios da Teoria Antropológica do Didático – TAD de Chevallard (1996, 2001), na organização praxeológica didática e matemática (probabilística).

Considerando-se o objetivo geral indicado, estabelecemos a seguinte questão de pesquisa: O processo de elaboração de livros paradidáticos de narrativa ficcional no Ensino da Probabilidade fornece material didático para facilitar a apreensão dos conceitos probabilísticos nas atividades sugeridas ao aluno, com o intuito de estimular a aprendizagem do aluno, e ao professor, elementos que deem suporte ao ensino desses conteúdos?

Definiu-se para a construção desse livro paradidático, a utilização da narrativa ficcional segundo Dalcin (2002), pois se acredita que contar uma estória provocará maior motivação nos alunos em sua leitura e emprego como elemento de fixação e aprendizagem dos conteúdos probabilísticos.

Pretende-se elaborar atividades a serem desenvolvidas a partir do livro paradidático, ou seja, a produção de material didático que contemple aspectos relacionados aos conteúdos probabilísticos e à leitura, com o intuito de proporcionar aos alunos a vivência dos processos apontados por Nacarato e Lopes (2005), ou seja, que processos como comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações e negociação de significados sejam utilizados.

Além disso, com base na Teoria Antropológica do Didático, apresentaremos a elaboração de livro paradidático para subsidiar o ensino de conteúdos probabilísticos dos anos finais do Ensino Fundamental, que será composto por situações problema ou tipos de *tarefa*, que identificaremos por (T), constituída de uma sequência de tarefas (t), que podem ser realizadas utilizando diversas *técnicas* (τ) justificadas pela *tecnologia* (θ) que se utiliza da *teoria* (Θ) da *Probabilidade* como objeto de estudo.

Assim, serão tomadas como referência as propostas de Chevallard (1999) para avaliar tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Dessa forma, as tarefas propostas têm como objetivo serem bem identificadas conforme os conteúdos e a razão de sua proposta e se ela é adequada para alunos do ciclo a que se destina (anos finais do Ensino Fundamental); se o conjunto de tarefas fornece uma visão das situações matemáticas (probabilísticas) utilizadas no livro paradidático. A técnica será disponibilizada de maneira completa, ou seja, passo a passo, ou somente esboçada, no bloco tecnologia/teoria - será expresso no decorrer do livro e com justificativas tecnológicas.

Assim, a elaboração do livro paradidático obedeceu fundamentalmente aos seguintes passos:

(1) Apresentar pelo menos uma técnica para resolver tarefas solicitadas;
(2) Para as técnicas descritas, estabelecer, pelo menos um esboço de um discurso tecnológico;
(3) Apresentar tarefas propondo: enfoque Clássico (Laplaciano) para Frequentista; enfoque Frequentista para Clássico (Laplaciano); situações

aleatórias e deterministas.

(4) Articular diversos tipos de tarefas em torno do conceito de probabilidade e dos enfoques Clássico (Laplaciano) e Frequentista.

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) fornece recursos para que se possa elaborar um livro paradidático para o ensino de Probabilidade destinado aos anos finais do Ensino Fundamental. Por essa razão, este trabalho baseou-se na noção de organização matemática (probabilística) para elaborar um livro paradidático para os anos finais do Ensino Fundamental, e que foram divididos em capítulos, em que cada um deles será uma das etapas de uma Olimpíada de Probabilidade.

Assim, adotamos neste trabalho, como quadro teórico, a Teoria Antropológica do Didático – TAD, de Chevallard (1996, 2001), na organização praxeológica didática e matemática. Segundo Almouloud (2010), as praxeologias são de duas espécies: matemáticas e didática. As organizações praxeológicas matemáticas dizem respeito à realidade matemática elaborada em uma sala de aula e as organizações didáticas referem-se ao modo de construí-la.

Segundo Munakata (1997), foi a Editora Ática quem criou a primeira coleção de paradidáticos de alcance no Brasil e os considerava destinados a apoiar, aprofundar e facilitar a maneira de apresentação dos conteúdos, muitas vezes aridamente exposta no livro didático. Tomaremos essa definição de livro paradidático como a principal deste trabalho de pesquisa, sendo complementada pela definição de Menezes e Santos (2002) - são livros e materiais que, sem serem propriamente didáticos, são utilizados para esse fim. São importantes porque podem utilizar aspectos mais lúdicos que os didáticos e, dessa forma, serem eficientes do ponto de vista pedagógico. Recebem esse nome porque são adotados de forma paralela aos materiais convencionais, sem substituir os didáticos.

É importante frisar que o termo "paradidático" foi criado no Brasil no final da década de 70 do século XX pela editora Ática que, juntamente com outras editoras, ampliava seu espaço no mercado editorial por meio dos livros didáticos.

Para Gitirana, Guimarães e Carvalho (2010) os livros paradidáticos no Ensino de Matemática trazem bons questionamentos que estimulam o respeito à variedade de pontos de vista e aos contextos em foco, com suas diversas especificidades e representam uma fonte de enriquecimento para as atividades em sala de aula. Em relação ao Tratamento da Informação, as autoras afirmam que ainda são poucas as obras que contemplam esse campo recente na matemática escolar. No entanto, algumas obras sugerem experimentos a partir dos quais se pode propor aos alunos a organização dos resultados em tabelas e gráficos para melhor observação e análise.

Diante da conceituação de livros paradidáticos e a sua utilização no ensino de Matemática, mais especificamente no ensino de Probabilidade, esta dissertação está organizada em seis tópicos, além de contar com um Memorial Descritivo, que apresenta brevemente minha trajetória de vida, sobretudo profissional, que melhor justifica o interesse pela temática desenvolvida nesta pesquisa. São fatos e experiências que carregam grande importância para chegar ao foco central deste estudo, que é a produção de material paradidático para o Ensino de Probabilidade.

Nesse sentido, esse momento oportunizará reflexões aos leitores que poderão compreender o contexto maior em que se insere esta pesquisa.

O primeiro tópico refere-se à definição do livro paradidático, além de sua importância para a educação. Aborda-se, inicialmente, o histórico da definição do termo, as diferenças entre livros paradidáticos e didáticos e suas características, embasando-se na Lei de Diretrizes e Bases 9394/96. Apresenta uma abordagem acerca dos primeiros paradidáticos surgidos no Brasil. Cita Monteiro Lobato e sua metodologia criativa para tornar a Matemática mais familiar aos aprendizes. Expõe o surgimento desse tipo de livro em 1986, define narrativas, aspecto importante na leitura e interpretação de textos advindos de paradidáticos e incorpora maneiras de ensinar matemática utilizando esse material. Para compreender o uso de paradidáticos na Matemática, renomados autores contribuem com seus estudos e com as suas pesquisas, entre os quais estão Dalcin (2007), Imenez (1987), Fiorentini e Miorim (1996), Cruz (2003) e Smole e Diniz (2001), autores que refletem sobre a relevância educacional que esse conteúdo possui. Destacam que, a partir de 2010, o Programa Nacional do Livro Didático – PNLD incluiu os livros paradidáticos (livros complementares) entre os recursos didáticos destinados ao Ensino Fundamental I e II, tendo entre eles obras que exploram ou servem como subsídio para o professor trabalhar com seus alunos. A pesquisa demonstra escassez desse recurso para o Ensino de Probabilidade destinado à Educação Básica.

O segundo tópico apresenta uma abordagem acerca dos conteúdos de Probabilidade que, segundo os PCN (BRASIL, 1997), estabelecem a principal finalidade para o estudo desse conteúdo para a Educação Básica. São descritos os anos escolares, divididos em ciclos e utiliza o ensino de Probabilidade como exemplo, conteúdo que é priorizado na pesquisa. Sob diversos olhares e através de exemplos envolvendo Probabilidade, definem-se: experimento aleatório, espaço amostral, eventos e conceitos básicos para o ensino de conteúdos probabilísticos para o Ensino Fundamental, direcionando-os para a resolução mediante os enfoques: clássico e frequentista. É sugerida a utilização de jogos no Ensino de Probabilidade, visto que consideramos que o jogo contribui não só com as habilidades matemáticas como também colabora na aquisição de atitude, tornando a aprendizagem dos alunos mais prazerosa e descontraída.

Na sequência, o terceiro tópico é dedicado e pautado na metodologia da Teoria Antropológica do Didático que, segundo Chevallard (1999), para que uma praxeologia seja especificada, é necessária a compreensão de alguns conceitos fundamentais: tipo de tarefa, tarefa, técnica, tecnologia e teoria. O "como resolver a tarefa" é o motor gerador de uma praxeologia, ou seja, é preciso ter (ou construir) uma técnica, que deve ser justificada por uma tecnologia, a qual, por sua vez, precisa ser justificada por uma teoria. A palavra técnica será utilizada como processo estruturado e metódico, às vezes algorítmico, que é um caso muito particular de técnica.

No quarto tópico são explicitados os objetivos e procedimentos metodológicos da pesquisa. Cumpre-nos reiterar que o objetivo principal desta pesquisa foi elaborar um livro paradidático (Jogando na Olimpíada Nacional de Probabilidade) para subsidiar o ensino de conteúdos probabilísticos dos anos finais do Ensino Fundamental, seguindo os princípios da Teoria Antropológica do Didático – TAD. Os princípios da Teoria Antropológica do Didático – TAD são fundamentados em Chevallard (1996, 2001), na organização praxeológica didática e matemática. Além disso, foram tomadas como referência as propostas de Chevallard (1999) para avaliar tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

Face à busca pela fidelidade e tendo assumido compromisso com o título dessa dissertação, o quinto tópico versa sobre o motivo pela qual a participação no subprojeto Matemática do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID da Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM fez parte da construção do material, ao levantar as dificuldades de ensinar Probabilidade, e detectou-se a insuficiência de material no ensino de Probabilidade mediante pesquisas realizadas em livros paradidáticos - motivo pelo qual a opção de elaborar um livro paradidático que tratasse do ensino desse conteúdo. São apresentados os personagens, o nome da escola, o ambiente escolar, descrição dos jogos utilizados em cada uma das etapas da Olimpíada, enfoques: Clássico e Frequentista de Probabilidade, e, finalmente, são apresentadas as atividades que compõem o Livro Paradidático, seguindo os princípios da Teoria Antropológica do Didático na organização praxeológica didático e matemática (probabilística).

No sexto tópico são explicitadas as conclusões advindas do que foi apresentado no texto e recomendações que pretendem sugerir futuras investigações ligadas à construção e utilização de livro paradidático para o Ensino de Probabilidade no Ensino Fundamental.

1. O QUE SÃO LIVROS PARADIDÁTICOS?

Segundo Munakata (1997), o termo paradidático foi cunhado pelo professor Anderson Fernandes Dias, diretor presidente da Editora Ática, no início da década de 70. Continua afirmando que foi a Editora Ática quem criou a primeira coleção de alcance no Brasil destinada a apoiar, aprofundar e facilitar a maneira de apresentação dos conteúdos, muitas vezes aridamente exposta no livro didático.

Segundo Dalcin (2002), após as coleções lançadas pela editora Ática, no final de 1970 e meados de 1980, outras editoras começaram também a lançar no mercado alguns livros paradidáticos, dentre elas a Atual, a Moderna, a FTD, a Saraiva e a Scipione.

Para Zilberman (1982), o livro didático e o paradidático são facetos de um mesmo livro, ou seja, aquele a quem se delegou a incumbência de o estudante, durante o transcurso das atividades discentes, servirá como depósito de informações e exercícios, sem negar seu caráter utilitário.

Os livros paradidáticos apresentam estórias de ficção, elementos que podem trazer diversão, e associado a esses aspectos, abordam conteúdos matemáticos que permitem ensinar Matemática de forma agradável, mostrando como essa ciência está indelevelmente associada, ou mesmo incorporada, ao dia-a-dia das pessoas. Nesse sentido, estão de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, pois:

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado (BRASIL, 1998, p. 37).

Louro (1999) comenta como os livros didáticos e paradidáticos têm sido objetos de investigações, no campo educacional, que apontam para aspectos neles presentes, que retratam representações de gênero, grupos étnicos, classes sociais, arranjos familiares, profissões e tarefas, divisões regionais do País.

Segundo Laguna (2001), os livros paradidáticos atendem à Literatura e à todas as outras disciplinas, procurando ajudar professores e enriquecer a formação do aluno. Com elementos visuais e temas adequados, esses livros procuram despertar o hábito da leitura e levantar questionamentos que antes ficavam à margem da vida escolar, objetivando complementar informações de maneira leve e ágil. São características dos paradidáticos: (1) preços populares; (2) longa vida editorial; (3) direcionamento à crianças e jovens, além do espaço escolar; (4) temas literários e transversais; (5) linguagem mais acessível.

Menezes e Santos (2002) dizem que a importância dos livros paradidáticos nas escolas aumentou, principalmente no final da década de 90, a partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), que estabeleceu os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e orientou para a abordagem de temas transversais relacionados ao desenvolvimento da cidadania. Dessa forma, abriu-se espaço para o aumento da produção de obras para serem utilizadas em sala de aula, abordando temas como Ética, Pluralidade Cultural, Trabalho e Consumo, Saúde e Sexualidade. Ainda afirmam que os paradidáticos são livros e materiais que, sem serem propriamente didáticos, são utilizados para esse fim. Os paradidáticos são considerados importantes porque podem utilizar aspectos mais lúdicos que os didáticos e, dessa forma, serem eficientes do ponto de vista pedagógico. Recebem esse nome porque são adotados de forma paralela aos materiais convencionais, sem substituir os didáticos.

Borelli (1996) afirma que o termo *paradidático* apresenta o sentido do termo *paraliteratura*, a partir da interpretação da formação da palavra com “o prefixo *para* denota o significado de proximidade – ao lado de, ao longo de – quanto à conotação de acessório, subsidiário e, também, o sentido de funcionamento desordenado ou anormal”.

Segundo Lima (2012), a opção de nomear esses livros de paradidáticos e não paraliteratura, ou outro termo qualquer, tenha se dado pelo primeiro termo sugerir uma aproximação com os livros didáticos.

A Lei de Diretrizes e Bases 9394/96 (LDB) em seu artigo 32, inciso I, aponta a grande necessidade de trabalhar com leitura, escrita e interpretação de textos na

Educação Básica, com o intuito do desenvolvimento da capacidade de aprender, devendo se voltar para a construção de futuros leitores competentes, desenvolvendo um trabalho interdisciplinar, estimulando o aluno a ser sujeito do seu próprio aprendizado. O uso do livro paradidático sugere a promoção de uma aprendizagem interativa no aspecto apontado pela LDB.

Buscando definir os livros paradidáticos, Yasuda e Teixeira (1995) dizem que são consideradas paradidáticas as obras produzidas para o mercado escolar sem as características funcionais e de composição do manual didático.

Consideramos também a definição de Munakata (1997), ao afirmar que os livros paradidáticos têm características próprias. Diferente dos livros didáticos, eles não seguem uma seriação e nem uma sequência de conteúdos, conforme preconiza o currículo oficial. Geralmente, são adotados no processo de ensino e aprendizagem como material de consulta do professor ou como fonte de pesquisa e de apoio às atividades do educando.

Em suma, o que define os livros paradidáticos é o seu uso como material que complementa (ou mesmo substitui) os livros didáticos. Tal complementação (ou substituição) passa a ser considerada como desejável, na medida em que se imagina que os livros didáticos, por si, sejam insuficientes ou até mesmo nocivos (MUNAKATA, 1997).

De acordo com as ideias de Cunha (2002), não se deve confundir o gênero da literatura a ser trabalhado, não usando método que possam vir a prejudicar a saúde de cada educando, pois o texto paradidático tem uma função determinada, uma finalidade, tratando de um assunto específico ou complementando o livro didático.

Skeff (2004) diz existirem diferenças na escolha dos livros paradidáticos nas escolas públicas e particulares de nosso País; nas escolas particulares os alunos possuem certa autonomia, e muitas delas realizam pequenas feiras dentro das salas de aula para a escolha dos livros a serem lidos durante o ano letivo.

Contudo, concordamos e nos baseamos em Skeff (2004), quando afirma que todo livro paradidático deve ter como objetivo principal o aprofundamento e a ampliação de um determinado tópico ou tema do conteúdo de uma ou mais disciplinas, além de auxiliar o ensino e a aprendizagem. O livro paradidático também oportuniza ao leitor uma leitura individual e frequentemente facultativa e contribui na busca dos objetivos e no desempenho das funções que tem o livro didático.

O livro paradidático, quando bem escolhido pelos professores, pode se transformar em uma alternativa valiosa ao dispor dos professores, possibilitando a esses, que possam exercer sua autonomia e liberdade para ir além dele, enriquecê-lo e ampliá-lo (SKEFF, 2004).

Vistos como potencialmente inseridos nos currículos escolares, Furlani (2005), defende a ideia de que os livros paradidáticos são, também, instrumentos de uma política educacional que inclui certos saberes e certas identidades, tornando suas representações visíveis e atribuindo-lhes *status* normatizador, ao mesmo tempo em que exclui outros saberes e outras identidades. Ao interpelar certos sujeitos, e não outros, os artefatos culturais curriculares produzem esses sujeitos, estabelecendo diferenças por meio de processos hierárquicos que definem as identidades.

Segundo Furlani (2005), os livros paradidáticos apresentam conhecimentos, são instrumentos de ensino e são frequentemente atualizados. Entretanto, geralmente, seus conteúdos relacionam-se às temáticas que tangenciam as disciplinas do currículo oficial. Assim, são vistos como um complemento aos livros didáticos e, mesmo que cada disciplina ofereça uma gama de conteúdos, os livros paradidáticos são elaborados especificadamente para cada assunto, por exemplo: educação sexual, meio ambiente, pluralidade cultural, ética, prevenção de drogas, cidadania, direitos humanos, direitos dos consumidores.

Barros (2006) diz que a intenção dos livros paradidáticos deve ser a de trabalhar o lúdico, sem deixar que as crianças percebam outro sentido nos mesmos, pois, caso o professor dê muita ênfase aos valores morais das histórias, elas poderão se tornar um momento que não traga motivação para os alunos, criando uma aversão pelas mesmas e distanciando-se dos livros literários.

Para Benetti (2008), sob o ponto de vista editorial, o paradidático é definido como um livro comercial, sem compromisso com a formalidade científica, tendo como objetivo trazer informações sobre a ciência de forma descontraída e informal.

Segundo Trevizan (2008), sem desprezar outros recursos didáticos para o

Ensino de Matemática, faz a seguinte classificação, de acordo com a tipificação (Quadro 1) dos recursos: livro didático; caderno; livro paradidático.

Quadro 1 – Classificação de recursos didáticos.

Recurso	Âmbito de intervenção	Intencionalidade ou função	Conteúdos e maneira de utilizá-los	Suporte
Livro didático	Âmbito da aula, voltado para todo o grupo.	Apresentar todo o conteúdo de forma seriada e organizada em partes teóricas e exercícios.	Disciplinar, seriado e ordenado hierarquicamente.	Papel durável.
Caderno	Âmbito da aula, voltado para o ensino e aprendizagem individual.	Servir como meio para registro das informações apreendidas em aula e resolução dos exercícios.	Disciplinar, com organização sugerida pelo professor e executadas pelo aluno.	Papel descartável.
Livro paradidático	Âmbito da aula, voltado para todo o grupo.	Motivar, exemplificar ou aprofundar algum conteúdo específico.	Disciplinar, envolvendo geralmente um conteúdo principal.	Papel durável.

Fonte: Trevizan (2008, p. 10).

Trevizan (2008) diz ainda que o livro paradidático, assim como o didático e o caderno, pode estar associado a todo tipo de conteúdo. Quais sejam:

- Conteúdos conceituais – à medida que comunica o tema abordado, expõe algoritmos, justificativas e exemplos de aplicações que ajudam a compreender os fenômenos e estratégias;
- Conteúdos procedimentais – à medida que estimula o estudo individual, assim como a compreensão e a interpretação do texto, em geral apresentam exercícios que possibilitam a repetição dos algoritmos e a verificação de aprendizagem, por exemplo, as fichas de leitura anexas ao livro;
- Conteúdos atitudinais – à medida que veiculam determinados valores e

> propõe reflexões, podem dar lugar a uma série de questões interessantes que conduzem o aluno a buscar respostas e debater pontos de vista.

Para Gomes (2009), o objetivo do livro paradidático é integrar as discussões em sala de aula com assuntos do cotidiano para ampliar o leque de conhecimento de mundo; ele não pode ser trabalhado como algo desconectado ao conteúdo que está atrelado ao planejamento. Com esse tipo de procedimento, o aluno perde o interesse pela leitura do material, uma vez que não vê aplicabilidade alguma com o conteúdo visto.

Segundo Dante (2010), os livros paradidáticos são escritos em estilos mais coloquiais, abordam aspectos históricos interessantes, integram-se com outras áreas de conhecimento e não se restringem ao conteúdo matemático de determinado tema.

Propor um trabalho com livro paradidático não é simples; é necessário que, tanto os alunos como os professores, estejam envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem, pois exige disponibilidade de ambos, que saiam da zona de conforto (SKOVSMOSE, 2000) e passem a trabalhar de forma investigativa, adequando qual o melhor paradidático para se trabalhar aquele conteúdo.

Conforme Dante (2010), são várias as formas de se utilizar um paradidático em sala de aula: o uso livre; tarefa de casa; desencadeando um conteúdo; aprofundando um conteúdo e servindo de fonte de consulta; possibilitando assim ao aluno uma leitura prazerosa e que dessa possa extrair um conhecimento sobre as áreas em estudo na matemática.

1.1. Livros paradidáticos no Ensino de Matemática

A fim de delimitar o ponto de partida de nosso percurso histórico, buscamos por alguns títulos pioneiros do gênero paradidático. A *Aritmética da Emília* (1935) e *O Homem que Calculava* (1938).

Segundo Dalcin (2007), Monteiro Lobato e Malba Tahan romperam com as concepções clássicas de ensino, acreditando na possibilidade de o gênero literário constituir-se num importante veículo para uma aprendizagem prazerosa e significativa.

O livro infantil “Aritmética da Emília”, escrito por Monteiro Lobato e publicado em 1935, reflete, através de sua história, como a aritmética pode ser transformada em uma brincadeira no pomar. De acordo com Dalcin (2002) a obra "constitui-se, provavelmente, na primeira obra brasileira a ter a intencionalidade de desenvolver o conteúdo matemático priorizado pelo ensino elementar - a Aritmética - dentro de uma história". Monteiro Lobato se preocupava com a educação e acreditava que a imaginação serviria de guia para a real aprendizagem da criança; tanto que escreveu outros títulos direcionados para outras áreas do conhecimento, cujos livros recebem a característica de paradidáticos.

Segundo Dalcin (2002),

> Monteiro Lobato demonstra uma preocupação para com o desenvolvimento intelectual e a imaginação das crianças, e vê nas narrativas uma forma de aproximação entre estes universos. [...] Monteiro Lobato era uma pessoa envolvida nas discussões de seu tempo, particularmente naquelas relacionadas à educação (DALCIN, 2002, p. 11).

As obras de Monteiro Lobato, assim como as de Malba Tahan, acabaram por influenciar muitos dos autores de paradidáticos de Matemática, a exemplo de Luiz Márcio Pereira Imenez, como se percebe por sua apresentação do livro *Brincando com Número:* “Eu, que gostava de números, pude desenvolver esse interesse através dos livros de Malba Tahan. Ele foi importante para que eu percebesse a beleza da Matemática, contribuindo para que um dia eu também viesse a escrever livros sobre essa ciência” (IMENEZ, 1987, p. 45).

Em Ática (1995, p. 336), o clima de abertura política dessa época favorecia o debate pedagógico e, em consequência, o aparecimento de novas propostas na área. Na rede escolar, diversas experiências de inovação didática estavam sendo levadas a termo. Apostando nessa tendência, a Ática resolveu investir em uma nova linha de textos, que aliasse o rigor científico à imaginação literária.

Segundo Dalcin (2002), as primeiras coleções de paradidáticos que surgiram no Brasil foram: A Descoberta da Matemática - editora Ática e Vivendo a Matemática

- editora Scipione, publicadas a partir de 1986, destinadas ao Ensino Fundamental II. Essas coleções passaram por reformulações e foram reeditadas nos anos 2000 e 2001.

A coleção “A Descoberta da Matemática” tem como principal autora a professora Luzia Faraco Ramos que, em 1979, foi convidada pela editora Ática a produzir livros que unissem o uso da linguagem matemática e da língua portuguesa, contando uma história com personagens adolescentes. Em entrevista à editora Ática a professora fala sobre a importância dos paradidáticos no Ensino da Matemática:

> Acredito que a série trouxe uma brisa renovadora para o Ensino da Matemática. Quando estava lecionando, procurava melhores caminhos para que meus alunos compreendessem os conceitos, a partir de nossas vivências em salas de aula. Com certeza, isso não tem nada a ver com decorar fórmulas de modelos prontos. Logo descobri que o conhecimento só é real se construído em cada aluno. O meu desejo é de que cada livro da série possa ser um caminho através do qual o aprendizado fique recheado de experiências e descobertas, de uma forma mais agradável e natural (RAMOS, 2008, p. 1).

A mesma autora também menciona processo de confecção de um paradidático:

> A pedra fundamental de cada obra é o conteúdo matemático que vou desenvolver. O passo seguinte é imaginar onde esse tema pode aparecer no cotidiano das pessoas. Procuro incluir também outro plano em todas as histórias: a construção da consciência ambiental, abordando aspectos ecológicos como pesca não predatória, plantio de grama, despoluição das águas dos rios e dos mares. Visualizando essas situações, vou construindo os personagens e a trama que poderá envolvê-los. Assim, sinto que estou humanizando a Matemática (RAMOS, 2008, p. 1).

O processo de ensino e aprendizagem na Matemática representa um grande desafio para o professor, pois exige dele uma condução significativa e estimulante para seus alunos. O cuidado metodológico que o professor então necessita ter é exatamente na escolha do material, pois é nessa escolha que deve estar vinculada a utilização do recurso nas aulas de matemática, a fim de contribuir para o ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Segundo Fiorentini e Miorim (1996),

> O professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico. Nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano. "A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da Matemática não garante uma melhor aprendizagem dessa disciplina" (FIORENTINI; MIORIM, 1996, p.9).

Nessa perspectiva e diante das pesquisas realizadas, incorporou-se ao estudo um despertar pelas *narrativas*, aspecto importante na leitura e interpretação de textos advindos de paradidáticos.

Um enfoque no uso de paradidáticos no que tange às *narrativas,* segundo Cruz (2003),

> (...) Outros enfoques da narrativa podem levar a outras finalidades não menos importantes: seria o caso, por exemplo, da possibilidade de utilizá-la para promover a aproximação entre duas culturas – a literária e a científica. (CRUZ, 2003, p. 278)

É notória a diferença percebida entre jovens que apreciam a leitura àqueles que têm resistência devido à falta de estímulos e de incentivo. A aproximação que cita Cruz (2003), sucinta a ideia de que, lendo um livro paradidático na área da Matemática, o aluno estará se apropriando de diversos saberes, desenvolvendo, não só a leitura e a escrita, como também a interpretação de textos apontados como conhecimentos necessários pela Lei de Diretrizes e Bases 9394/96 (LDB) em seu artigo 32, inciso I, ou seja, "o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo".

Na Matemática ainda se valoriza a técnica, e Cruz (2003) defende a ideia de que essa valorização pode ser reduzida através das narrativas.

> (...) as narrativas são fontes praticamente inesgotáveis para a produção do significado, utilizá-las como recurso didático nas aulas de matemática é uma tentativa de articular convenientemente a técnica e o significado dos temas que ensinamos. (CRUZ, 2003, p.287)

Segundo Smole e Diniz (2001), a predominância do silêncio, no sentido de ausência de comunicação, ainda é comum nas aulas de matemática. O excesso de cálculos mecânicos, a ênfase em procedimentos e a linguagem usada para ensinar Matemática são alguns dos fatores que tornam a comunicação pouco frequente ou quase inexistente. Defendem ainda a ideia de que propostas que objetivem uma aprendizagem significativa em Matemática devem abordar uma variedade de ideias matemáticas, sejam numéricas, geométricas, relativas às medidas e às noções de estatística e probabilidade, entre outras, de modo que sejam proporcionadas ao aluno diferentes formas de perceber a realidade e o conhecimento matemático.

Segundo Gitirana, Guimarães e Carvalho (2010), os livros paradidáticos oferecem vasto campo para a introdução de conceitos matemáticos em situações imaginárias, ricas em cores e conteúdo. Além de terem função no ensino da Matemática, esses livros reforçam a prática da leitura pelas crianças, algo que todo professor deve procurar fazer ao trabalhar os diferentes componentes curriculares. Nas escolas que dispõem de cozinha, livros de receitas para crianças são ótimos para: a prática de medidas de massa, de volume e de capacidade; o uso das frações mais comuns no dia a dia - como um meio, um terço, um quarto, entre outras. Ao mesmo tempo, propiciam o trabalho cooperativo e a aprendizagem de noções de higiene e de segurança. Livros sobre origami, desde que adequados à idade das crianças, contribuem para o seu desenvolvimento psicomotor e permitem o manuseio de formas geométricas em um contexto bem lúdico.

Para Machado (2011), compreender é apreender o significado de um objeto ou de um acontecimento; é vê-lo em suas relações com outros objetos ou acontecimentos; os significados constituem, pois, feixes de relações que, por sua vez, se entretecem, se articulam em teias, em redes, construídas socialmente e individualmente, e em permanente estado de atualização.

Smole e Diniz (2001) defendem que propostas que objetivem uma aprendizagem significativa em Matemática devem abordar uma variedade de ideias matemáticas, sejam numéricas, geométricas, relativas às medidas e às noções de estatística, entre outras, de modo que sejam proporcionadas ao aluno, diferentes formas de perceber a realidade e o conhecimento matemático.

Nacarato e Lopes (2005) enfatizam que os processos como comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações e negociação de significados, vêm permeando as recentes discussões na área. Nesse sentido, faz-se necessário propiciar aulas de Matemática que incluam atividades oportunizadoras da construção da linguagem matemática por meio da leitura e da escrita.

Fonseca e Cardoso (2005) apresentam aspectos da interação discursiva nas aulas de Matemática através de práticas de leitura de textos matemáticos, ou de textos trazidos à cena escolar para ensinar Matemática, ou ainda de textos que demandam a mobilização de conhecimentos matemáticos para a leitura.

Alguns autores sugerem que a integração entre a matemática e a língua materna pode diminuir as dificuldades de aprendizagem em matemática (SMOLE, 1995; SMOLE; DINIZ, 2001; MACHADO, 2011), trazendo benefícios, tanto ao ensino de matemática, quanto ao ensino da língua materna. A exploração, em sala de aula, das relações existentes entre a matemática e a língua materna através de complementaridade, é indicada nos PCN:

> Falar sobre Matemática, escrever textos sobre conclusões, comunicar resultados, usando ao mesmo tempo elementos da Língua Materna e alguns símbolos matemáticos, são atividades importantes para que a linguagem Matemática não funcione como um código indecifrável para os alunos (BRASIL, 1997, p. 41-42).

Em Passos e Oliveira (2005) e em Passos, Oliveira e Gama (2006), investigou-se contribuições da integração entre a matemática e a língua materna para a formação inicial e contínua de professores, concluindo-se que a dinâmica de escrever livros infantis com conteúdo matemático é muito promissora, favorecendo tanto a formação continuada dos professores, quanto interferindo positivamente na sua ação pedagógica.

Dalcin (2007) abordou em sua pesquisa acerca dos paradidáticos de Matemática, a relação entre a simbologia matemática, as imagens e o texto escrito dentre as diversas abordagens do conteúdo matemático.

Conforme Lima *et al*. (2013), os livros paradidáticos podem incentivar a leitura e servir como elo entre os conteúdos matemáticos, que são abordados de forma diversificada, por meio de uma história onde ocorrem situações do dia a dia dos personagens; assim, o professor tem ainda possibilidade de trabalhar com situações do cotidiano dos alunos, podendo, o livro, se tornar um aliado para o professor - de uma vez que esse auxilia na compreensão e na abordagem de determinados conteúdos.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação, Capítulo II - Da Educação Básica, Seção IIII - Do Ensino Fundamental, Art. 32°, inciso I, diz que “o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo” (BRASIL, 1996, p. 9), indica a importância de o aluno desenvolver a capacidade de leitura e realizar cálculos para desenvolver a capacidade de aprender, o que fundamenta a importância da elaboração de livro didático para o Ensino de Probabilidade.

Segundo Gitirana, Guimarães e Carvalho (2010), pelo menos nas últimas quatro décadas, o livro didático deixou de ser o único apoio ao trabalho de sala de aula. Na área de Matemática, o que era uma tendência se intensificou nos anos mais recentes, com a ampliação do movimento da Educação Matemática no País. Assim, especialmente nos primeiros anos da escolaridade, o professor tem à sua disposição diversos recursos didáticos que buscam favorecer as situações de aprendizagem. O uso desses recursos oferece contextos em que conceitos e procedimentos matemáticos podem ser bastante explorados.

Os autores destacam que, a partir de 2010, o Programa Nacional do Livro Didático – PNLD incluiu os livros paradidáticos (livros complementares) entre os recursos didáticos destinados às turmas de 1° e 2° anos do Ensino Fundamental, tendo, entre eles, obras que exploram ou servem como subsídio para o professor trabalhar a Matemática com seus alunos.

Para o Ensino Fundamental, os paradidáticos se compõem de livros de histórias infantis, cujos enredos atribuem significados a conceitos matemáticos (GITIRANA; GUIMARÃES; CARVALHO, 2010, p. 92).

Souza e Oliveira (2005) relatam experiência de aplicação na quinta-série do

Ensino Fundamental de um livro infantil, produzido por uma delas, professora de Matemática. Os alunos demonstraram interesse e motivação para resolver os problemas propostos. As atividades foram respondidas e alguns alunos comparavam suas experiências com as dos personagens do livro. A análise dessas respostas, segundo essas autoras, indicou que a utilização do livro infantil, nas aulas de matemática, pode favorecer que os alunos se interessem, sintam prazer e aprendam matemática de uma maneira lúdica, trazendo elementos de sua vida cotidiana para a sala de aula.

Segundo o Caderno de Apoio e Aprendizagem, para o Ensino de Matemática destinado ao Ensino Fundamental II, São Paulo (2010):

> Destaca-se a importância do uso de outros recursos disponíveis – livros didáticos, paradidáticos, vídeos, *softwares*, jogos – que o professor julgue interessantes para ampliar a aprendizagem de seus alunos. Da mesma forma, é fundamental que a Matemática seja compreendida por eles e que não lhes traga medo ou insegurança, cabendo ao professor criar um ambiente favorável para a aprendizagem, cuidando sempre para que tenham confiança na elaboração de estratégias pessoais diante de situações-problema, assim como interesse e curiosidade por conhecer outras, aprendendo a trocar experiências com seus pares e a cuidar da organização na elaboração e apresentação dos trabalhos (SÃO PAULO, 2010, p. 9-10, grifo nosso).

No mesmo documento, São Paulo (2010), é indicado importância da utilização de paradidáticos no Ensino de Matemática:

> Nos últimos anos, a utilização de múltiplos recursos vem sendo implementada pelos professores. Um exemplo é o trabalho com a leitura de notícias de jornais e revistas e com livros paradidáticos, que proporcionam contextos significativos para a construção de ideias matemáticas e complementam o que foi produzido com o livro didático (SÃO PAULO, 2010, p. 13-14, grifo nosso).

Assim, ao mesmo tempo em que atendem as diretrizes educacionais decorrentes da atual Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB, Lei 9.394/96), bem como orientações curriculares propostas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1997), os livros paradidáticos utilizam uma linguagem que facilita o entendimento do aluno, possibilitando maior aprofundamento nos temas abordados.

No início do século XX já se alertava que, para ser um cidadão pleno, esse deveria estar capacitado para calcular, pensar em termos de média, máximo e mínimo, assim como a ler e escrever (RUBERG; MASON, 1998).

No final da década de 90, os conceitos básicos de Estatística e Probabilidade, antes quase ignorados na Educação Básica, passaram a ser discutidos pela comunidade educacional e acadêmica, tendo sido incorporados oficialmente à estrutura curricular da disciplina de Matemática do Ensino Fundamental e Médio com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN em Brasil (1997) (LOPES; COUTINHO; ALMOULOUD**,** 2010).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, Brasil (1997) sugerem aos professores que incentivem os alunos a observar os fenômenos, conjeturar hipóteses, fazer levantamento de dados, tratá-los e analisá-los do ponto de vista da investigação científica. Também incentivam a leitura e a interpretação de gráficos, de tabelas e de medidas publicadas pelos diversos meios de comunicação, a fim de que o aluno saiba posicionar-se de forma crítica diante dessas informações e fornecer-lhes ferramentas para arguir e “desmantelar” informações porventura falaciosas ou mal-intencionadas (LOPES; COUTINHO; ALMOULOUD, 2010).

2. CONCEITOS BÁSICOS UTILIZADOS NO ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL: DIVERSOS OLHARES

Os PCN (BRASIL, 1997) estabelecem que a principal finalidade para o estudo de Probabilidade:

> é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (BRASIL, 1997, p. 56).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, Brasil (1997) sugerem aos professores que incentivem os alunos a observar os fenômenos, conjeturar hipóteses, fazer levantamento de dados, tratá-los e analisá-los do ponto de vista da investigação científica. Também incentivam a leitura e a interpretação de gráficos, de tabelas e de medidas publicadas pelos diversos meios de comunicação, a fim de que o aluno saiba posicionar-se de forma crítica diante dessas informações e fornecer-lhes ferramentas para arguir e “desmantelar” informações porventura falaciosas ou mal-intencionadas (LOPES; COUTINHO; ALMOULOUD, 2010).

Relativamente ao Tratamento da Informação para o Segundo Ciclo do Ensino Fundamental (3° e 4° anos), o trabalho a ser desenvolvido a partir da coleta, organização e descrição dos dados possibilita aos alunos compreender as funções de tabelas e gráficos usados para comunicar esses dados: a apresentação global da informação, a leitura rápida e o destaque dos aspectos relevantes. Lendo e interpretando os dados, apresentados em tabelas e gráficos, os alunos percebem que eles permitem estabelecer relações entre acontecimentos e, em alguns casos, fazer previsões.

Ao observarem a frequência de ocorrência de um acontecimento, ao longo de um grande número de experiências, os alunos podem desenvolver suas primeiras noções de probabilidade (BRASIL, 1997, p. 59).

Assim, em relação à Probabilidade, os PCN (BRASIL, 1997), consideram que essa pode promover a compreensão de grande parte dos acontecimentos do cotidiano, que são de natureza aleatória; possibilitando a identificação de resultados possíveis desses acontecimentos. Destacam o acaso e a incerteza, que se manifestam intuitivamente, portanto, cabendo à escola propor situações em que as crianças possam realizar experimentos e fazer observações dos eventos.

Consoante Miguel, Coutinho e Almouloud (2006), a tentativa de entender o que significa acaso provocou o desenvolvimento de um campo da Matemática denominado Teoria das Probabilidades, pois o acaso interfere nos acontecimentos que não podemos controlar.

Os conceitos e procedimentos relativos à Probabilidade são abordados na disciplina de Matemática, no Bloco *Tratamento da Informação* no Ensino Fundamental (BRASIL, 1997, 1998) e no tema *Análise de Dados no Ensino Médio* (BRASIL, 2002, 2006). No caso dos anos iniciais do Ensino Fundamental, o ensino de Probabilidade tem como principal finalidade que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória, sendo possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos, em geral, em espaços equiprováveis.

Os PCN recomendam que a ideia de probabilidade seja explorada em situações-problema simples, identificando os sucessos possíveis, os sucessos seguros, as situações de *sorte,* salientando a importância da observação da frequência de ocorrência de alguns eventos a partir de um número razoável de experiências (BRASIL, 1997, p. 61).

Ao estudar probabilidade e chance, os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida diariamente, particularmente na mídia. Outras idéias importantes incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance.

Os conteúdos probabilísticos considerados serão os listados no Conteúdo Básico Comum (CBC) Matemática - do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental do Estado de Minas Gerais, Minas Gerais (2008), no Eixo Temático IV – Tratamento da Informação – Probabilidade – Conceitos Básicos de Probabilidade, e considerados como conteúdos a serem ministrados no 9º ano, quais sejam:

1) Relacionar o conceito de probabilidade com o de razão;
2) Resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidade de eventos simples.

Segundo os PCN, Brasil (1998) os conteúdos para o terceiro ciclo (6° e 7° anos) referente à Probabilidade é:

> A construção do espaço amostral e indicação da possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão (BRASIL, 1998, p. 74).

Nos mesmos PCN, os conteúdos para o quarto ciclo (8° e 9° anos) referente à Probabilidade são:

> - Construção do espaço amostral utilizando o princípio multiplicativo e indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão.
> - Elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas (BRASIL, 1998, p. 90).

Antes da elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, já existiam propostas regionais que consideravam conteúdos do Bloco Tratamento da Informação, bloco que evidencia o ensino de Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória, entretanto não existiam documentos que considerassem a importância dos mesmos.

De acordo com os PCN, Brasil (1998), os objetivos das áreas disciplinares são desenvolvidos e separados por ciclo. E para cada ciclo são propostos conteúdos e critérios de avaliação, que são agrupados em blocos temáticos, sendo que essa pesquisa focou-se no Ensino de Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental, especificamente no nono ano do Ensino Fundamental.

Segundo os PCN, o primeiro ciclo compreende a primeira e segunda série do Ensino Fundamental, atualmente, primeiro ao terceiro ano. Esse ciclo, de acordo com os PCN (1997 p. 45), é marcado pela relação entre a língua materna e a linguagem matemática, pois é a partir da comunicação oral que os alunos começam a coletar e organizar as informações, a aprender os símbolos matemáticos, a fazer relações e a tirar conclusões.

Os objetivos e conteúdos para esse ciclo não privilegiam o desenvolvimento do raciocínio probabilístico, especificamente. É desenvolvida nas crianças a aprendizagem de "identificar o uso de tabelas e gráficos para facilitar a leitura e interpretação de informações e construir formas pessoais de registro para comunicar informações coletadas" (BRASIL, 1997, p. 52).

O segundo ciclo compreende a terceira e quarta série do Ensino Fundamental, atualmente, quarto e quinto ano. Esse ciclo é assinalado pelos conhecimentos adquiridos no ciclo anterior, além da coleta e interpretação de dados, sendo requisitada a construção de métodos para representá-los e a utilização da escrita para registrar as conclusões. É esperado que, nesse ciclo, sejam exploradas as ideias referentes à Probabilidade por meio de situações problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de "sorte" (BRASIL, 1997, p. 61).

De acordo com os PCN, Brasil (1998), o terceiro ciclo compreende a quinta e sexta série, atualmente, sexto e sétimo ano. O início desse ciclo prevalece as grandes modificações na organização escolar, há horários distintos para diferentes matérias, onde cada uma delas é ministrada por um professor diferente.

Segundo os PCN, o aluno nesse ciclo, no que se refere ao ensino de Probabilidade, deve ser levado a "resolver situações problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão" (BRASIL, 1998, p. 65).

Ainda segundo os PCN, o quarto ciclo compreende a sétima e a oitava série do Ensino Fundamental, atualmente, oitavo e nono ano do Ensino Fundamental. Nesse ciclo é dado ênfase às relações entre os conhecimentos adquiridos e os saberes matemáticos – em que está focada a pesquisa em questão, ou seja, a elaboração de livro paradidático para o Ensino de Probabilidade no 9º ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997).

O ensino de Matemática no quarto ciclo visa o desenvolvimento, entre outros, do raciocínio probabilístico, por meio da exploração de situações problema que levem a aluno a "construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos" (BRASIL, 1998, p. 82).

No final do Ensino Fundamental é previsto que o aluno conclua essa etapa com a aprendizagem e o domínio de conceitos básicos sobre Probabilidade, para que, posteriormente, aprofundem tais conhecimentos no Ensino Médio. Partindo desse pressuposto, buscamos organizar os conteúdos relevantes para os anos finais do Ensino Fundamental e que fundamentam a construção do material, tomando como base os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, Brasil (1997; 1998).

O Centro de Referência Virtual do Professor - CRV[1], Minas Gerais (2008b), é um portal educacional da Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. Esse portal oferece recursos de apoio ao professor para o planejamento, execução e avaliação das suas atividades de ensino na Educação Básica.

Batanero (2005) defende que os diferentes significados da Probabilidade devem ser incluídos progressivamente a partir das ideias intuitivas dos alunos sobre acaso e probabilidade, e que o ensino não pode limitar-se a uma dessas perspectivas, pois elas estão ligadas dialeticamente. Conclui que a Probabilidade deve ser vista como:

- Razão de possibilidade a favor e contra algum evento que se deseja;
- Evidência fornecida pelos dados;

[1] http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/index2.aspx??id_objeto=23967

- Grau de crença pessoal;
- Modelo matemático que ajuda a compreender a realidade.

Batanero (2005) conclui também que as controvérsias que têm acompanhado a história da probabilidade também influenciaram o ensino. Ressalta que o cálculo combinatório é muito complexo para ser dado junto com a probabilidade num curso introdutório. Além disso, destaca que um conhecimento genuíno de Probabilidade é alcançado apenas com algum estudo formal, embora deva ser gradual e apoiado à experiência estocástica do aluno. Portanto, para ela, são necessárias mais pesquisas para esclarecer quais são os componentes fundamentais do significado de Probabilidade (e, em geral, qualquer conceito matemático), e afirma também que níveis adequados de abstração em que cada componente deve ser ensinado para ajudar os alunos a superar as dificuldades.

Ainda em Batanero (2005) é colocado que o progressivo desenvolvimento dos computadores tem aumentado o interesse na introdução experimental de probabilidade, como o limite de frequência estabilizadas. Simulações e experimentos ajudam os alunos a resolver os paradoxos que surgem, mesmo em problemas de probabilidade aparentemente simples. Mas, uma abordagem experimental pura à probabilidade de ensino, não é suficiente; mesmo quando a simulação nos ajuda a encontrar a solução para os problemas que podem surgir da vida real, você não pode provar ser o mais adequado para a simulação, porque essa depende das suposições feitas com antecedência e o modelo teórico que foi implementado. Conhecimento genuíno de probabilidade só é alcançado com algum estudo formal de probabilidade, embora deva ser gradual e estar apoiado na estocástica do estudante.

A primeira questão que destacaremos e que se fazem importantes para o ensino de probabilidade são as situações do cotidiano que podem abordar aspectos ou eventos tanto aleatórios como determinísticos.

Do ponto de vista conceitual, Dantas (2000) diz que o experimento pode ser determinístico ou aleatório. O experimento determinístico é aquele que, repetido nas mesmas condições, conduzem ao mesmo resultado, havendo apenas os erros de medida, por exemplo, a temperatura do ponto de ebulição da água - ou seja, as condições iniciais do experimento poderão determinar o resultado final.

A Física e a Química possuem muitos exemplos de experimentos determinísticos. Atribui-se a Galileu a primazia de estabelecer fórmulas matemáticas para expressar relacionamentos entre variáveis comprovados experimentalmente. Por meio dessas fórmulas, conhecidas as condições iniciais, o resultado final pode ser obtido. Na realidade, existem outras interferências, mas elas são consideradas negligenciáveis e retiradas do modelo para maior facilidade de representação[2].

Num lançamento de uma moeda, por exemplo, as condições iniciais poderão ser estabelecidas em termos de posição, velocidade, rotação, gravidade, resistência do ar, formato da moeda, densidade de massa, centro de massa e muitas outras características. Em teoria, seria possível controlar todas essas características, tornando o resultado final conhecido, mas, na prática, tal nível de controle não é possível e, para todos os efeitos práticos, um lançamento de uma moeda é um experimento aleatório. Pode-se, portanto, pensar que um experimento aleatório é um experimento não determinístico[3].

Cabe aqui destacar a famosa definição de Henri Poincaré (1854-1912), que pode ser tomada como uma paráfrase do pensamento de Laplace: "O acaso é simplesmente a medida da nossa ignorância. Os fenômenos fortuitos são, por definição, aqueles cujas leis ignoramos" (POINCARÉ, 1908. p. 65).

2.1. Os conteúdos de Probabilidade para o Ensino Fundamental

Segundo Magalhães e Lima (2004, p. 37), um fenômeno ou experimento aleatório é uma situação ou acontecimento, cujos resultados não podem ser previstos com certeza. E apresenta os seguintes exemplos: (1) condições climáticas do próximo domingo que não podem as ter estabelecidas com total acerto; (2) da mesma forma, a taxa de inflação do próximo mês.

Coutinho (1994) completa, afirmando que o experimento aleatório é aquele

[2] http://www.galileu.esalq.usp.br/mostra_topico.php?cod=257
[3] http://www.galileu.esalq.usp.br/mostra_topico.php?cod=257

que seja possível repetir, tantas vezes quantas se queira, exatamente nas mesmas condições, sendo possível identificar todos os resultados possíveis, sem que se possa identificar, a priori, aquele que vai ocorrer.

Uma característica importante dos experimentos aleatórios é sua imprevisibilidade: não podemos saber, com segurança completa, o que resultará em uma experiência particular. São fenômenos atribuídos ao acaso, que não podem ser previstos porque, por assim dizer, se rebelam contra toda lei. Essa é uma ideia fundamental da aleatoriedade: a de que um evento é aleatório quando sua ocorrência não é certa nem tampouco impossível (ORTIZ, 2002).

Para exemplificar, vamos considerar os experimentos nas situações a seguir:

(1) Na situação em que o experimento é o lançamento de uma moeda, o resultado “sair cara na face superior” é aleatório e as possibilidades do experimento aleatório são (Figura 1):

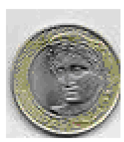
Sair cara:  ou Sair coroa: 

Figura 1 – Resultados possíveis de um experimento aleatório (lançamento de uma moeda).

(2) Numa segunda situação, em que o experimento é o lançamento de um dado com seis faces, o resultado “sair um número maior que três na face superior do dado”, Figura 2, é aleatório, e o sucesso associado ao experimento aleatório é:

Figura 2 – Resultados possíveis de um experimento aleatório (lançamento de um dado).

Segundo Magalhães e Lima (2004, p. 37), chama-se Espaço Amostral, ao conjunto de todos os resultados possíveis de certo experimento ou fenômeno aleatório.

Assim, caso sejam lançadas duas moedas, e forem observados os resultados em suas faces superiores, o **Espaço Amostral** desse experimento é:

$$\{(cara, cara),\ (cara, coroa),\ (coroa, cara),\ (coroa, coroa)\}.$$

Considerando que o **Experimento Aleatório** seja o lançamento de um dado de seis faces, o **Espaço Amostral**, representado pela letra S, derivado da palavra "*Sample*" - da língua inglesa, e que na língua portuguesa é traduzida como "Amostra", é representada por S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Magalhães e Lima (2004, p. 37) complementam afirmando que os subconjuntos do **Espaço Amostral** são denominados **Eventos** e representados pelas letras maiúsculas *A, B*,..., e que o conjunto vazio é denotado por ∅.

Consideremos o **Experimento Aleatório**: lançamento de um dado de seis faces; associado ao **Espaço Amostral** S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, onde podemos listar os seguintes eventos:

1. {1} - Este evento corresponde, por exemplo, sair 1 na face superior do dado; ou sair um número menor que 2;
2. {5} - Este evento corresponde, por exemplo, sair 5 na face superior do dado;
3. {1, 2} - Este evento corresponde, por exemplo, sair um número menor que 3 na face superior; ou sair 1 ou 2 na face superior do dado.
4. {1, 2, 3, 4, 5, 6} - corresponde, por exemplo, sair um número de 1 a 6 na face superior do dado, e que também é a própria representação do **Espaço Amostral** S.
5. { } ou ∅ - corresponde, por exemplo, sair o número sete no lançamento de

um dado com seis faces.

Os processos aleatórios podem ser descritos matematicamente por meio de um modelo probabilístico: a lista ou a descrição dos resultados possíveis (espaço amostral), a cada um dos quais é atribuída uma probabilidade. Em situações como jogar uma moeda ou lançar um dado, pode ser razoável supor que vários resultados sejam igualmente prováveis.

Esses pressupostos remetem à necessidade do reconhecimento da incerteza como característica intrínseca da realidade e à importância da aprendizagem do gerenciamento de situações dominadas por ela (AZCÁRATE, 1997).

Novaes e Coutinho (2009) também expõem que a Teoria das Probabilidades estuda os fenômenos que envolvem a aleatoriedade, pois estamos cercados de fenômenos que são devido ao acaso, levando-nos a ter de tomar decisões.

Segundo Dantas (2013), a definição ou enfoque clássico de probabilidade baseia-se no conceito primitivo de igualmente possíveis. Continua dizendo que, considerando um experimento com número finito de eventos simples, pode-se supor que, por razão de simetria, atribui-se a mesma chance de ocorrência a cada um dos eventos simples de um experimento.

Nessas condições, Dantas (2013, p. 22-23) adota a seguinte definição de probabilidade:

> Consideremos um espaço amostral S com N eventos simples, que suporemos igualmente possíveis. Seja A um evento de S composto de m eventos simples. A probabilidade de A, que denotaremos por P(A) é definida por:
>
> $$P(A) = \frac{m}{N}$$
>
> Observemos que, assim definida, a probabilidade é uma função definida na classe dos eventos ou, o que é equivalente, na classe dos subconjuntos do espaço amostral.

Considere ainda P(A), a probabilidade de ocorrer o evento A e o enfoque clássico da probabilidade de ocorrer A, sendo dado pela razão:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

onde n(A) é o número de resultados favoráveis ao evento e n(S) é o número total de resultados em S.

Cabe ainda destacar que, quando a razão entre o número de resultados favoráveis e número de resultados possíveis for igual a um, diz-se que o evento é certo, ou seja, o evento coincide com todos os casos possíveis. Quando o resultado dessa divisão for igual a zero, diz-se que o evento não ocorrerá, e esses eventos são chamados impossíveis.

No material apresentado em Minas Gerais (2008b), sugere-se o uso das árvores de possibilidades para listar os casos possíveis de um **Espaço Amostral**. A Figura 3 ilustra a lista dos casos possíveis de um Experimento Aleatório “lançamento de duas moedas”, em que os símbolos para a face cara é “C” e para a face coroa é “K”.

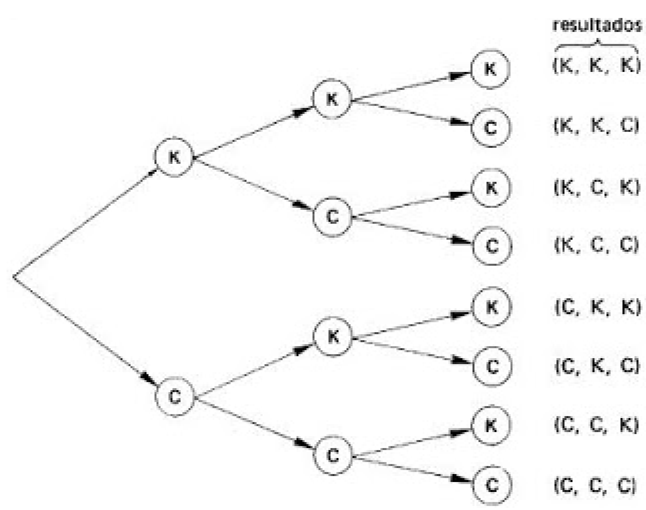


Figura 3 – Representação de Árvore das Possibilidades.

Percorrendo as setas a partir do primeiro lançamento, chegaremos à última coluna, que contém a lista dos casos possíveis. No caso do cálculo de uma probabilidade, bastaria contar, na última coluna, o número de casos favoráveis.

Assim, o espaço amostral da experiência aleatória “lançar uma moeda equilibrada por três vezes e observar seus resultados” é identificado na árvore ilustrada na Figura 2 e identificado por:

S = {(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (K, C, C), (C, K, K), (C, K, C), (C, C, K), (C, C, C)}.

2.2. Diferentes enfoques probabilísticos

Considerando a Teoria das Probabilidades como sendo um estudo teórico de fenômenos que envolvem a incerteza, conhecidos como aleatórios, estocásticos ou não determinísticos, a consideração do ensino de probabilidade - tanto do CBC, Minas Gerais (2008), quanto do PCN para os anos finais do Ensino Fundamental - Brasil (1998), se mantém numa visão determinística e linear, presentes nos currículos escolares.

Para romper com essa visão, a fim de atender às necessidades no mundo contemporâneo, é necessário também que se discutam resultados, promova reflexões, estimulando a criatividade e incentivando o censo crítico no aluno.

Dessa forma, serão abordadas situações do cotidiano que abordem aspectos ou eventos, tanto aleatórios, quanto determinísticos, para desenvolver habilidades no aluno, a saber:

1) Reconhecer o caráter aleatório de variáveis em situações-problema.
2) Identificar o espaço amostral em situações-problema.

Desde a sua origem, o conceito de Probabilidades desenvolveu-se em diversas perspectivas (SILVA, 2002):

1. Enfoque clássico ou laplaciano (baseada na “Lei de Laplace”);
2. Enfoque frequentista ou empírica (baseada na “Lei dos Grandes Números” de

Jacob Bernoulli);

3. Enfoque subjetivo (baseada na crença ou percepção pessoal);
4. Enfoque axiomático ou formal (concepção atualmente vigente, desenvolvida por Andrei Kolmogorov).

A importância de se trabalhar com diversos significados da probabilidade, tais como a Probabilidade Clássica (ou Laplaciana), Frequentista, Geométrica e Condicional, de acordo com o grau de instrução dos alunos, vem sendo estudada e discutida por alguns pesquisadores, destacando-se os estudos de Coutinho (2001); Ortiz (2002); Stadelmanns (2003); Anway e Bennett (2004); Batanero (2005); Viali e Oliveira (2009); e Cabral e Traldi (2010).

O enfoque clássico ou laplaciano de Probabilidade é definido como a razão entre o número de casos favoráveis em relação ao número total de casos possíveis (sem a necessidade de realizar o experimento), desde que todos os resultados sejam igualmente prováveis. Como exemplo, temos que, no lançamento de uma moeda, dizer que a probabilidade é de 1/2 para cada uma das faces, é um argumento aceitável sob essa concepção (BIAJOTE, 2103, p. 25).

Partindo dos resultados das pesquisas de Coutinho (1994, 2001) e Silva (2002), que tratam de diferentes enfoques de probabilidade, acrescenta-se a utilização de atividades que utilizassem a simulação para que os alunos tenham contato com a probabilidade e assim instigá-los a investigar propriedades matemáticas envolvidas.

No enfoque subjetivista, as probabilidades expressam grau de crença ou percepção pessoal. Ela fica centrada no sujeito. Tal concepção se faz muito presente em jogos de azar: os jogadores têm confiança em determinado acontecimento; apoiam-se na coerência e consistência do acontecimento. O mesmo costuma ocorrer com os alunos em sala de aula, no início do trabalho com Probabilidade: eles tendem a fazer julgamentos pessoais (BIAJOTI, 2013, p. 25).

Por fim, o enfoque axiomático ou formal trata-se da concepção vigente, atualmente, que se apoia na teoria dos conjuntos, contrapondo-se ao enfoque clássico. É um conceito definido implicitamente por um sistema de axiomas e um conjunto de definições e teoremas deduzidos deles (BIAJOTI, 2013, p. 25).

Como pressuposto teórico para a elaboração do livro paradidático para o Ensino de Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental, nos baseamos nas pesquisas de Coutinho (1994, 2001), Godino, Batanero e Cañizares (1996), Silva (2002) e Cabral e Traldi (2010), que sugerem a utilização de sequências de ensino de probabilidade que confrontem o enfoque frequentista com o clássico em uma perspectiva construtivista.

Silva (2002) propõe uma integração dos enfoques frequentista e clássico de probabilidade, com o intuito de tornar a aprendizagem significativa e abrangente no que tange aos seus conceitos iniciais, e enumera suas hipóteses de pesquisa da seguinte forma:

- Para que haja uma apreensão abrangente dos conceitos de probabilidade, é necessário que sejam trabalhados os seguintes itens: experimentos aleatórios, experimentos determinísticos, noção de acaso, espaços amostrais equiprováveis e não-equiprováveis e tipos de evento;
- Tendo como base o estudo histórico e epistemológico, o conceito de probabilidade foi se consolidando principalmente sobre duas óticas: a frequentista e a clássica. Caso se privilegie uma em detrimento da outra, estaríamos oferecendo ao aluno uma visão limitada do conceito de probabilidade;
- Os PCN recomendam que o aluno entenda a sociedade como algo em constante reconstrução, inserida num processo contínuo e, portanto, o estudo da história, torna-se um instrumento importante para o seu entendimento. Desse modo, a inserção do contexto histórico, em que se desenvolveu a teoria das probabilidades, auxilia em uma apreensão mais significativa de seus conceitos;
- Os itens citados anteriormente somente serão contemplados, tendo como ponto de partida uma situação-problema que desencadeie uma série de

questionamentos, culminando em última instância com a sua institucionalização.

Os trabalhos de Silva (2002) e Cabral e Traldi (2010) propõem a integração dos enfoques frequentista e clássico, com o intuito de tornar a aprendizagem significativa e abrangente. A pesquisa de Cabral e Traldi (2010) mostra que os três professores, que participaram de um estudo, têm conhecimento da abordagem Laplaciana na introdução do conceito de probabilidade; no entanto, falta embasamento teórico sobre a possibilidade de confrontação dos enfoques Frequentista e Clássico.

Ainda, segundo Coutinho (1996), as ideias iniciais para a introdução dos conceitos de probabilidade por uma visão frequentista apresentam outras vantagens, mostradas no decorrer da sua dissertação. Faz uma crítica ao programa utilizado no Brasil, que salienta exclusivamente a visão clássica (também conhecida como pascaliana ou laplaciana), limitando seu aprendizado aos casos em que prevalece a hipótese de equiprobabilidade.

A autora ainda salienta que determinadas concepções errôneas continuam existindo, mesmo depois do suposto aprendizado das noções básicas de probabilidade, fato que ratifica a importância do seu estudo, desde os anos iniciais da Educação Básica. Em Coutinho (2001), mostra-se a necessidade de confrontar os dois enfoques para a construção do conceito de probabilidade.

Segundo Godino, Batanero e Cañizares (1996), a probabilidade dos eventos poderia ser obtida apenas revolvendo-se questões concernentes à análise combinatória. No entanto, essa definição clássica já apresentava, na época de sua elaboração, inadequações, principalmente por ser restritiva e circular. Além disso, não respondeu a contento, o que era probabilidade, proporcionando somente uma forma prática de cálculo de alguns acontecimentos simples. Laplace, como já havia sido feito por Bernoulli, utilizou o princípio da razão insuficiente, que considera que todos os resultados possíveis possuem a mesma probabilidade de ocorrer, por não haver nenhuma razão conhecida para esperar o contrário.

Posteriormente, adotou-se o princípio da indiferença, que justifica a equiprobabilidade pela homogeneidade e simetria da situação experimental.

De acordo com Godino, Batanero e Cañizares (1996), a ausência de fatores pessoais e a demonstração prática por meio da experimentação são os principais elementos no enfoque frequentista, denotando seu caráter objetivo. Esse enfoque está alicerçado em duas características, observáveis do comportamento, após serem efetuadas repetições: (1) os resultados variam a cada repetição de uma maneira imprevisível; (2) os resultados com pequeno número de repetições podem ser desordenados, mas, quando esses números de repetições aumentam bastante, passa a surgir certa regularidade.

2.3. Os enfoques Clássico (Laplaciano) e Frequentista de Probabilidade

Segundo Lopes e Coutinho (2009), o enfoque clássico é aquele em que a probabilidade é expressa como a razão entre o número de sucessos, que realizam o evento que se quer estudar, e o número total de resultados possíveis do experimento aleatório.

Entende-se como enfoque clássico ou de Laplace, a proporção entre o número de casos favoráveis em relação ao número total de casos possíveis, desde que todos os resultados sejam admitidos como igualmente prováveis de ocorrer. Os jogos de azar baseados em dados, moedas, extração de bolas em urnas, enquadram-se nessa perspectiva teórica, por tratar de fenômenos cuja variável é discreta e porque se supõe ser sempre possível selecionar, como espaço amostral, um conjunto de sucessos elementares que garantam a equiprobabilidade (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1996).

De acordo com Ara (2006), tomando a definição de Jacob Bernoulli, a probabilidade de ocorrência de um evento A pode ser definida como o limite da frequência relativa do evento A, quando o número de repetições do experimento, sob as mesmas condições, tende ao infinito. Na prática, podemos aproximar o valor da probabilidade de ocorrência de um evento A, realizando um grande número de ensaios idênticos e independentes.

É importante ressaltar que todos os eventos do espaço amostral, tomando a definição de Laplace, devem ser equiprováveis. Ainda, na probabilidade clássica, as probabilidades são denominadas, a priori, e são atribuídas, teoricamente, por um raciocínio puramente dedutivo. Por exemplo, a suposição de que a probabilidade de ocorrência do número 4 no lançamento de um dado - com seis faces - seja igual a 1/6. Esse resultado não requer o lançamento de qualquer moeda, mesmo que se tenha uma para ser lançada.

Segundo Soares (2014), um dos primeiros problemas dedicados para contar o número de possíveis resultados, quando rolar um dado várias vezes, é encontrado na Idade Média, no poema "De Vetula", por Richard de Fournival (1200-1250), que mostra corretamente que, ao serem lançados três dados, podem ser observadas 216 combinações possíveis – e, com precisão, calcula valores diferentes para a soma dos três dados. Embora possa agora, parecer uma questão trivial, naquela época não se via tão simples, sendo que outros estudiosos tentaram resolver essa questão e não conseguiram, por não considerarem as permutações possíveis de uma mesma combinação.

A obra *A divina comédia*, de Dante Alighieri (1265-1321), também faz referência à probabilidade em jogos de dados (MORGADO *et al*., 1991).

No entanto, somente bem mais tarde, é que as ideias que formam a base do desenvolvimento da probabilidade foram apresentadas, por Girolamo Cardano (1501-1576), Galileu Galilei (1564-1642) e Luca Pacioli (1445-1517).

De Cardano, temos *De ludo aleae* [*Sobre os jogos de azar*], publicado em 1663, que, na seção dedicada à probabilidade, mostra de quantas maneiras se pode obter 10 ao lançar dois dados. Galileu, em *Sulla scoperta dei dadi* [*Sobre a descoberta dos dados*], também se ocupou das probabilidades, estudando jogos de dados para responder à pergunta de um amigo: Por que no lançamento de três dados obtém-se 10 com mais frequência do que 9? (MORGADO *et al*., 1991).

Já Pacioli, em sua obra *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* [*Súmula de aritmética, geometria, proporções* e *proporcionalidade*], enuncia um problema que seria mais tarde resolvido por Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665). Tal problema dizia respeito à uma curiosidade de

Chevalier de Méré (1607-1684), jogador de cartas e pensador, que discutiu com Pascal problemas relativos à probabilidade de vencer certos jogos. O tema despertou o interesse de Pascal, que se correspondeu com Fermat, sobre o que hoje chamaríamos de probabilidades finitas.

Segundo Coutinho (1996), em carta de junho de 1654, destinada a Fermat, Pascal descreveu a famosa fórmula da probabilidade de um evento A:

$$P(A) = \frac{total\ \ de\ \ casos\ \ favoráveis}{total\ \ de\ \ casos\ \ possíveis} = \frac{m}{n}$$

A probabilidade de ocorrer um evento A pode ser indicada por P(A), onde se lê “P de A” ou probabilidade do **Evento** A.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827) foi o primeiro matemático a elaborar um estudo axiomático do cálculo de probabilidades, em seu *Essai philosophique sur les probabilités* [*Ensaio filosófico sobre as probabilidades*], publicado em 1814, no qual fornece a definição limitada pela hipótese da equiprobabilidade, como segue (MORGADO *et al.*, 1991):

Suponha-se que os experimentos aleatórios (aqueles que, repetidos sob as mesmas condições, produzem resultados geralmente diferentes) tenham as seguintes características:

1. Há um número finito (digamos *n*) de eventos elementares (casos possíveis), a união de todos os quais é o espaço amostral *E*;
2. Os eventos elementares são igualmente prováveis (hipótese da equiprobabilidade);
3. Todo evento *A* é uma união de *m* eventos elementares em que $m \leq n$.

Define-se, então, a probabilidade de *A* como:

$$P(A) = \frac{número\ \ de\ \ casos\ \ favoráveis}{número\ \ de\ \ casos\ \ possíveis} = \frac{m}{n}.$$

De acordo com Dante (2012), a introdução do conceito de Probabilidade, em qualquer momento de aprendizagem, deve ser feito com muito critério e cuidado. A probabilidade de um evento acontecer é dada por um número, em forma de fração ou porcentagem. Um exemplo citado em seu livro didático do 8º ano diz que caso chamemos o evento “obter um número maior do que 4” de evento B, representando-o por B = {5, 6}. Assim, o número de resultados favoráveis é 2; logo, temos n(B) = 2. Os resultados possíveis (espaço amostral) são dados por U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}; assim temos n(U) = 6.

Desse modo, a probabilidade de obtermos um número maior do que 4, no lançamento de um dado, será dada por:

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\ \ ou\ \ 33{,}3\%.$$

São frequentes as situações que se estendem da noção de probabilidade a um modo de mensurar a incerteza, mostrando a necessidade de se desenvolver experiências na escola, em que os alunos desenvolvam as noções intuitivas de acaso, a partir de situações vivenciadas, pois somente assim, adquirirão um nível mais elaborado do conhecimento probabilístico, evitando entendimento e interpretações equivocadas futuramente (CARVALHO; FERNANDES, 2007).

É interessante valorizar, principalmente, a espontaneidade e intuição do aprendiz, enfocando os conceitos pré-desenvolvidos, para que haja a construção do conhecimento e, assim, desmistificando e valorizando a importância dos conceitos de probabilidade que, em geral, é estudada somente em seu enfoque clássico.

Para Coutinho (1994), como objetivo didático, trata-se de ligar de forma profunda, o ensino, às condições de aprendizagem, nas quais o aluno de hoje está inserido (COUTINHO, 1994).

Jacques Bernouilli (1654-1705) lança a visão frequentista de probabilidade ao publicar, em 1713, a obra *Ars conjectandi* [*A arte de conjecturar*]. Esse livro traz o teorema que recebeu o nome do autor, e que também é conhecido como “lei dos grandes números”: a primeira tentativa de deduzir medidas estatísticas a partir de probabilidades. Segundo Ortiz (2002), nessa concepção, a probabilidade de um evento é entendida como o valor para o qual a frequência relativa, de um evento, tende em uma sequência de resultados.

Assim, sob o ponto de vista do enfoque frequentista, é estabelecido o cálculo de probabilidades, por meio de observações sucessivas de um Experimento Aleatório. A probabilidade é estimada de maneira empírica experimental, podendo ser encontrada quando o número de experimentações *n* tende ao infinito.

Segundo Biajoti (2013), o enfoque frequentista considera as probabilidades, a serem atribuídas baseadas no comportamento, em longo prazo, dos resultados aleatórios. Matematicamente, isso envolve a teoria de limites e convergência. Experimentos realizados, com o a simulação por meio de computadores, evidenciam que, quanto maior o número de experimentos, maior proximidade há entre a probabilidade empírica (a posteriori) e a probabilidade teórica (a priori - calculada sem manipulação experimental e tomando-se por base a concepção clássica).

Rego (2010) apresenta o seguinte exemplo:

> Suponha que uma nova peça foi produzida e não se tem conhecimento anterior sobre quão provável será que a peça seja defeituosa, então se pode proceder à inspeção de um grande número dessas peças (N) e contar o número de peças defeituosas dentre elas (n). Após a obtenção de estes números, emprega-se $\frac{n}{N}$ como uma aproximação da probabilidade de que uma peça seja defeituosa. Assim, o número $\frac{n}{N}$ é uma variável aleatória, e seu valor depende essencialmente de duas coisas:
>
> (1) O valor de $\frac{n}{N}$ depende da probabilidade básica, mas desconhecida, p de que uma peça seja defeituosa;

> (2) Dependem daquelas N peças que tenham sido inspecionadas. O que a Lei dos Grandes Números mostra é que se a técnica de selecionar as N peças for aleatória, então o quociente $\frac{n}{N}$ convergirá quase certamente para p. (REGO, 2010, p. 54).

Cabe ainda destacar que a seleção das *N* peças é importante, pois se escolhermos somente aquelas peças que exibissem algum defeito físico externo, por exemplo, os cálculos seriam enviesados, criando situações equivocadas (REGO, 2010, p. 54).

Assim, a probabilidade de ocorrência do evento A é definida como um limite, ou seja, considerando que o experimento é repetido *n* vezes, observa-se a frequência relativa de ocorrência de certo resultado A. Temos, portanto:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_{r_n}(A)$$

onde f_r é a frequência relativa acumulada.

Para Coutinho (1994),

> [...] o ensino do conceito de Probabilidades, pela visão frequentista, proporciona ao aluno uma ligação mais estreita com o mundo real, o mundo do cotidiano, uma vez que esse ensino é fundamentado na definição de Probabilidade como sendo a frequência limite de um evento, quando repetimos uma experiência aleatória um grande número de vezes (COUTINHO, 1994, p.79).

Segundo Lopes e Coutinho (2009), a probabilidade frequentista é:

> [...] expressa como o valor ao redor do qual a frequência relativa do evento “A” se estabiliza ao repetirmos o experimento aleatório um número suficientemente grande de vezes. Logicamente, quando falarmos do ponto de vista do experimental concreto, essa estabilização fornece apenas uma estimativa de probabilidade, pois, de forma sintética, a definição de probabilidade por meio da estabilização de freqüências envolve o conceito de limite, sendo que o número de repetições do experimento n tende ao infinito (p. 65).

Coutinho (1994, p. 9) defende a visão frequentista de probabilidade que parece "[...] mais adequada a um primeiro contato com as probabilidades, pois pode utilizar experimentos ligados à realidade dos alunos, uma vez que não precisa estar limitado à hipótese de equiprobabilidade". A presença da probabilidade frequentista no ensino se justifica por fazer parte de nosso cotidiano, pois estamos sempre cercados de informações presentes em jornais, revistas, televisão, internet e noticiários, onde a maioria dos dados probabilísticos é calculada por meio dessa probabilidade.

Sobre esses questionamentos, Carvalho e Oliveira (2002) acrescentam que não é possível avaliar, com precisão, a probabilidade, porque o número de ensaios é sempre limitado, apesar de podermos contar com a Lei dos Grandes Números.

Ainda nessa abordagem, não se aplica a obrigatoriedade de simetria e equiprobabilidade aos experimentos aleatórios, porém, é necessário que haja uma repetição de um número significativo de vezes de um experimento, e que seus resultados mostrem sinais de estabilização. Sendo que, atualmente, com os recursos computacionais disponíveis, é possível utilizar processos de simulação para mostrar que, para um "n" grande, os resultados das estimativas de probabilidades podem atender aos critérios de convergência e terem uma boa precisão (FISCHBEIN, 1987).

Essas perspectivas são algumas das que podem ser utilizadas para explicar e resolver problemas probabilísticos. A utilização de modelos probabilísticos como instrumentos explicativos e de controle é, hoje, um procedimento cada vez mais generalizado, tanto no mundo científico, quanto no das ciências humanas e políticas.

A definição de medida de probabilidade, comumente conhecida como clássica ou de Laplace, é incompleta e impõe forte restrição às suas aplicações, devido à noção de equiprobabilidade e de espaço finito. Outra objeção é seu caráter circular: a probabilidade é por ela definida, em termos de alternativa equiprovável, mas como se pode saber que as probabilidades são iguais, antes de se definir o que é probabilidade? (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1996).

O conceito de probabilidade frequentista, ou empírico, emerge do processo de experimentação. Segundo Godino, Batanero e Cañizares (1996), o valor da probabilidade é dado pela frequência relativa de sucessos obtidos na realização de um experimento. Dessa forma, as probabilidades são baseadas em resultados de experiências realizadas, o que é denominado probabilidade a *posteriori,* pois a probabilidade de um evento é estimada depois de os experimentos haverem sido realizados.

Cabe destacar que, um aspecto importante na elaboração das atividades no livro paradidático foi a preocupação em não limitar o contexto às situações equiprováveis, pois, pode conduzir certas concepções errôneas, tais como: "se existem dois resultados possíveis, então, a ocorrência de cada um deles é 1/2" (COUTINHO, 2001).

Coutinho (2007, p. 66) diz que a dualidade para a apreensão da noção de probabilidade, devida à coexistência dos enfoques clássico (laplaciano) e frequentista, pode gerar obstáculos de ordem epistemológica e didática no processo da formação do conceito de probabilidade em situação escola, sendo fundamental a identificação do contexto, no qual o acaso é identificado, para que se possa construir o significado do valor de probabilidade atribuído ao evento em estudo.

Assim, em nosso estudo, a probabilidade clássica e a frequentista são tomadas como categorias essenciais para a elaboração de atividades que são propostas no livro paradidático.

2.4. A utilização de jogos no ensino de Probabilidade

Partindo dos resultados das pesquisas de Coutinho (1994, 2001) e Silva (2002), acrescentamos a utilização de jogos na construção do livro paradidático que possibilite o primeiro contato com a probabilidade, por uma maneira lúdica e, assim, instigá-los a investigar propriedades matemáticas envolvidas no desenvolvimento dos jogos.

Para Grando (1995), o jogo representa uma situação-problema simulada e determinada por regras, em que o indivíduo busca, a todo o momento, elaborando estratégias e reestruturando-as, vencer o jogo, ou seja, resolver o problema. Esse dinamismo, característico do jogo, é o que possibilita identificá-lo no contexto da resolução de problemas.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (1998), os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que esses sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Além disso, propicia a simulação de situações-problema, que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações se sucedem rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas.

Souza (2002) expressa a importância de se trabalhar com o jogo na sala de aula, dizendo que essa proposta, no processo ensino-aprendizagem da Matemática, implica numa opção didático-metodológica por parte do professor, vinculada às suas concepções de educação, de Matemática, de mundo, pois, é a partir de tais concepções que se definem normas, maneiras e objetivos a serem trabalhados, coerentes com a metodologia de ensino adotada pelo professor.

Segundo Kamii e Joseph (1992), os jogos podem ser usados na Educação Matemática para estimular e desenvolver a habilidade de pensar de forma independente, contribuindo para o processo de construção de conhecimento lógico matemático.

De acordo com Cabral (2006), os jogos vêm ganhando espaço nas escolas, numa tentativa de trazer o lúdico para a sala de aula. A maioria dos professores utiliza o jogo para o ensino e a aprendizagem, na perspectiva de tornar as aulas mais agradáveis e, com isso, usar como estratégia, estimular o raciocínio do aluno no enfrentamento de situações relacionadas ao seu cotidiano - pois o jogo, por si só, fornece, através de suas regras, o processo de companheirismo, consciência de grupo, autoconfiança e autoestima. Com isso, o jogo contribui, não só com as habilidades matemáticas, como também colabora na aquisição de atitude, já que a sociedade vai exigir do aluno posições de criticidade em relação às situações do seu cotidiano.

Conforme Bianchini, Gerhardt e Dullius (2010), ensinar por meio de jogos, é um caminho para o educador desenvolver aulas mais interessantes, descontraídas e dinâmicas, podendo competir, em iguais condições, com os inúmeros recursos a que o aluno tem acesso fora da escola, despertando ou estimulando sua vontade de frequentar com assiduidade a sala de aula, e incentivando seu envolvimento nas atividades, sendo agente no processo de ensino e aprendizado, já que aprende e se diverte, simultaneamente.

Assim, várias das ações utilizadas no livro paradidático foram elaboradas, tomando como base alguns jogos que, a nosso ver, são importantes para agregar motivação às atividades propostas e também poder relacionar os conteúdos probabilísticos a serem abordados.

Coutinho (2007) destaca que alguns povos da antiguidade, como os mesopotâmios e os egípcios, estabeleciam associações entre a noção de acaso com intervenções divinas ou sobrenaturais. Profetisas se utilizavam de práticas para fazer previsões do futuro, ou até mesmo explicar a vontade dos deuses. Esse tipo de comportamento existe até hoje em algumas culturas, que fazem uso da vidência. Partindo dessa relação com o divino, os jogos de astrágalos ou jogos com dados produzidos em barro cozido, apesar de serem utilizados para lazer, estavam inseridos em um contexto místico ou psicológico do acaso.

O astrágalo, Figura 4 - utilizado em civilizações egípcias, gregas e romanas - provém da pata de animais dotados de cascos, tais como veados, bezerros, ovelhas ou cabras, e são chamados de *tali* (latim) ou *astragali* (grego). Esse osso tem quatro longas faces planas totalmente diferentes; as únicas em que ele pousaria quando jogado, e duas pequenas extremidades arredondadas. Das quatro faces planas, duas são estreitas e planas, e duas são largas, com um lado largo ligeiramente convexo e outro ligeiramente côncavo. Como cada lado do astrágalo tinha um aspecto diferente, não era necessário marcar os lados. Quando eram marcados com pontos, os lados correspondiam a 1, 3, 4 e 6 (BENNETT, 2003, p. 22-23).

Figura 4 – Astrágalo.

Hurtado e Costa (1999) afirma que, de acordo com a abordagem frequentista, o uso de jogos na sala de aula torna-se uma ferramenta muito útil para familiarizar o aluno com o mundo probabilístico, uma vez que experiências com materiais como moedas, dados, baralho, urnas e bolas, e mesmo jogos de loteria, roleta e dardos, propiciam uma correspondência direta do ensino com o cotidiano do mesmo. Dificuldades encontradas nesse tipo de experiência podem ajudar a transpor obstáculos de ordem epistemológica, que surgem na construção desse conhecimento.

Quanto ao estudo da incerteza presente na realização de um jogo, Lopes (2008) chama a atenção para este fato:

> [...] os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e aleatoriedade, que aparecem nas nossas vidas diariamente, particularmente na mídia. Outras ideias importantes incluem a compreensão de que probabilidade é uma medida de incerteza, que modelos são úteis para simular eventos para estimar probabilidades e que, algumas vezes, as nossas intuições são incorretas e podem nos levar à conclusão errada no que se refere à probabilidade e eventos de chance (LOPES, 2008, p. 70).

De acordo com Bennett (2003), desde o Império Romano, os jogos com três dados faziam parte do cotidiano das pessoas, porém, a primeira enumeração correta foi realizada somente entre 1220 e 1250, por Richard de Fournival, em um poema intitulado *De Vetula.* De Fournival fez a descrição das 216 maneiras como três dados podem cair. Elaborou uma tabela, sintetizando as possíveis somas de 3 a 18 e a quantidade de sequências que podem resultar nesses resultados.

Corroborando com os estudos de Bennett (2003), Miguel, Coutinho e Almouloud (2006) explicam que, com o desenvolvimento do raciocínio combinatório, houve a exploração de outra visão em relação ao cálculo do número de chances, e o primeiro documento que mostra isso é um poema denominado *De Vetula,* escrito por Richard de Fournival, em 1250.

Já no século XX, Jules Henri Poincaré (1854-1912), em sua obra *Cálculo de probabilidades* (1912), apresenta uma evolução qualitativa na interpretação do acaso, ampliando o seu conceito, como podemos observar no trecho abaixo:

> É necessário que o acaso seja outra coisa que não o nome que damos à nossa ignorância, que entre os fenômenos dos quais ignoramos as causas, devemos distinguir os fenômenos fortuitos, sobre os quais o cálculo de probabilidades nos informará provisoriamente, daqueles que não são fortuitos, e sobre os quais nada podemos dizer, enquanto não determinarmos as leis que o regem (POINCARÉ, 1912, p. 3, apud COUTINHO, 2007, p. 6).

A partir dessas contribuições, podemos enfocar o acaso por um viés determinista que, segundo Coutinho (2007), é "o resultado de um processo aleatório devido a uma complexidade de causas imperceptíveis, complexidade essa, que escapa à compreensão do homem e seus instrumentos". O gerador de acaso (dados, moedas etc.) é um bom exemplo em que seus resultados possíveis são considerados nesse contexto.

3. A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO – TAD

Adotamos como quadro teórico a Teoria Antropológica do Didático – TAD, de Chevallard (1996, 2001), na organização praxeológica didática e matemática.

Comungamos com Almouloud (2007), ao evidenciar a importante contribuição da TAD para a Didática da Matemática, pois, além de ser uma ampliação do conceito de transposição didática, insere a didática no campo da antropologia, quando olha o estudo das organizações praxeológicas didáticas pensadas para o ensino, também, ao estudar as condições de possibilidades e funcionamento de sistemas didáticos, compreendidos como relações entre sujeito – instituição – saber (BROUSSEAU, 2006).

A TAD, segundo Chevallard (1999), estuda o homem perante o saber matemático, e mais estritamente, perante situações matemáticas. O aspecto antropológico da TAD surge quando localizamos a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais.

Segundo Sierra (2006), na TAD parte do princípio de que o saber matemático se constrói como resposta ao estudo de questões problemáticas, aparecendo assim como o resultado de um processo de estudo. Esse processo, enquanto atividade que conduz a (re)construção de saber matemático, forma parte da atividade matemática. Esse princípio permite considerar as matemáticas como construções e atividades institucionais, incluindo todas as conotações culturais e sociais que esses podem significar. Em particular, permite tomar em consideração o relativismo institucional do conhecimento matemático, assim como o componente material da atividade.

Dentro desse ponto de vista geral do conhecimento matemático, Chevallard (1999) propõe a noção de Organização Praxeológica Matemática e Praxeologia Matemática (ou simplesmente, Organização Matemática) como modelo mais adequado e relevante para descrever o conhecimento matemático, cuja forma mais simples pode ser descrita em dois níveis. O primeiro nível é o que remete à prática que se realiza, a práxis, ou saber-fazer - isto é - os tipos de problemas e tarefas que se estudam e as técnicas que se constroem e utilizam para abordá-los. O segundo nível recorre à parte descritiva, organizadora e justificadora da atividade matemática, chamado *logos* ou, simplesmente, saber. Inclui as descrições e explicações que se elaboram para fazer inteligíveis as técnicas, isto é, o discurso tecnológico (o *logos* sobre a técnica e, em última instância, o fundamento da produção de novas técnicas) e a teoria que dá sentido aos problemas apresentados - e permite fundamentar e interpretar as descrições e demonstrações tecnológicas, a modo de justificativas de segundo nível (a teoria pode interpretar-se, portanto, como uma tecnologia da tecnologia). Esse nível nem sempre está presente no exercício das práticas escolares, por restrições decorrentes de outros níveis de codeterminação didática, como da sociedade, da pedagogia ou da cultura, por exemplo, por estarem suficientemente naturalizadas.

Assim, segundo Silva *et. al.* (2013), a TAD define a didática como a ciência das condições e restrições da difusão social de praxeologias. Dessa forma, a didática das matemáticas se torna a ciência das condições e restrições da difusão social de praxeologias matemáticas.

Segundo Diogo, Osório e Silva (2007), a Teoria Antropológica do Didático (TAD) foi desenvolvida, inicialmente, no âmbito da didática da Matemática, e Chevallard (1999) admite como postulado básico a existência de um modelo único, a praxeologia, segundo o qual, se pode descrever toda atividade humana que seja regularmente realizada. Desta forma, a TAD pode ser estendida a outras atividades humanas e áreas do conhecimento como a Estatística, a Probabilidade, a Análise Combinatória, entre outras. E ainda elaborar um livro, determinar a probabilidade de um evento, construir uma atividade com o enfoque frequentista ou clássico - essas são atividades humanas, tarefas que devem ser realizadas.

Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 251):

> Na atividade matemática, como em qualquer outra atividade, existem duas partes, que não podem viver uma sem a outra. De um lado estão as tarefas e as técnicas e, de outro, as tecnologias e teorias. A primeira parte é o que podemos chamar de “prática”, ou em grego, a práxis. A segunda é composta por elementos que permitem justificar e entender o que é feito, é o âmbito do discurso fundamentado – implícito ou explícito – sobre a prática, que os gregos chamam de

logos.

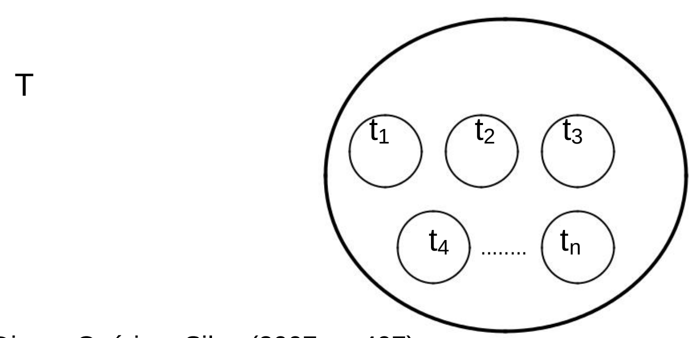
Esses dois blocos são interdependentes e inseparáveis, ou seja, o bloco da “prática” (p*ráxis)* e o bloco do “saber” (*logos)* que constituem a praxeologia (CHEVALLARD; BOSCH; GÁSCON, 2001).

Segundo Chevallard (1999), para que uma praxeologia seja especificada é necessária a compreensão de alguns conceitos fundamentais: tipo de tarefa, tarefa, técnica, tecnologia e teoria.

Assim, na maioria dos casos, determinado tipo de tarefa (T) e suas tarefas (t) correspondentes se expressam por um verbo e seu objeto (CHEVALLARD, 1999).

Diogo, Osório e Silva (2007) destacam que, apesar de os conceitos de tipo de tarefa (T) e de tarefas (t) estarem intimamente relacionados, eles são diferentes. O tipo de tarefa (T) pode ser considerado uma classe de tarefas que engloba várias tarefas com características comuns, por exemplo, A Tarefa (T) <u>Somar</u> números inteiros, composta pelas seguintes tarefas (t): a) tarefa 1: <u>somar</u> 1 + 2; b) tarefa 2: <u>somar</u> 40 + 50; c) tarefa 3: <u>somar</u> 4 + 2 + 6;

A relação entre o tipo de tarefa (T) e suas respectivas tarefas (t_1, t_2, t_3, t_4, ..., t_n) pode ser mais facilmente compreendida por meio de uma representação gráfica, como representado na Figura 5.



Fonte: Diogo, Osório e Silva (2007, p. 407).

Figura 5 - Representação gráfica da relação entre um tipo de tarefa (T) e suas tarefas (t).

Em um trabalho de pesquisa é fundamental que os tipos de tarefa (T) sejam precisamente definidos, a fim de evitar que uma dada tarefa (t) possa ser enquadrada em mais de um tipo de tarefa (T) e garantir a existência de pelo menos uma maneira de realizar as tarefas pertencentes a um determinado tipo de tarefa (T). A essa maneira de realizar uma tarefa, pertencente a um dado tipo de tarefa (T), dá-se o nome de técnica (τ). Esse conjunto, formado pelo tipo de tarefa (T) e a correspondente técnica (τ) corresponde ao bloco da “prática”, à *práxis*, da praxeologia (DIOGO; OSÓRIO; SILVA, 2007, p. 407).

Segundo Chevallard (1999), a técnica (τ) é relativa ao tipo de tarefa (T) e não apenas a uma tarefa específica.

Com relação ao bloco *logos*, o primeiro componente é um discurso racional, denominado tecnologia (θ) que, segundo Chevallard (1999), tem como principais objetivos ou funções: (1) Justificação: garantir que uma dada técnica (τ) permita realizar as tarefas $t \in T$; (2) Explicação: tornar inteligível a técnica (τ), expondo porque a técnica (τ) é correta; (3) Produção de novas técnicas (τ): a partir de tecnologias que estão associadas a poucas ou a nenhuma técnica (τ).

O outro componente do *logos* é a teoria (Θ), que representa um nível superior de justificação, explicação e produção, e desempenha, com relação à tecnologia (θ), o mesmo papel que essa tem com relação à técnica (τ) (CHEVALLARD, 1999) - podendo ser encarada como a tecnologia da tecnologia (GASCÓN, 2003, p. 16). Unindo-se os componentes da *práxis* e do *logos* obtém-se a praxeologia - geralmente representada pela notação $[T, \tau, \theta, \Theta]$. As praxeologias também são denominadas *organizações*. Por exemplo, uma praxeologia matemática - que é a modelagem de uma atividade matemática, segundo a TAD, também é conhecido como organização matemática (OM) (CHEVALLARD; BOSCH; GÁSCON, 2001). Essa denominação também é adotada neste trabalho, devido à disseminação de seu uso (CHEVALLARD, 1999; GASCÓN, 2003; CHEVALLARD; BOSCH; GÁSCON, 2001).

Bosch e Chevallard (1999, p.84) restringem a noção de tarefa em Matemática ao distinguir a atividade matemática das outras atividades humanas, ou seja, diante de uma tarefa, é preciso saber como resolvê-la. O “como resolver a tarefa” é o motor gerador de uma praxeologia, ou seja, é preciso ter (ou construir) uma técnica, que deve ser justificada por uma tecnologia, a qual, por sua vez, precisa ser justificada por uma teoria. A palavra técnica será utilizada como processo estruturado e metódico, às vezes algorítmico, que é um caso muito particular de técnica.

Chevallard (1999, p. 232) considera que dado um tema de estudo, deve-se considerar inicialmente a realidade matemática que pode ser construída, que será denominada de praxeologia matemática ou organização matemática e, na sequência, considerar a maneira pela qual essa realidade pode ser estudada, que será denominada organização didática.

Bosch e Chevallard (1999) enfatizam que toda prática institucional (órgão governamental, uma escola, uma classe, um curso, a família, a sociedade, os programas de ensino), pode ser analisada de diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, num sistema de tarefas relativamente bem circunscritas, que se desenvolvem no fluxo da prática; a realização de toda tarefa resulta colocar em ação uma técnica; as condições e exigências que permitem a produção e a utilização de tarefas e técnicas nas instituições implicam a existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas, que se chama tecnologia da técnica. Toda tecnologia, por sua vez, precisa de uma justificativa, que se denomina teoria da técnica.

Nagamine *et al.* (2011) reafirmam as ideias apresentadas, expandindo-as para aplicações específicas da Educação Estatística. Para eles, a TAD instrumentaliza para construir uma análise, *a priori,* de um problema estatístico, pois:

> Essa abordagem é um modelo para a análise da ação humana institucional, descrita em termos das quatro noções: Tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria, sendo que a Tarefa (T) contém, ao menos, uma tarefa (t). A Técnica (τ), que é uma maneira de fazer ou realizar um tipo de tarefa de T. A tecnologia (θ), um discurso racional (o *logos*), cujo objetivo é justificar e esclarecer o uso da técnica τ, garantindo que esta permita realizar as tarefas do tipo T. A quarta e última noção, denominada Teoria e representada pela letra Θ, tem como função justificar e tornar compreensível uma tecnologia θ. Dessa forma podemos afirmar que produzir, ensinar e aprender matemática são ações humanas institucionais que podem descrever-se como o modelo praxeológico. Nesse sentido, a

> organização relativa às atividades matemáticas é uma organização matemática. Se o objeto de estudo é um objeto estatístico, então podemos falar de uma organização estatística. (NAGAMINE et. al, 2011, p.455, grifo nosso).

E concluem, aplicando-a a Matemática e a Estatística:

> Dessa forma podemos afirmar que produzir, ensinar e aprender matemática são ações humanas institucionais que podem descrever-se como o modelo praxeológico. Nesse sentido, a organização relativa às atividades matemáticas é uma organização matemática. Se o objeto de estudo é um objeto estatístico, então podemos falar de uma organização estatística. (NAGAMINE et. al., 2011, p.455, grifo nosso).

Bosch, Fonseca e Gascón (2004) propõem as seguintes condições para que uma organização matemática local seja relativamente completa:

1. Integração dos tipos de tarefas;
2. Diferentes técnicas, ou variações de uma mesma técnica para realizar alguns tipos de tarefas;
3. Independência dos ostensivos que integram as técnicas;
4. Existência de tarefas e de técnicas “inversas”;
5. Um discurso tecnológico para a interpretação do funcionamento das técnicas e de seu resultado;
6. Existência de tarefas abertas - questões abertas, isto é, tipos de tarefas para uma situação onde os dados e as incógnitas não estão totalmente pré-fixados.

Segundo Bosch, Fonseca e Gascón (2004), os aspectos de rigidez das organizações matemáticas pontuais são:

1. Dependência da nomenclatura associada a uma técnica;
2. A dissociação entre aplicar uma técnica e interpretar o resultado, devido à escassa incidência do bloco tecnológico/teórico;
3. A ausência de duas técnicas para realizar uma mesma tarefa;

4. De técnicas para realizar uma tarefa inversa e de situações abertas.

No Brasil, observamos alguns estudos focados na Teoria Antropológica do Didático, como aqueles focados na avaliação de livros didáticos no ensino de conteúdos matemáticos (LOPES NETA; SILVA, 2014 e BARBOSA; LIMA, 2014; BARBOSA, 2014) e de Nagamine *et al*. (2011), que foca-se na avaliação de uma sequência didática para o ensino de Probabilidade.

Nagamine *et al.* (2011), através da sequência didática “Passeios Aleatórios da Mônica”, exploraram o conhecimento dos conceitos básicos da teoria de probabilidades que foi organizada em quatro sessões: verificar as concepções prévias dos sujeitos em relação à probabilidade; o impacto da experimentação aleatória e a estimativa de probabilidade pela frequência relativa; recorrer à modelagem matemática, utilizando a árvore de possibilidades, que fornece a probabilidade teórica ou laplaciana; solicitar a tomada de decisão diante destas três formas de atribuir probabilidades. O processo de validação da eficácia da sequência didática, propostas no Ambiente Virtual de Aprendizagem de Apoio ao Letramento Estatístico para a Educação Básica - AVALE-EB, foi realizado utilizando-se diversos arcabouços teórico-metodológicos, visando seu aperfeiçoamento e adoção autônoma pelos professores, nas escolas, sendo que um desses arcabouços é a Teoria Antropológica do Didático – TAD de Chevallard (1992).

4. ANÁLISE DA ELABORAÇÃO DO LIVRO PARADIDÁTICO "JOGANDO NA OLIMPÍADA NACIONAL DE PROBABILIDADE" SOBRE O ENSINO DE PROBABILIDADE PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

O planejamento e as ideias iniciais para a construção do livro paradidático tiveram início nas reuniões do Grupo de Estudos em Educação Estatística e Matemática – GEEM ligado ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM e do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID, subprojeto Matemática – Linha de Pesquisa: Tratamento da Informação da Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM.

Assim, consideramos oportuno elaborarmos um trabalho que fornecesse subsídios para a implementação de novas práticas pedagógicas, a partir do estudo e discussão de textos alternativos, como os paradidáticos, para o Ensino de Probabilidade, para os anos finais do Ensino Fundamental.

4.1. Definição do tema

Inicialmente foi escolhido o conteúdo de Probabilidade, para os anos finais do Ensino Fundamental, como tema principal do paradidático; ao concordarmos com Rezende e Ferreira (2011), ao afirmar que o ensino de Probabilidade na Educação Básica muitas vezes é deixado de lado e, quando ocorre, ainda é feito com recurso da memorização de conteúdos e fórmulas.

Resultados de loterias, de campeonatos de futebol ou de exames médicos; investimento em bolsas de valores, previsão do tempo, entre outros, são eventos que ocorrem ao nosso redor e não podem ser previstos antecipadamente com precisão absoluta; são situações em que há possibilidades e chances de ocorrência, daí o interesse em abordar o conteúdo de Probabilidade.

Nos PCN, as noções de Probabilidade são propostas, desde o Primeiro Ciclo do Ensino Fundamental, e têm como finalidade fazer o aluno compreender as diversas situações de acaso e incerteza com as quais se depara em seu cotidiano (BRASIL, 1997).

Lopes (1998, p. 40) declara que é “necessário desenvolver uma prática pedagógica na qual sejam propostas situações em que os estudantes realizem atividades, observando e construindo os eventos possíveis, através de experimentação concreta”. Recomenda ainda o ensino das noções probabilísticas, baseado em uma metodologia heurística e ativa, através da proposição de problemas concretos e da realização de experimentos reais ou simulados.

Definiram-se, então, os tópicos que seriam abordados no paradidático, de acordo com o Conteúdo Básico Comum – CBC (2008), Matemática – do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, do estado de Minas Gerais, e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), 1998, Matemática – Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental, sendo eles: Ideia de Aleatoriedade; Experimento Aleatório e Determinístico; Espaço Amostral e Evento.

Após a definição do tema, pensou-se em como elaborar a história principal do livro, abordando os tópicos citados acima. Teve-se então, a ideia de desenvolver a história, tomando como base a realização de uma Olimpíada de Probabilidade, na qual alunos de várias escolas competiriam, passando por várias etapas, sendo elas: municipal, estadual e, finalmente, nacional, em que se declararia o vencedor da Olimpíada.

A ideia surgiu a partir do conhecimento da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), que é uma realização do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, e tem como objetivo estimular o estudo da matemática. Dessa forma, pensou-se que a realização de uma Olimpíada de Probabilidade poderia também estimular o estudo da Probabilidade e motivar os alunos a aprenderem mais sobre esse importante conteúdo para sua formação.

Para que o conhecimento seja construído, é fundamental que se proponha um contexto onde haja um sujeito que vai receber as informações e um sujeito que vai transmiti-las.

Pensando nisso, criaram-se personagens fictícios, que assumissem esses papeis, como exemplo, para os leitores (alunos, principalmente) dos objetivos dentro das salas de aula, e do funcionamento da relação entre os envolvidos nesses momentos de aprendizado. Os nomes foram escolhidos aleatoriamente, seguindo o perfil das figuras criadas por arte finalista, que foi contratado para desenhar os personagens, a partir das características estabelecidas para cada um deles.

Em se tratando do ambiente escolar, não haveria melhor local para utilizar o paradidático proposto, não querendo inferir que não possa ser lido ou usado em outros lugares. Além disso, aperfeiçoa o objetivo final, trazendo a realidade do público leitor alvo para que se familiarizem, ainda mais, com os temas propostos.

Para que o conhecimento se dissemine, é necessário um ambiente saudável, instigante e prazeroso. Dessa forma, os alunos se sentem à vontade para expressarem seus sentimentos, suas vontades e dificuldades. Os professores são agentes principais na promoção desse tipo de ambiente, em que utilizam, como estratégia, suas lideranças, para que se tenha, como produto final, a compreensão total de tudo que pretendem ensinar.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) enfatizam que o ensino da Probabilidade, juntamente com a Estatística, tem por objetivo desenvolver no aluno posicionamento crítico sobre as informações provenientes de estudos estatísticos, bem como a capacidade de fazer previsões e tomar decisões, à luz de informações estatísticas, destacando que seu estudo promove a compreensão de acontecimentos do cotidiano, que são de natureza aleatória; devendo a escola promover um ensino em que situações sejam desenvolvidas, objetivando a realização de experiências e observação de experimentos.

No estudo de Dalcin (2002) é feita uma análise de livros paradidáticos no mercado editorial brasileiro e foram identificadas três categorias de abordagem dos conteúdos matemáticos presentes: narrativas ficcionais, narrativas históricas e pragmáticas; cada uma delas apresentando características diferentes na forma de articular a simbologia matemática, as imagens e o texto escrito. Essas formas de articulação indicariam a presença de quatro diferentes tipos de imagens: ilustrações imbricadas, ilustrações de contextualização, ilustrações de visualização e ilustrações ornamentais. A análise revelou a estreita relação existente entre a abordagem selecionada e a articulação proposta entre a simbologia matemática, as imagens e o texto escrito. Além disso, foi possível avaliar que um bom nível de articulação entre esses três elementos pode contribuir de maneira significativa para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Ainda segundo Dalcin (2002), quando diz que em uma história de ficção os elementos ou conteúdos vão aparecendo, e tendo como público, na pesquisa, adolescentes do 9º ano, cuja faixa etária é entre 13 e 15 anos, a opção pela narrativa ficcional na escrita do paradidático foi movida pelo desafio de, além de formar leitores na atual evolução tecnológica, despertar o interesse pelo conteúdo de Probabilidade. Acredita-se que, para atrair esse público, é interessante que a leitura aconteça na forma de trazer prazer, e os conteúdos probabilísticos no material foram aparecendo no decorrer da história.

A narrativa ficcional, através de sua arquitetura textual, procura seduzir o leitor, vinculando a experiência a um tempo, ou sequência temporal. Entretanto, ao longo da vida cotidiana das pessoas,

> é a experiência de narrar que está em vias de extinção. São cada vez mais raras as pessoas que sabem narrar devidamente. Quando se pede num grupo que alguém narre alguma coisa, o embaraço se generaliza. É como se estivéssemos privados de uma faculdade que nos parecia segura e inalienável: a faculdade de trocar experiências (BENJAMIM, 1996, P. 198).

De acordo com Adam e Revaz (1997), existem duas ordens de transformações da situação inicial que, por mais equilibrada que possa parecer, já contém algum grau de tensão. Assim, no desfecho narrativo, ou as transformações terão suprimido a tensão inicial, desproblematizando-a, ou não a terão eliminado, resultando em um final problemático. Ou seja, uma narrativa, adequadamente estruturada, dificilmente se manterá em estado de equilíbrio do início ao desenlace: o momento (tempo) final evidenciará as transformações sofridas em relação ao momento (tempo) inicial.

Uma tendência mundial enfatiza que o ensino de Matemática deve ser voltado também para a compreensão e intervenção social. Segundo Mandarino (2010), as pesquisas sociais, econômicas, de saúde, educacionais, sobre segurança e violência etc., estão presentes em conversas do dia a dia e influenciam muitas decisões políticas, governamentais e até pessoais.

Ainda segundo Mandarino (2010), desde os primeiros anos de escolarização, os alunos podem lidar, em jogos e brincadeiras, com princípios de contagem e estabelecer resultados possíveis, o que, por sua vez, abre caminho para problemas simples e curiosos de probabilidades, ou de “chance” de ocorrência de um resultado.

Assim, num primeiro momento, foram selecionados livros didáticos de Matemática para o 9º ano do Ensino Fundamental, recursos vistos pela cultura escolar brasileira como uma ferramenta, senão a única para orientar o ensino para os professores, capítulos que abordassem o ensino de Probabilidade. Foram escolhidos oito livros didáticos, todos distribuídos anualmente pelo Ministério da Educação, referente ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), por intermédio do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). Tomou-se o cuidado na seleção dos anos de publicação, entre 2006 a 2014.

Os principais elementos que desenhariam essa cultura escolar seriam os atores (famílias, professores, gestores e alunos), os discursos e as linguagens (modos de conversação e comunicação), as instituições (organização escolar e o sistema educativo) e as práticas (pautas de comportamento que chegam a se consolidar durante um tempo).

Diante dessa situação, nova e complexa, questionou-se: como organizar o conteúdo? Qual recurso usar? Como e onde abordar o tema? Como estabelecer relações com outros temas?

Partiu-se, então, para a procura e leitura de livros paradidáticos de temas variados, inclusive aqueles que abordassem o conteúdo de Probabilidade para o Ensino Fundamental. Encontrou-se, no caso do ensino de Probabilidade no mercado editorial brasileiro, a maioria traduções de autores estrangeiros, o que indica não haver autor nacional que produza livros paradidáticos para o Ensino de Probabilidade.

Assim, encontraram-se livros classificados como de ficção que, mesmo sem serem considerados paradidáticos, podem ser utilizados como material de apoio ao ensino de Probabilidade:

(1) “As Novas Aventuras de Sherlock Holmes - Casos de Lógica, Matemática e

Probabilidade”, Bruce (2003);
(2) “O Segredo da Nuvem”, Brandão (2006);
(3) “O Andar do Bêbado”, Mlodinow (2009);
(4) “Uma senhora toma chá”, Salsburg (2009);
(5) “A Probabilidade Estatística do Amor à Primeira Vista”, Smith (2013).

O livro 1, de Bruce (2003), apresenta o mestre dos detetives londrinos Sherlock Holmes e seu fiel escudeiro Watson, revividos pelo físico Colin Bruce, autor do livro, em pequenos e divertidos casos, nos quais criminosos e espertalhões têm seus planos frustrados com a ajuda da Estatística e da Teoria dos Jogos. Por meio de seus profundos conhecimentos de probabilidade, estatística e teorias dos jogos, Sherlock Holmes resolve crimes e protege inocentes. Mostra como situações cotidianas que nos cercam, como a oferta irresistível de assinar uma revista científica ou a análise contábil de uma empresa, exigem muita atenção e algum conhecimento, para evitar decisões erradas. O livro, em nossa avaliação, é voltado para alunos do Ensino Médio e Superior.

O livro 2, de Brandão (2006), apresenta uma história em que o personagem principal vê sua vida cotidiana e monótona desmoronar porque surge, de uma hora para outra, uma situação absurda e inexplicável, ou seja; uma pequena nuvem apareceu em cima de sua cabeça, partindo do princípio que se achava dentro de um episódio sem explicação. As pessoas passaram a fugir dele, por não poder explicar o que estava ocorrendo, tornando-se agressivas, a água molhando sua roupa. Não há nenhuma probabilidade de uma nuvem aparecer sobre a cabeça de uma pessoa. No entanto, aconteceu. Logo com ele, que levava uma vida calma, sem sobressaltos? A partir desse fato incomum, a sua vida transformou-se em um grande tumulto. Desvendar os enigmas dessa narrativa é um grande exercício de criatividade. Livro próprio para crianças, a partir dos 10 anos.

O livro 3, de Mlodinow (2009), apresenta, na visão de um físico, porque as pessoas têm tanta dificuldade em compreender e aceitar o aleatório, apesar de ele controlar uma boa parte de suas vidas. Teixeira (2009) diz que, para escapar de uma sequência linear de faixas nos discos e CDs tradicionais, o *iPod Shuffle*, por exemplo, oferece ao usuário a oportunidade de ouvir sua música em ordem aleatória. Em suas primeiras versões, duas canções do mesmo artista, às vezes, eram tocadas uma depois da outra, e acontecia até de, a mesma música ser tocada duas vezes. Repetições desse tipo são de esperar em uma série determinada pelo acaso, da mesma forma como não é impossível que o mesmo número apareça em dois lances de dados consecutivos. Os usuários do *iPod*, no entanto, reclamaram. Sentiram que suas músicas não eram “embaralhadas” adequadamente. A *Apple*, então, reprogramou o aparelho para eliminar repetições. No dizer de Steve Jobs, presidente da companhia, a função de embaralhamento passou a ser “menos aleatória, para parecer mais aleatória”.

Ainda segundo Teixeira (2009), “O Andar do Bêbado” foi publicado nos Estados Unidos, em meados de 2008, pouco antes de a crise econômica mostrar suas garras. Não haveria momento mais oportuno. Os fatos confirmaram a mensagem básica de Mlodinow: os ganhos de hoje não permitem prever mais riqueza amanhã. Um comentarista esportivo americano chamado Leonard Koppett anunciou, em 1978, um método infalível para prever, no início de cada ano, se o mercado de ações cairia ou subiria: baseava-se no vencedor do campeonato de futebol americano do ano anterior. Absurdo, sem dúvida – mas, nos dezenove anos seguintes, Koppett acertou a aposta dezoito vezes. A leitura inconsequente desses fatos sugeriria apostar em qualquer coisa – ações, dados, moedas, cavalos -, pois tudo depende apenas da sorte. A moral do livro de Mlodinow é outra. Fracasso ou sucesso estão sujeitos a forças que nenhum sistema ou indivíduo pode controlar plenamente. A consciência do acaso pode ser libertadora. O livro, em nossa avaliação, é voltado para alunos do Ensino Médio e Superior.

O livro 4, de Salsburg (2009), segundo Ribeiro (2009), é interessante para o pesquisador que usa a Probabilidade e a Estatística em seu trabalho, sendo uma leitura agradável para qualquer pessoa curiosa, que esteja interessada em conhecer melhor a história das ciências modernas. O historiador da ciência mais especializado, no entanto, talvez sinta falta de explicações mais detalhadas e profundas sobre a história da Probabilidade e da Estatística, mas o livro não se destina ao historiador profissional. Foi escrito para um leitor que deseje se distrair com relatos pitorescos para a ciência no século 20. O livro, em nossa avaliação, é voltado para alunos do Ensino Médio e Superior.

O livro 5, de Smith (2013), é voltado para o público jovem adulto, mas, por ser uma história romântica, é capaz de conquistar fãs de todas as idades. O fio condutor da história parte da seguinte pergunta: Quem imaginaria que quatro minutos poderiam mudar a vida de alguém? Mas é exatamente o que acontece com Hadley, pois, presa no aeroporto em Nova York, esperando outro voo, depois de perder o seu, ela conhece Oliver, um britânico, em viagem para Londres. Enquanto conversam, eles provam que o tempo é, sim, muito, muito relativo. A história é passada em apenas 24 horas, e a história de Oliver e Hadley mostra que o amor, diferentemente das bagagens, jamais se extravia.

No Ensino de Matemática, em se tratando especificamente do ensino do conteúdo de Probabilidade, a precariedade do material didático, tido como paradidático, foi vista a partir do momento em que a procura não nos forneceu esse recurso para leitura, no sentido de subsidiar o ensino de conteúdos probabilísticos para ser usado pelos professores e alunos.

Segundo Pinto (2013), o uso dos livros paradidáticos ainda não é frequente nas salas de aula. Esse trabalho de criação de material paradidático é de suma importância para os profissionais da educação, futuros professores e para a universidade, que terá em seu acervo um material disponível no qual ainda é pouco divulgado e utilizado no meio acadêmico.

A pouca disponibilidade de materiais didáticos, direcionados para esse tema, suscitou a ideia da elaboração de um livro paradidático. Esperava-se que esse recurso pudesse veicular situações do cotidiano do aluno e que proporcionasse o estabelecimento de relações entre conceitos e procedimentos, dando posteriormente, suporte para uma análise crítica do contexto.

4.2. Criação do ambiente e personagens

Para a escolha dos personagens, tomou-se bastante cautela, pensando em representar vários grupos étnicos que compõem a sociedade, pois, segundo Rocha

(2006), é indiscutível que os livros devam refletir as contribuições dos diversos grupos étnicos para a formação da nação e cultura brasileira. Omitir essas contribuições, ou não as reconhecer na sua totalidade, é uma forma de discriminá-las.

Assim, os personagens principais que compõem a estória são: um branco, um índio, um japonês, um negro e um moreno (pele clara e cabelos escuros). Além disso, um dos personagens seria um cadeirante.

A respeito do sexo dos personagens, foi decidido que seriam duas meninas e dois meninos, porque não havia sido incluído o personagem índio. Dessa forma, após a inclusão do personagem índio, definiram-se então os personagens como três meninas e dois meninos, utilizando como critério a pesquisa realizada pela PNAD (Pesquisa Nacional de Amostra por Domicílio), divulgado em 2012[4] pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), em que no Brasil tem mais mulheres do que homens, sendo que, de uma população de 196,9 milhões de habitantes, 51,3% são mulheres e 48,7% são homens.

Foram definidos, então, os seguintes personagens principais: Kauê, Rafael, Kaori, Gabriela, Luíza e a professora Rita - personagens que foram desenhados por arte finalista e que são apresentados na Figura 6.

[4] http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/trabalhoerendimento/pnad2012/default_sintese.shtm

		
KAUÊ	GABRIELA	KAORI
		
LUIZA	RAFAEL	RITA (PROFESSORA)

Figura 6 – Imagem dos personagens criados para o livro paradidático.

A escolha do nome “Escola Sete Colinas” pelo grupo, na criação da estória do paradidático, se deu pelo fato dos integrantes residirem na cidade de Uberaba-MG e também de homenageá-la, Figura 7.

Figura 7 – Logo da Escola Sete Colinas.

A pesquisa sobre a história da cidade relata que os primeiros habitantes do arraial de Uberaba ergueram suas moradias na parte central da cidade, localizada numa depressão. O crescimento da cidade e o relevo local fizeram com que a população ocupasse e povoasse as colinas, assim chamados, no século XX, àqueles lugares que fossem de altitude maior, ou seja, locais em que se destacavam em termos de altitude em relação aos outros locais da cidade.

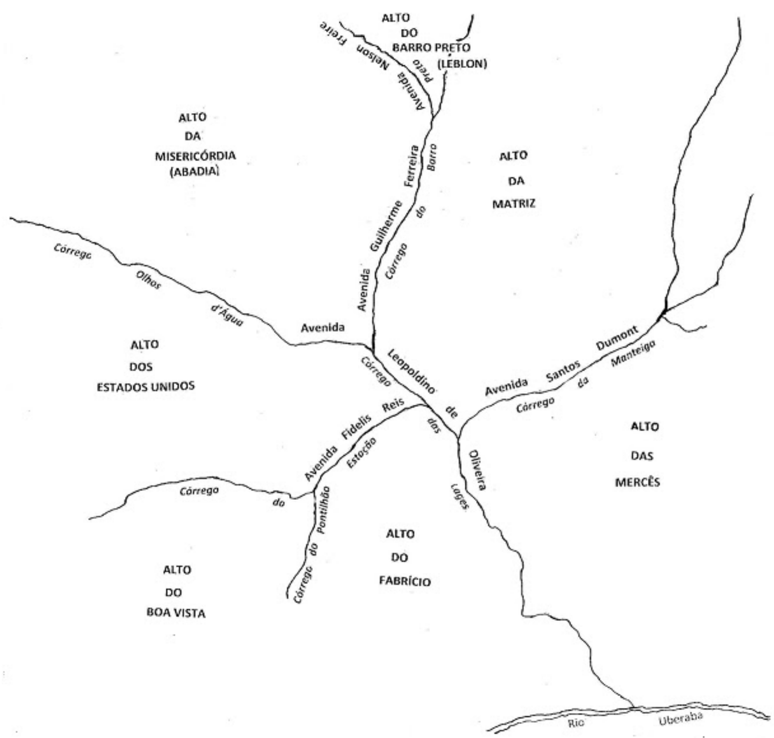
De acordo com Sampaio (1971):

> [...] os primeiros habitantes, não prevendo talvez o grande desenvolvimento que o povoado – Uberaba – em breve tempo havia de atingir e o importante papel que representaria no País, não seguiram, desde o princípio um plano retangular de arruamento para as edificações dos prédios públicos. (...) forma edificando casas, formando os quintais e chácaras, acompanhando as ondulações do terreno e serpenteando, quiçá porque assim se lhes oferecia melhor comodidade e para o uso das águas, utilizando-se mais da fertilidade do solo [...] (SAMPAIO, 1971, p. 47).

Em seu estudo topográfico, publicado no ano de 1880, Sampaio (1971) identificou a existência de 6 colinas, termo a que se refere aos pontos mais altos da cidade, onde hoje se encontram os seguintes bairros: Boa Vista, Estados Unidos, Abadia (Colina da Misericórdia), Leblon (Colina do Barro preto), São Benedito (Colina da Matriz) e Mercês (Colina Cuiabá).

Durante o século XX, Hildebrando Pontes substituiu o termo Colinas por Altos e identificou mais um Alto: o Fabrício (PONTES, 1978, p. 274). Assim, a cidade de Uberaba era referenciada como a Cidade das Sete Colinas. Com o crescimento da cidade e o surgimento de novos bairros, o título que recebia não compreendia a manutenção do mesmo conceito inicial das colinas.

A Figura 8 mostra uma observação do Vale, a partir de um Mirante muito conhecido na cidade, localizado em uma parte alta, o Mirante da Univerdecidade, onde está localizado um dos campos da Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM.



Fonte: Arquivo público de Uberaba, 08 de março de 2013.

Figura 8 – Representação das Sete Colinas ou Sete Altos da cidade de Uberaba.

Em se tratando de ambiente escolar, Figura 9, não haveria melhor local para o desenvolvimento da estória do paradidático do que o ambiente de uma escola - não querendo inferir que não possa ser lido ou usado em outros lugares. Além disso, aperfeiçoa o objetivo final, trazendo a realidade do público leitor alvo para que se familiarizem ainda mais com os temas propostos.

Figura 9 – Ambiente escolar e os personagens.

Segundo Moreira (2007), o ambiente de aprendizagem escolar é um lugar previamente organizado para promover oportunidades de aprendizagem e que se constitui, de forma única, na medida em que é socialmente construído por alunos e professores, a partir das interações que estabelecem entre si e com as demais fontes materiais e simbólicas do ambiente.

A classificação de um ambiente de aprendizagem depende de uma caracterização da prática educativa realizada. Um ambiente de aprendizagem escolar implica em uma estruturação prévia, uma intencionalidade que, por sua vez, se expressa na prática educativa. Um ambiente de aprendizagem escolar é dinâmico e ainda socialmente construído. O caráter socialmente construído de um ambiente de aprendizagem explica as diferentes percepções que estudantes e professores podem ter de um ambiente com a mesma organização (MOREIRA, 2007).

Partindo desse pressuposto, o ambiente onde se desenvolve a estória do livro paradidático acontece em um ambiente escolar de aprendizagem, tendo o professor um papel importante, tanto na preparação, quanto na organização e sistematização dessa aprendizagem.

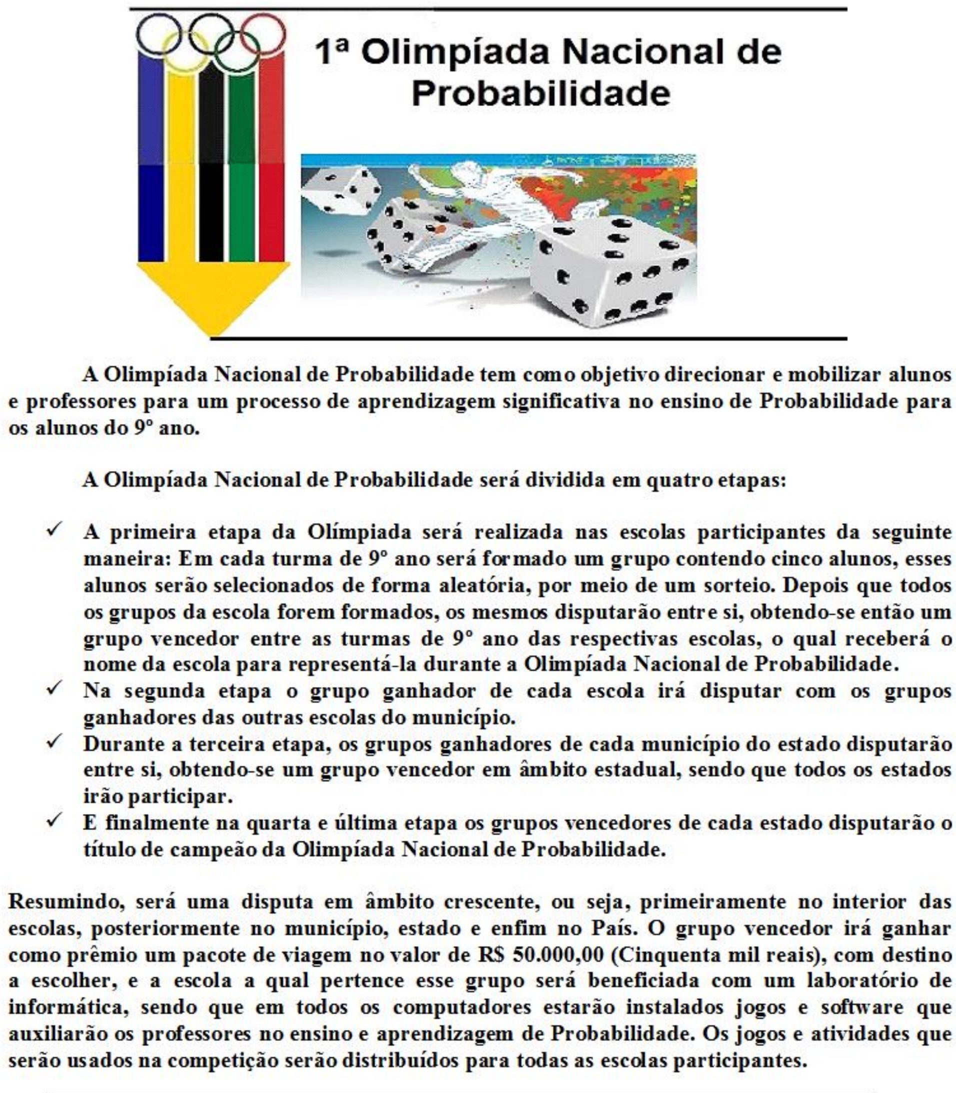
4.3. Descrição dos jogos utilizados em cada uma das etapas da Olimpíada

Acreditamos que jogos podem ser atividades excelentes para a introdução de conceitos do campo da Probabilidade, considerando que auxiliam a compreender a diferença entre situações aleatórias e determinísticas, ou a diferenciar possibilidades de probabilidade.

Dessa forma, decidiu-se utilizar jogos para trabalhar os conteúdos probabilísticos, inserindo-os como etapas das Olimpíadas em que os personagens iriam participar para se tornarem campeões nacionais.

Esses jogos são aplicados para atuar como ferramenta para a aprendizagem e introduzidos na estória, tendo como função a de fixar o conteúdo a ser trabalhado pelo professor.

Assim, o livro paradidático é dividido em capítulos, sendo que, em cada um deles será realizada uma das etapas da Olimpíada de Probabilidade. No primeiro capítulo será abordado o tema da competição, enfatizando a informação do acontecimento, cujo nome foi definido pelo grupo como 1ª Olimpíada Nacional de Probabilidade (ONP), e essa etapa ocorre dentro das escolas inscritas. Nesse capítulo do livro paradidático é apresentado um folder de divulgação da Olimpíada, que acontecerá no decorrer da estória do livro paradidático, Figura 10.



1ª Olimpíada Nacional de Probabilidade

A Olimpíada Nacional de Probabilidade tem como objetivo direcionar e mobilizar alunos e professores para um processo de aprendizagem significativa no ensino de Probabilidade para os alunos do 9º ano.

A Olimpíada Nacional de Probabilidade será dividida em quatro etapas:

- ✓ **A primeira etapa da Olímpiada será realizada nas escolas participantes da seguinte maneira: Em cada turma de 9º ano será formado um grupo contendo cinco alunos, esses alunos serão selecionados de forma aleatória, por meio de um sorteio. Depois que todos os grupos da escola forem formados, os mesmos disputarão entre si, obtendo-se então um grupo vencedor entre as turmas de 9º ano das respectivas escolas, o qual receberá o nome da escola para representá-la durante a Olimpíada Nacional de Probabilidade.**
- ✓ **Na segunda etapa o grupo ganhador de cada escola irá disputar com os grupos ganhadores das outras escolas do município.**
- ✓ **Durante a terceira etapa, os grupos ganhadores de cada município do estado disputarão entre si, obtendo-se um grupo vencedor em âmbito estadual, sendo que todos os estados irão participar.**
- ✓ **E finalmente na quarta e última etapa os grupos vencedores de cada estado disputarão o título de campeão da Olimpíada Nacional de Probabilidade.**

Resumindo, será uma disputa em âmbito crescente, ou seja, primeiramente no interior das escolas, posteriormente no município, estado e enfim no País. O grupo vencedor irá ganhar como prêmio um pacote de viagem no valor de R$ 50.000,00 (Cinquenta mil reais), com destino a escolher, e a escola a qual pertence esse grupo será beneficiada com um laboratório de informática, sendo que em todos os computadores estarão instalados jogos e software que auxiliarão os professores no ensino e aprendizagem de Probabilidade. Os jogos e atividades que serão usados na competição serão distribuídos para todas as escolas participantes.

Figura 10 – Folder de divulgação da 1ª Olimpíada Nacional de Probabilidade (ONP) do livro paradidático.

5.3.1. Primeiro Capítulo: O Jogo do Rapa

O jogo que será utilizado no primeiro capítulo é o “Jogo do Rapa”, que é um dos mais tradicionais jogos de Portugal e que traz possibilidades em trabalhar conceitos do conteúdo de Probabilidade. Esse jogo será utilizado na etapa inicial da Olimpíada, ou seja, etapa que retratará fase da Olimpíada realizada na própria “Escola Sete Colinas”.

O objetivo didático é observar que a face virada para cima, no lançamento do pião do jogo do Rapa, se constitui em um modelo probabilístico intuitivo, além do que se deve partir do princípio que o pião do RAPA é feito de material homogêneo, e a obtenção de qualquer das letras tem igual probabilidade, indicando eventos equiprováveis. Além disso, pode-se abordar o enfoque clássico de probabilidade.

Para o "Jogo do Rapa" é necessário o uso de um pequeno objeto fabricado em madeira, um pequeno pião, Figura 11, composto por quatro faces planas, com um bico em cone e uma ponta superior cilíndrica para ser rodopiada com um movimento de rotação dos dedos polegar e indicador.

Cabe destacar que, pelas dimensões da ponta (onde se produz o movimento inicial de girar) e pino (onde se produz a ação de girar) do pião do Jogo do Rapa, as únicas posições possíveis são as 4 faces planas.

Assim, o RAPA é um jogo tradicional de Portugal em que um cubo tem uma base e um topo, como a de um pião, para poder rodar livremente até cair e então mostrar uma face para cima.

Figura 11 – Pião para o “Jogo do Rapa”.

As regras do jogo são as seguintes:

Cada uma das faces está pintada com uma letra, maiúscula, portanto, com um total de quatro letras e que são: **R**, **P**, **T**, **D**, Figura 12. Assim, cada uma das letras e faces do pião representa o seguinte:

- O **R** significa "Rapa", isto é, o jogador que rodou o pião pode recolher todas as questões ou perguntas que estão no centro do local do jogo. Esta é a jogada mais desejada. O **R** permite “rapar” todas as questões ou perguntas em jogo;
- O **P** significa "Põe", em que o jogador deve colocar na mesa questões ou perguntas adicionais;
- O **D**, quer dizer "Deixa", se deve deixar tudo na mesma, sem recolher nem pôr;
- Finalmente, o **T** significa "Tira", que deve ser retirada questão ou pergunta, pelo jogador que rodopiou o pião. Por conseguinte, a jogada mais desejada.

Depois de todos os jogadores terem jogado a sua vez, o jogo é retomado, com os jogadores novamente a colocarem, cada um uma questão ou pergunta, e assim, sucessivamente, em cada ciclo. Desnecessário dizer que, se a opção **D**, "Deixa", se repetir com alguma frequência, o número de questões tende a aumentar pelo que a próxima saída do **R**, "Rapa", será deveras ambicionada e rentável.

Figura 12 – Imagem das faces do pião do Jogo do “Rapa”.

5.3.2. Segundo Capítulo: Jogo Mini Bozó

No segundo capítulo, que abordará a Olimpíada em rede municipal de ensino, o jogo a ser utilizado é o Mini-Bozó, uma simplificação de um jogo bastante popular no estado do Mato Grosso do Sul, conhecido como Bozó, proposto por Lopes (2011). O jogo Bozó faz parte da cultura local, sendo utilizado por Abe (2011) para abordar aspectos da probabilidade e retomado por Lopes (2011) em um processo de simplificação do jogo original, sendo criado o Mini Bozó.

O jogo Bozó é um jogo que envolve dados e é preciso ter estratégia e sorte. Sorte, pois serão lançados cinco dados simultaneamente, e estratégia para fazer a melhor combinação.

O jogo Mini Bozó utiliza dois dados e a mesma estrutura do jogo Bozó, e pode ser utilizado nos anos finais do Ensino Fundamental, como também no Ensino Médio - e pode subsidiar a prática de professores que ensinam conceitos básicos de Probabilidade.

O capítulo em questão abordará os conteúdos probabilísticos, focando, ainda, os primeiros conceitos de probabilidade nas concepções clássica e frequentista, em que a professora Rita (personagem que faz o papel de professor) explica, utilizando material concreto nos experimentos que realiza com os personagens alunos da estória.

A simplificação efetuada foi motivada pelo fato de que a competição acontece entre as escolas, quando cada uma é representada por um grupo de cinco alunos. Um do grupo é sorteado para representar sua escola.

O objetivo didático é utilizar o jogo para reconhecer o domínio dos alunos em relação a conceitos básicos de Probabilidade (determinação de Espaço Amostral e eventos que o compõe), o que não seria adequado através do jogo Bozó, tendo em vista que esse utiliza cinco dados e o Mini Bozó utiliza dois dados.

O objetivo, material, as regras, e o tabuleiro do jogo Mini Bozó, utilizado neste capítulo são apresentados a seguir.

O tabuleiro do jogo é apresentado na Figura 13.

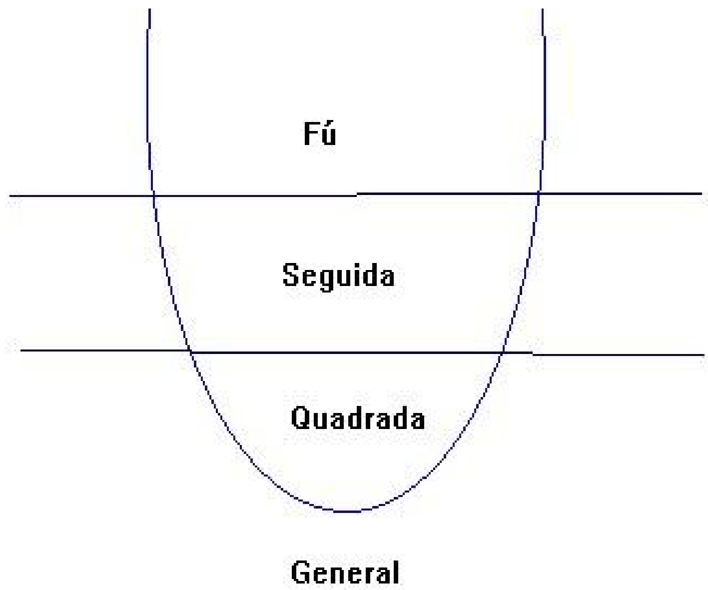


Figura 13 – Tabuleiro do Jogo Mini-Bozó.

O objetivo do jogo é que se preencha todo o tabuleiro, de modo a obter mais pontos que o(s) adversário(s). Além disso, são necessários para que se possa jogar: (1) dois dados; (2) um copo não transparente; (3) papel e caneta para registro dos pontos; e (4) um tabuleiro para cada jogador.

As regras são as seguintes:

- Pode ser disputado por duas pessoas, ou grupos, ou mais, não existindo limite no número de jogadores, mas um número excessivo de jogadores influencia no tempo do jogo;
- Em cada jogada, o jogador poderá efetuar até dois lançamentos. O primeiro lançamento é feito sempre com os dois dados. Se o jogador optar pelo segundo lançamento, poderá fazê-lo novamente com os dois dados, ou reservar um dos dados e efetuar o segundo lançamento, com apenas um dado;
- Em toda jogada, o jogador deve, obrigatoriamente, marcar uma casa do seu tabuleiro. Caso não exista possibilidade de marcação, ele deve cancelar uma

das casas ainda não marcada, fazendo um **X** sobre a casa que escolheu. Cada casa só pode ser marcada ou cancelada uma única vez;

- O jogo termina quando todos os jogadores preencherem suas casas, em seus respectivos tabuleiros. Cada jogador soma seus pontos e ganha aquele que obteve a maior pontuação.

Além das regras, existe uma pontuação para cada atividade desenvolvida, qual seja:

- **Fú:** duas faces distintas, mas não em sequência, vale a soma das faces.
- **Seguida:** duas faces distintas, em sequência, valem 20 pontos.
- **Quadrada:** duas faces iguais, mas diferentes de 6, vale 30 pontos.
- **General:** duas faces iguais a 6 valem 50 pontos.

5.3.3. Terceiro Capítulo: Jogo Batalha no Trânsito

No terceiro capítulo, quando a competição acontecerá no âmbito estadual, definiu-se que o jogo a ser utilizado consiste numa adaptação do jogo “Batalha Naval”, a fim de utilizar algo já experimentado pelo público. Neste capítulo, o conteúdo levará à compreensão pelos alunos dos conceitos de evento; a classificação quanto aos tipos de evento; e espaço amostral. O jogo é chamado “Batalha no Trânsito”, baseado no jogo “Batalha Naval”.

O objetivo didático é planejar jogadas, para que se possa explorar o caráter probabilístico do jogo, tendo-se a possibilidade de criar situações-problema para práticas pedagógicas de ensino de probabilidade. Esses problemas envolverão a determinação de espaço amostral e de eventos (abrangendo conceitos de eventos complementares, independentes e mutuamente exclusivos), bem como o cálculo de probabilidade simples.

Propõe-se, com o jogo, introduzir aos alunos a partir da elucidação de suas regras, momentos de livre experimentação. Em seguida, após familiarização com o jogo e suas regras, propõe-se aos alunos a análise probabilística das jogadas, introduzindo, gradualmente, conceitos de espaço amostral, ponto amostral, evento e, finalmente, cálculo de probabilidades. Dessa forma, o simples ato de jogar pode levar, com certa naturalidade, ao aprendizado de conceitos e cálculos probabilísticos.

É um jogo de tabuleiro com a participação de dois jogadores e tem como objetivo adivinhar em que quadrados estão as figuras do oponente. O tabuleiro consiste em um quadriculado de 10 por 10, que são enumerados na horizontal, com números de 1 a 10, e na vertical, letras do alfabeto brasileiro, de “A” a “J”, que os jogadores utilizarão figuras, simbolizando: bicicletas, motocicletas, carros, ônibus e bitrens (combinação de dois semirreboques - acoplados entre si, através de uma quinta-roda, situada na traseira do primeiro semirreboque - tracionados por um cavalo mecânico), representados na Figura 14; sendo que no jogo original são representados por tipos de navios.

As figuras que os representam devem ser dispostas aleatoriamente no tabuleiro, horizontal ou verticalmente, sem se tocarem, nem nos lados e nem nos vértices. O jogador adversário deverá tentar acertar, com indicações certeiras, dando uma localização das coordenadas, representadas por uma letra e um número.

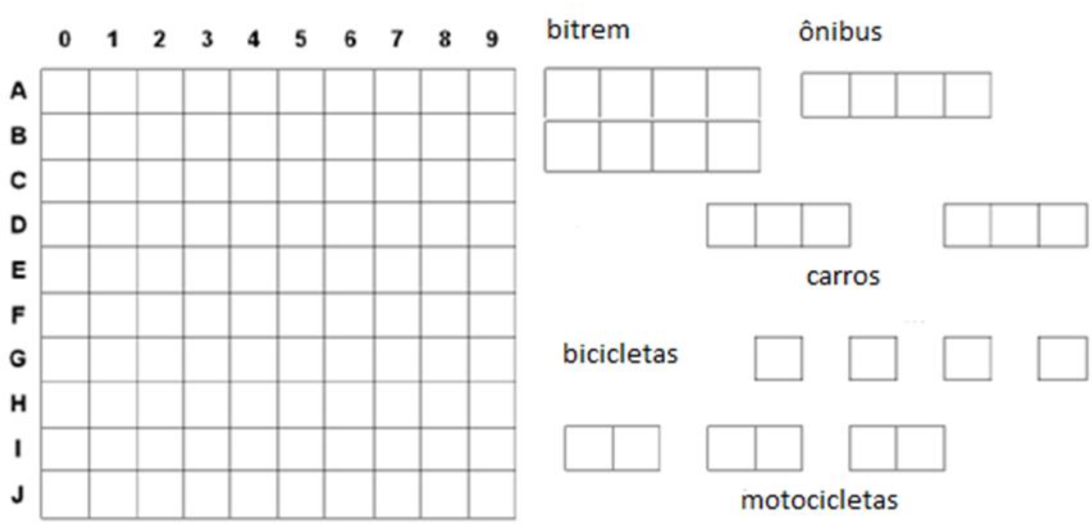


Figura 14 – Tabuleiro e desenhos para o jogo “Batalha no Trânsito”.

A “Batalha no Trânsito”, assim como a “Batalha Naval” é um jogo pensado para dois participantes ou grupo de participantes, em que cada um deverá demonstrar toda sua estratégia e audácia para descobrir e localizar os meios de locomoção terrestres de seu adversário.

5.3.4. Quarto Capítulo: Bingo das Probabilidades

No quarto e último capítulo do livro paradidático, pensou-se na criação de um jogo que abordasse os conteúdos do ensino de Probabilidade para consolidar e fixar substancialmente o objetivo pelo qual emergiu a ideia da elaboração de um livro paradidático.

O objetivo didático foi utilizar jogos de azar que são aqueles em que a perda ou o ganho dependem mais da sorte do que do cálculo, ou somente da sorte, sendo esses jogos muito ligados às probabilidades. O bingo é um jogo de azar, em que bolas numeradas são colocadas dentro de um globo, e sorteadas uma a uma, até que algum jogador preencha toda a sua cartela com os resultados desse sorteio. Os resultados desses números devem ser marcados em cartelas com números aleatórios. Tradicionalmente, os vencedores são aqueles que conseguirem completar primeiro a cartela, e quando acontecer isso, os ganhadores devem alertar que ganharam, gritando a palavra "bingo!".

Assim, pensou-se no jogo “Bingo das Probabilidades”, criado pelo grupo, em que são fornecidas cartelas aos jogadores representantes de cada grupo, contendo vinte e cinco representações de números (“cinco vezes cinco”, relacionados ao número de letras da palavra BINGO). O jogo funciona como um bingo, mas as cartas sorteadas são perguntas sobre Probabilidade, sendo que, na cartela do jogador, apresentam-se valores que o mesmo deverá marcar se for a resposta correta da pergunta sorteada.

Esse jogo compõe a última etapa da Olimpíada, que acontecerá em nível nacional, em que o grupo formado pelos personagens principais terá que passar, para vencer a Olimpíada.

Cabe lembrar que, a participação no jogo parte do princípio que o aluno já tenha estudado os conteúdos probabilísticos que farão parte da etapa, ou seja, o paradidático é material didático para a fixação dos conteúdos.

Na competição, o aluno que representa sua escola deverá saber a resposta certa e marcar o valor correspondente em sua cartela. Dessa forma, definiram-se 9 (nove) perguntas que constam das cartelas fornecidas pelo jogo. São elas:

1. No lançamento de um dado de 6 faces não viciado, qual a probabilidade de se tirar um número par?
2. Vinte pedaços de papel são numerados de 1 a 20. Se um desses papéis for sorteado, qual a probabilidade de ser retirado um número entre 5 e 10?
3. No lançamento de um dado não viciado, qual a probabilidade de se tirar um número menor que 5?
4. No lançamento de dois dados não viciados, qual a probabilidade de se obter soma igual a 3?
5. Formando todos os números possíveis de três algarismos distintos com os dígitos 1, 2 e 3, qual é a probabilidade de, na escolha de um desses números, ele ser maior que 100?
6. No lançamento de dois dados não viciados, qual a probabilidade de se obter soma igual a 1?
7. Em um estojo, há 6 canetas azuis e 4 vermelhas. Qual a probabilidade de retirarmos desse estojo, ao acaso, uma caneta azul?
8. Laura desafiou Denise a resolver uma questão de múltipla escolha com quatro alternativas, em que apenas uma é correta. Porém, Denise não sabe a resposta e vai tentar adivinhar, utilizando a sorte. Qual a probabilidade de Denise acertar a questão?
9. Uma caixa contém 3 bolas azuis, 5 bolas vermelhas e 2 bolas amarelas. Retirando uma delas ao acaso, qual é a probabilidade de não ser bola azul?

Das cartelas distribuídas para os 27 grupos representantes das escolas vencedoras dos Estados do Brasil mais o Distrito Federal, apresentam-se as destinadas à Escola “Sete Colinas”, representando o estado de Minas Gerais e ao estado de São Paulo, Figuras 15 e 16.

A cartela é constituída por 25 valores, aos quais são representações numéricas escritas de diferentes formas, tais como: fração, porcentagem, número decimal e na forma inteira, como resultados dos problemas sorteados. Cada cartela contém as respostas corretas, porém expressas de formas diferentes, a fim de que o grupo reconheça valores equivalentes para uma mesma solução. Pensando na cartela do jogo do Bingo original, pensamos em 25 valores, em que nove são soluções das perguntas que envolvem os conteúdos probabilísticos nessa etapa da Olimpíada.

B	I	N	G	O
50%	$\frac{3}{10}$	**1**	**2/6**	$\frac{1}{100}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{20}{50}$	**0,7**	$\frac{1}{20}$	**0,1**
0	$\frac{1}{10}$	**40%**	$\frac{6}{10}$	**20%**
0,65	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	**25%**
0,2	$\frac{3}{100}$	**30%**	$\frac{2}{36}$	**0,9**

Figura 15 - Cartela utilizada no jogo “Bingo das Probabilidades” pela equipe da Escola Sete Colinas do Estado de Minas Gerais.

B	I	N	G	O
$\frac{2}{10}$	**0,03**	$\frac{9}{10}$	**0,2**	$\frac{4}{20}$
65%	**0,4**	$\frac{7}{10}$	**0,01**	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{10}$	**0**	$\frac{1}{9}$	**0,6**	$\frac{3}{10}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{5}{6}$	**30%**	**100%**	$\frac{1}{18}$	**0,8**

Figura 16 - Cartela utilizada no jogo “Bingo das Probabilidades” pela equipe do Estado de São Paulo.

Assim, os alunos terão que responder às perguntas no local indicado e marcar na cartela as respostas corretas. Após marcarem todas as respostas corretas, deverão gritar a palavra “Probabilidade” e assim será verificado se realmente a cartela é a vencedora, ajudando, assim, os personagens, que são os alunos da “Escola Sete Colinas”, vencer a etapa da Olimpíada.

4.4. A Teoria Antropológica do Didático e o Paradidático de Probabilidade

A seguir são apresentadas atividades que compõem o Livro Paradidático, seguindo os princípios da Teoria Antropológica do Didático na organização praxeológica didática e matemática (probabilística).

No capítulo 1 do Paradidático foram propostas atividades pensadas para compor a estrutura do material didático, sendo que visa identificar uma experiência aleatória e o espaço amostral associado.

Inicialmente, as atividades estavam associadas à preparação do grupo da Escola Estadual Sete Colinas para a participação na primeira etapa da Olimpíada de Probabilidade, que é o fio condutor da estória narrada no paradidático.

Assim, foi descrito como é o “Jogo do Rapa” e a seguir definiu-se a seguinte Experiência Aleatória: Lançamento de um pião do “Jogo Rapa” e observar a face superior (R ou T ou D ou P) após sua imobilização.

Segundo Spiegel (1977, p. 5), experimentos em que os resultados não são essencialmente os mesmos, ainda que as condições de realização se mantenham praticamente as mesmas, são chamados aleatórios.

Ainda Spiegel (1977) diz que um conjunto S, que consiste de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, é chamado Espaço Amostral e cada resultado é um ponto amostral. Continua dizendo que é comum haver mais de um espaço amostral para descrever os resultados de determinado experimento, mas, em geral, apenas um desses espaços nos dá o máximo possível de informações e destaca que S corresponde ao conjunto universo.

Dessa forma, o Espaço Amostral associado ao experimento aleatório é o seguinte: S = {R, T, D, P}.

Ainda tomando como base o mesmo experimento aleatório (lançamento de um pião do jogo "Rapa" e observar a face superior após sua imobilização), propõem-se as duas seguintes atividades:

1) "Gabriela resolveu criar um código de acesso ao seu Facebook. O código é uma sequência de três letras do jogo "Rapa" e dois dígitos. Quantos códigos ela pode formar?"

- Tarefa (T_1): Criar um código, cuja sequência deve ser de três letras constantes do pião que compõe o "Jogo do Rapa" (R, T, P, D) e dois dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).
- Técnica (τ_1): Caracterização do código, seguindo o esquema constante da Figura 17:

letras			dígitos	
4 possibilidades	4 possibilidades	4 possibilidades	10 possibilidades	10 possibilidades

Figura 17 – Esquema constante da técnica (τ_1).

Portanto, podem ser construídos: $4x4x4x10x10 = 4^3x10^2 = 64000$ códigos.

A tecnologia que foi utilizada é o Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo.

Na execução da tarefa (T) é necessária a realização de outras tarefas, tais como: efetuar operações básicas de potenciação e multiplicação, conhecer as propriedades da potenciação, etc.

Essas tarefas, que são acionadas no processo de realização da tarefa (T), são aqui chamadas de subtarefas, no sentido de subjacentes à tarefa principal (T).

Cada uma dessas subtarefas possui sua própria praxeologia, e o fracasso na realização de qualquer uma delas pode ocasionar o fracasso na resolução final da tarefa (T), quer seja por simplesmente não conseguir obter um resultado para a questão, ou obter um resultado que não seja válido.

A articulação de subtarefas para a execução de uma tarefa constitui uma técnica (τ) associada à tarefa T.

A tecnologia θ, que permite justificar e explicar a técnica (τ_1), pode ser descrita da seguinte maneira:

- Considerando a potenciação uma forma de representar a multiplicação de fatores iguais, a regra é que, para multiplicar potências com bases e expoentes diferentes um do outro, calcula-se o valor de cada potência e multiplicam-se os resultados. No caso, conhecidas as 4 letras (R, T, P, D) e os 9 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), a primeira etapa pode ser escolher a letra, e a segunda etapa, escolher o dígito, do qual, conhecendo o número de possibilidades de cada uma dessas etapas se efetuar, multiplica-se todos esses números, e teremos a quantidade de o acontecimento se realizar.

A teoria Θ que explica e justifica a tecnologia θ e a técnica (τ) pode ser resumida da seguinte maneira:

- Segundo Smole e Diniz (2010, p.132) o Princípio Fundamental da Contagem, dá-se da seguinte forma:

> se um acontecimento A_1 pode ocorrer de m_1 maneiras diferentes, para cada maneira de A_1 ocorrer, um acontecimento A_2 pode ocorrer de m_2 maneiras diferentes e, para cada maneira de A_1 e de A_2 ocorrerem, um acontecimento A_3 pode ocorrer de m_3 maneiras diferentes: então, o número se maneiras diferentes de ocorrerem A_1, A_2 e A_3 é:
>
> $m_{1x}m_{2x}m_3$.

2) “Rafael vai lançar um rapa (R; T; P; D) duas vezes consecutivas. Quantos são os resultados possíveis?”

Tarefa (T_2): Obter a quantidade de resultados possíveis ao lançar, simultaneamente (duas vezes), o pião do “Jogo do Rapa”.

1) Técnica (τ_2): Listar os pares em que constem as letras (R, T, P, D) do pião do “Jogo do Rapa” e fazer a contagem dos resultados possíveis.

S = {(R,R), (R,T), (R,P), (R,D), (T,R), (T,T), (T,P), (T,D), (P,R), (P,T), (P,P), (P,D), (D,R), (D,T), (D,P), (D,D) }

Contando os pares do Espaço Amostral S, pode-se observar 16 resultados possíveis.

2) Técnica (τ_3): Visualizar as possibilidades por meio de um diagrama chamado “árvores de possibilidades”, Figura 18, (uma das técnicas utilizadas para problemas de contagem) e fazer a contagem dos resultados possíveis.

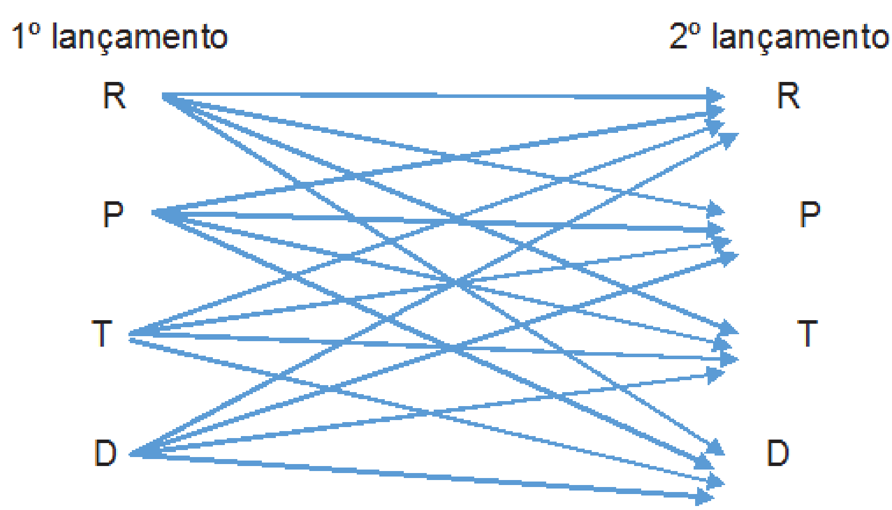


Figura 18 – Árvore de possibilidades das combinações possíveis da Tarefa 2.

3) Outra técnica (τ_4) é efetuar a operação de multiplicação de fatores iguais:

1° Lançamento		2° Lançamento		
4 possibilidades	x	4 possibilidades	=	16 possibilidades

A tecnologia θ, que permite justificar e explicar a técnica (τ_4), pode ser descrita da seguinte maneira:

- Podemos determinar o total de possibilidades utilizando o Princípio Fundamental da Contagem. Nesse caso, para o primeiro lançamento do pião há 4 possibilidades (R, P, T, D), e para o segundo lançamento também existem as mesmas 4 possibilidades (R, P, T, D). Assim, aplicando o princípio multiplicativo, vem: 4 X 4 = 16 possibilidades.

A teoria Θ que explica e justifica a tecnologia θ pode ser explicitada da seguinte maneira:

- De acordo com a teoria do Princípio Multiplicativo da Contagem, se existe um acontecimento formado por diversas etapas, do qual conhecemos o número de possibilidades de cada etapa se realizar, multiplicando todos esses números ou possibilidades, teremos a quantidade de possibilidades de o acontecimento completo se realizar.

4) Técnica (τ_5): Uso de tabela.

- Construir uma tabela de dupla entrada:

	R	P	T	D
R	(R,R)	(R,P)	(R,T)	(R,D)
P	(P,R)	(P,P)	(P,T)	(P,D)
T	(T,R)	(T,P)	(T,T)	(T,D)

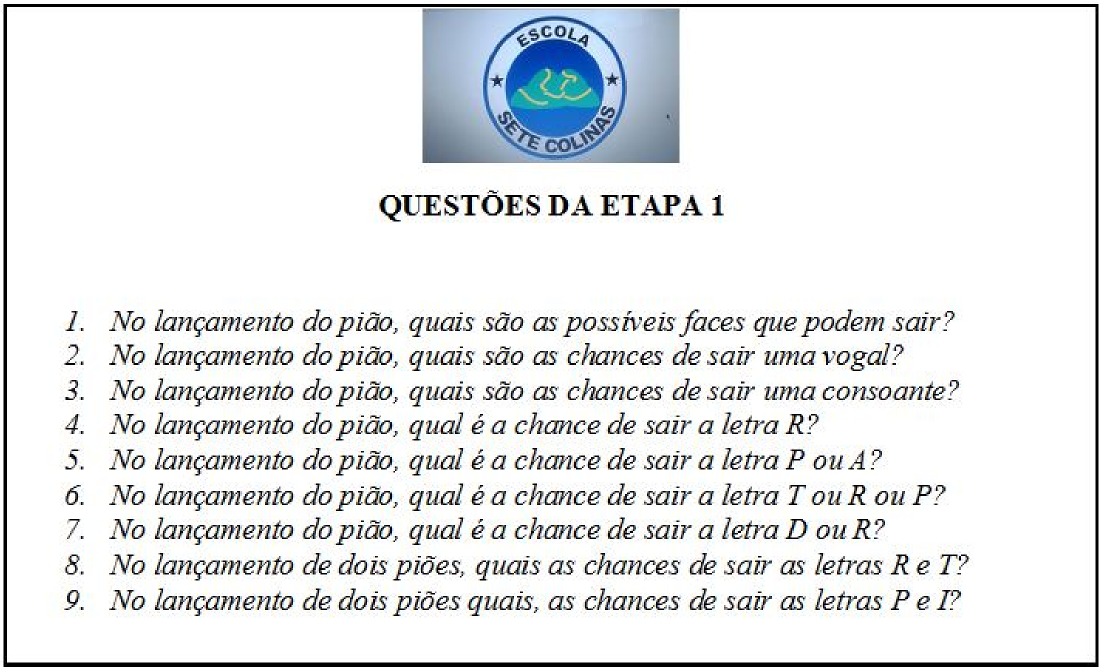
D	(D,R)	(D,P)	(D,T)	(D,D)

- Contar o número de células da tabela. Portanto, pode-se observar 16 resultados possíveis.

A tecnologia θ, que permite justificar e explicar a técnica (τ_5), pode ser descrita da seguinte maneira:

- Utilizar uma tabela com 5 colunas e 5 linhas, onde na primeira coluna e na primeira linha dispomos as letras que constam das faces do pião, realizando em seguida o par de resultados (a, b), conforme os lançamentos e assim determinar quantos pares possíveis são formados, o que indicam 16 resultados possíveis. A organização dos possíveis resultados auxilia na obtenção dos resultados possíveis. Esse tipo de procedimento é chamado multiplicação retangular e que já é utilizado, quando da abordagem de operações com números naturais (N), nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A Figura 19 mostra as questões de uma das atividades propostas no livro paradidático e que faz parte da primeira etapa da Olimpíada de Probabilidade, que foi composta por 9 tarefas.



ESCOLA SETE COLINAS

QUESTÕES DA ETAPA 1

1. *No lançamento do pião, quais são as possíveis faces que podem sair?*
2. *No lançamento do pião, quais são as chances de sair uma vogal?*
3. *No lançamento do pião, quais são as chances de sair uma consoante?*
4. *No lançamento do pião, qual é a chance de sair a letra R?*
5. *No lançamento do pião, qual é a chance de sair a letra P ou A?*
6. *No lançamento do pião, qual é a chance de sair a letra T ou R ou P?*
7. *No lançamento do pião, qual é a chance de sair a letra D ou R?*
8. *No lançamento de dois piões, quais as chances de sair as letras R e T?*
9. *No lançamento de dois piões quais, as chances de sair as letras P e I?*

Figura 19 – Questões constantes da primeira etapa da Olimpíada de Probabilidade e que aborda o “Jogo do Rapa”.

A Tarefa (T_3) é a seguinte: Contar as possíveis faces que podem sair ao lançar o pião do “Jogo do Rapa” ou número de resultados possíveis.

A Técnica (τ_6) associada é:

- Conhecer o pião do “Jogo do Rapa” (pião com 4 (quatro) faces onde, em cada uma, pode-se observar uma das letras R, T, P, D), ou seja, é a descrição do espaço amostral associado ao experimento aleatório lançar o pião do “Jogo do Rapa”, S = {R, T, P, D}.

A tecnologia θ, que permite justificar e explicar a técnica (τ_6), pode ser descrita, da seguinte maneira:

- Conhecendo o “Jogo do Rapa”, é possível visualizar, no objeto utilizado (pião com 4 faces), as letras inseridas em cada face que descrevem o Espaço Amostral, associado ao experimento aleatório lançar o pião do “Jogo do Rapa”, ou seja, as consoantes: R, T, P, D, A teoria Θ que explica e justifica a tecnologia θ pode ser explicitada da seguinte maneira:

- Segundo Larson e Farber (2010, p. 105):

> Um experimento de probabilidade é uma ação, ou tentativa, pela qual os resultados específicos (contagens, medições ou respostas) são obtidos. O resultado de uma única tentativa em um experimento de probabilidade é um resultado. O grupo de todos os resultados possíveis de um experimento de probabilidade é o espaço amostral.

- Fonseca e Martins (1996, p. 16) definem espaço amostral como: “Para cada experimento aleatório E, define-se Espaço Amostral S o conjunto de todos os possíveis resultados desse experimento”.

- Ainda segundo Meyer (2000, p. 10):

> Para cada experimento E do tipo que estamos considerando, definiremos o espaço amostral como o conjunto de todos os resultados possíveis de E. Geralmente representaremos esse conjunto por S.

A seguir descrevemos as tarefas T_4, T_5 e T_6, segundo as técnicas, tecnologia e teoria a elas vinculadas. Vale ressaltar que essas tarefas constituem um tipo de tarefa, ou seja, a determinação de ocorrência de um evento simples.

- T_4: Chance de sair uma vogal no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”.

Técnica (τ_7): $P(T_2) = \frac{0}{4} = 0$.

Ao solicitar a chance de sair uma vogal no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”, observa-se que não existe vogal nas faces do pião, portanto, o número de elementos do evento “sair um vogal” ou resultados favoráveis é igual a zero. Considera-se também que o espaço amostral, ou resultados possíveis, estão relacionados às quatro faces possíveis do pião; portanto, têm-se 4 resultados possíveis. Por fim, relaciona-se a razão entre o número de resultados favoráveis (zero) e o número de resultados possíveis (quatro), obtendo-se zero, ou seja, nenhuma chance de ocorrer uma vogal.

- T_5: Chance de sair uma consoante no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”.

  Técnica (τ_8): P (T_3) = $\frac{4}{4}$ = 1 ou 100%.

Ao solicitar a chance de sair uma vogal no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”, observa-se que não existe vogal nas faces do pião, portanto, o número de elementos do evento “sair um vogal” ou resultados favoráveis é igual a zero. Considera-se também que o espaço amostral ou resultados possíveis estão relacionados às quatro faces possíveis do pião, portanto, têm-se 4 resultados possíveis. Por fim, relaciona-se a razão entre o número de resultados favoráveis (quatro) e o número de resultados possíveis (quatro), obtendo-se um, ou seja, chance certa de ocorrer uma consoante.

- T_6: Chance de sair a letra R no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”.

  Técnica (τ_9): P (T_4) = $\frac{1}{4}$ = 0,25 ou 25%.

Ao solicitar a chance de sair a letra “R” no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”, observa-se que, dentre as 4 faces do pião consta um letra “R” ou consoante, portanto, o número de elementos do evento “sair a letra R” ou resultado favorável é igual a um. Considera-se também que o espaço amostral ou resultados possíveis estão relacionados às quatro faces possíveis do pião, portanto, têm-se 4 resultados possíveis. Por fim, relaciona-se a razão entre o número de resultados favoráveis (um) e o número de resultados possíveis (quatro), obtendo-se $\frac{1}{4}$ ou 25%, ou seja, existe um quarto de chance de ocorrer a letra “R”.

Observa-se que a técnica utilizada para as quatro tarefas é a mesma, ou seja, determinar o valor procurado, pela razão entre a contagem do número de sucessos e do número total de casos.

A tecnologia que permite justificar e explicar as técnicas (τ_7, τ_8 e τ_9) é a definição clássica de probabilidade.

A teoria utilizada pode ser descrita da seguinte forma:

De acordo com Coutinho (1994), Laplace desenvolveu seu modelo matemático baseando-se em dez princípios dispostos como axiomas e definições, traduzindo sua visão “pascaliana” ou clássica e, utilizando os dois primeiros, corrigiu o exercício de D’Alembert, “Cruz ou Cunho” ("cara ou coroa") com dois lançamentos. Sejam os dois princípios:

1) Primeiro princípio (a probabilidade) é a relação entre o número de casos favoráveis (chances de ocorrência) e o número de casos possíveis;
2) Segundo princípio: Devem-se supor os diversos casos igualmente possíveis. Assim, se não o são, determina-se primeiro suas possibilidades respectivas, cuja justa apreciação é um dos pontos mais delicados da teoria do acaso. Então, a probabilidade será a soma das possibilidades de cada caso favorável.

Para as tarefas T_7, T_8, T_9, T_{10} e T_{11} serão utilizadas as técnicas do enfoque clássico, associado à probabilidade da união ou interseção de dois ou mais eventos, quais sejam:

- T_7: Chance de saírem as letras P ou A no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”.

Técnica (τ_{10}): P (T_5) = P(P) + P(A)

P(P) = $\frac{1}{4}$ e P(A) = $\frac{0}{4}$

P (T_5) = P(P) + P(A) = $\frac{1}{4}$ + 0 = $\frac{1}{4}$ ou 25%.

Ao solicitar a chance de sair a letra “P” no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”, observa-se que dentre as 4 faces do pião consta uma letra “P” ou consoante, portanto, o número de elementos do evento “sair a letra P” ou resultado favorável é igual a um. Considera-se também que o espaço amostral ou resultados possíveis estão relacionados às quatro faces possíveis do pião, portanto, têm-se 4 resultados possíveis. Por fim, relaciona-se a razão entre o número de resultados favoráveis (um) e o número de resultados possíveis (quatro), obtendo-se $\frac{1}{4}$ ou 25%, ou seja, existe um quarto de chance de ocorrer a letra “P”. O mesmo procedimento é utilizado para a determinação da chance de sair a letra “A”, ou seja, ao solicitar a chance de sair uma vogal no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”, observa-se que não existe vogal nas faces do pião, portanto, o número de elementos do evento “sair um vogal” ou resultados favoráveis é igual a zero. Considera-se também que o espaço amostral ou resultados possíveis estão relacionados às quatro faces possíveis do pião, portanto, têm-se 4 resultados possíveis. Por fim, relaciona-se a razão entre o número de resultados favoráveis (zero) e o número de resultados possíveis (quatro), obtendo-se zero, ou seja, nenhuma chance de ocorrer uma vogal. Como se deseja a determinação da chance de ocorrência da letra “P” ou da letra “A” e considerando que os dois eventos são mutuamente exclusivos, ou seja, $P \cap A = \emptyset$, então se procede ao somatório das probabilidades dos dois eventos, ou seja, $\frac{1}{4}$ mais zero, que é igual a $\frac{1}{4}$ ou 25%. Assim, a chance de ocorrência das letras “P” ou “A” é de um quarto.

- T_8: Chance de saírem as letras T ou R ou P no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”.

Técnica (τ_{11}): P (T_6) = P(T) + P(R) + P(P)

$P(T) = \frac{1}{4}$, $P(R) = \frac{1}{4}$ e $P(P) = \frac{1}{4}$

$P(T_6) = P(T) + P(R) + P(P) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ou 75%.

Ao solicitar a chance de sair a letra “T” no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”, observa-se que, dentre as 4 faces do pião consta uma letra “T” ou consoante, portanto, o número de elementos do evento “sair a letra T” ou resultado favorável é igual a um. Considera-se também que o espaço amostral ou resultados possíveis estão relacionados às quatro faces possíveis do pião, portanto, têm-se 4 resultados possíveis. Por fim, relaciona-se a razão entre o número de resultados favoráveis (um) e o número de resultados possíveis (quatro), obtendo-se $\frac{1}{4}$ ou 25%, ou seja, existe um quarto de chance de ocorrer a letra “T”. O mesmo procedimento é utilizado para a determinação da chance de sair a letra “R” e a letra “P”, ou seja, $P(R) = \frac{1}{4}$ e $P(P) = \frac{1}{4}$. Como se deseja a determinação da chance de ocorrência da letra “T” ou da letra “R” e considerando que eventos são mutuamente exclusivos entre si, ou seja: $T \cap R = \emptyset$; $T \cap P = \emptyset$; $R \cap P = \emptyset$; então se procede ao somatório das probabilidades dos três eventos, ou seja, $\frac{1}{4}$ mais $\frac{1}{4}$ mais $\frac{1}{4}$, que é igual a $\frac{3}{4}$ ou 75%. Assim, a chance de ocorrência das letras “T” ou “R” ou “P” é de três quartos.

- T_9: Chance de saírem as letras D ou R no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”.

Técnica (τ_{12}): P (T_7) = P(D) + P(R)

$P(D) = \frac{1}{4}$ e $P(R) = \frac{1}{4}$

$P(T_7) = P(T) + P(R) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ ou 50%.

Ao solicitar a chance de sair a letra “D” no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”, observa-se que dentre as 4 faces do pião consta uma letra “D” ou consoante, portanto, o número de elementos do evento “sair a letra D” ou resultado favorável é igual a um. Considera-se também que o espaço amostral ou resultados possíveis estão relacionados às quatro faces possíveis do pião, portanto, têm-se 4 resultados possíveis. Por fim, relaciona-se a razão entre o número de resultados favoráveis (um) e o número de resultados possíveis (quatro), obtendo-se $\frac{1}{4}$ ou 25%, ou seja, existe um quarto de chance de ocorrer a letra “D”. O mesmo procedimento é utilizado para a determinação da chance de sair a letra “R”, ou seja, P(R) = $\frac{1}{4}$. Como se deseja a determinação da chance de ocorrência da letra “D” ou da letra “R”, e considerando que eventos são mutuamente exclusivos, ou seja: $D \cap R = \emptyset$; então se procede ao somatório das probabilidades dos dois eventos, ou seja, $\frac{1}{4}$ mais $\frac{1}{4}$, que é igual a $\frac{2}{4}$ ou 50%. Assim, a chance de ocorrência das letras “D” ou “R” é a metade dos resultados possíveis.

- $T_{10:}$ Chance de saírem as letras R e T no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”.

  Técnica (τ_{13}): P (T_8) = P(R) x P(T)

  P(R) = $\frac{1}{4}$ e P(T) = $\frac{1}{4}$

  P (T_8) = P(R) x P(T) = $\frac{1}{4}$ x $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{16}$ ou 6,25%.

Ao solicitar a chance de sair a letra “R” no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”, observa-se que dentre as 4 faces do pião consta uma letra “R” ou consoante, portanto, o número de elementos do evento “sair a letra R” ou resultado favorável é igual a um. Considera-se também que o espaço amostral ou resultados possíveis estão relacionados às quatro faces possíveis do pião, portanto, têm-se 4 resultados possíveis. Por fim, relaciona-se a razão entre o número de resultados favoráveis (um) e o número de resultados possíveis (quatro), obtendo-se $\frac{1}{4}$ ou 25%, ou seja, existe um quarto de chance de ocorrer a letra “R”. O mesmo procedimento é utilizado para a determinação da chance de sair a letra “T”, ou seja, P(T) = $\frac{1}{4}$. Como se deseja a determinação da chance de ocorrência da letra “R” e da letra “T” e considerando que eventos são independentes, ou seja, a ocorrência da letra “R” não interfere na ocorrência da letra “T”; então se procede ao produto das probabilidades dos dois eventos, ou seja, $\frac{1}{4}$ vezes $\frac{1}{4}$, que é igual a $\frac{1}{16}$ ou 6,25%. Pode-se ainda pensar que a ocorrência dos dois eventos ocorre concomitantemente. Assim, a chance de ocorrência das letras “R” e “T” é um, dezesseis avos dos resultados possíveis.

- $T_{11:}$ Chance de saírem as letras P e I no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”.

  Técnica (τ_{14}): P (T_9) = P(P) x P(I)

  P(P) = $\frac{1}{4}$ e P(I) = $\frac{0}{4}$

  P (T_9) = P(P) x P(I) = $\frac{1}{4}$ x $\frac{0}{4}$ = 0 ou não há chances de ocorrer.

Ao solicitar a chance de sair a letra “P” no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”, observa-se que dentre as 4 faces do pião consta uma letra “P” ou consoante, portanto, o número de elementos do evento “sair a letra P” ou resultado favorável é igual a um. Considera-se também que o espaço amostral ou resultados possíveis estão relacionados às quatro faces possíveis do pião, portanto, têm-se 4 resultados possíveis. Por fim, relaciona-se a razão entre o número de resultados favoráveis (um) e o número de resultados possíveis (quatro), obtendo-se $\frac{1}{4}$ ou 25%, ou seja, existe um quarto de chance de ocorrer a letra “P”. O mesmo procedimento é utilizado para a determinação da chance de sair a letra “I” , ou seja, ao solicitar a chance de sair uma vogal no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”, observa-se que não existe vogal nas faces do pião, portanto, o número de elementos do evento “sair um vogal” ou resultados favoráveis é igual a zero. Considera-se também que o espaço amostral ou resultados possíveis estão relacionados às quatro faces possíveis do pião, portanto, têm-se 4 resultados possíveis. Por fim, relaciona-se a razão entre o número de resultados favoráveis (zero) e o número de resultados possíveis (quatro), obtendo-se zero, ou seja, nenhuma chance de ocorrer uma vogal. Como se deseja a determinação da chance de ocorrência da letra “P” e da letra “I”, e considerando que eventos são independentes, ou seja, a ocorrência da letra “P” não interfere na ocorrência da letra “I”; então se procede ao produto das probabilidades dos dois eventos, ou seja, $\frac{1}{4}$ vezes zero, que é igual a zero. Assim, não há chance de ocorrência das letras “D” e “I”, concomitantemente.

As tecnologias (θ) utilizadas para resolução das tarefas 7 a 11 foram operações aritméticas simples de divisão, adição e multiplicação de números inteiros, transformando os resultados em porcentagem. Assim, podemos expressar que a tecnologia utilizada são propriedades das probabilidades tais como:

(1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se $A \cap B = \varnothing$.

(2) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ se A e B são independentes.

A teoria (Θ) que explica e justificam as tecnologias θ_5, θ_6, θ_7, θ_8 e θ_9 pode ser resumida da seguinte maneira:

Caso os eventos A e B sejam mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \emptyset$, será utilizada a seguinte igualdade para o caso da união de eventos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Caso os eventos A e B não sejam mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B \neq \emptyset$, será utilizada a seguinte igualdade para o caso da união de eventos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Cabe ainda ressaltar que eventos são independentes entre si se a ocorrência de um não influi na ocorrência do outro. A igualdade fica expressa por:

$$P(A \cap B) = P(A) \, .P(B).$$

No segundo capítulo do livro paradidático, em que a estória se desenvolve através da competição entre as escolas do município, o jogo Mini Bozó foi selecionado para mostrar a importância de se trabalhar com a dualidade dos enfoques clássico e frequentista, oferecendo aos leitores situações didáticas que envolvam problemas que, ao serem resolvidos experimentalmente, e validados pelo cálculo, *a priori,* de uma probabilidade pela definição laplaciana, oportunizando aos alunos a construção do conceito de probabilidade.

Assim, segundo Lopes (2011), a utilização do jogo Mini-Bozó é uma proposta de intervenção didático pedagógica para a utilização de um jogo, associada à metodologia de resolução de problemas, para a construção de um conceito matemático, no caso, o ensino de conceitos probabilísticos.

Através das tarefas listadas abaixo e indicadas para a realização da continuação da Olimpíada, agora no Capítulo 2 ,sendo em âmbito municipal, a ideia é de que, através do jogo, o ensino de conceitos básicos de probabilidade se torne uma opção para a aprendizagem desse conteúdo por parte dos alunos.

Durante a leitura do livro paradidático, os leitores terão as respostas das tarefas oferecidas como atividades para os personagens, dando oportunidades para os professores criarem suas próprias tarefas.

Assim, segundo Lopes (2011), o Jogo Mini Bozó utiliza dois dados e pode ser disputado por vários jogadores, sendo uma simplificação de um jogo bastante popular no estado do Mato Grosso do Sul - Brasil, conhecido como Bozó. A simplificação efetuada foi motivada pela utilização do jogo para ensinar conceitos básicos (iniciais) de Probabilidade, o que não seria adequado através do jogo Bozó, tendo em vista que esse utiliza cinco dados, que tem suas regras apresentadas em Brasil (2010).

Lopes (2011) ainda diz que o jogo Mini Bozó se trata de um jogo de estratégia, e como são utilizados dois dados, o fator sorte não pode ser totalmente desprezado, sendo também impossível a determinação de uma estratégia sempre vitoriosa. Assim, o jogo nunca perde o sentido como jogo, e cada partida será provavelmente diferente da partida anterior.

Assim, o professor que utilizar o material paradidático poderá usar o jogo da forma como é utilizado na estória em questão.

A técnica (τ) utilizada para a realização desses tipos de tarefas é considerar previamente o Espaço Amostral. No caso do jogo Mini-Bozó, cada jogador, em cada jogada, poderá efetuar até dois lançamentos. Para o primeiro lançamento, o jogador sempre utiliza os dois dados, o que corresponde ao Experimento Aleatório “jogar dois dados simultaneamente e observar as faces superiores”.

Para determinar o Espaço Amostral referente ao Experimento Aleatório “jogar dois dados simultaneamente e observar as faces superiores” consideramos cada resultado possível desse experimento aleatório como sendo um par ordenado *(a, b),* em que “*a”* representa o resultado no lançamento do primeiro dado referente ao conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e “*b”*, o resultado no lançamento do segundo dado referente ao conjunto B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Assim, teremos o Espaço Amostral, que será denotado por S, constituído pelos seguintes 36 elementos:

S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}.

Considerando a atividade proposta e o tipo de tarefa (T) a ser realizada com os problemas 1, 2, 3, 4 e 5, sejam as tarefas T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15} e T_{16}; além disso, descrevemos as técnicas (τ_{15}, τ_{16}, τ_{17}, τ_{18} e τ_{19}) para a solução dessas tarefas:

- T_{12}: Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento (considerando que no primeiro lançamento utilizam-se os dois dados) do jogo Mini Bozó, determinar quais e quantas são as chances de marcar a casa Seguida.

Técnica (τ_{15}):

Quais são: *(1,2); (2,3); (3;4); (4,5); (5;6); (2,1); (3,2); (4,3); (5,4); (6,5).*

Quantas são: *10 chances.*

Sejam os 36 resultados possíveis descritos no Espaço Amostral S. Da solução do problema 1, o jogador marca a casa SEGUIDA, se ocorrer um dos seguintes casos: (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4), ou (6,5). Como para a casa SEGUIDA vale duas faces distintas, em sequência, no lançamento dos dois dados (vermelho e branco), a solução é 10 chances. Portanto, a casa SEGUIDA poderá receber, durante a realização do jogo Mini Bozó, uma pontuação mínima de 0 ponto ou máxima de 20 pontos.

- T_{13}: Determinar os pontos possíveis para a casa FÚ no jogo Mini Bozó.

Técnica (τ_{16}):

É possível marcas as seguintes opções:

(1,3); (3,1) $\rightarrow$ *4 pontos*

(1,4); (4,1) $\rightarrow$ *5 pontos*

(1;5); (5,1); (2,4); (4,2) $\rightarrow$ *6 pontos*

(1,6); (6,1); (2,5); (5,2) $\rightarrow$ *7 pontos*

(2,6); (6,2); (3,5); (5;3) $\rightarrow$ *8 pontos*

(3,6); (6,3); (4,5); (5,4) $\rightarrow$ *9 pontos*

(4,6); (6,4) $\rightarrow$ *10 pontos*

Para a casa FÚ vale a soma das faces; nesse caso, as pontuações podem ser 4 se as faces forem (1,3) ou (3,1), 5 se as faces (1,4) ou (4,1) saírem, 6 se as faces forem (1,5), (5,1), (2,4) ou (4,2), 7 no caso de as faces serem (1,6), (6,1), (2,5) ou (5,2), para a pontuação 8 valem (2,6), (6,2), (3,5), ou (5,3), para a pontuação 9 salvam os pares (3,6), (6,3), (4,5) ou (5,4) e, finalmente, para atingir 10 pontos, as faces serão os pares (4,6) ou (6,4).

- T_{14}: Caso o jogador utilize apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, determinar quais e quantas são suas chances de marcar 5 pontos na casa FÚ.

  Técnica (τ_{17}):
  Quais são: (1,4) e (4,1).
  Quantas são: 2 chances.

- T_{15}: Caso o jogador utilize apenas o primeiro lançamento do jogo Mini Bozó, determinar quais e quantas são suas chances de marcar 7 pontos na casa FÚ.

  Técnica (τ_{18}):
  Quais são: (1,6) (2,5) (5,2) (6,1).
  Quantas são: 4 chances.

As tarefas 14 e 15 convergem para o mesmo raciocínio; é que, para ocorrer a casa FÚ, independentemente de o jogador ter utilizado um ou dois lançamentos, são válidos os casos em que as duas faces são distintas, mas não em sequência, ou seja, pelo Espaço Amostral *S* observamos 20 casos possíveis. Considerando a técnica (τ_{17}), temos que o jogador marcará 5 pontos nos casos (1,4) ou (4,1), duas chances, e na técnica (τ_{18}), o jogador marcará 7 pontos nos casos (1,6), (2,5), (5,2) ou (6,1), portanto 4 chances em 36, se utilizar o primeiro lançamento do jogo Mini Bozó.

Considerar um tipo de tarefa mais abrangente:

- T_{16}: Caso o jogador utilize apenas o primeiro lançamento do jogo Mini Bozó, determinar se ele terá mais chances em marcar a casa SEGUIDA ou a QUADRADA e justificar sua resposta.

  Técnica (τ_{19}):
  Chances para marcar a SEGUIDA: (1,2); (2,3); (3;4); (4,5); (5;6); (2,1); (3,2);

(4,3); (5,4); (6,5).

Chances para marcar a QUADRADA: (1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5).

Sim, pois o número de possibilidades para marcar a SEGUIDA (10 vezes) é maior do que marcar QUADRADA (5 vezes).

Para marcar a casa SEGUIDA o jogador deverá obter um dos casos (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6) ou (6,5), assim, terá 10 chances em 36, considerando que utilizou apenas o primeiro lançamento, e para marcar a casa QUADRADA o jogador deverá obter um dos casos (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) ou (5,5), obtendo 5 chances em 36, portanto, conclui-se que o jogador terá mais chances de marcar a casa SEGUIDA do que a casa QUADRADA.

Observe que a mesma técnica resolve todas as tarefas que estão em T_{12} a T_{16}, permitindo assim o amadurecimento da tecnologia e da teoria que se associam.

Para a resolução das tarefas consideradas como T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15} e T_{16}, quando dizemos que o jogador utilizou apenas o primeiro lançamento do jogo Mini Bozó, consideraremos o Experimento Aleatório, que consiste de um único lançamento dos dois dados, ou seja, estaremos considerando o Espaço Amostral S.

O professor poderá explorar, durante a utilização do jogo, a percepção dos alunos de que algumas pontuações da casa FÚ ocorrem com maior frequência do que outras, significando que, intuitivamente, o professor já estará trabalhando o conceito de probabilidade.

Assim, para as tarefas do Capítulo 2, a tecnologia (θ) utilizada é convergente e pode ser definida a seguir:

- Através da sistematização de todos os resultados possíveis do lançamento dos dados, que ora já nomeamos Espaço Amostral *S,* e seguindo as regras da pontuação do jogo Mini Bozó, faz-se contagens a fim de obter as soluções das tarefas para as tarefas.

Acompanhando a Teoria Antropológica do Didático, temos como teoria (Θ) que explica e justifica a tecnologia (θ), resumida da seguinte maneira:

- Organização dos processos de contagem, pela importância de utilizar situações-problema, sem o uso de fórmula, para que o aluno se aproprie do Princípio Fundamental da Contagem, para depois compreender e valorizar o sentido das fórmulas. Assim, aprender a organizar e a contar um grande número de possibilidades exige formas adequadas para ordenar informações.

No Capítulo 3, assim como no Capítulo 2, quando da leitura do livro paradidático, as respostas das tarefas estarão apresentadas no decorrer da estória.

As atividades apresentadas ao longo da estória foram constituídas/planejadas segundo as organizações praxeológicas descritas nos capítulos.

Após a realização do jogo escolhido para a etapa da competição da Olimpíada, que nesse capítulo será a nível estadual, e que tem como nome “Batalha no Trânsito”, as atividades que serão exigidas como tarefas ($T_{17,}$ $T_{18,}$ $T_{19,}$ T_{20} e T_{21}), associadas às técnicas ($\tau_{1,}$ $\tau_{2,}$ $\tau_{3,}$ τ_4 e τ_5), podem ser descritas como:

- $T_{17:}$ Determinar o tipo de veículo mais provável de localizar no Jogo “Batalha do Trânsito” e expresse o porquê de sua resposta.

Técnica (τ_{20}): Bitren. Porque ocupa 8 espaços no asfalto.

Considerando o tabuleiro do jogo um quadriculado de 10 cm por 10 cm, enumerados horizontalmente com números de 1 a 10, e na vertical letras do nosso alfabeto de “A” a “J”, o veículo bitrem, aquele que utiliza no tabuleiro a área de 8 cm^2, se comparado com as medidas das áreas do ônibus (4 cm^2), do carro (3 cm^2), da bicicleta (1 cm^2) e da motocicleta (2 cm^2), verifica-se que a possibilidade de localizar o bitrem é maior.

- $T_{18:}$ Determinar se é mais provável localizar um ônibus ou um carro na primeira tentativa no Jogo “Batalha do Trânsito”.

Técnica (τ_{21}): É mais provável localizar um carro, pois ocupam 6 espaços no asfalto enquanto que o ônibus ocupa 4 espaços.

Considerando o tabuleiro do jogo um quadriculado de 10 cm por 10 cm, enumerados horizontalmente com números de 1 a 10, e na vertical, letras do nosso alfabeto de “A” a “J”, como existem dois carros e cada um ocupa 3 cm^2, temos, então, que os dois carros ocupam 6 cm^2. Da mesma forma, temos somente 1 ônibus, e esse ocupa 4 cm^2. Assim, podemos concluir que os dois carros (6 cm^2) ocupam mais espaço que o ônibus (4 cm^2).

- $T_{19:}$ Determinar se é mais provável localizar, na 1ª tentativa, uma motocicleta ou um ônibus, no Jogo “Batalha do Trânsito”.

Técnica (τ_{22}): É mais provável localizar uma motocicleta, pois, um ônibus ocupa 4 espaços no asfalto e as 3 motocicletas ocupam 6 espaços no asfalto.

Considerando o tabuleiro do jogo um quadriculado de 10 cm por 10 cm ,enumerados horizontalmente com números de 1 a 10, e na vertical, letras do nosso alfabeto de “A” a “J”, como existem três motocicletas e cada uma ocupa 2 cm^2, temos, então, que as três motocicletas ocupam 6 cm^2. Da mesma forma, temos somente 1 ônibus e esse ocupa 4 cm^2. Assim, podemos concluir que as três motocicletas (6 cm^2) ocupam mais espaço que o ônibus (4 cm^2).

- $T_{20:}$ Caso o seu adversário ao escolher a 1ª tentativa determinar se é mais provável que localize um veículo ou o asfalto no Jogo “Batalha do Trânsito” e expresso o porquê de sua resposta.

Técnica (τ_{23}): É mais provável localizar o asfalto, pois, no total do espaço considerado, são 10 x 10 = 100 espaços, e considerando que os veículos ocupam 28 espaços, então teremos: (100 espaços totais – 28 espaços ocupados por veículos) = 72 espaços em que aparece o asfalto.

Atentando para a área do tabuleiro com 100 cm^2 (10 cm x 10 cm) e os veículos ocupando 28 cm^2 do total, a realização de uma simples operação de subtração (100 cm^2 – 28 cm^2) verificou que a solução dessa tarefa está na possibilidade de localizar o asfalto, pois sobrariam 72 cm^2 representariam os espaços em que aparece o asfalto.

- $T_{21:}$ Se não for possível encostar os veículos nos quatro cantos do tabuleiro quadrado, a possibilidade de localizar uma bicicleta, um carro ou o bitrem, aumenta ou diminui? Por quê?

Técnica (τ_{24}): As possibilidades aumentam. Consideremos que os espaços possíveis serão subtraídos daqueles em que se encosta aos quatro CANTOS do tabuleiro, ou seja, devemos subtrair 4 espaços do total de 100 espaços iniciais. Assim, teremos 96 espaços possíveis. Dessa forma, é mais fácil encontrar os veículos em um menor número de espaços possíveis.

Subtraindo os 4 cantos do tabuleiro como possíveis lugares para localizar os veículos, as possibilidades aumentam, pois os jogadores não terão que “apostar” nos cantos, sendo assim, a chance de acertar os veículos com um número menor de lugares para dispor os veículos fica aumentada.

- $T_{22:}$ Caso introduzíssemos uma nova regra, em que os veículos não pudessem encostar-se aos lados do tabuleiro quadrado, descreva eventos que possam ser associados aos seguintes termos: certo, impossível, provável, improvável, pouco provável, muito provável.

Técnica (τ_{25}): Consideremos que os espaços possíveis serão subtraídos daqueles em que se encostasse aos quatro LADOS do tabuleiro, ou seja, devemos subtrair 36 espaços do total de 100 espaços iniciais. Assim, teremos 64 espaços possíveis.

CERTO: Localizar um veículo ou asfalto dentre os 64 espaços possíveis.
IMPOSSÍVEL: Localizar um veículo ou asfalto dentre os 36 espaços que escostam nos quatro lados do tabuleiro quadrado.
PROVÁVEL: Localizar um bitren dentre os 64 espaços possíveis.
POUCO PROVÁVEL: Localizar uma bicicleta, na 1ª tentativa, dentre os 64 espaços possíveis.
MUITO PROVÁVEL: Localizar um veículo ou asfalto, exceto uma bicicleta, na 1ª tentativa, dentre os 64 espaços possíveis.

Considerando eliminados os lados do tabuleiro como nova regra, isto é, 36 cm^2, diminui-se o espaço para dispor os veículos, em que restariam somente 64 espaços possíveis (100 cm^2 – 36 cm^2). Sendo assim, localizar um veículo ou asfalto seria um *evento certo,* já que o par (letra, número), seria dado pelo adversário, conhecendo o tabuleiro do jogo e a nova regra. O evento seria *impossível,* admitindo que o par dado pelo adversário fosse algum par que tivesse as letras “A” ou “J” e os números “0” ou “9”, porém, pela nova regra, os jogadores não usariam esses pares. Seria *provável,* admitindo que o bitrem ocuparia 8 espaços, dentre os 64 espaços possíveis; *pouco provável,* na primeira tentativa de localizar uma bicicleta, pois esse tipo de veículo ocupa 1 espaço, dentre os 64; e *muito provável,* considerando a localização de um veículo ou asfalto, excetuando uma bicicleta, na primeira tentativa, dentre os 64 espaços possíveis, pois a chance seria de 4 em 64.

Assim, em termos gerais, para o Capítulo 3, a tecnologia (θ_1), que permite justificar e explicar as técnicas (τ_{20},τ_{21}, τ_{22}, τ_{23}, τ_{24}), pode ser descrita da seguinte maneira:

- A área de uma superfície plana é dada pela medida da parte, de um plano, ocupada por uma figura. Calcular a área de uma figura plana é medir a região, ou a porção, do plano, ocupada por essa figura. Isso é feito, comparando-se a figura plana com uma unidade de área. O resultado é um número que exprime quantas vezes a figura plana contém a unidade de área considerada. As tarefas T_{17}, T_{18}, T_{19}, T_{20} e T_{21} são realizadas, utilizando a comparação entre essas medidas.

A tecnologia (θ_2), que permite justificar e explicar a técnica τ_{25}, pode também ser descrita da seguinte maneira:

- Considerando que a probabilidade de ocorrer um determinado evento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis é o número de casos possíveis (enfoque clássica ou laplaciano de probabilidade), o evento será certo se esse resultado for igual a 1; impossível se for igual a 0; e se esse resultado estiver entre 0 e 1, o evento é considerado provável.

Assim, a probabilidade de ocorrência de um evento é representada por um número real, no intervalo que contém os limites 0 e 1; evidentemente, quanto mais próxima de 1 for a probabilidade de um evento, é mais provável que o ele ocorra, e ocorre o inverso quando se toma resultados com valor de probabilidade próximos a 0.

A teoria (Θ), que explica e justifica a tecnologia θ, pode ser resumida da seguinte maneira:

Dante (2012a) justifica que, para calcular a área de qualquer região retangular, basta multiplicar a medida da base (comprimento) pela medida da altura (largura), Figura 20.

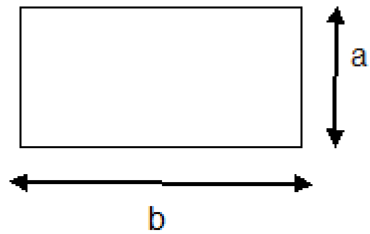


Figura 20 – Figura com a determinação das áreas para a determinação da respectiva área.

Outra maneira de representar o cálculo da área é determinada pela seguinte relação:

Área = (medida da base “b”) X (medida da altura “a”) ou A = b x a.

E a teoria (Θ_2), que explica e justifica a tecnologia $\theta_{2,}$ foi utilizada em outra situação do livro paradidático, na atividade que utiliza o “Jogo do Rapa”, nas tarefas em que acorrem a união ou interseção de dois ou mais eventos.

Os enfoques, clássico e frequentista, são valorizados no Capítulo 4 onde os conceitos são retomados no decorrer da estória, quando a personagem Rita (professora) utiliza exemplos para que os personagens (alunos) possam constatar e comprovar o objetivo da construção do livro paradidático.

Como exemplo do enfoque clássico apresentam-se exemplos utilizados pela professora e que fazem parte do livro paradidático. É o seguinte:

> A professora Rita bastante estimulada pelo interesse dos alunos continuou a falar:
>
> — *Há também alguns exemplos muito utilizados com o lançamento de um dado de seis faces, por exemplo: “No lançamento de um dado qual a probabilidade de se obter o número 4?”*
>
> Kaori, querendo participar e mostrar que estava entendendo, disse:
>
> — *Eu sei! Como temos um dado com seis faces e queremos calcular a probabilidade de se obter somente o número 4 (quatro), é uma*

possiblidade em seis. Assim temos que a probabilidade é igual a $\frac{1}{6}$ *que é aproximadamente 0,167, ou seja, 16,7%.*

Falou a professora.

— *Perceberam, pessoal? Para fazer esses cálculos, a Kaori dividiu quantas vezes aparece o número 4 pelo total de faces, ou seja, num dado existe apenas um número 4, por isso o numerador 1, e 6 faces, por isso o denominador 6. Dividindo 1 por 6, encontramos um valor aproximado à 0,167 que multiplicado por 100 equivale à 16,7%.*

No livro paradidático, a primeira vez em que aparece o enfoque frequentista de probabilidade é um dos momentos de apresentação de conceitos referentes aos conteúdos que serão cobrados na segunda etapa da competição (Capítulo 2), onde o personagem (professora Rita) apresenta uma situação hipotética que faz os alunos do grupo pensarem na repetição do Experimento Aleatório, ou seja, o lançamento de uma moeda por 50 vezes:

— *Lembro também de um exemplo que a professora Rita nos mostrou. Ela trouxe algumas moedas e pediu para jogarmos as moedas para cima 50 vezes e depois para observamos o lado da moeda que caiu com a face voltada para cima.*

Partindo dessas considerações, apresentamos a utilização do enfoque frequentista na elaboração do livro paradidático. Assim, para introduzir esse enfoque, foi pensando em ser feito a partir da explicação da professora Rita, quando da preparação do grupo da Escola Sete Colinas para a quarta etapa da Olimpíada Nacional de Probabilidade.

Para o enfoque frequentista, a professora Rita utiliza o seguinte exemplo citado no livro paradidático:

Kauê, se mostrando muito curioso e com muita vontade de querer provar o que aprendiam, perguntou:

— *Professora Rita, surgiu uma dúvida!!! Pensando no lançamento de uma moeda, a probabilidade de sair cara é de 0,5 ou 50% como já aprendemos, certo? Quer dizer que se lançarmos uma moeda 20 vezes, vai sair cara 10 vezes, pois 20 vezes 0,5 é igual a 10?*

A professora Rita, admirada e muito feliz com a pergunta, respondeu:

— *Vejo que vocês se interessaram bastante pelo assunto. Kauê, mesmo sabendo que há duas possibilidades no lançamento de uma moeda, não há qualquer garantia de que em 100 lançamentos, 50 serão cara e 50 serão coroa, e que após obtermos uma cara o próximo lançamento será uma coroa. Para mostrar e comprovar isso, vamos realizar esse experimento agora?*

— *Vou pegar uma moeda na minha bolsa e vamos lançar 100 vezes e depois lançar mais 100 vezes. Vocês vão preencher um quadro como esse que fiz no quadro negro, marcando com um X a face que saiu em cada lançamento e ao final vão somar o número de vezes que saiu "Cara" e o número de vezes que saiu "Coroa".*

Para facilitar o desenvolvimento da atividade e apresentar o esquema exposto pela professora na estória do paradidático, foi disponibilizado o Quadro 2 para organização dos dados e posterior determinação das probabilidades.

Quadro 2 – Quadro para organização da tarefa.

Lançamentos	Cara	Coroa	Lançamentos	Cara	Coroa	Lançamentos	Cara	Coroa
1º lançamento			35º lançamento			69º lançamento		
2º lançamento			36º lançamento			70º lançamento		
3º lançamento			37º lançamento			71º lançamento		
4º lançamento			38º lançamento			72º lançamento		
5º lançamento			39º lançamento			73º lançamento		
6º lançamento			40º lançamento			74º lançamento		
7º lançamento			41º lançamento			75º lançamento		
8º lançamento			42º lançamento			76º lançamento		
9º lançamento			43º lançamento			77º lançamento		
10º lançamento			44º lançamento			78º lançamento		
11º lançamento			45º lançamento			79º lançamento		
12º lançamento			46º lançamento			80º lançamento		
13º lançamento			47º lançamento			81º lançamento		
14º lançamento			48º lançamento			82º lançamento		
15º lançamento			49º lançamento			83º lançamento		
16º lançamento			50º lançamento			84º lançamento		
17º lançamento			51º lançamento			85º lançamento		
18º lançamento			52º lançamento			86º lançamento		
19º lançamento			53º lançamento			87º lançamento		
20º lançamento			54º lançamento			88º lançamento		
21º lançamento			55º lançamento			89º lançamento		
22º lançamento			56º lançamento			90º lançamento		
23º lançamento			57º lançamento			91º lançamento		
24º lançamento			58º lançamento			92º lançamento		
25º lançamento			59º lançamento			93º lançamento		
26º lançamento			60º lançamento			94º lançamento		
27º lançamento			61º lançamento			95º lançamento		
28º lançamento			62º lançamento			96º lançamento		
29º lançamento			63º lançamento			97º lançamento		
30º lançamento			64º lançamento			98º lançamento		
31º lançamento			65º lançamento			99º lançamento		
32º lançamento			66º lançamento			100º lançamento		
33º lançamento			67º lançamento			...		
34º lançamento			68º lançamento			...		

Então, após o preenchimento do Quadro 2, os alunos do grupo da Escola Sete Colinas teriam que responder às seguintes perguntas:

> — *Qual é a probabilidade de sair cara e de sair coroa ao final da atividade?*
>
> — *O que indicam essas probabilidades? Explique o que conclui dos resultados obtidos.*

Nesse momento da estória, o leitor do livro paradidático deve participar efetivamente, respondendo a tarefa proposta, utilizando o Quadro 3 para apresentar a sua resposta dos primeiros 100 lançamentos:

Quadro 3 – Quadro para apresentação da resposta à tarefa proposta referente aos primeiros 100 lançamentos.

Probabilidade de sair Cara →	*P(sair cara) =*	
Probabilidade de sair Coroa →	*P(sair coroa) =*	

O Quadro 4 é espaço para apresentar a sua resposta dos últimos 100 lançamentos:

Quadro 4 – Quadro para apresentação da resposta à tarefa proposta referente aos últimos 100 lançamentos.

Probabilidade de sair Cara →	*P(sair cara) =*	
Probabilidade de sair Coroa →	*P(sair coroa) =*	

O Quadro 5 é espaço para apresentar a sua resposta dos 200 lançamentos:

Quadro 5 – Quadro para apresentação da resposta à tarefa proposta referente aos 200 lançamentos.

Probabilidade de sair Cara →	*P(sair cara) =*	
Probabilidade de sair Coroa →	*P(sair coroa) =*	

Para complementar e fortalecer a apreensão do conceito de Probabilidade Frequentista, a própria professora Rita expõe um fato histórico, qual seja:

> — *Conta-se que no século XVIII, o naturalista francês, conde de Buffon, realizou 4040 lançamentos de uma moeda resultando em 2048 caras. No início do século, por volta de 1900, o inglês Karl Pearson realizou 24000 lançamentos de moeda, obtendo 12012 caras. Vocês percebem que com o aumento do número de realizações do experimento, a frequência relativa de caras tende a convergir para a real probabilidade de ocorrência de cara?*

Consoante a Smole e Diniz (2003), pode-se, no lançamento de uma moeda, fazer uma aproximação da probabilidade de ocorrência da face "cara", após um grande número de repetições do experimento, calculando a frequência relativa do resultado ou evento "sair cara". Tornaram-se famosas as experimentações realizadas por:

- Georges-Louis Leclerc Buffon (1707-1788), nobre francês; lançou uma moeda 4040 vezes e observou 2048 caras em seu experimento, ou seja, $F_r = \frac{2048}{4040} \cong 0{,}5069.$
- John Kerrich, matemático sul-africano; durante o tempo que esteve preso na Segunda Guerra Mundial, obteve 5067 caras em 10000 lançamentos, ou seja, $F_r = \frac{5067}{10000} = 0{,}5067.$
- Karl Pearson (1857-1936), um estatístico inglês, lançou uma moeda 24000 vezes, obtendo 12012 caras, ou seja, $F_r = \frac{1202}{24000} = 0{,}5005.$

Godino, Batanero e Cañizares (1996, p. 24) apoiaram-se no uso do computador para simular um experimento envolvendo o lançamento de uma moeda, numa sequência de 14000 repetições. Observou que a frequência de caras era 0,50266429, ou seja, muito próxima de ½. Esse experimento exemplifica, por um lado que, quanto maior o número de repetições, maior a proximidade entre a probabilidade "a posteriori" (calculada com base na realização de um experimento) e a probabilidade "a priori" (calculada a partir de dados teóricos, sem a manipulação experimental). Em particular, no experimento da moeda, na perspectiva clássica, a probabilidade matemática, ou a priori, assume valor ½ para cada um de seus possíveis sucessos.

E retornando à participação de um dos componentes do grupo da Escola Sete Colinas, pretendeu-se demonstrar que os alunos entenderam a proposta da professora:

> — *Mas, professora, eles tinham tempo para fazer isso? E que curiosidade!!!*

E concluindo a apresentação do enfoque frequentista de probabilidade, a professora Rita, que iniciou a atividade, a fecha, da seguinte forma:

> — *Acredito que eram curiosidades como essas que hoje temos maior facilidade em compreender muitas coisas. Como por exemplo, que a probabilidade de ocorrência de um evento aleatório não nos traz nenhuma certeza.*

De acordo com a Teoria Antropológica do Didático os tipos de tarefa (T) são:

- Tarefa T_{23}: Descobrir, através das anotações do quadro, qual é a probabilidade de sair cara ou coroa, ao lançar uma moeda, consecutivamente, por 100 vezes, fazendo as anotações a cada lançamento.
- Tarefa T_{24}: Descobrir, através das anotações do quadro, qual é a probabilidade de sair cara ou coroa, ao lançar uma moeda, novamente consecutivamente, por 100 vezes, fazendo as anotações a cada lançamento.
- Tarefa T_{25}: Descobrir, através das anotações do quadro, qual é a probabilidade de sair cara ou coroa, ao lançar, observando o lançamento da moeda, por duas vezes, ou seja, 200 lançamentos.

A técnica (τ_{26}) utilizada é preencher os quadros referentes às Tarefas 23 a 25, como citado no livro paradidático, utilizando uma moeda, efetuando os lançamentos, anotando os resultados. Após o preenchimento do quadro, faz-se a contagem e anotam-se os resultados de quantas vezes saiu cara, e em quantas vezes saiu coroa, e determinar as suas probabilidades.

A tecnologia (θ), utilizada, indica o uso de um quadro para organizar as anotações, e no caso de probabilidade experimental, facilitar a organização e a contagem do número de possibilidades de ocorrência de um evento.

A teoria (Θ), associada à tarefa e subtarefas propostas, é:

Gonçalves e Coutinho (2006, p. 9) dizem que o enfoque frequentista refere-se à obtenção da probabilidade de um evento a partir da realização de N vezes uma experiência.

Teodoro, Lopes e Mourão (2010) referem-se ao enfoque frequentista a partir da suposição da repetição N vezes do experimento E, e sejam A e B dois eventos associados e admitindo que sejam, respectivamente, n(A) e n(B) os números nas N repetições. Definem ainda que $f(A) = \frac{n(A)}{N}$ é denominada frequência relativa do evento “A” nas N repetições de E, sendo que a frequência relativa f(A) apresenta as seguintes propriedades:

1) $0 \leq f(A) \leq 1$.
2) f(A) = 1 se, e somente se, A ocorrer em todas as N repetições.
3) f(A) = 0 se, e somente se, A nunca ocorrer nas N repetições.
4) Se A e B forem eventos mutuamente excludentes, e se f(AUB) for a frequência relativa associada ao evento AUB, então, f(AUB) = f(A) + f(B).
5) f(A), com base em N repetições do experimento e considerada como uma função de N, "converge" em certo sentido probabilístico para P(A), quando $N \to \infty$.

Apoia-se também em Coutinho e Caberlim (2015, p.3):

> No que se refere ao letramento probabilístico, buscamos identificar indícios de que o aluno:
>
> (a) identifique a existência de um protocolo experimental que permite a descrição completa das condições de realização do experimento, e consequentemente, sua reprodução nas mesmas condições (percepção da reprodutibilidade);
> (b) identifique o componente de imprevisibilidade pela impossibilidade de calcular ou de determinar previamente o resultado final do experimento.
> (c) identifique a possibilidade de descrever com precisão o conjunto de resultados possíveis do experimento partindo do protocolo experimental.

> Estes três componentes do letramento foram identificados em Coutinho (2001), embora a autora os designasse como as condições para a construção do conceito de probabilidade.

Coutinho (1994, p. 09) defende a visão frequentista de probabilidade que parece, “[...] mais adequada a um primeiro contato com as probabilidades, pois pode utilizar experimentos ligados à realidade dos alunos, uma vez que não precisa estar limitado à hipótese de equiprobabilidade”. A utilização da probabilidade frequentista no ensino se justifica por fazer parte de nosso cotidiano, pois estamos sempre cercados de informações presentes em jornais, revistas, televisão, internet e noticiários, em que a maioria dos dados probabilísticos é calculada por meio dessa probabilidade.

Segundo Abe e Bittar (2010), o cálculo da probabilidade através da concepção frequentista é *a posteriori*, assim, mesmo sem ter o conhecimento teórico, a utilização intuitiva do conceito de frequência relativa é empregada de alguma forma no cotidiano das pessoas, apesar de haver necessidade de repetição do experimento um número significativo de vezes. Nessa etapa, os leitores do livro paradidático são convidados a ajudar os personagens do livro, respondendo às perguntas:

> Ajude o grupo da Escola Sete Colinas a vencer essa última etapa da Olimpíada, respondendo às perguntas e assinalando as respectivas respostas na cartela:
>
> — *Agora é com você...*

Para que o grupo da Escola Sete Colinas, grupo principal de personagens do livro paradidático, ganhe a competição da Olimpíada de Probabilidades, é necessário que participe do jogo “Bingo das Probabilidades”, respondendo a algumas perguntas e assinalando, em uma cartela, as respostas que, de acordo com a Teoria Antropológica do Didático, são as seguintes tarefas:

Pergunta 1) No lançamento de um dado de 6 faces, não viciado, qual a probabilidade de se tirar um número par?

Tarefa $T_{26:}$ Calcular a probabilidade de, no lançamento de um dado com 6 faces, após a sua imobilização, a face superior ser um número par.

Técnica (τ_{27}): $P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ou 50%.

1) Sabendo que as 6 faces de um dado são numeradas com números naturais consecutivos de 1 a 6, o Espaço Amostral fica definido como S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, cuja quantidade dos elementos é expresso por n(S) = 6;
2) Identificar os números pares entre 1 e 6: sabendo que o número par inteiro é aquele que ao ser dividido por 2 resulta em um número inteiro, nesse caso, será A_1 = {2, 4, 6}, quantidade definida por $n(A_1) = 3$;
3) Realizar a razão entre o número de elementos de *A* ($n(A_1)=3$) e o número de elementos de *S (n(S) =6), portanto, a probabilidade de A_1 é igual a* $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ou 50%.

Pergunta 2) Vinte pedaços de papel são numerados de 1 a 20. Se um desses papéis for sorteado, qual a probabilidade de ser retirado um número entre 5 e 10?

$T_{27:}$ Calcular a probabilidade de sortear um número natural com limites definidos (entre 5 e 10) em um conjunto formado por pedaços de papel são numerados de 1 a 20.

Técnica (τ_{28}): $P(A_2) = \frac{n(A_2)}{n(S)} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ ou 20%.

1) Determinar o Espaço Amostral. Sabendo que os vinte pedaços de papel são numerados de 1 a 20, o Espaço Amostral fica definido como S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,19, 20}, cuja quantidade dos elementos é expressa por n(S) = 20;

2) Identificar os números entre 5 e 10 que pertencem ao conjunto, são eles: A_2 = {6, 7, 8 e 9}. Assim o número de elementos do conjunto ou evento A_2 é definido por $n(A_2) = 4$.

3) Realizar a razão entre o número de elementos de *A* ($n(A_2) = 4$) e o número de elementos de *S* (*n(S) = 20), portanto, a probabilidade de A_2 é igual a* $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ *ou* 20%.

Pergunta 3) No lançamento de um dado não viciado, qual a probabilidade de se tirar um número menor que 5?

$T_{28:}$ Calcular a probabilidade de sair um número no lançamento de um dado, respeitando uma condição.

Técnica (τ_{29}): $P(A_3) = \frac{n(A_3)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$ *ou aproximadamente* 66,67%.

1) Determinar o Espaço Amostral. Como já justificado na tarefa t_1, as 6 faces de um dado são numeradas com números naturais, consecutivos de 1 a 6, portanto, o Espaço Amostral fica definido como S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, cuja quantidade dos elementos fica expresso por n(S) = 6,

2) Identificar os números naturais menores que 5: os números são, nessas condições, 1, 2, 3 e 4, cuja quantidade dos elementos fica expresso por $n(A_3) = 4$;

3) Realizar a razão entre o número de elementos de *A* ($n(A_3) = 4$) e o número de elementos de *S (n(S) = 6), portanto, a probabilidade de A_3 é igual a*

$\frac{4}{6} = \frac{1}{3}$ *ou aproximadamente* 66,67%.

Pergunta 4) No lançamento sucessivo de dois dados não viciados, qual a probabilidade de se obter soma igual a 3?

$T_{29:}$ Calcular a probabilidade de sair soma três nos resultados apresentados no par ordenado (a, b), no lançamento de dois dados não viciados (“a” resultado obtido no lançamento do primeiro dado e “b” resultado obtido no lançamento do segundo dado).

Técnica (τ_{30}): $P(A_4) = \dfrac{n(A_4)}{n(S)} = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$ *ou aproximadamente* 5,56%.

1) Nesse caso, é importante verificar que o espaço amostral, por serem dois dados, a ocorrência do resultado obtido no lançamento de um dado não influi na ocorrência do outro, resultando assim em 36 resultados possíveis, (6 faces de um dado X 6 faces do outro dado).

Determinar o conjunto dos resultados possíveis que é representado por

S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}, todos com a mesma chance de ocorrer.

2) Determinar o conjunto que corresponde à condição da soma das faces superiores, após o lançamento dos dados, que fica definido como A: soma das faces igual a 3, o conjunto formado pelos resultados possíveis, podemos escrever A = {(1,2), (2,1)}, ou seja, são duas possibilidades.

3) Realizar a razão entre o número de elementos de *A* (n(A_4) = 4) e o número de elementos de *S (n(S) = 6), portanto, a probabilidade de* A_4 *é igual a*

$\dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$ *ou aproximadamente* 5,56%.

Pergunta 5) Formando todos os números possíveis de três algarismos distintos, com os dígitos 1, 2 e 3, qual é a probabilidade de, na escolha de um desses números, ele ser maior que 100?

$T_{30:}$ Calcular a probabilidade de, na formação dos números naturais com 3 ordens, centena, dezena e unidade, obter um número maior que uma centena.

Técnica (τ_{31}): $P(A_5) = \dfrac{n(A_5)}{n(S)} = \dfrac{6}{6} = 1 \ ou \ 100\%.$

1) Os números são da forma __ __ __, com o algarismo das centenas sendo 1, 2 ou 3; para essa posição, temos 3 possibilidades. Para cada algarismo colocado na posição das centenas, o algarismo das dezenas pode ser qualquer um dos 2 restantes (não pode haver repetição), logo, temos 2 possibilidades para preencher a posição das dezenas. Para cada algarismo das centenas e para cada algarismo das dezenas, o algarismo das unidades poderá ser qualquer um restante, portanto, temos (uma) 1 possibilidade para o algarismo das unidades. Utilizando o esquema apresentado na Figura 21, os números são da forma:

3 possibilidades	x	2 possibilidades	x	1 possibilidade

Figura 21 – Possibilidades de ocorrência da tarefa 5.

Portanto, o número de possibilidades é: 3x2x1= 6 possibilidades. E conhecendo os números maiores que 100 que satisfazem à condição do problema, fica determinado que são 6 os resultados possíveis.

2) Escrever os números com 3 dígitos distintos, utilizando os algarismos citados no problema, formando o espaço amostral que será nomeado por S = {(123), (132), (213), (231), (312), (321)};

3) Conhecer o valor posicional dos algarismos nos números que, nesse caso, pede-se os números maiores que 100; portanto, com 3 ordens, obedecendo a uma condição, ou seja, A_5 = {(123),(132),(213),(231),(312),(321)}, dessa forma n(A_5) = 6;

4) Realizar a razão entre o número de elementos de A_5 (n(A_5) = 6) e o número de elementos de *S (n(S) = 6), portanto, a probabilidade de A_5 é igual a* $\dfrac{6}{6} = 1 \ ou \ 100\%.$

Pergunta 6) No lançamento de dois dados não viciados, qual a probabilidade de se obter soma igual a 1?

T_{31}: Calcular a probabilidade de sair soma um nos resultados apresentados no par ordenado (a, b), no lançamento de dois dados não viciados (“a” resultado obtido no lançamento do primeiro dado e “b” resultado obtido no lançamento do segundo dado).

Técnica (τ_{32}): $P(A_6) = \dfrac{n(A_6)}{n(S)} = \dfrac{0}{36} = 0 \ \ ou \ \ 0\%.$

Da mesma forma que a tarefa T_{30}, essa atividade apenas se diferencia pela condição de a soma ser 1, portanto, o resultado será diferente, visto que o cálculo da probabilidade sugere que se divida o número de casos favoráveis pelo total de casos possíveis. Assim sendo, como não há possibilidade de obter soma 1 ($A_6 = \varnothing$) após lançar dois dados não viciados, o resultado da divisão, $n(A_6) = 0$ e a probabilidade será determinado pela razão de 0 por 36 que é igual a 0. Esse resultado demonstra que o evento é impossível de ocorrer.

Pergunta 7) Em um estojo há 6 canetas azuis e 4 vermelhas. Qual a probabilidade de retirarmos desse estojo, ao acaso, uma caneta azul?

T_{32}: Calcular a probabilidade de ocorrência, em um experimento aleatório, que é a seleção de uma caneta azul, num estojo que contém canetas azuis e vermelhas.

Técnica (τ_{33}): $P(A_7) = \dfrac{n(A_7)}{n(S)} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} ou \ \ 60\%.$

1) Determinar a quantidade de elementos do experimento, visto que, nessa atividade, são mencionadas 6 canetas azuis e 4 vermelhas, sendo possível fazer uma simples operação de adição e denominando o espaço amostral pela letra S, podemos definir

como n(S) = 10.

2) Utilizando a fórmula e atendendo à condição, retirar uma caneta azul, a quantidade de ocorrer é dada por n(A_7) = 6, pois contam 6 canetas azuis no estojo.

3) Realizar a razão entre o número de elementos de A_7 (n(A_7) = 6) e o número de elementos de *S (n(S) = 10), portanto, a probabilidade de A_7 é igual a* $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ *ou* 60%.

Pergunta 8) Laura desafiou Denise a resolver uma questão de múltipla escolha, com quatro alternativas, em que apenas uma é correta. Porém, Denise não sabe a resposta e vai tentar adivinhar, utilizando a sorte. Qual a probabilidade de Denise acertar a questão?

$T_{33:}$ Calcular a probabilidade de acertar uma questão de múltipla escolha, com quatro alternativas, considerando que o aluno não sabe a resposta e irá contar com a sorte.

Técnica (τ_{34}): $P(A_8) = \frac{n(A_8)}{n(S)} = \frac{1}{4} ou\ 25\%.$

1) Determinar a quantidade de elementos do experimento, visto que, nessa atividade, é mencionado que a questão possui 4 alternativas de múltipla escolha. Denominando o espaço amostral pela letra S, podemos definir como n(S) = 4.

2) Considerando que, dentre as alternativas de múltipla escolha, somente uma delas é a resposta correta, então n(A_8) = 1.

3) Realizar a razão entre o número de elementos de A_8 (n(A_8) = 1) e o número de elementos de *S (n(S) = 4), portanto, a probabilidade de A_7 é igual a* $\frac{1}{4} ou$ 25%.

A Tecnologia (θ_1), referente às tarefas T_{26} a T_{29} e T_{31} a $T_{34,}$ é o enfoque clássico de probabilidade, abordando o cálculo de probabilidade simples.

A Tecnologia (θ_2), referente à tarefa $T_{30,}$ é o Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo.

A teoria Θ1, que explica e justifica as tecnologias (θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, θ_6, θ_7 e θ_8) e as técnicas (τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_6, τ_7 e τ_8), pode ser resumida da seguinte maneira:

Para o cálculo da probabilidade, numa visão clássica, é utilizada a fórmula: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$, em que n(A) é a quantidade de elementos do conjunto que representa os casos favoráveis e n(S) a quantidade de elementos do Espaço Amostral.

Segundo Smole e Diniz (2010), a teoria fica expressa por:

Admitindo-se que as chances de eventos simples ocorrerem em um espaço amostral *S* (não vazio e finito) sejam iguais, e chamando *S* de espaço de eventos equiprováveis, consideremos um evento *A,* de espaço amostral finito *S* (não vazio) e a probabilidade de ocorrer o evento *A (P(A)),* como a razão entre o número de elementos de *A (n(A))* e o número de elementos de *S (n(S))*, que é indicado por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

A teoria Θ_2, que explica e justifica a tecnologia θ_2 e a Tarefa 5, pode ser resumida pelo Princípio Fundamental da Contagem expressa por Smole e Diniz (2010, p.132).

Pergunta 9) Uma caixa contém 3 bolas azuis, 5 bolas vermelhas e 2 bolas amarelas. Retirando uma delas ao acaso, qual é a probabilidade de não ser bola azul?

$T_{34:}$ Calcular a probabilidade de um evento não ocorrer.

Técnica (τ_{35}):

$$P(A_9) = \frac{n(A_9)}{n(S)} = \frac{7}{10} ou \ \ 70\%.$$

ou

$$P(A_9) = 1 - \left[\frac{n(\overline{A_9})}{n(S)}\right] = 1 - \left[\frac{3}{10}\right] = \frac{7}{10} \ \ ou \ \ 70\%.$$

1) Determinar a quantidade de elementos do experimento, visto que, nessa tarefa, é mencionado que a caixa contém 3 bolas azuis, 5 bolas vermelhas e 2 bolas amarelas; denominando o espaço amostral pela letra S, podemos definir como n(S) = 10, resultado definido pela soma do número de bolas que constam da caixa;

2) Determinar a quantidade de bolas que não sejam azuis, ou seja, bolas vermelhas e amarelas, que somam 7 bolas, assim, $n(A_9) = 7$;

3) Determinar a quantidade de bolas azuis que estão na caixa, ou seja, 3 bolas azuis, dessa forma, define-se como $n(\overline{A_9}) = 3$;

4) Realizar a razão entre o número de elementos de A_9 ($n(A_9) = 7$) e o número de elementos de *S (n(S) = 10), portanto, a probabilidade de* A_9 *é igual a* $\frac{7}{10} ou \ \ 70\%.$

5) Utilizando a fórmula para encontrar o resultado e atendendo à condição, na retirada de uma bola, não ocorrer a saída de uma azul, a quantidade de ocorrer é dada por $P(A_9) = 1 - P(\overline{A_9}) = 1 - \left[\frac{n(\overline{A_9})}{n(S)}\right]$ sendo que $n(\overline{A_9}) = 3$ que corresponde à quantidade de bolas azuis, então, $1 - \left[\frac{3}{10}\right] = \frac{7}{10} \ \ ou \ \ 70\%.$

Tecnologia θ_9: propriedades de probabilidade complementar.

Teoria $\Theta_{9:}$

Utilizando a fórmula para encontrar o resultado e atendendo à condição, na retirada de uma bola, não ocorrer a saída de uma azul, a quantidade de ocorrer é dada por $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left[\dfrac{n(\overline{A})}{n(S)}\right]$.

Em outras palavras, para o cálculo da não ocorrência de um evento, é utilizada a subtração do total de eventos possíveis pelo evento que não se quer; portanto, a probabilidade de não ocorrer uma bola azul é dada pelo complementar do evento “retirar uma bola azul”.

Segundo Smole e Diniz (2010, p. 168), para o cálculo da probabilidade de não ocorrer um evento, fica definido da seguinte maneira:

> Seja *A* um evento de espaço amostral *S*. O conjunto complementar de *A* em relação a *S* é o conjunto dos elementos de *S* que não pertencem a *A*. É indicado por Ā ou C_S^A ou *S – A.*

Smole e Diniz (2010, p.168) ainda seguem afirmando que “a probabilidade de não ocorrer um evento é igual a 1, menos a probabilidade de que ele ocorra”.

As organizações praxeológicas matemáticas (probabilísticas), que foram utilizadas e identificadas no livro paradidático, nas 34 (trinta e quatro) tarefas, são apresentadas no Quadro 6, bem como os objetivos das organizações probabilísticas.

Uma organização matemática é elaborada em torno de uma noção ou conceito e, nesse trabalho, inerente à própria Probabilidade; ou seja, diz respeito a como é direcionado o conteúdo, com relação aos enfoques probabilísticos.

Quadro 6 – Relação dos objetivos de aprendizagem fixados na proposta do paradidático.

Organização Matemática (OM)	**Objetivo**
OM_1	Utilizar experimentos em que os alunos possam participar e perceber que a

	determinação de uma probabilidade não precisa estar limitada à hipótese de “equiprobabilidade” e contribuir para uma aprendizagem que desenvolva as potencialidades probabilísticas dos alunos, ampliando sua capacidade de tomar decisões, de forma que também faça sentido fora do contexto escolar. Além disso, confrontar dois pontos de vista, quando definimos uma probabilidade: o ponto de vista clássico ou laplaciano e o ponto de vista frequentista.
OM_2	Utilizar a ideia de que, quando um evento é composto por *n* etapas, sucessivas e independentes, de tal forma, que as possibilidades da primeira etapa é *m* e as possibilidades da segunda etapa é *n*, consideramos, então, que o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto m*n.
OM_3	Desenvolver o enfoque clássico de probabilidades, que parte de problemas de contagem, ou seja, a contagem simples de número de possibilidades relacionadas aos resultados de uma experiência aleatória e do número de possibilidades que representam as características que se deseja observar. Esse enfoque está relacionado ao ponto de vista Laplaciano para a definição de probabilidades (razão entre o número de sucessos e o número total de casos).
OM_4	Considerar que a probabilidade de ocorrer um determinado evento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis é o número de casos possíveis (enfoque clássica ou laplaciano de probabilidade), associado à definição axiomática de probabilidade, que apresenta um evento qualquer P(A) é definido em $0 \leq P(A) \leq 1$ e dessa forma, sempre será certo se esse resultado for igual a 1, impossível se for igual a 0 e provável se esse resultado estiver entre 0 e 1.
OM_5	Organizar processos de contagem, considerando a importância de utilizar situações-problema sem o uso de fórmula, para que o aluno se aproprie do Princípio Fundamental da Contagem, para depois compreender e valorizar o sentido das fórmulas. Assim, aprender a organizar e a contar um número de possibilidades, que exige formas adequadas para ordenar informações.
OM_6	Utilizar propriedades para determinar a probabilidade de ocorrência de eventos associados ao experimento como a regra da soma, que nos dá a probabilidade da união de dois eventos quaisquer. Utilizar propriedades para determinar a probabilidade de ocorrência de eventos associados ao experimento, como a regra do produto, que nos dá a probabilidade da intersecção de dois eventos quaisquer e que sejam independentes. A probabilidade da intersecção de dois eventos ou probabilidade de eventos sucessivos determina a chance, a possibilidade de dois eventos ocorrerem simultânea ou sucessivamente. Na prática, dois eventos são independentes quando a ocorrência de um evento não influencia a ocorrência do outro evento. Utilizar propriedades para determinar a probabilidade de ocorrência de eventos associados ao experimento, como a soma das probabilidades de um evento e do seu evento complementar ser igual à unidade.
OM_7	Associar outras áreas da Matemática, como a Geometria, calculando a área de uma região retangular, multiplicando a medida da base (comprimento) pela medida da altura (largura) e, posteriormente, associar à possibilidade de ocorrência de eventos.

O Quadro 6 pode ser associado à organização praxeológica probabilística utilizada no livro paradidático e que permite o desenvolvimento do letramento probabilístico segundo Gal (2005) apresentado no Quadro 7.

Quadro 7 – Elementos do conhecimento na construção do Letramento Probabilístico.

1. Grandes ideias: Variação, aleatoriedade, independência, previsibilidade/incerteza. 2. Descobrindo probabilidades: Maneiras de localizar ou estimar a probabilidade de eventos. 3. Idioma ou Notação: Os termos e métodos utilizados para comunicar sobre acaso. 4. Contexto: Compreender o papel e as implicações das questões probabilísticas e mensagens em vários contextos e no discurso pessoal e público. 5. Questões críticas: Questões para refletir sobre quando se lida com probabilidades.

O aluno deve estar familiarizado com várias "grandes ideias" fundamentais, especialmente aleatoriedade, independência e variação, mas também com outras ideias que estão subjacentes à sua capacidade em compreender a derivação, representação, interpretação e as implicações de afirmações probabilísticas (MOORE, 1990; SNELL, 1988; PETERSON, 1998).

Alguns aspectos dessas grandes ideias podem ser representados por símbolos matemáticos ou termos probabilísticos, mas a sua essência não pode ser totalmente captada pelas notações técnicas. Os alunos devem compreender a natureza abstrata global destas ideias intuitivamente.

Os alunos têm de estar familiarizados com diferentes maneiras de encontrar a probabilidade de eventos, a fim de compreender enunciados probabilísticos ou para gerar estimativas sobre a probabilidade de eventos. Esse é o lugar onde os enfoques de probabilidade clássica e frequentista tornam-se úteis.

Autores argumentam que os alunos devem compreender a "linguagem do acaso", ou seja, as diversas formas utilizadas para representar e comunicar sobre o acaso e probabilidade (RUTHERFORD, 1997; SCHEAFFER; WATKINS; LANDWEHR, 1998; STEEN, 2001).

Conhecimentos relativos ao contexto são necessários, tanto a partir de um ponto de vista funcional, como do ponto de vista educacional. Compreender que “chance” e “aleatoriedade” afetam eventos e processos do mundo real, em diferentes graus, permite que as pessoas antecipem que certos eventos são mais previsíveis, enquanto outros, nem tanto.

Além disso, esse conhecimento está subjacente a expectativa introduzida anteriormente que é necessário para as pessoas e as organizações terem de fazer declarações sobre a probabilidade de eventos, mas também sobre o nível de certeza por trás de tais afirmações. O entendimento do contexto é pedagogicamente importante, pois ajuda a explicar por que é que há uma necessidade de aprender sobre a probabilidade ou incerteza em diferentes circunstâncias da vida. Essa é a base para a criação de motivação para estudar probabilidade e para a incorporação da aprendizagem do mesmo em contextos socialmente significativos.

O último elemento do conhecimento no modelo de letramento probabilístico envolve saber que questões críticas estão direcionadas para perguntas, quando se encontra uma declaração de probabilidade ou certeza, ou quando se tem que gerar uma estimativa probabilística.

5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

São ainda poucas as obras paradidáticas que contemplam o T*ratamento da Informação*, por ser esse um campo ainda recente na matemática escolar. A investigação realizada acerca de uma organização praxeológica do Ensino de Probabilidade nos livros didáticos mostrou a fragilidade em que se encontra o ensino desse conteúdo. Pensando numa proposta para os professores, como recurso para minimizar a problemática que envolve esse campo do conhecimento, a procura de material reconhecido como paradidático mostrou escassez desse recurso, nos proporcionando realizar algumas reflexões e chegar a conclusões a respeito de elaborar um livro paradidático, para subsidiar os professores, para o ensino dos conteúdos probabilísticos, para os anos finais do Ensino Fundamental.

O desenvolvimento do trabalho se deu da seguinte forma: inicialmente nos propusemos à leitura de livros paradidáticos de conteúdos matemáticos, disponíveis no mercado editorial brasileiro, para que pudéssemos estabelecer parâmetros (forma e conteúdo) para a elaboração de um paradidático para o Ensino de Probabilidade, para o Ensino Fundamental. A seguir, procedeu-se a tarefa de criação de um paradidático. De início, a proposta causou certa ansiedade, mas, no decorrer do tempo, após o amadurecimento da ideia, abraçamos o desafio.

No processo de elaboração, muitas dúvidas surgiram, porém, quando o livro foi ganhando forma, a satisfação e as ideias fluíram livremente. O livro produzido possibilitou produzir material didático que contribua para a formação de conteúdos básicos de Probabilidade, para o Ensino Fundamental. Procurou-se gerar a produção de um recurso divertido, interessante, criativo e altamente didático. Certamente, tornou claro que somos capazes de criar e escrever, ao usarmos empenho e dedicação.

Inserir atividades de criação consiste em um caminho possível para a ruptura com o atual modelo de Ensino de Matemática ou do Ensino de Probabilidade, pautado na reprodução e memorização. Para tanto, observamos ser fundamental, em nosso processo de formação, que seja experienciada situação de criação na produção de conhecimentos, para que possamos construir os próprios recursos, transformando a realidade em que atuamos, e ainda, oportunizando situações de criatividade, as quais foram vivenciadas.

Para Dalcin (2002), o paradidático de Matemática ainda está em processo de maturação e somente se concretizará quando os professores, de fato, começarem a se tornar autores e/ou coautores, partilhando suas experiências e "pesquisas" em sala de aula. Talvez um dia, as leis do mercado consumista, que ditam as publicações, possam ser substituídas por leis que primem pela qualidade do ensino.

A atividade de criação de paradidático contribuiu para a consecução do objetivo deste trabalho, tendo em vista a divulgação de recurso de ensino, que pode ser utilizado por professores do Ensino Fundamental.

A proposição de atividades ou tarefas no livro paradidático, integrando os enfoques frequentista e clássico de probabilidade, reforça nossa crença de tornar a aprendizagem significativa e abrangente, no que tange aos seus conceitos iniciais de probabilidade.

Godino, Batanero e Cañizares (1996) afirmam que os objetivos educacionais para o estudo da probabilidade devem ser direcionados para o desenvolvimento de aspectos intuitivos dos distintos enfoques de probabilidade, mediante situações apropriadas de aprendizagem.

Relacionamos a seguir um breve resumo com os 34 (trinta e quatro) tipos de tarefas associadas às atividades propostas no livro paradidático, Quadros 8 e 8.1, e as técnicas utilizadas para a solução dessas tarefas, Quadros 9; 9.1 e 9.2.

Quadro 8 - Relação dos tipos de tarefas (1 a 25) utilizados na elaboração do livro paradidático.

Tipo de tarefa	Descrição
T_1	Criar um código, cuja sequência deve ser de três letras, constantes do pião que compõe o “Jogo do Rapa” (R, T, P, D) e dois dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).
T_2	Obter a quantidade de resultados possíveis, ao lançar, simultaneamente (duas vezes), o pião do “Jogo do Rapa”.
T_3	Contar as possíveis faces que podem sair ao lançar o pião do “Jogo do Rapa” ou número de resultados possíveis.
T_4	Chance de sair uma vogal no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”.
T_5	Chance de sair uma consoante no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”.
T_6	Chance de sair a letra R no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”.
T_7	Chance de saírem as letras P ou A no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”.
T_8	Chance de saírem as letras T ou R ou P no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”.
T_9	Chance de saírem as letras D ou R no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”.
T_{10}	Chance de saírem as letras R e T no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”.
T_{11}	Chance de saírem as letras P e I no lançamento do pião do “Jogo do Rapa”.
T_{12}	Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento (considerando que no primeiro lançamento utilizam-se os dois dados), do jogo Mini Bozó, determinar quais e quantas são as chances de marcar a casa Seguida.
T_{13}	Determinar os pontos possíveis para a casa FÚ no jogo Mini Bozó.
T_{14}	Caso o jogador utilize apenas o primeiro lançamento, do jogo Mini Bozó, determinar quais e quantas são suas chances de marcar 5 pontos na casa FÚ.
T_{15}	Caso o jogador utilize apenas o primeiro lançamento, do jogo Mini Bozó, determinar quais e quantas são suas chances de marcar 7 pontos na casa FÚ.
T_{16}	Caso o jogador utilize apenas o primeiro lançamento, do jogo Mini Bozó, determinar se ele terá mais chances em marcar a casa SEGUIDA ou a QUADRADA e justificar sua resposta.
T_{17}	Determinar o tipo de veículo mais provável de localizar no Jogo “Batalha do Trânsito” e expresse o porquê de sua resposta.
T_{18}	Determinar se é mais provável localizar um ônibus ou um carro na primeira tentativa no Jogo “Batalha do Trânsito”.
T_{19}	Determinar se é mais provável localizar, na 1ª tentativa, uma motocicleta ou um ônibus no Jogo “Batalha do Trânsito”.
T_{20}	Caso o seu adversário, ao escolher a 1ª tentativa, determinar se é mais provável que localize um veículo ou o asfalto, no Jogo “Batalha do Trânsito” e expresse o porquê de sua resposta.
T_{21}	Se não for possível encostar os veículos nos quatro cantos do tabuleiro quadrado, a possibilidade de localizar uma bicicleta, um carro ou o bitrem, aumenta ou diminui? Por quê?
T_{22}	Caso introduzíssemos uma nova regra, em que os veículos não pudessem encostar-se aos lados do tabuleiro quadrado, descreva eventos aos quais possam ser associados aos seguintes termos: certo, impossível, provável, improvável, pouco provável, muito provável.
T_{23}	Descobrir, através das anotações do quadro, qual é a probabilidade de sair cara ou coroa, ao lançar uma moeda, consecutivamente por 100 vezes, fazendo as anotações, a cada lançamento.
T_{24}	Descobrir, através das anotações do quadro, qual é a probabilidade de sair cara ou coroa, ao lançar uma moeda, novamente, consecutivamente por 100 vezes, fazendo as anotações, a cada lançamento.
T_{25}	Descobrir, através das anotações do quadro, qual é a probabilidade de sair cara ou coroa, ao lançar, observando o lançamento da moeda por duas vezes, ou seja, 200 lançamentos.

Quadro 8.1 - Relação dos tipos de tarefas (26 a 34) utilizados na elaboração do livro paradidático.

Tipo de tarefa	Descrição
T_{26}	Calcular a probabilidade de, no lançamento de um dado com 6 faces, após a sua imobilização, a face superior ser um número par.
T_{27}	Calcular a probabilidade de sortear um número natural, com limites definidos (entre 5 e 10), em um conjunto formado por pedaços de papel numerados de 1 a 20.
T_{28}	Calcular a probabilidade de sair um número, no lançamento de um dado, respeitando uma condição.
T_{29}	Calcular a probabilidade de sair soma três, nos resultados apresentados no par ordenado (a, b), no lançamento de dois dados não viciados ("a" resultado obtido no lançamento do primeiro dado e "b" resultado obtido no lançamento do segundo dado).
T_{30}	Calcular a probabilidade de, na formação dos números naturais com 3 ordens, centena, dezena e unidade, obter um número maior que uma centena.
T_{31}	Calcular a probabilidade de sair soma um nos resultados apresentados no par ordenado (a, b), no lançamento de dois dados não viciados ("a" resultado obtido no lançamento do primeiro dado e "b" resultado obtido no lançamento do segundo dado).
T_{32}	Calcular a probabilidade de ocorrência, em um experimento aleatório, que é a seleção de uma caneta azul num estojo que contém canetas azuis e vermelhas.
T_{33}	Calcular a probabilidade de acertar uma questão de múltipla escolha, com quatro alternativas, considerando que o aluno não sabe a resposta e irá contar com a sorte.
T_{34}	Calcular a probabilidade de um evento não ocorrer.

As técnicas de resolução são apresentadas de forma detalhada, permitindo assim, que se obtenha maior compreensão, com relação a seu emprego na resolução das tarefas associadas a conteúdos probabilísticos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Quadro 9 - Relação das técnicas (1 a 14) utilizadas na elaboração do livro paradidático.

Técnica	Descrição
τ_1	Determinar o número de códigos.
τ_2	Listar os pares em que constem as letras (R, T, P, D) do pião do "Jogo do Rapa" e fazer a contagem dos resultados possíveis.
τ_3	Visualizar as possibilidades, por meio de um diagrama chamado "árvores de possibilidades", e fazer a contagem dos resultados possíveis.
τ_4	Efetuar a operação de multiplicação de fatores iguais.
τ_5	Construir uma tabela de dupla entrada e fazer a contagem dos resultados possíveis.
τ_6	Descrever o espaço amostral associado ao experimento aleatório lançar o pião do "Jogo do Rapa", S = {R, T, P, D}.
τ_7	Relacionar a razão entre o número de resultados favoráveis (zero) e o número de resultados possíveis (quatro), obtendo-se zero, ou seja, nenhuma chance de ocorrer uma vogal.
τ_8	Relacionar a razão entre o número de resultados favoráveis (quatro) e o número de resultados possíveis (quatro), obtendo-se um, ou seja, chance certa de ocorrer uma consoante.
τ_9	Relacionar a razão entre o número de resultados favoráveis (um) e o número de resultados possíveis (quatro), obtendo-se $\frac{1}{4}$ ou 25%, ou seja, existe um quarto de chance de ocorrer a letra "R".
τ_{10}	Determinar a chance de ocorrência da letra "P" ou da letra "A" e, considerando que os dois eventos são mutuamente exclusivos, ou seja, $P \cap A = \emptyset$, então se procede ao somatório das probabilidades dos dois eventos, $\frac{1}{4}$ mais zero, que é igual a $\frac{1}{4}$ ou 25%. Assim, a chance de ocorrência das letras "P" ou "A" é de um quarto.
τ_{11}	Determinar a chance de sair a letra "R" e a letra "P", ou seja, $P(R) = \frac{1}{4}$ e $P(P) = \frac{1}{4}$. Como se deseja a determinação da chance de ocorrência da letra "T" ou da letra "R" ou da letra "R" e considerando que eventos são mutuamente exclusivos entre si, ou seja: $T \cap R = \emptyset$; $T \cap P = \emptyset$; $R \cap P = \emptyset$; então se procede ao somatório das probabilidades dos três eventos, ou seja, $\frac{1}{4}$ mais $\frac{1}{4}$ mais $\frac{1}{4}$, que é igual a $\frac{3}{4}$ ou 75%. Assim, a chance de ocorrência das letras "T" ou "R" ou "P" é de três quartos.
τ_{12}	Determinar a chance de sair a letra "R", ou seja, $P(R) = \frac{1}{4}$. Como se deseja a determinação da chance de ocorrência da letra "D" ou da letra "R", e considerando que eventos são mutuamente exclusivos, ou seja: $D \cap R = \emptyset$; então se procede ao somatório das probabilidades dos dois eventos, $\frac{1}{4}$ mais $\frac{1}{4}$, que é igual a $\frac{2}{4}$ ou 50%. Assim, a chance de ocorrência das letras "D" ou "R" é a metade dos resultados possíveis.
τ_{13}	Determinar a chance de ocorrência da letra "R" e da letra "T" e, considerando que eventos são independentes, ou seja, a ocorrência da letra "R" não interfere na ocorrência da letra "T"; então se procede ao produto das probabilidades dos dois eventos, $\frac{1}{4}$ vezes $\frac{1}{4}$, que é igual a $\frac{1}{16}$ ou 6,25%. Pode-se ainda pensar que a ocorrência dos dois eventos ocorre concomitantemente. Assim, a chance de ocorrência das letras "R" e "T" é um, dezesseis avos dos resultados possíveis.
τ_{14}	Determinar a chance de ocorrência da letra "P" e da letra "I" e, considerando que eventos são independentes, ou seja, a ocorrência da letra "P" não interfere na ocorrência da letra "I"; então se procede ao produto das probabilidades dos dois eventos, $\frac{1}{4}$ vezes zero, que é igual a zero. Assim, não há chance de ocorrência das letras "D" e "I", concomitantemente.

Quadro 9.1 - Relação das técnicas (15 a 24) utilizadas na elaboração do livro

paradidático.

Técnica	Descrição
τ_{15}	Marcar a casa SEGUIDA se ocorrer um dos seguintes casos: (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4), ou (6,5). Como para a casa SEGUIDA vale duas faces distintas, em sequência, no lançamento dos dois dados (vermelho e branco), a solução é 10 chances.
τ_{16}	Considerar que, para a casa FÚ vale a soma das faces, nesse caso, as pontuações podem ser 4 se as faces forem (1,3) ou (3,1), 5 se as faces (1,4) ou (4,1) saírem, 6 se as faces forem (1,5), (5,1), (2,4) ou (4,2), 7 no caso de as faces serem (1,6), (6,1), (2,5) ou (5,2), para a pontuação 8 valem (2,6), (6,2), (3,5), ou (5,3), para a pontuação 9 salvam os pares (3,6), (6,3), (4,5) ou (5,4) e, finalmente, para atingir 10 pontos, as faces serão os pares (4,6) ou (6,4).
τ_{17}	Ocorrer a casa FÚ, independentemente de o jogador ter utilizado um ou dois lançamentos, são válidos os casos e, que as duas faces são distintas, mas não em sequência, ou seja, pelo Espaço Amostral S observamos 20 casos possíveis. Temos que o jogador marcará 5 pontos nos casos (1,4) ou (4,1), duas chances em 36 possíveis se utilizar o primeiro lançamento do jogo Mini Bozó.
τ_{18}	Ocorrer a casa FÚ, independentemente de o jogador ter utilizado um ou dois lançamentos, são válidos os casos em que as duas faces são distintas, mas não em sequência, ou seja, pelo Espaço Amostral S observamos 20 casos possíveis. Temos que o jogador marcará 7 pontos nos casos (1,6), (2,5), (5,2) ou (6,1), portanto 4 chances em 36 possíveis se utilizar o primeiro lançamento do jogo Mini Bozó.
τ_{19}	Marcar a casa SEGUIDA o jogador deverá obter um dos casos (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6) ou (6,5), assim, terá 10 chances em 36, considerando que utilizou apenas o primeiro lançamento, e para marcar a casa QUADRADA, o jogador deverá obter um dos casos (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) ou (5,5) obtendo 5 chances em 36, portanto, conclui-se que o jogador terá mais chances de marcar a casa SEGUIDA do que a casa QUADRADA.
τ_{20}	Considerar o tabuleiro do jogo, um quadriculado de 10 cm por 10 cm, enumerados horizontalmente com números de 1 a 10, e na vertical letras do nosso alfabeto de “A” a “J”, o veículo bitrem, aquele que utiliza no tabuleiro a área de 8 cm2, se comparado com as medidas das áreas do ônibus (4 cm2), do carro (3 cm2), da bicicleta (1 cm2) e da motocicleta (2 cm2), verifica-se que a possibilidade de localizar o bitrem é maior.
τ_{21}	Considerar o tabuleiro do jogo, um quadriculado de 10 cm por 10 cm, enumerados horizontalmente com números de 1 a 10, e na vertical, letras do nosso alfabeto de “A” a “J”, como existem dois carros e cada um ocupa 3 cm2, temos, então, que os dois carros ocupam 6 cm2. Da mesma forma, temos somente 1 ônibus e esse ocupa 4 cm2. Assim, podemos concluir que os dois carros (6 cm2) ocupam mais espaço que o ônibus (4 cm2).
τ_{22}	Considerar o tabuleiro do jogo, um quadriculado de 10 cm por 10 cm, enumerados horizontalmente com números de 1 a 10, e na vertical, letras do nosso alfabeto de “A” a “J”, como existem três motocicletas e cada uma ocupa 2 cm2, temos, então, que as três motocicletas ocupam 6 cm2. Da mesma forma, temos somente 1 ônibus e esse ocupa 4 cm2. Assim, podemos concluir que as três motocicletas (6 cm2) ocupam mais espaço que o ônibus (4 cm2).
τ_{23}	Localizar o asfalto, pois, no total do espaço considerado, são 10 x 10 = 100 espaços, e considerando que os veículos ocupam 28 espaços, então, teremos: (100 espaços totais – 28 espaços ocupados por veículos) = 72 espaços em que aparece o asfalto. Atentando para a área do tabuleiro, com 100 cm2 (10 cm x 10 cm), e os veículos ocupando 28 cm2 do total, a realização de uma simples operação de subtração (100 cm2 – 28 cm2), verificou-se que a solução dessa tarefa está na possibilidade de localizar o asfalto, pois sobrariam 72 cm2 - representariam os espaços em que aparece o asfalto.
τ_{24}	Considerar que os espaços possíveis serão subtraídos daqueles em que se encostasse aos quatro CANTOS do tabuleiro, ou seja, devemos subtrair 4 espaços do total de 100 espaços iniciais. Assim, teremos 96 espaços possíveis. Dessa forma, é mais fácil encontrar os veículos em um menor número de espaços possíveis. Subtraindo os 4 cantos do tabuleiro, como possíveis lugares para localizar os veículos, as possibilidades aumentam, pois, os jogadores não terão que “apostar” nos cantos; sendo assim, a chance de acertar os veículos, com um número menor de lugares para dispor os veículos, fica aumentada.

Quadro 9.2 - Relação das técnicas (25 a 35) utilizadas na elaboração do livro

paradidático.

Técnica	Descrição
τ_{25}	Considerar que os espaços possíveis serão subtraídos daqueles em que se encostasse aos quatro LADOS do tabuleiro, ou seja, devemos subtrair 36 espaços do total de 100 espaços iniciais. Assim, teremos 64 espaços possíveis. (1) CERTO: Localizar um veículo ou asfalto dentre os 64 espaços possíveis. (2) IMPOSSÍVEL: Localizar um veículo ou asfalto dentre os 36 espaços que encostam nos quatro lados do tabuleiro quadrado. (3) PROVÁVEL: Localizar um bitren dentre os 64 espaços possíveis. (4) POUCO PROVÁVEL: Localizar uma bicicleta, na 1ª tentativa, dentre os 64 espaços possíveis. (5) MUITO PROVÁVEL: Localizar um veículo ou asfalto, exceto uma bicicleta, na 1ª tentativa, dentre os 64 espaços possíveis.
τ_{26}	Utilizar uma moeda, efetuando os lançamentos, anotando os resultados. Após o preenchimento do quadro, faz-se a contagem e anotam-se os resultados de quantas vezes saiu cara, e em quantas vezes saiu coroa, e determinar as suas probabilidades.
τ_{27}	Realizar a razão entre o número de elementos de A (n(A1)=3) e o número de elementos de S (n(S) =6), portanto, a probabilidade de A1 é igual a $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ *ou* 50%.
τ_{28}	Realizar a razão entre o número de elementos de A (n(A2) = 4) e o número de elementos de S (n(S) = 20), portanto, a probabilidade de A2 é igual a $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$ *ou* 20%.
τ_{29}	Realizar a razão entre o número de elementos de A (n(A3) = 4) e o número de elementos de S (n(S) = 6), portanto, a probabilidade de A3 é igual a $\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$ *ou aproximadamente* 66,67%.
τ_{30}	Realizar a razão entre o número de elementos de A (n(A4) = 4) e o número de elementos de S (n(S) = 6), portanto, a probabilidade de A4 é igual a $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ *ou aproximadamente* 5,56%.
τ_{31}	Realizar a razão entre o número de elementos de A5 (n(A5) = 6) e o número de elementos de S (n(S) = 6), portanto, a probabilidade de A5 é igual a $\frac{6}{6}=1$ *ou* 100%.
τ_{32}	Realizar a razão entre o número de elementos de A6 (n(A6) = 0) e o número de elementos de S (n(S) = 6), portanto, a probabilidade de A6 é igual a $\frac{0}{6}=0$ *ou* 0%.
τ_{33}	Realizar a razão entre o número de elementos de A7 (n(A7) = 6) e o número de elementos de S (n(S) = 10), portanto, a probabilidade de A7 é igual a $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ *ou* 60%.
τ_{34}	Realizar a razão entre o número de elementos de A8 (n(A8) = 1) e o número de elementos de S (n(S) = 4), portanto, a probabilidade de A7 é igual a $\frac{1}{4}$ *ou* 25%.
τ_{35}	Utilizar a fórmula para encontrar o resultado e atendendo a condição, na retirada de uma bola, não ocorrer a saída de uma azul, a quantidade de ocorrer é dado por $P(A_9)=1-P(\overline{A_9})=1-\left[\frac{n(\overline{A_9})}{n(S)}\right]$ sendo que $n(\overline{A_9})=3$ que corresponde a quantidade de bolas azuis, então, $1-\left[\frac{3}{10}\right]=\frac{7}{10}$ *ou* 70%.

Com relação ao bloco teórico-tecnológico, relativo às técnicas principais, presente no livro paradidático elaborado, apresentamos o Quadro 10, que trata com detalhes, quais os elementos teóricos relacionados a cada uma delas.

Quadro 10 – Bloco Tecnológico-teórico relativo às técnicas utilizadas na elaboração do livro paradidático.

Tipos de Tarefa	**Técnica**	**Discurso tecnológico-teórico**
T_1 e T_2	τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 e τ_5	Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo
T_3	τ_6	Descrição do Espaço Amostral.
T_4, T_5 e T_6	τ_7, τ_8 e τ_9	Enfoque Clássico de probabilidade (razão entre a contagem do número de sucessos e do número total de casos).
T_7, T_8, T_9, T_{10}, e T_{11}	τ_{10}, τ_{11}, τ_{12}, τ_{13} e τ_{14}	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se $A \cap B = \varnothing$. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ se A e B são independentes.
T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}, e T_{16}	τ_{15}, τ_{16}, τ_{17}, τ_{18} e τ_{19}	Organização dos processos de contagem pela importância de utilizar situações-problema, sem o uso de fórmula, para que o aluno se aproprie do Princípio Fundamental da Contagem, para depois compreender e valorizar o sentido das fórmulas. Assim, aprender a organizar e a contar um grande número de possibilidades exige formas adequadas para ordenar informações.
T_{17}, T_{18}, T_{19}, T_{20}, e T_{21}	τ_{20}, τ_{21}, τ_{22}, τ_{23} e τ_{24}	Calcular a área de qualquer região retangular, basta multiplicar a medida da base (comprimento) pela medida da altura (largura) e associar a possibilidade de ocorrência de eventos.
T_{22}	τ_{25}	Considerando que a probabilidade de ocorrer um determinado evento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis é o número de casos possíveis (enfoque clássica ou laplaciano de probabilidade), o evento será certo se esse resultado for igual a 1, impossível se for igual a 0 e se esse resultado estiver entre 0 e 1 o evento é considerado provável.
T_{23}, T_{24} e T_{25}	τ_{26}	Enfoque Frequentista de probabilidade (organizar as anotações e, no caso de probabilidade experimental, facilitar a organização e a contagem do número de possibilidades de ocorrência de um evento).
T_{26}, T_{27}, T_{28}, T_{29}, T_{31}, T_{32} e T_{33}	τ_{27}, τ_{28}, τ_{29}, τ_{30}, τ_{32}, τ_{33} e τ_{34}	Enfoque Clássico de probabilidade (razão entre a contagem do número de sucessos e do número total de casos).
T_{30}	τ_{31}	Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo
T_{34}	τ_{35}	Enfoque Clássico de probabilidade (propriedades de probabilidade complementar)

Sugerimos, para trabalhos futuros, a proposta de Truran (1994), que destaca a necessidade de, os docentes, recolocarem essa indagação, por meio de questões mais sofisticadas, além de engajar os estudantes na comparação e avaliação das diferentes formas de probabilidade. Esse autor mostra, por meio de um experimento envolvendo o lançamento de um dado, que há pelo menos três diferentes maneiras de estimar a probabilidade de obter a face seis e que esses valores podem ser completamente diferentes. Essas maneiras são denominadas probabilidade simétrica, probabilidade experimental e probabilidade subjetiva.

No experimento em questão, Truran (1994, p. 28) afirma que em um dado ‘honesto’ surge somente uma probabilidade simétrica, mas há um número infinito de probabilidades subjetivas e experimentais. Em sala de aula não é suficiente apenas falar sobre os diferentes tipos de probabilidade. Necessitamos elaborar questões como o lançamento de um dado 100 vezes com uma probabilidade experimental de obter a face seis e, qual a probabilidade subjetiva que você atribuiria na obtenção da face seis, e qual é a razão para sua escolha? O nível de questão proposto sucinta uma variedade de respostas e, ainda de acordo com Truran (1994, p. 29), tais variações fornecerão oportunidades educacionais valiosas na compreensão da inter-relação entre as três formas de probabilidade, bem como da natureza do modelo matemático.

Acrescentamos também a utilização de jogos na criação do material paradidático para proporcionar contato com a probabilidade, por uma maneira lúdica, e assim instigar os leitores a investigar propriedades matemáticas envolvidas na estrutura dos jogos.

A intenção da construção do paradidático não foi a de substituir o livro didático, e sim complementá-lo e inserir esse material como elemento essencial na formação dos alunos do Ensino Fundamental, em relação aos conteúdos probabilísticos.

É necessário também, ressaltar a importância de o aluno ter contato com a leitura, escrita, interpretação de textos em sua formação inicial, podendo ser com o apoio do livro paradidático onde ele trabalhará os conceitos de uma forma menos linear.

Além disso, percebeu-se, pelo processo de criação do livro paradidático, que esse tipo de material didático deve trazer uma linguagem matemática com que o educando possa familiarizar-se com esse tipo de vocabulário, e até mesmo que possa ajudá-lo no uso da mesma. Em termos de apresentação e apropriação dos conteúdos, podemos ressaltar que o paradidático permite um trabalho interdisciplinar, auxiliando também em sua formação cultural, fazendo com que o aluno vivencie sua realidade, através dos conhecimentos.

Partindo do pressuposto de que o domínio do conteúdo é fundamental para organizar estratégias de ensino, visto que a promoção da aprendizagem não deve ser vista de forma fragmentada, as ações estratégicas de elaboração, os meios e os modos para o estabelecimento da sua prática; requerem um cuidado intermitente para o fim proposto.

A organização praxeológica seguiu o princípio da Teoria Antropológica do Didático, que situa a atividade matemática dentro do conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. A proposta dessa Teoria é que as práticas que os professores devem desenvolver, em sala de aula, devam ocorrer a partir de situações problemáticas que envolvam as especificidades das áreas relacionadas às condições sociais em que o estudante enteja inserido. Para isso, apresentou a noção de praxeologia, que significa, em sua essência, a tentativa de encontrar uma ou mais formas de resolver questões problemáticas, regularmente e com sucesso, no caso, conteúdos probabilísticos para o Ensino Fundamental.

Na elaboração do livro paradidático e atendendo aos princípios da TAD, tomou-se o cuidado, na construção dos enunciados das tarefas a serem desenvolvidas; a verificação se o livro disponibilizava pelo menos uma técnica para resolver a tarefa; se ela era adequada ao ciclo correspondente; se era eficiente; se houve um discurso sobre a técnica.

Aprofundando-se mais sobre como o livro paradidático trata o conceito e utilizando a estória como fio condutor a personagem que representa o professor (professora Rita) buscou-se que esse se apropriasse de um discurso racional, para justificar as técnicas, usando as tecnologias que permitem executar as tarefas.

Em torno de um tipo de tarefa, encontra-se um trio formado de uma técnica, de uma tecnologia e uma teoria em uma instituição. Qualquer que seja a tarefa, a técnica é sempre acompanhada de, no mínimo, um vestígio de tecnologia Esse bloco constitui uma praxeologia, constituída por dois blocos: tecnológico-teórico, indicado como “saber” e o prático-técnico que constitui um “saber fazer”.

Os objetivos precisam estar alicerçados num propósito de saber, em primeiro lugar, o que o aluno sabe a respeito daquilo que se quer ensinar. Isso dá sentido na construção do novo conhecimento, suscitando o aluno articular o que já sabe com o que está sendo apresentado, na intenção de agregar um conhecimento novo àquele que o aluno já possui, possibilitando e incentivando o que de fato significa ensinar.

Mas, nunca é tarde para se abrir os olhos e alertar aqueles que estão à frente da escolha desses livros, para que não escolham apenas pelo livro ser mais barato ou por ser mais colorido, mas, que possam avaliar o conteúdo e ter a certeza de que o livro paradidático escolhido fará a diferença na vida de cada aluno, pois, através de uma boa leitura, podemos conquistar alunos e motivá-los a ler cada vez mais, ou seja, fazer com que o hábito pela leitura se torne uma rotina na vida de cada aluno.

E, para solidificar mais ainda esse laço, o professor pode usar de vários artifícios para motivar o aluno a ler, e assim fazer com que mais alunos gostem de ler e possam ter mais facilidade em todas as disciplinas; pois, independente da língua portuguesa, é importante que se saiba interpretar o enunciado da questão para entender o seu propósito, e um bom leitor se faz a partir dos primeiros anos escolares.

Consideramos que os textos paradidáticos são utilitários, constituídos de informações objetivas que pretendem transmitir conhecimento e informação e, em geral, abordam assuntos paralelos ligados às matérias do currículo regular, de forma a complementar os livros didáticos. Por isso, é necessário que, desde o processo de formação inicial, esses livros possam ser de uso comum pelos professores.

Por fim, recomendamos e pretendemos aplicar o livro paradidático, elaborado em turmas do Ensino Fundamental, seguindo a indicação de Trevizan (2008), ao citar orientações da Editora Scipione, quanto à avaliação de livros paradidáticos:

1) Solicitar aos alunos que expliquem detalhadamente três tipos de assuntos que aprendeu no livro;

2) Solicitar aos alunos que confeccionem uma ficha com as principais ideias do livro.
3) Solicitar aos alunos que avaliem as atividades propostas e a estória através de um texto.

Este estudo teria como objetivo avaliar a efetiva utilização do paradidático por um grupo de alunos, sendo utilizado, por exemplo, um pré-teste para esse grupo, antes da utilização do material produzido e, após aplicado um pós-teste com os mesmos conteúdos, e então avaliar se trouxe ganhos no processo ensino e aprendizagem da Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental.

Sugerimos outras metodologias de análise para avaliar o processo de criação de um livro paradidático, tomando como base a classificação dos registros de representação semiótica em Matemática de Duval (2003), sugere-se a construção de livro paradidático ou análise de livros paradidáticos, buscando elaborar ou localizar, respectivamente, uma diversidade de registros de representação semiótica para trabalhar os conteúdos probabilísticos. Apresentam-se alguns tipos de registros associadas que podem ser utilizados para gerar esta representação:

1) Registro em língua natural ou materna (multifuncional e discursiva);
2) Registro de apreensão operatória e não somente perceptiva (multifuncional e não discursiva);
3) Registro numérico (monofuncional e discursiva);
4) Registro simbólico (monofuncional e discursiva);
5) Registros gráficos e tabelas (monofuncional e não discursiva).

Também recomendamos tomar as ideias de Trevizan (2008), no tocante à abordagem dos conteúdos probabilísticos a serem utilizado na construção ou análise de livro paradidático, ou seja:

- Conteúdos conceituais – à medida que sejam comunicados os temas probabilísticos, serão apresentados algoritmos, justificativas e exemplos de aplicações, que ajudam a compreender os fenômenos e estratégias;

- Conteúdos procedimentais – à medida que se estimula o estudo individual, assim como a compreensão e a interpretação do texto, serão também apresentados exercícios que possibilitarão a repetição dos algoritmos e a verificação de aprendizagem, como fichas de leitura anexas ao livro;
- Conteúdos atitudinais – à medida que veiculam determinados valores e propõe reflexões, dará lugar a uma série de questões que se propõem a conduzir o aluno a buscar respostas e debater pontos de vista.

Para futuras pesquisas, ainda sugerimos que se elaborem Trajetória Hipotética de Aprendizagem – THA que abordem os conteúdos probabilísticos, conforme apontam Lopes e Coutinho (2009):

> [...] As atividades em torno desse conceito de probabilidade têm o potencial de evidenciar diversas conexões matemáticas, permitindo que os alunos utilizem, entre outras, noções relativas a frações, percentagens, proporções e números decimais (LOPES; COUTINHO, 2009, p. 73).

Simon (1995) introduziu a noção de Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) como parte de modelo do Ciclo de Ensino de Matemática, que indica uma proposta para reconstruir a pedagogia da Matemática a partir de uma perspectiva construtivista e aborda um dos paradoxos, que foi introduzido com o movimento da reforma da Matemática, ou seja, a tensão entre uma visão construtivista da aprendizagem, que requer que o ensino considere e se adapte às ações dos alunos e uma ideia tradicional de planejamento do ensino, que se baseia na busca dos objetivos predeterminados e na elaboração de tarefas para alcançá-los.

REFERÊNCIAS

ABE, T. S. O ensino de probabilidades por meio das visões clássica e frequentista. 2011. 192 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, UFMS, Campo Grande (MS), 2011.

ABE, T. S.; BITTAR, M. O ensino de probabilidades nas visões clássica, frequentista e geométrica. In: Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade, 10., Salvador, Bahia. *Anais... Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática,* Salvador–BA, 7 a 9 de julho de 2010.

ADAM, Jean-Michel, REVAZ, F. *A Análise da narrativa*. Lisboa: Editora Gradiva, 1997.

AGRESTI, A.; FRANKLIN, C. *Statistics*: The art and Science os learning from Data. Pearson Prentice Hall, NJ, USA, 2007;

ALMOULOUD, S. A., *Fundamentos da didática da matemática - edição atualizada*. Curitiba: Ed. UFPR, 2010.

ANWAY, D.; BENNETT, E. Common Misperceptions in Probability among Students in an Elementary Statistics Class. In: *Conference on Assessment in Statistics*, Lawrence University, 2004. *Proceedings…* 1 a 4 aug., 2004. p. 1-13. Disponível em: <http://www.rossmanchance.com/artist/proceedings/AnwayBennett.pdf>. Acesso em: 18 jul. 2015.

ARA, A. B. *O ensino de Estatística e a busca do equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios da realidade*. São Paulo, 2006. 113 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2006.

AZCÁRATE, P. G; ¿Qué matemáticas necesitamos para comprender el mundo actual? *Investigación en la Escuela*, n. 32, p. 77-85, 1997.

BARBOSA, E. J. T. O Ensino de Equações Polinomiais do Primeiro Grau: análise comparativa das praxeologias dos documentos oficiais, do livro didático, e do professor. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – EBRAPEM, 18., Recife, Pernambuco. *Anais... Recife: UFPE*, 20 a 23 de novembro de 2014.

BARBOSA, E. J. T.; LIMA, A. P. A. B. Organizações matemática e didática entre duas coleções didáticas sobre equações do primeiro grau. *REVEMAT,* Florianópolis (SC), v. 9, n. 2, p. 110-129, 2014.

BARROS, J. de. *A educação e os livros paradidáticos*. 4. ed. São Paulo: Atual, 2006.

BATANERO, C. Significados de La Probabilidad em la Educación Secundaria. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa*, v. 8, n. 3, p. 247-263, nov. 2005.

BENETTI, M. O jornalismo como gênero discursivo. *Galáxia*, v. 8, n. 15. São Paulo: PUC-SP, 2008.

BENJAMIN, W. Obras escolhidas, Magia e técnica, arte e política. São Paulo: Editora Brasiliense, 1996.

BENNETT, D. J. *Aleatoriedade*. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

BERNSTEIN, P. L. *Desafio dos Deuses*. 6 ed. Rio de Janeiro: Campus, 1997.

BIAJOTI, E. D. *Experimentos Probabilísticos*: noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II. 2103. 107 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, Universidade Federal de São Carlos, 2013.

BIANCHINI, G.; GERHARDT, T.; DULLIUS, M. M. Jogos no ensino de matemática: “Quais as possíveis contribuições do uso de jogos no processo de ensino e de aprendizagem a matemática”. *Revistas Destaques Acadêmicos*, v. 2, n. 4, p. 39-47, 2010.

BORELLI, S. H. S. Ação, suspense, emoção: Literatura e cultura de massa no Brasil. São Paulo: EDUC/ Estação Liberdade, 1996.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l’ativité mathématique aux ostensifs Objet d’etude et problematique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, França: la Pensée Sauvage, v. 19, n. 1, p. 77-124, 1999.

BOSCH, M.; FONSECA, C.; GASCÓN, J. Incompletitud de las organizaciones locales em las instituiciones escolares. *Recherches em Didactique des Mathématiques*. *La Pensée Sauvage*, Grenoble, França, v. 24, p. 205-250, 2004.

BRANDÃO, I. L. *O segredo da nuvem*. 1 ed. São Paulo: Global, 2006.

BRASIL. *Coleção explorando o Ensino*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *Lei n. 9.394/96 de 20 de dezembro de 1996***.** Diretrizes e Bases da Educação. LDB, 1996.

BRASIL. Orientaçãoes Curriculares - Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias/ Secretaria de Educação Básica, Brasília, 2006.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica**.** *Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio – PCN+*. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental**.** *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. A teoria das situações didáticas e a formação do professor. Palestra. São Paulo: PUC, 2006.

BRUCE, C. *Novas Aventuras Científicas de Sherlock Holmes***.** 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2003.

CABRAL JR, R. S.; TRALDI J, A. Abordagem das Noções Iniciais de Probabilidade em uma Perspectiva Construtivista. In: *Encontro Nacional de Educação Matemática*, 10., 2010, Salvador, Bahia. *Anais... Brasília:* Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2010. p. 1-12.

CABRAL, M. A. *A utilização de jogos no ensino de matemática.* 2006. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Brasil, 2006.

CARVALHO, C.; FERNANDES, A. J. Revisitando o conceito de probabilidade com um olhar da Psicologia. *Revista Quadrante*, Lisboa, Portugal, v. 14, n. 2, p. 71-88, 2007.

CARVALHO, D. L.; OLIVEIRA, P. Quatro concepções de probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na licenciatura em matemática: clássica, frequentista, subjetiva e formal. In: Reunião Anual da Anped, 25., 2002, Caxambu, Minas Gerais*.* Anais... Rio de Janeiro: ANPEd, 2002. p. 1-12. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/25/excedentes25/dionelucchesicarvalhot19.rtf>. Acesso em: 18 jul. 2015

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L'approche anthropologique. *Actes de l'U.E. de la Rochelle*, 1998.

CHEVALLARD, Y. *Conceitos fundamentais da Didáctica: perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica.* In. BRUN, J*. Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 12, n. 1, p. 73-112, 1992.

CHEVALLARD, Y. L' analise des pratiques enseignantes en théorie antropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *La Pensée Sauvage-Editions*, Grenoble, França, v. 19, n. 2, p. 221-265, 1999.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Estudar Matemáticas*: O Elo Perdido entre o Ensino e a Aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

COUTINHO, C. Q. S. *Conceitos probabilísticos:* Quais contextos a história nos aponta. REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 2., n. 3 , p. 50-67, 2007.

COUTINHO, C. Q. S. *Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Frequentista.* 1994. 151 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil, 1994.

COUTINHO, C. Q. S. *Introdução ao conceito de probabilidade: uma visão frequentista.* São Paulo: EDUC, 1996.

COUTINHO, C. Q. S. Introduction aux situations aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II. Grenoble, 2001. 338 f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble I, 2001.

COUTINHO, C. Q. S. Probabilidade geométrica: um contexto para a modelização e a simulação de situações aleatórias com Cabri. In: Reunião anual da Anped: GT19, 25., 2002, Caxambu, Minas Gerais. *Anais...* Rio de Janeiro: *ANPED, 2002.* Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/25/tp251.htm#gt19>. Acesso em: 29 jun. 2009.

COUTINHO, C. Q. S.; CABERLIM C. C. L. Simulação computacional para a aprendizagem de probabilidade. In: SORTO, M. A. (Ed.), Advances in statistics education: developments, experiences and assessments. *Proceedings of the Satellite conference of the International Association for Statistical Education (IASE*), July 2015, Rio de Janeiro, Brazil, 2015. 5 p.

CRUZ, M. O. *Construção da Identidade pessoal e do conhecimento*: narrativas no Ensino de Matemática. 2003. 173 f. Dissertação (Mestrado em Educação – Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo, 2003.

CUNHA, P. *Livros paradidáticos*: É o aprender brincando. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2002.

DALCIN, A. *Um olhar sobre o paradidático de matemática*. 2002. 222 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) UNICAMP, Faculdade de Educação, Campinas, 2002.

DALCIN, A. *Um olhar sobre o paradidático de matemática*. *Zetetiké*. Unicamp, v. 15, n. 27, p. 25-35, 2007.

DANTAS, C. A. B. *Probabilidade*: um curso introdutório. 2 ed. 1 reimpressão. São Paulo: Editora Universidade de São Paulo, 2004. (Acadêmica, 10).

DANTE, L. R. *Matemática e suas aplicações*. Volume 1. São Paulo: Ática, 2010.

DANTE, L. R. *Projeto Teláris* – Matemática - 6° ano Ensino Fundamental. 1. ed. São Paulo: Ática, 2012.

DANTE, L. R. *Projeto Teláris* – Matemática - 7° ano Ensino Fundamental. 1. ed. São Paulo: Ática, 2012a.

DIOGO, R. C.; OSÓRIO, A. de. S.; SILVA, D. R. R. da. A Teoria Antropológica do Didático: possibilidades de contribuição ao ensino de Física. In: ENPED - Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, 6., 2007, Florianópolis, Santa Catarina. *Anais...* Florianópolis: UFSC, 28 de novembro e 01 de dezembro de 2007.

DUVAL, R. Registros de representação e números racionais. In: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em matemática*: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. *Boletim SBEM*, São Paulo, v. 4, n. 7, 1996.

Disponível em: <http://www.matematicahoje.com.br/telas/sala/didaticos/recursos_didaticos.asp?aux=C>. Acesso em: 08 jul. 2015.

FISCHBEIN, E. *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1987.

FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A. *Curso de Estatística*. 6 ed. São Paulo: Atlas, 1996.

FONSECA, M. C.; CARDOSO, C. A. Educação matemática e letramento: textos para ensinar matemática e matemática para ler o texto. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. *Escritas e leituras na educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

FURLANI, J. *O Bicho vai pegar! – um olhar pós-estruturalista à Educação Sexual a partir de livros paradidáticos infantis*. 2005. 272 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Porto Alegre, 2005.

GAL, I. Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In: JONES, G. A. (Ed.). *Exploring Probability in School:* Challenges for Teaching and Learning. New York: Springer Science+Business Media, Inc., 2005. p. 39-63.

GASCÓN, J. From the cognitive to the epistemological programme in the didactics of mathematics: two incommensurable scientific research programmes. *For the learning of Mathematics,* v. 23, n. 2, p. 44-55, 2003.

GITIRANA, V.; GUIMARÃES, G. L.; CARVALHO, J. B. P. F de. Os livros paradidáticos para o ensino da Matemática. In: CARVALHO, J. B. P. F de. *Matemática*: Ensino Fundamental. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, v. 17, Coleção Explorando o Ensino, 2010. p. 91-96.

GODINO, J. D.; BATANERO, M. C.; CAÑIZARES, M. J. *Azar y probabilidad* (Coleccíon: Matematicas: cultura y aprendizaje). Madrid: Sínteses, 1996.

GOMES, D. C. L. Paradidático para quê? Repensando o uso desse material. *Revista Eletrônica de Ciências da Educação*, Campo Largo, v. 8, n. 2, nov. 2009.

GONÇALVES, M. C.; COUTINHO, C. Q. S. O Professor de Matemática e o Conceito de Probabilidades. In: *Anais do SIPEMAT*. Recife, Programa de Pós-Graduação em Educação – Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco, 2006. 10p.

GRANDO, R. C. A. *O Jogo e suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino Aprendizagem da Matemática*. 1995. 175f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, SP, 1995.

HURTADO, N. H.; COSTA, J. F. S. *A probabilidade no ensino médio: a importância dos jogos como ferramenta didática.* In: Conferência Internacional: experiências e perspectivas do ensino da estatística – Desafios para o século XXI, 1., 1999, Florianópolis, Santa Catarina. Anais... Florianópolis: UFSC, 1999.

IMENEZ, L. M. P. *Brincando com números.* São Paulo: Scipione, 1987. (Coleção "Vivendo a Matemática").

KAMII, C.; JOSEPH, L.L. *Aritmética*: Novas Perspectivas – implicações da teoria de Piaget. Tradução de Marcelo Cestari T. Lellis, Marta Rabioglio e Jorge José de Oliveira. 8ª ed. Campinas: Papirus. Minas Gerais, 1992.

LAGUNA, A. G. J. A contribuição do livro paradidático na formação do aluno-leitor *Augusto Guzzo. Revista Acadêmica*, v. 1. n. 2, p. 43-52, 2001.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. *Metodologia científica.* São Paulo: Atlas, 2001.

LARSON, R.; FARBER, B. *Estatística Aplicada*. 4 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

LIMA, A. S. de; GURGEL, T. C. M. da C.; ROCHA, M. B. da; PONTES, M. de O. Descobrindo a geometria com o hagáquê. In: ENEM - *Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., 2013,* Curitiba – Paraná. *Anais...* Curitiba: PUCPR, 18 a 21 de julho de 2013. Disponível em: <http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2759_864_ID.pdf>. Acesso em: 06 dez. 2015.

LIMA, E. G. *Iconografias no livro didático de história*: leituras e percepções de alunos do Ensino Fundamental. Pará de Minas, MG: Virtual Books, 2012.

LOBATO, J. B. R. M. *A Aritmética da Emília*. São Paulo: Companhia Editora Nacional. 1935. p. 175.

LOPES NETA, N. de A.; SILVA, E. A de. Frações: um estudo à luz da Teoria Antropológica do Didático. *Revista Eletrônica de Educação de Alagoas – REDUC*, Maceió, v. 02, n. 1, p. 1-12, mai. 2014.

LOPES, C. A. E O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cad. Cedes*, v. 28, n. 74, p. 57-73, 2008.

LOPES, C. A. E. *A probabilidade e a Estatística no currículo de matemática do Ensino Fundamental brasileiro*. Disponível em: <www.inf.ufsc.br/cee/pasta5/art1p5.html>. Acesso em: 18 jul. 2015.

LOPES, C. A. E.; COUTINHO, C. Q. S. *Leitura e escrita em Educação Estatística*. In: Educação matemática, leitura e escrita: armadilhas, utopias e realidade. Campinas: Mercado de Letras, 2009.

LOPES, C.E.; COUTINHO, C.Q.; ALMOULOUD, S. *Estudos e reflexões em Educação Estatística*. 1. ed. Campinas: Mercado de Letras, 2010.

LOPES, J. M. Uma proposta didático-pedagógica para o estudo da concepção clássica de probabilidade. *Bolema,* Rio Claro (SP), v. 24, n. 39, p. 607-628, ago., 2011.

LOURO, G. L. *Pedagogias da sexualidade.* In: LOURO, G. L. (Org.). O corpo educado: pedagogias da sexualidade. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. p. 09-34.

MACHADO, N. J. *Matemática e língua materna*: análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 2011.

MANDARINO, M. C. F. *O tratamento da Informação*. In: Matemática: Ensino Fundamental/Coordenação João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho. Coleção Explorando o Ensino da Matemática, vol. 17. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.

MENEZES, E. T. de.; SANTOS, T. H. dos. Paradidáticos (verbete). *Dicionário Interativo da Educação Brasileira* - EducaBrasil. São Paulo: Midiamix Editora, 2002. Disponível em: <http://www.educabrasil.com.br/eb/dic/dicionario.asp?id=143>. Acesso em: 14. Jun. 2014.

MEYER, P. L. *Probabilidade*: aplicações e Estatística. 2 ed. (reimpressa). Rio de Janeiro: L.T.C., 2000.

MIGUEL, M. I. R.; COUTINHO, C. Q. E. S.; ALMOULOUD, S. A. *Utilizando resultados de pesquisas sobre Análise de Dados*. 1. ed. São Paulo: Proem Editora Ltda., 2006. v. 1. 64 p.

MINAS GERAIS. *Módulo Didático 5 de apoio à atividade docente para o CRV –*

Matemática: Probabilidade, 2008b. Disponível em: <http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7B7D769BCA-73AF-4A31-84F2-0E24995C4674%7D_mat-em_modulo-5_Probabilidade.pdf>. Acesso em: 21 jun. 2015.

MINAS GERAIS. Secretaria de Educação. *Conteúdo Básico Comum*. Belo Horizonte: SEE-MG, 2008a.

MLODINOW, L. O andar do bêbado – como o acaso determina nossas vidas. Brasil: Zahar, 2009.

MOORE, D. S. Uncertainty. In: STEEN, L. A. (Ed.). *On the shoulders of giants:* new approaches to numeracy. Washington, DC: National Academy Press, 1990. p. 95-137.

MOREIRA, A. F. Ambientes de aprendizagem no ensino de ciência e tecnologia. Belo Horizonte. 2007. In: BRAGANÇA, B.; FERREIRA, L. A. G.; PONTELO; I. *Práticas educativas e ambientes de aprendizagens escolar: relato de três experiências*. 1º Seminário Nacional de Educação Profissional e Tecnológica. Belo Horizonte, 2008.

MORGADO, A. C. O. et al. *Análise combinatória e probabilidade.* Rio de Janeiro: IMPA, Vitae, 1991.

MUNAKATA, K. *Produzindo livros didáticos e paradidáticos*. 1997. 217 f. Tese (Doutorado em História e Filosofia da Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC\SP, São Paulo, 1997.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. *Escritas e leituras na Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

NAGAMINE, C. M. L.; HENRIQUES, A.; UTSUMI, M. C.; CAZORLA, I. M. Análise Praxeológica dos Passeios Aleatórios da Mônica. *Bolema,* Rio Claro (SP), v. 24, n. 39, p. 451-472, ago. 2011.

NOVAES, D.; COUTINHO, C. *Estatística para a educação profissional*. São Paulo: Atlas, 2009.

ORTIZ, J. J. *La probabilidad en los libros de texto*. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, 2002.

PASSOS, C. L. B.; OLIVEIRA, R. M. M. A. de. Elaborando Histórias Infantis com Conteúdo Matemático: Uma Contribuição para a Formação de Professores. In: MENDES, J. R.; GRANDO, R. C. (Orgs.). *Matemática e Produção de Conhecimento*: múltiplos olhares. São Paulo: Musa, v. 3, p. 119-135, 2007.

PASSOS, C. L. B.; OLIVEIRA, R. M. M. A. de. Investigando a construção e aplicação de narrativas para o ensino de matemática na formação de professores. In: *28ª Reunião Anual da Anped, 28., 2005,* Caxambu, Minas Gerais. *Anais...* Rio de Janeiro: Anped, 2005. p. 1-7.

PETERSON, I. *The jungles of randomness:* a mathematical safari. New York: Wiley, 1998.

PINTO, A. G. *Uma Proposta de Livro Paradidático como Motivação para o Ensino de Matemática*. 2013. 73 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Seropédica, 2013.

POINCARÉ, H. *Calcul des Probabilités*. Réimpression de la 2e édition, 1987. Paris: GauthierVillars, 1912.

POINCARÉ, H. *Science et méthode*. Paris: Flammarion, 1908. 314 p.

PONTES, H. *História de Uberaba e a Civilização do Brasil Central.* Uberaba: Academia de Letras do Triângulo Mineiro, 1978.

RAMOS, L. F. *A Ficcionista da Matemática*. Disponível em: <http://www.atica.com.br/entrevistas/?e=135> Acesso em: 08 nov. 2014.

REGO, L. C. *Notas de Aula do Curso de Probabilidade 4 do curso de Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco*, 2010. Disponível em: http://www.de.ufpe.br/~leandro/AulasET5842010-1.pdf. Acesso em: 16 dez. 2010.

REZENDE, F. M. C.; FERREIRA, A. C. O Ensino de Probabilidade na Educação Básica: análise da produção de um Grupo de Estudos de professores de Matemática. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 15., 2011, Campina Grande (Paraíba). *Anais...* Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, Campus Campina Grande, 2011. Disponível em: <http://www.ebrapem.com.br>. Acesso em: 18 jul. 2015.

RIBEIRO, C. A. C. A pitoresca história da estatística. *Ciência Hoje*, Rio de Janeiro, v. 44, n. 264, p. 66-67, 2009.

ROCHA, L. C. *As relações étnico-raciais, a cultura afro-brasileira e o projeto político-pedagógico.* Salto para o futuro, currículo, relações sociais e cultura afro-brasileira, Boletim 20, Ministério da Educação, 2006.

ROSSINI, R. A contribuição da Teoria Antropológica do Didático para a análise de livros didáticos de Matemática. In: *EDUCERE* - Congresso Nacional de Educação da PUCPR: Praxis, 6., 2006, Curitiba. *Anais...* Curitiba: UFPR, 6 a 8 novembro de 2006. Disponível em: http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2006/anaisEvento/docs/CI-155-TC.pdf. Acesso em: 11 dez. 2015.

RUBERG, S. J.; MASON, R. L. Increasing public awareness of Statistics as a science and profession starting in high school. *The American Statistician*, v. 42, n. 3, p. 67-170, 1998.

RUTHERFORD, J. F. Thinking quantitatively about science. In: STEEN, L. A. (Ed.). *Why numbers count:* quantitative literacy for tomorrow's America. New York: The College Board, 1997. p. 60-74.

SALSBURG, D. Uma senhora toma chá...: como a estatística revolucionou a ciência no século XX Tradução José Maurício Gradel. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

SAMPAIO, A. B. *Uberaba: história, fatos e homens.* Academia de Letras do Triângulo Mineiro. *Bolsa de Publicações do Município de Uberaba,* v. 1, p. 47, 1971.

SANTOS, S. M. P. *A ludicidade como ciência*. Petrópolis, RJ. Vozes, 2001.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação de São Paulo. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo*: Matemática. São Paulo: SEE. 2008.

SCHEAFFER, R. L.; WATKINS, A. E.; LANDWEHR, J. M. What every high-school graduate should know about statistics. In: LAJOIE, S. P. (Ed.). *Reflections on statistics:* Learning, teaching and assessment in Grades K-12. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1998. p. 3-31.

SIERRA, T. A. Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes. 2006. 472 f. Tese (Doutorado em Educação) - Facultad De Educación, Departamento de Didáctica y

Organización Escolar, Universidad Complutense de Madrid - UCM. Madrid, 2006.

SILVA, I. A. *Probabilidades*: a visão laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito. São Paulo, 2002. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2002.

SILVA, I. M. da S.; MELO, E. A. P. de; COSTA, L. de F. M. da; GUERRA, R. B. Formação de professores de matemática: interfaces entre a TAD e a Etnomatemática. In: CIBEM – Congresso Ibero-americano de Educação Matemática, 7., 2013, Montevideo, Uruguai. Anais... Colégio Seminário, Montevideo, Uruguai, 16 a 20 de setembro de 2013. p. 5190-5198.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, v., n. 26, n. 2, p. 114-145, 1995.

SKEFF, F. *Leitura*: Perspectivas interdisciplinares. 3 ed. Rio de Janeiro: Moderna, 2004.

SKOVSMOSE, O. *Cenários para investigação.* Bolema – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

SMITH, J. E. *A Probabilidade Estatística do Amor à Primeira Vista*. 1 ed. São Paulo: Galera Record, 2013.

SMOLE, K. C. S. et al. *Era uma vez na matemática*: Uma conexão com a literatura infantil. 2. ed. São Paulo: IME_USP, 1995.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Ler, escrever e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Matemática* – 2.ª série – Ensino Médio. 3. ed. reform. São Paulo: Saraiva, 2003. v. 2, 479 p.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Matemática Ensino Médio* - Volume 2. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SNELL, L. J. *Introduction to probability.* New York: Random House, 1988.

SOARES, E. Uma análise sobre as atividades de probabilidade propostas nos livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental. 2014. 145 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em

Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2014.

SOUZA, M. F. G. *Fundamentos da Educação Básica para Crianças*. Volume 3, In: Módulo 2. Curso PIE – Pedagogia para Professores em Exercício no Início de Escolarização. Brasília, UnB, 2002.

SOUZA, R. D. de; OLIVEIRA, R. M. M. A. Análise de uma experiência de ensino e aprendizagem no ensino fundamental: utilização de história infantil com conteúdo matemático. In: *Anais do 15º COLE*, 2005, Campinas, SP: ALB, 2005.

SPIEGEL, M. · *Probabilidade e Estatística*. 1 ed. Coleção Schaum. São Paulo: MacGraw-Hill do Brasil, 1977.

STADELMANN, D. Les conceptions de la probabilité: Comparaison des différentes approches. Travail de séminaire. Université de Fribourg / Universität Freiburg Faculté des sciences économiques et sociales, Département d‟économie quantitative, 2003.

STEEN, L. A. *Mathematics and democracy:* The case for quantitative literacy. Washington, DC: Woodrow Wilson National Fellowship Foundation, 2001.

TAHAN, M. *O Homem que Calculava*. 80a ed. Rio de Janeiro: Record, 1938. 300 p.

TEIXEIRA, J. Livro: O andar do Bêbado, 4 out, 2009. Disponível em: <http://www.bulevoador.com.br/2009/10/livro-o-andar-do-bebado/>. Acesso em: 08 mar. 2016.

TEODORO, J. V.; LOPES, J. M.; MOURÃO, G. B. O ensino sobre a concepção frequentista de probabilidade estruturado na simulação computacional. In: SINAPE - Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, 19., 2010, Hotel Fazenda Fonte Colina Verde, São Pedro, São Paulo. *Anais... São Paulo:* Associação Brasileira de Estatística - ABE, 26 a 30 de julho de 2010.

TREVIZAN, W. A. *O uso do livro paradidático no ensino de matemática, 2008*. Disponível em: <www.usp.br/siicusp/Resumos/16Siicusp/807.pdf>. Acesso em: 15. Jun. 2014.

TRURAN, J. What is the probability of...? *The Australian Mathematics Teacher*, v. 50, n. 3, p. 28-29, 1994.

UTTS, J. M. *Seeing Through Statistics*. Duxbury Press, USA, 1999.

VIALI, L.; OLIVEIRA, P. I. F. Uma Análise de Conteúdos de Probabilidade em Livros Didáticos do Ensino Médio. In: *Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Brasília, 2009.

YASUDA, A. M. B. G.; TEIXEIRA, M. J. C. A circulação do paradidático no cotidiano escolar. In: BRANDÃO, H.; MICHELETTI, G. *Aprender a ensinar com livros didáticos e paradidáticos*. São Paulo: Cortez, 1995.

ZILBERMAN, R. *A produção cultural das crianças*. Porto Alegre: Mercado Aberto, 1982.