

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS E EXATAS  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM INOVAÇÃO  
TECNOLÓGICA**

**GIOVANNA ABREU ALVES**

**ABORDAGEM HEURÍSTICA DA RELAXAÇÃO SURROGATE PARA  
O PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO DE PEDIDOS**

**UBERABA - MG**

**2019**

GIOVANNA ABREU ALVES

**ABORDAGEM HEURÍSTICA DA RELAXAÇÃO SURROGATE PARA O  
PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO DE PEDIDOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Inovação Tecnológica da Universidade Federal do Triângulo Mineiro - PMPIT - UFTM, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Inovação Tecnológica.

Orientador Prof. Dr. Victor Claudio Bento de Camargo

Uberaba - MG  
2019

**Catálogo na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do  
Triângulo Mineiro**

A479a Alves, Giovanna Abreu  
Abordagem heurística da relaxação surrogate para o planejamento da produção de pedidos / Giovanna Abreu Alves. -- 2019.  
85 f. : il., fig., graf., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Inovação Tecnológica) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2019  
Orientador: Prof. Dr. Victor Claudio Bento de Camargo

1. Fundição. 2. Administração da produção. 3. Planejamento da produção.  
4. Métodos de relaxação (Matemática). I. Camargo, Victor Claudio Bento de.  
II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 621.74

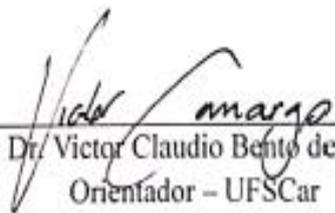
GIOVANNA ABREU ALVES

ABORDAGEM HEURÍSTICA DA RELAXAÇÃO SURROGATE PARA O  
PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO DE PEDIDOS

Trabalho de conclusão apresentado ao  
Programa de Mestrado Profissional em  
Inovação Tecnológica da Universidade Federal  
do Triângulo Mineiro, como requisito para  
obtenção do título de mestre.

Uberaba, 28 de fevereiro de 2019

Banca Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Victor Claudio Bento de Camargo  
Orientador – UFSCar

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Flávio Molina da Silva  
Membro Titular – UFTM

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Franklina Maria Bragion de Toledo  
Membro titular – USP

# AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Rosely e Erildo, por todo apoio, carinho e dedicação que sempre me mostraram. Agradeço por todas as vezes que eles estiveram presentes comigo em cada decisão que tomei até aqui, me apoiando e auxiliando, sempre acreditando no meu melhor. Agradeço por todas as vezes que eles entenderam minha ausência no convívio familiar porque precisava estudar. Agradeço a toda força que eles sempre me deram, a qual nunca me deixou desistir.

À minha irmã, Érika, por toda amizade e companheirismo que sempre tivemos durante toda a nossa vida.

Ao amigo Rafael Tavano pela ajuda que me deu quando eu estava aprendendo linguagem de programação.

Aos professores membros da Banca de Qualificação, Flávio Molina e Alyne Toscano, pelas sugestões prestadas que ajudaram na conclusão desse trabalho.

Ao meu orientador, Victor Camargo, por toda a orientação, mesmo por videoconferência, quando as reuniões já não podiam ser presenciais. Pelo auxílio com os algoritmos de programação que muitas vezes não funcionavam. Pelo apoio nos passos que dei durante esses dois anos. Pela correção do texto que não estava bom. E agradeço por todas as conversas e conselhos que tivemos.

Aos meus amigos, por deixarem a jornada mais leve nos cafés em uma tarde e nos bares aos finais de semana.

# RESUMO

O processo produtivo de uma fundição de pequeno porte é caracterizado por um forno alimentado por matérias-primas, produzindo ligas metálicas, com capacidade limitada a fim de atender a demanda de pedidos. Muitos trabalhos são encontrados na literatura a respeito do problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes em fundições de pequeno porte, mas na maioria desses trabalhos é estudado a produção, estocagem e atraso dos itens de forma desagregada, o que se propõe nesse trabalho é o tratamento agregado do planejamento da produção, ou seja, considerar o pedido a qual um item pertence. Um pedido contém vários itens que podem ou não ter dependência entre si, isto é, não podem ser entregues separadamente. Nesse sentido, é importante um bom planejamento da produção que procure atender ao maior número de pedidos sem atrasos, de forma a diminuir custos. Uma maneira de resolver o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes é determinar uma relaxação para o problema original e a partir dela determinar soluções iniciais para métodos heurísticos de resolução. Neste trabalho propõe-se uma abordagem heurística, baseada na Relaxação *Surrogate* para o problema do planejamento da produção de pedidos em uma fundição de pequeno porte. Apresenta-se resultados teóricos que confirmam que o modelo proposto é uma relaxação de um modelo existente na literatura. As soluções obtidas computacionalmente ao resolver-se o modelo relaxado são utilizadas como soluções iniciais de uma heurística que resolve o problema do planejamento de pedidos de forma eficiente.

**Palavras-chave:** Fundições; Planejamento de Pedidos; Dimensionamento de Lotes; Relaxação *Surrogate*.

# ABSTRACT

The production process of a small foundry is characterized by a furnace fed by raw materials, producing metal alloys, with limited capacity to meet the demand for orders. Lot sizing and scheduling problem for foundries management has been rather studied in the literature, but in most of these works the production, storage and delay of the items in a dissociate form is studied, what is proposed in this work is the treatment production planning, that means, consider the order to which an item belongs. An order contains several items that may or may not depend on each other, that is, they can not be delivered separately. In this sense, it is important a good production planning that seeks to meet the highest number of orders without delays, in order to reduce costs. One way of solving the problem of sizing and batch sequencing is to determine a relaxation for the original problem and from it to determine initial solutions for heuristic methods of resolution. In this work we propose a heuristic approach, based on the Relaxation *Surrogate* for the problem of planning the production of orders in a small foundry. We present theoretical results that confirm that the proposed model is a relaxation of an existing model in the literature. The solutions obtained by computationally solving the relaxed model are used as initial solutions of a heuristic that solves the problem of order planning efficiently.

**Keywords:** Foundries; Orders Planning; Lot sizing; Surrogate Relaxation

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Etapas do processo produtivo de uma fundição. . . . .	14
Figura 2 – Processo produtivo em uma fundição. . . . .	18
Figura 3 – Exemplo de uma solução para o modelo MRPP. . . . .	43
Figura 4 – Exemplo de uma solução para o modelo 4P2. . . . .	43
Figura 5 – Ordenação dos itens de acordo com o peso total produzido. . . . .	49
Figura 6 – Verificação de quais pedidos foram atendidos. . . . .	54
Figura 7 – Número de pedidos atendidos o cenário <i>Mínimo</i> . . . . .	58
Figura 8 – Número de pedidos atendidos o cenário <i>Mínimo</i> com a utilização do <i>solution pool</i> na fase inicial e tempo limitado em 600s. . . . .	79
Figura 9 – Número de pedidos atendidos o cenário <i>Médio</i> com a utilização do <i>solution pool</i> na fase inicial e tempo limitado em 600s. . . . .	80
Figura 10 – Número de pedidos atendidos o cenário <i>Máximo</i> com a utilização do <i>solution pool</i> na fase inicial e tempo limitado em 600s. . . . .	80

# LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Instâncias utilizadas por Tonaki (2006). . . . .	39
Tabela 2 – Número de pedidos utilizados nas carteiras mínima, média e máxima. . . . .	39
Tabela 3 – Resultados obtidos pelo CPLEX para os modelos MRPP e 4P2 . . . . .	41
Tabela 4 – Comparação dos custos para a Instância <i>Med04</i> . . . . .	42
Tabela 5 – Soluções iniciais. . . . .	47
Tabela 6 – Resultados computacionais para as heurísticas de factibilização. . . . .	57
Tabela 7 – Tempo de execução, em segundos, para as heurísticas de factibilização. . . . .	60
Tabela 8 – Resultados computacionais com a fase de melhoria. . . . .	63
Tabela 9 – Resultados computacionais para a fase de factibilização, após utilizar as soluções alternativas para cada instância. . . . .	67
Tabela 10 – Tempo, em segundos, de execução da fase de solução inicial e factibilização, após utilização do <i>solution pool</i> . . . . .	69
Tabela 11 – Soluções alternativas que apresentam maior número de pedidos atendidos. . . . .	70
Tabela 12 – Resultados computacionais para a fase de melhoria com a utilização de soluções alternativas e tempo limite de 3.600s. . . . .	71
Tabela 13 – Resultados computacionais para as fases de factibilização e melhoria, após utilização das soluções alternativas e limite máximo de 600s. . . . .	74
Tabela 14 – Tempo de execução total, em segundos, para obtenção de solução inicial, factibilização e melhoria com utilização de soluções alternativas e limite máximo de 600s. . . . .	76
Tabela 15 – Comparação entre os resultados obtidos pelas heurísticas e o modelo 4P2. . . . .	78

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PCP	Planejamento e Controle da Produção
PDSL	Problema de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes
SAD	Sistema de Apoio à Decisão
GLSP	<i>General Lot Sizing Problem</i>
AG	Algoritmo Genético
MTO	<i>Make to order</i>

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>16</b>
2.1	Problema de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes em Fundições	17
2.2	Problema de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes com Enfoque no Planejamento de Pedidos	21
2.3	Relaxação em Problemas de Otimização Linear	22
2.3.1	Relaxação Lagrangeana	22
2.3.2	Relaxação <i>Surrogate</i>	24
2.3.3	Aplicações da Relaxação <i>Surrogate</i>	25
<b>3</b>	<b>DEFINIÇÃO DO PROBLEMA</b>	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>RELAXAÇÃO DO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DE PEDIDOS</b>	<b>32</b>
4.1	Modelo Relaxado para o Planejamento de Pedidos (MRPP)	32
4.2	Resultados Teóricos	34
4.3	Experimentos Computacionais Iniciais	38
4.3.1	Instâncias de Teste	38
4.3.2	Resultados Computacionais	40
<b>5</b>	<b>ABORDAGEM HEURÍSTICA PARA O PROBLEMA DO PLANEJAMENTO DE PEDIDOS</b>	<b>45</b>
5.1	Soluções iniciais	45
5.2	Factibilização	48
5.2.1	Ordenação dos itens por peso total produzido no período	48
5.2.2	Ordenação dos itens por peso individual de cada item	49
5.2.3	Alocação dos itens nas fornadas	50
5.2.4	Atendimento dos pedidos	53
5.2.5	Testes computacionais para a fase de factibilização	56
5.3	Melhoria	61
5.4	Abordagem alternativa para obtenção da solução inicial	64
5.4.1	Resultados computacionais para com <i>Gap</i> abaixo de 1% e tempo limite de 3.600s	65
5.4.1.1	Melhoria	70

5.4.2	Resultados computacionais com <i>Gap</i> abaixo de 1% e tempo limite de 600s . . . . .	72
5.4.3	Comparação das abordagens heurísticas do modelo MRPP com o modelo 4P2 . . . . .	77
5.5	<b>Considerações finais</b> . . . . .	<b>81</b>
6	<b>CONCLUSÕES E PRÓXIMOS PASSOS</b> . . . . .	<b>82</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>85</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O processo de fundição pode ser entendido como a fabricação de peças metálicas por meio do preenchimento, com metal líquido, de um molde que contém formas e dimensões da peça a ser produzida. A indústria de fundição é um tipo de empresa primária que fornece bens intermediários para outras instituições, como automotivas, siderúrgicas, construções, entre outras.

O mercado de fundição brasileiro sofreu com a situação econômica enfrentada pelo Brasil nos últimos anos e viu a necessidade de atender a demanda com redução de custos. Em 2017, após três anos de recessão, o mercado de fundidos voltou a apresentar crescimento e o setor voltou a desempenhar importante papel na economia do país, o crescimento continuou em 2018 (ABIFA, 2017),(ABIFA, 2018).

Para que as companhias satisfaçam a demanda de mercado, dentro de um período de tempo adequado é importante que se tenha um bom Planejamento e Controle da Produção (PCP). A função do PCP é programar e controlar a produção para que uma empresa atenda requisitos de produção da forma mais eficiente possível. As decisões tomadas no PCP são hierárquicas: planejamento estratégico, que pode ser entendido como a programação de longo prazo e está relacionado ao nível mais alto da empresa, determinando as metas globais da empresa; planejamento tático, que é a programação de médio prazo e é responsável pela utilização correta e no tempo preciso dos recursos disponíveis pela empresa; e planejamento operacional, programação de curto prazo, o qual determina as decisões tomadas no cotidiano da empresa (BONNEY, 2000).

Para Drexl e Kimms (1997), planejar e programar a produção de forma eficiente mostra-se um dos maiores desafios para os gestores de empresas. Nesse contexto, o problema de dimensionamento de lotes consiste em determinar dentro de um horizonte finito de tempo, em quais períodos deve existir produção, a quantidade de itens a serem produzidos, de forma a atender suas demandas, sujeitos às restrições de capacidade e minimizando custos totais (BRAHIMI et al., 2006).

O problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes (PDSL) em uma fundição pode ser visto como a busca por um plano de produção que determina quais ligas devem ser fundidas para a fabricação de lotes de itens, buscando minimizar custos, como preparação de forno, manutenção de estoques, e atrasos de pedidos, respeitando as restrições produtivas da empresa (CAMARGO, 2009).

De acordo com o mercado que atuam, as fundições são classificadas como fundições de mercado, que são de pequeno e médio porte e atendem a pedidos sob encomenda em quantidades pequenas e possuem como característica a venda exclusiva para terceiros. Fundições cativas, de grande porte, orientadas para a produção em série em grandes quantidades, atendendo a demanda

de siderúrgicas, e empresas automotivas (OLIVEIRA, 2013).

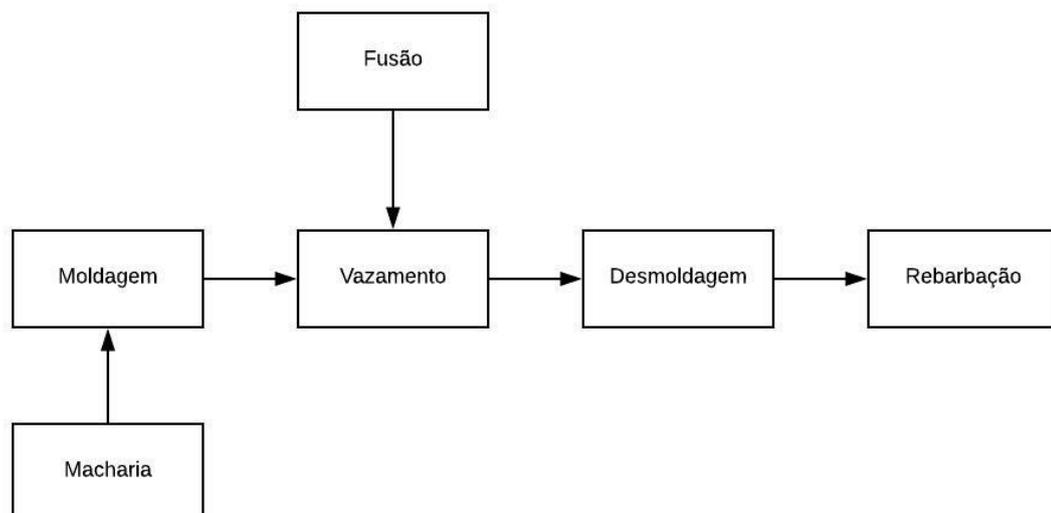
Quando uma fundição cativa eventualmente atende ao mercado ela é classificada como fundição mista. Esse trabalho está focado na obtenção de um plano de produção para uma fundição de mercado.

Em geral, um processo produtivo em uma fundição de pequeno porte é caracterizado por um forno alimentado por matérias-primas, como lingotes de metal fundido e sucatas, por exemplo, produzindo determinado tipo de liga. O forno possui capacidade limitada e só pode produzir uma quantidade máxima de cada liga em determinado período (ARAUJO; ARENALES, 2003).

A Figura 1 resume o processo de fabricação de uma fundição. A macharia é o processo de obtenção de agregados de areia e resina, os machos, responsáveis pelo formato e cavidades internas e encaixes externos da peça a ser fundida. A moldagem é a confecção dos moldes que dão formato às partes externas da peça. Os moldes e os machos são combinados em um único conjunto de peças que receberá o metal fundido na etapa de vazamento.

A fusão consiste na transformação das matérias-primas como alumínio, ferro-gusa, e outras ligas metálicas em metal líquido. Com o metal fundido e os machos e moldes prontos inicia-se o processo de vazamento, no qual a liga metálica fundida é derramada no conjunto macho-molde preenchendo toda as cavidades do conjunto. Após um tempo de resfriamento a liga metálica se solidifica e ocorre a desmoldagem da peça. A próxima etapa é a rebarbação, onde a peça passa por processos de finalização e acabamento.

Figura 1 – Etapas do processo produtivo de uma fundição.



Fonte: Adaptado de Araujo e Arenales (2003).

Nos trabalhos desenvolvidos por Tonaki e Toledo (2010), Camargo (2009), Araujo e Arenales (2003), entre outros, são estudados o dimensionamento e sequenciamento de itens a serem produzidos em uma fundição de pequeno porte. A fusão e o vazamento são as etapas de

operação abordadas nesses trabalhos, uma vez que é determinado o sequenciamento das ligas nos fornos e os itens a serem produzidos.

Nos trabalhos citados, o plano de produção é realizado com o enfoque nos itens e não leva em consideração os pedidos aos quais os itens pertencem. Como a fundição trabalha com peças fabricadas sob encomenda é importante levar em consideração que os itens a serem produzidos são componentes de pedidos. Um pedido só é considerado completo, quando todos os itens são produzidos. Em alguns casos, os pedidos podem ser entregues parcialmente, isto é, pode ser realizada mais de uma entrega para um mesmo pedido. Pedidos atrasados ou entregues parcialmente geram custos para a fundição.

Poucos trabalhos foram encontrados considerando o planejamento da produção de pedidos. [Furtado \(2012\)](#) baseou-se nos trabalhos de [Araujo, Arenales e Clark \(2008\)](#) e [Tonaki \(2006\)](#) para propor modelos matemáticos que realizassem o PDSL em fundição mercado com ênfase no atendimento de pedidos. Os modelos propostos pela autora buscam decidir quais ligas devem ser fundidas nos fornos e quais itens devem ser produzidos com essa liga com objetivo de minimizar o custo atraso na entrega de pedidos e, além disso, estuda-se a possibilidade de entregas parciais de itens dos pedidos.

O objetivo deste trabalho consiste em estudar um dos modelos propostos por [Furtado \(2012\)](#) para o Problema do Planejamento da Produção de Pedidos em uma fundição de pequeno porte localizada no interior de São Paulo. A partir do modelo estudado, é realizada a proposta de uma heurística de resolução, baseada na Relaxação *Surrogate*, para obtenção de soluções iniciais e um algoritmo de factibilização e melhoria.

São apresentados resultados teóricos e computacionais para o método proposto. Utilizou-se as instâncias de teste de [Furtado \(2012\)](#) e os testes foram realizados utilizando o *software* de otimização linear CPLEX e linguagem de programação Julia.

Este trabalho está organizado com a seguinte estrutura: No Capítulo 2, é apresentada uma revisão bibliográfica sobre o tema estudado. No Capítulo 3, descreve-se o problema estudado por [Furtado \(2012\)](#) e apresenta-se dois modelos matemáticos propostos pela autora. Uma relaxação da modelagem matemática, descrita como uma Relaxação *Surrogate* para o problema, resultados teóricos e testes computacionais iniciais são retratados no Capítulo 4. O método heurístico de resolução proposto, bem como os testes computacionais realizados com o mesmo, são mostrados no Capítulo 5. Por fim, as conclusões e propostas de trabalho futuros são apontadas no Capítulo 6.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Planejar a produção envolve decisões sobre quais itens produzir e qual o período de fabricação, de maneira a utilizar corretamente recursos disponíveis pela empresa. Para [Bonney \(2000\)](#) as tarefas do PCP são difíceis, porque existem limitações nos métodos de planejamento e ocorrem mudanças imprevistas na demanda de produtos e na oferta de recursos.

As decisões a serem tomadas durante no planejamento da produção estão diretamente relacionadas ao horizonte de tempo que é considerado: longo prazo, médio prazo ou curto prazo. O planejamento de longo prazo deve decidir o nível de produção em termos agregados de produtos, isto é, considera-se famílias de produtos semelhantes e não a produção de itens individuais. Neste horizonte estão as decisões relacionadas a compras de equipamentos, alocação de facilidades e planejamento de recursos ([KARIMI; FATEMI-GHOMI; WILSON, 2003](#)).

No planejamento de nível médio estão as decisões relacionadas a necessidade de materiais (*Material Requirements Planning (MRP)*) e tamanho do lote de produção (*lot sizing*) necessário em cada período de forma a minimizar os custos envolvidos na fabricação das mercadorias, atendendo-se a demanda por esses itens e respeitando as restrições de capacidades produtivas. Já no planejamento de curto prazo estão as decisões tomadas no cotidiano da empresa, relacionadas ao sequenciamento (*scheduling*) de tarefas, ou pedidos de clientes a serem processados, em relação a produção unitária dos itens ([STAWOWY; DUDA, 2012](#)).

Para [Karimi, Fatemi-Ghomi e Wilson \(2003\)](#), dimensionar os lotes de produção é um dos problemas mais importantes e difíceis no planejamento da produção, motivo pelo qual, o assunto foi estudado extensivamente na literatura. Os autores apresentaram uma revisão de modelos e algoritmos relacionados ao problema de dimensionamento de lotes e definiram algumas características que influenciam na complexidade do problema: horizonte de planejamento, número de estágios, número de itens, restrições de capacidade, tipo de demanda, existência de estoques, itens perecíveis e preparação de produção.

Nesse contexto, considerando-se um item a ser produzido, demanda dinâmica, horizonte de planejamento finito, único estágio de produção, capacidade limitada dos recursos produtivos, com o objetivo de minimizar custos relacionados à produção e manutenção de estoque, o problema de determinar a quantidade de itens a ser produzida em cada período é chamado de *capacitated lot sizing problem (CLSP)*.

O CLSP é considerado um problema do tipo *NP-hard*, isto é, a maioria dos métodos utilizados para resolvê-lo envolve algoritmos heurísticos, os quais, geralmente, se baseiam em três fases: determinar o tamanho dos lotes de produção, factibilização e melhoria ([KARIMI; FATEMI-GHOMI; WILSON, 2003](#)).

Determinar o dimensionamento e o sequenciamento de múltiplos itens em uma máquina com restrição de capacidade é conhecido como *General Lot Sizing Problem (GLSP)* e é um

tema amplamente estudado na literatura (exemplos podem ser vistos em [Fleischmann e Meyr \(1997\)](#), [Drexler e Kimms \(1997\)](#), [Xie e Dong \(2002\)](#), [Ferreira, Morabito e Rangel \(2009\)](#)), motivo pelo qual, a revisão sobre esse assunto está limitada a abordagem do problema em fundições de mercado.

Este capítulo será dividido em três seções. A Seção 2.1, apresenta os trabalhos para problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção em fundições de mercado. a Seção 2.2 é dedicada aos trabalhos encontrados no planejamento de pedidos, e a Seção 2.3 aborda o uso de relaxações em problemas de otimização linear.

## 2.1 PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO E SEQUENCIAMENTO DE LOTES EM FUNDIÇÕES

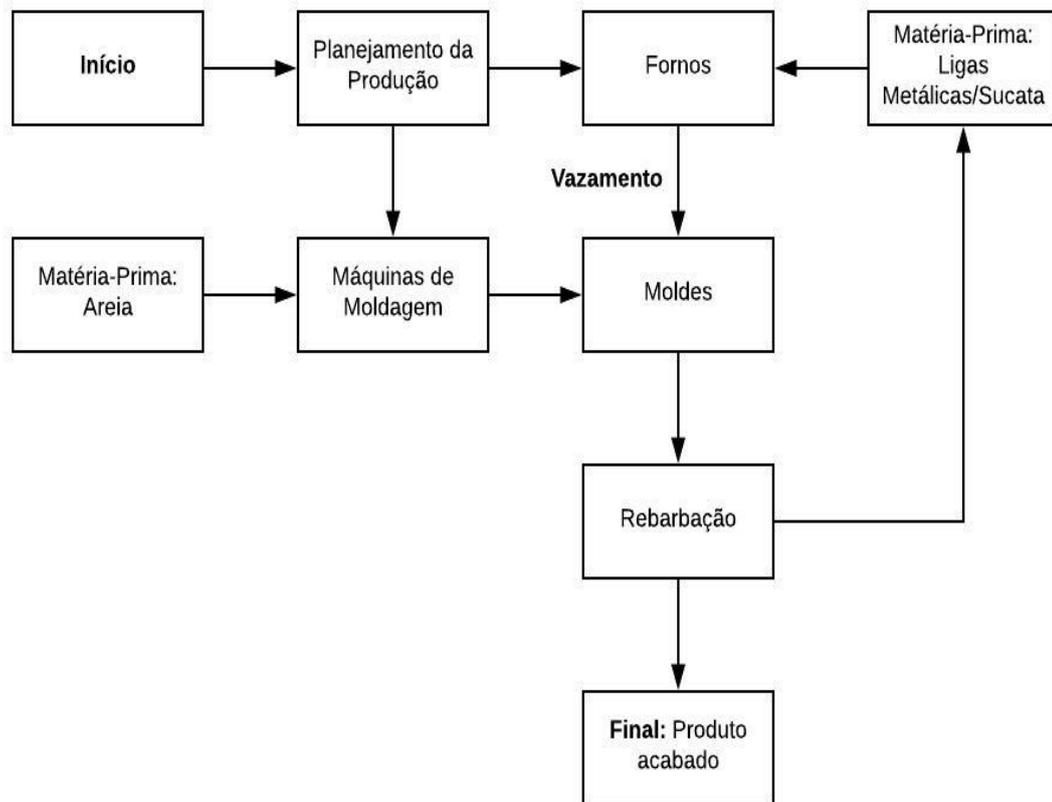
No Brasil, a maior parte dos produtos fundidos é vendida para indústrias automotivas e siderúrgicas, produzidas em fundições cativas, as quais são departamentos de grandes empresas. Nessas fundições, a produção é em série, automatizada e orientada basicamente para suprir as necessidades internas. Uma pequena parcela dos produtos fundidos fica para os outros setores como a indústria mecânica e de infraestrutura, e essa pequena demanda é atendida por fundições de pequeno e médio porte, conhecidas como fundições de mercado. As fundições de mercado são caracterizadas, geralmente, por demanda relativamente baixa e estrutura gerencial pouco organizada, devido à ausência de política de mercado adequada ([CAMARGO, 2009](#)), ([ARAUJO; ARENALES, 2003](#)).

[Santos-Meza e Oliveira \(2002\)](#) estudaram o GLSP em uma fundição de médio porte que possui um único forno e várias máquinas de moldagem, produzindo diversos tipos de itens, com diferentes tipos de ligas. O planejamento da produção deve decidir a respeito de dois aspectos importantes e interligados: quais ligas devem ser fundidas e a quantidade de itens a serem produzidos em cada máquina de moldagem. Os autores utilizam duas abordagens para a fundição em questão: i) uma única liga é utilizada para produzir todos os itens e ii) utilização de diferentes tipos de ligas na produção dos itens. Para resolver a primeira abordagem os autores apresentaram um modelo de otimização linear e propuseram um método exato de solução, considerando que o forno é suficientemente grande para produzir todos os itens. Para a segunda abordagem, existem diferentes tipos de ligas para a produção dos itens, mas somente uma liga pode ser utilizada em cada fornada, os autores apresentaram um modelo matemático, extensão da primeira abordagem e para resolvê-lo sugeriram uma heurística obtida a partir de uma estratégia de relaxação, reduzindo o problema ao caso de apenas uma liga.

A fundição estudada por [Santos-Meza e Oliveira \(2002\)](#) serviu de base para o trabalho de [Araujo e Arenales \(2003\)](#). Os autores propuseram um modelo matemático que visava minimizar custos de *setup* (trocas de configuração) de forno, de estoque e atraso de itens e deveria determinar um plano de produção para as ligas utilizadas no forno e os itens a serem produzidos. Para resolver o problema propuseram um método de solução baseado em uma heurística do tipo

*relax-and-fix*. A Figura 2 ilustra como funciona o processo produtivo de uma fundição, segundo os autores.

Figura 2 – Processo produtivo em uma fundição.



Fonte: Araujo e Arenales (2003).

Ilustrado na Figura 2, o processo produtivo em uma fundição de mercado funciona da seguinte maneira: os pedidos dos clientes chegam para o departamento de PCP que deve determinar quais os moldes e ligas serão utilizados. As máquinas de moldagem são alimentadas por areia que farão os moldes utilizados no vazamento. O processo produtivo é caracterizado por um forno, com limitação de capacidade, que é alimentado por matérias-primas (em geral, lingotes de metais ou sucatas), produzindo determinado tipo de liga. Depois de ser fundida, a liga é vazada nos moldes produzidos na etapa de moldagem. Os itens são produzidos após o resfriamento do metal fundido, que sofrem solidificação. As peças são retiradas dos moldes e passam para a etapa de rebarbação, na qual o excesso de material pode ser reutilizado como sucata. Os fornos são realimentados para a produção de um novo (ou mesmo) tipo de liga.

Silva e Morabito (2004) apresentaram uma abordagem para a programação das ligas a serem fundidas em fornos em uma fundição de pequeno porte, especializada em aço-inox, em São Carlos, interior de São Paulo. A fundição possui três fornos, com capacidades limitadas, e há a possibilidade do uso simultâneo dos fornos. Os autores propuseram um modelo matemático e um método de solução baseado em problemas de corte e empacotamento, combinando uma

heurística com o clássico problema da mochila. Para validar o modelo, os autores coletaram dados reais de uma fundição e obtiveram um plano de produção mais eficiente do que o praticado pela empresa.

Teixeira-Jr, Fernandes e Pereira (2006) sugeriram um sistema de apoio à decisão (SAD) para a programação da produção em fundições de mercado. Os autores testaram três métodos diferentes para modelar o problema da programação de ligas a serem fundidas: programação linear inteira, uma heurística de busca em árvore de soluções, conhecida como *beam search* e uma meta heurística de algoritmo genético. Para aplicação prática dos modelos em um SAD os autores utilizaram testes baseados em dados reais, considerando possíveis situações características de uma fundição. Os autores concluíram que os resultados obtidos com o *beam search* foram melhores que os outros dois métodos.

Camargo (2009) utilizou um algoritmo evolutivo para determinar um plano de produção em uma fundição de forma a determinar quais ligas devem ser fundidas e quais são os lotes de itens a serem produzidos, com o objetivo de minimizar custos de estoque, configuração de forno e atraso de itens. Para a solução do problema o autor propôs um algoritmo genético (AG) que explora um conjunto de soluções para determinar quais ligas devem ser fundidas e uma heurística de relaxação lagrangeana para determinar quais itens devem ser produzidos. Uma proposta utilizando o método da mochila, também foi considerada para resolver o mesmo problema. Para testar os modelos e métodos de solução o autor baseou-se no modelo de dimensionamento de lotes proposto em (ARAÚJO; ARENALES, 2003) e na decomposição do problema em solução hierárquica feita por (TONAKI, 2006). Os resultados obtidos mostram que o AG com avaliação via problema da mochila mostrou-se mais eficiente que as demais abordagens.

Tonaki e Toledo (2010) estudaram o modelo proposto por (ARAÚJO; ARENALES; CLARK, 2008) para uma fundição de pequeno porte no interior de São Paulo, e propuseram um método de solução baseado na decomposição do problema em dois subproblemas: planejamento das ligas e planejamento dos itens. A heurística utilizada tinha como objetivo minimizar os custos de estoques, atrasos de itens e *setup* de forno e como objetivo secundário diminuir a subutilização do forno, ou seja, determinar os lotes de produção, de forma a melhor aproveitar a capacidade do forno e reduzir desperdícios.

Mais recentemente, Bertulucci (2017) fez uma análise de várias modelagens matemáticas aplicadas planejamento e sequenciamento de lotes em fundições de pequeno porte e apresentou uma extensão para a utilização de múltiplos fornos alternados em uma empresa no interior de Minas Gerais. As instâncias para testes foram geradas a partir de dados reais, e utilizou-se o CPLEX para testes computacionais, o autor obteve planos de produção com desempenho melhor que o plano utilizado atualmente pela empresa.

Stawowy e Duda (2017) estudaram GLSP em uma fundição de médio porte, que produz peças de liga de metal fundido em um sistema *make to order* (MTO). O problema é dividido em dois níveis, no primeiro nível as matérias-primas são preparadas e as decisões sobre a quantidade de itens produzidos e o *scheduling* para as ligas de fusão são realizadas. Ao mesmo

tempo, determina-se o tamanho do lote dos itens encomendados e o sequenciamento de produção correspondente para a linha de moldagem devem ser determinados no segundo nível. Os autores assumiram que o horizonte de planejamento finito é subdividido em subperíodos menores (cargas de forno) e a capacidade de produção e fornos de fusão são limitadas. Os autores afirmam que o uso de *softwares* de otimização linear, como o CPLEX, não são capazes de resolver problemas de PDSL em escala real, e por isso o objetivo do trabalho em questão é fornecer uma solução de prática industrial para o problema de dimensionamento de lotes, integrado ao *scheduling* da linha de montagem. Os autores apresentaram um modelo integrado de planejamento e dimensionamento de lotes das ligas e *scheduling* da linha de montagem, e como métodos de solução, propuseram três heurísticas: a primeira abordagem é baseada no Relaxamento Lagrangeano do modelo proposto, o segundo usa uma estratégia de *Relax-and-Fix* baseada no modelo de horizonte rolante de (ARAUJO; ARENALES; CLARK, 2008), e a última uma heurística evolutiva conhecida como *Evolutionary Based Heuristic* (EBH).

O quadro exibido no Quadro 1 resume os autores citados nessa Seção e o método de solução utilizado por eles para resolver o GLSP em fundições de mercado.

Quadro 1 – Resumo de métodos encontrados na literatura para PDSL em fundições de mercado.

<b>Autores</b>	<b>Ano</b>	<b>Método de resolução proposto</b>
Santos-Meza e Oliveira	2002	Utilização de método exato de resolução baseado em problema de fluxo de redes e heurística de relaxação considerando a produção de uma única liga
Araujo e Arenales	2003	Heurística Relax-and -Fix
Silva e Morabito	2004	Heurística de corte empacotamento combinada com problema da mochila
Teixeira Jr, Fernandes e Pe-reira	2006	Heurística de busca em árvore de soluções (beam se-arch) e meta heurística com algoritmo genético
Camargo	2009	Algoritmo genético, heurística de relaxação lagrangeana e método da mochila
Tonaki e Toledo	2010	Decomposição do problema em dois subproblemas e heurística de relaxação lagrangeana
Bertulucci	2017	Solução do modelo via CPLEX com dados reais
Stawowy e Duda	2017	Relaxação Lagrangeana, heurística de Relax-and-Fix com modelo de horizonte rolante e heurística evolutiva Evolutionary Based Heuristic

Fonte: Elaborado pela autora 2019.

É importante ressaltar que nesse trabalho destacou-se somente autores que trabalharam o problema de planejamento e sequenciamento de lotes em fundições de pequeno ou médio porte. De acordo com o Quadro 1 observa-se que a utilização de Relaxação Lagrangeana é utilizada como método de resolução em alguns trabalhos. Na Seção 2.3 discute-se o uso de relaxações na resolução de problemas de otimização linear.

Na próxima Seção apresenta-se trabalhos que abordam o planejamento e sequenciamento da produção com enfoque no atendimento de pedidos.

## 2.2 PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO E SEQUENCIAMENTO DE LOTES COM ENFOQUE NO PLANEJAMENTO DE PEDIDOS

Nos trabalhos apresentados na Seção 2.1, o planejamento da produção é realizado em relação à fabricação, estocagem e atraso de itens, e não consideram os pedidos aos quais os itens pertencem. É importante considerar os pedidos, porque em um sistema de produção *make-to-order* as ordens de produção são realizadas de acordo com a chegada dos pedidos dos clientes e para que um pedido seja considerado completo é obrigatório que todos os os itens componentes sejam produzidos. Tal fato foi pouco explorado na literatura.

Teixeira, Oliveira e Santos (2017) trabalharam o planejamento e dimensionamento de lotes de itens com abordagem de pedidos para o sistema produtivo de uma indústria de laticínios. Os clientes realizam pedidos que podem conter diferentes tipos de produtos e devem ser entregues dentro de uma janela de tempo, uma vez que os produtos são perecíveis.

Os autores consideraram os custos e tempos para preparação de máquinas dependentes da sequência. O objetivo é a maximização dos lucros obtidos através do número de pedidos atendidos, descontados os custos inerentes à preparação e produção. Não há permissão para entregas parciais e o modelo deve decidir quais clientes devem ser atendidos com prioridade. Para resolver o problema, foi proposto um modelo matemático e uma heurística do tipo *Fix-and-Optimize*, dividida em duas fases: determinística e estocástica. Foram realizados testes com 20 instâncias para comparação de resultados com um resolvidor comercial que utiliza o algoritmo de *Branch-and-Cut* (TEIXEIRA; OLIVEIRA; SANTOS, 2017).

No setor de fundições, o problema de dimensionamento de lotes com enfoque no planejamento de pedidos foi estudado por Furtado (2012). A autora baseou-se nos trabalhos de Tonaki (2006) e Tonaki e Toledo (2010) para determinar os lotes de produção de forma que os pedidos sejam atendidos.

Um pedido pode conter vários itens produzidos por diferentes tipos de ligas. Para que um pedido seja atendido, todos os itens contidos nele devem ser entregues. Pode-se considerar pedidos entregues parcialmente, desde que sejam considerados os custos relativos às expedições extras. Caso os itens componentes de um pedido sejam peças que conjuntamente formam um produto final, os pedidos não podem ser entregues parcialmente (FURTADO, 2012).

Por exemplo, considere que um pedido seja realizado para uma torneira de alumínio. Para a produção o corpo da torneira e a base são dois itens diferentes, uma vez que possuem moldes distintos, como ambos os itens fazem parte do conjunto torneira, eles não podem ser entregues separadamente. O mesmo ocorre no caso de uma panela e sua tampa e outros tipos de produtos. Nesse caso, os itens são interdependentes.

Para a solução do problema, a autora propôs um modelo matemático com objetivo de minimizar custos de atrasos de pedidos, custos de estoque e custos de preparação de forno, e um

modelo que considera a possibilidade de entregas parciais de um mesmo pedido. Além disso, também é proposto uma heurística *Relax-and-fix* para solução do problema integrado.

## 2.3 RELAXAÇÃO EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO LINEAR

A resolução de Modelos de Programação Inteira (MIP) ou mista é em geral mais difícil do que a resolução de um problema de programação linear. Uma estratégia que pode ser utilizada para resolver um MIP é modificar o problema original de forma que a obter outros problemas relativamente mais fáceis de resolver, chamados de relaxações.

Nemhauser e Wolsey (1988) afirmam que um problema pode ser considerado uma relaxação de outro se o conjunto de soluções factíveis do problema original é um subconjunto das soluções viáveis do modelo relaxado e se o valor da função objetivo do problema relaxado fornecer um limitante sobre o valor da função objetivo do problema original, isto é, se for um problema de maximização o valor da função objetivo da relaxação traz um limitante superior e se for um problema de minimização um limitante inferior.

As relaxações mais comuns são as Relaxações Lineares, Lagrangeana e *Surrogate*. Relaxações lineares são comumente usadas e consistem em relaxar a condição de integralidade de uma variável de decisão. Uma aplicação da relaxação linear está presente no algoritmo de *Branch-and-Bound*., na resolução de problemas de otimização inteiros.

Nesta seção apresenta-se alguns trabalhos que utilizam relaxações Lagrangeanas e *Surrogates* como método de solução de programação matemática inteira ou mista. Será dada ênfase aos trabalhos que aplicaram relaxação *Surrogate* ou combinada *Lagrangeana-Surrogate*, pois essa relaxação foi escolhida como método de resolução do problema abordado por este trabalho.

### 2.3.1 Relaxação Lagrangeana

A utilização da Relaxação Lagrangeana na resolução de problemas é extensa na literatura. O método é aplicado em vários casos de MIP, como caixeiro viajante, localização, sequenciamento de tarefas, particionamento de conjuntos, roteamento de veículos, dimensionamento e sequenciamento de lotes, entre outros.

Geoffrion (1974) afirma que a Relaxação Lagrangeana é obtida ao transformar complicas restrições de um MIP em uma função objetivo, utilizando multiplicadores fixos.

Ou seja, considere um problema de programação inteira (P) tal que:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{S.a :} \quad & \\ & Ax \leq b \\ & Bx \leq d \\ & x \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

onde,  $c$  é um vetor de custos,  $b$  e  $d$  vetores de recursos e  $A$ ,  $B$  matrizes tecnológicas de tamanho apropriado e a variável  $x$  seja inteira. Define-se a Relaxação Lagrangeana de P como:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx + u(b - Ax) \\ \text{S.a :} \quad & \\ & Bx \leq d \\ & x \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

em que  $u$  é um vetor de multiplicadores não negativos e a relaxação foi feita sobre a restrição  $Ax \geq b$ . A Relaxação Lagrangeana deve ser mais fácil de resolver que o problema original, ganhando vantagens computacionais para o resolvidor (GEOFFRION, 1974).

Held e Karp (1970) foram uns dos precursores da utilização da Relaxação Lagrangeana na solução do problema do caixeiro viajante. Os autores utilizaram a relaxação para criar limitantes inferiores que foram inseridos nos nós de resolução do *Branch-and-Bound*.

Fisher (1973) utilizou o método para sequenciar tarefas em máquinas em uma empresa do tipo *job shop*. O autor utiliza os multiplicadores lagrangeanos para dualizar restrições de capacidade, as quais aparecem na função objetivo do problema Lagrangeano, enquanto as demais restrições aparecem explicitamente no problema. O problema original é decomposto em um subproblema para cada tarefa e o autor propõe um método heurístico de resolução, que atualiza iterativamente os multiplicadores lagrangeanos, de forma que a solução do problema relaxado gere limitantes inferiores para o problema original, os quais são utilizados em um algoritmo *Branch-and-Bound*.

Para resolver um problema de dimensionamento de lotes com tempo de *setup*, Trigeiro (1989) propôs um algoritmo para determinar os itens a serem produzidos em uma única máquina, atendendo a demanda por esses itens, e minimizando os custos de preparação e produção. O autor utiliza o método do sugradiente, o qual busca encontrar uma solução que esteja mais próxima da ótima primal e para isso anda em uma direção (gradiente) em que há melhoria dessa função, para resolver o problema Lagrangeano. Trigeiro, Thomas e McClain (1989) propõem um método de factibilização para as soluções encontradas pelo método de otimização do subgradiente.

Toledo (1998) aborda o problema de dimensionamento de lotes de múltiplos itens em máquinas paralelas distintas e com restrição de capacidade. Para determinar um plano de produção que minimize a soma dos custos de preparação, produção e estoque, atendendo à

demanda dos itens e respeitando às restrições de capacidade, a autora apresenta algoritmos de programação dinâmica para o problema sem restrição de capacidade, baseado na Relaxação Lagrangeana. Depois, a autora propõe dois algoritmos de *branch-and-bound* considerando a capacidade das máquinas.

A Relaxação Lagrangeana é uma proposta atraente como estratégia para se obter limitantes de um MIP, por ser relativamente fácil de resolver. Outros exemplos podem ser vistos nos trabalhos de [Hindi e Ab Ghani \(1991\)](#), [Sridharan \(1995\)](#), [Salam \(1998\)](#), [Fumero \(2001\)](#), [Tonaki e Toledo \(2010\)](#), entre outros. Entre as aplicações mais recentes estão, por exemplo, [Al-Dhaheri e Diabat \(2016\)](#) e [Rafie-Majd, Pasandideh e Naderi \(2018\)](#).

A Subseção 2.3.2 traz uma revisão bibliográfica a respeito da Relaxação Surrogate, que apresenta como principal desvantagem ser altamente não linear, dificultando sua implementação computacional ([ESPEJO; GALVÃO, 2002](#)).

### 2.3.2 Relaxação *Surrogate*

Diferentemente da Relaxação Lagrangeana, cuja estratégia consiste em retirar um conjunto de restrições e colocá-lo na função objetivo, esta estratégia substitui algumas restrições originais por uma nova, chamada de restrição *Surrogate*. A Restrição *Surrogate* é uma combinação linear não negativa de outras restrições do problema a ser resolvido, onde pelo menos uma das restrições tem peso positivo ([GLOVER, 1975](#)).

[Greenberg e Pierskalla \(1970\)](#) apresentam um tratamento teórico sobre a dualidade *surrogate* em problemas de programação matemática. Os autores observaram que resolver uma restrição *Surrogate* implica resolver uma função quase-côncava<sup>1</sup>, o que garante que qualquer ótimo local é um ótimo global. Tais resultados são importantes para definir uma solução ótima em um problema original através de uma relaxação *Surrogate*, pois, qualquer solução ótima para o problema *Surrogate* que seja factível para o problema original, é automaticamente ótima para este ([GLOVER, 1975](#)), ([GREENBERG; PIERSKALLA, 1970](#)), ([ESPEJO; GALVÃO, 2002](#)).

Seja  $P$  um problema de programação linear,  $\lambda$  um conjunto de multiplicadores *surrogates*,

<sup>1</sup> Uma função  $f : \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}$ , diferenciável por partes, é dita quase-côncava em um subconjunto convexo  $U$  se, para qualquer número real  $a$ , o conjunto  $\{x \in U : f(x) \geq a\}$  é um conjunto convexo. Para determinar se uma função é quase-côncava siga os seguintes passos:

1. Construa o gráfico da função;
2. Escolha dois pontos do gráfico e trace um segmento de reta, unindo esses dois pontos;
3. Verifique se os pontos que estão abaixo do segmento formam um conjunto convexo.  
Para ver tais definições com maior detalhamento, veja [Bazaraa, Sherali e Shetty \(2006\)](#).

tais que  $\lambda \geq 0$ , o Problema Surrogate ( $P^\lambda$ ) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{S.a} \quad & \\ & \lambda(Ax - b) \leq 0 \\ & Dx \leq e \\ & x \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Assim, sendo ( $P^\lambda$ ) uma relaxação de  $P$  o valor da função objetivo  $f((P^\lambda))$  não pode exceder o valor da função objetivo de  $P$ , isto é,  $f((P^\lambda)) \leq f(P)$ , para problemas de minimização (GLOVER, 1975).

As aplicações da Relaxação *Surrogate* não são tão variadas como as aplicações da Relaxação Lagrangeana. Um dos motivos é a dificuldade de determinar os multiplicadores surrogates, que em muitos casos se resumem em vários problemas da mochila (ESPEJO; GALVÃO, 2002). A seguir apresenta-se alguns trabalhos com aplicações da Relaxação *Surrogate* na solução de problemas de programação linear inteira.

### 2.3.3 Aplicações da Relaxação *Surrogate*

Uma abordagem comum de *branch-and-bound* para problemas de programação inteira mista é usar os limitantes obtidos do particionamento do problema como um dispositivo para restringir a enumeração. Rardin e Unger (1976) estudaram a força desses limitantes através do desenvolvimento de uma restrição *Surrogate* para os problemas de *Benders*. O limitante obtido a partir desta restrição substituta é então mostrado tão forte quanto aquele obtido a partir de qualquer uma das abordagens mais comuns baseadas em *Benders*.

Seguindo a mesma linha, estudando o efeito da adição de uma restrição *Surrogate* em um problema de Relaxação Lagrangeana, John e Kochenberger (1988) procuram melhorar os valores dos limitantes encontrados nos subproblemas lagrangeanos adicionando-se uma restrição substituta a eles em um problema de cobertura de conjuntos. Os autores concluíram que o número de nós no *Branch-and-Bound* com o uso da restrição *Surrogate* é menor do que sem ela, porém, nem sempre o tempo de resolução do problema é melhor. Isso se explica pelo fato da abordagem *Surrogate* precisar resolver muitos problemas da mochila 0 – 1.

Lorena e Belo Lopes (1994) apresentam uma heurística com base em restrições *surrogates* e método de otimização do subgradiente para resolver o problema de cobertura de conjuntos. O método se mostrou um bom substituto ao método lagrangeano, por apresentar desempenho computacional mais rápido, devido ao menor número de iterações necessárias e convergência mais rápida.

Narciso e Lorena (1999) apresentam uma abordagem utilizando a Relaxação Lagrangeana / *Surrogate* para o problema de maximização de lucro a partir da designação de tarefas, de tal forma que cada tarefa é atribuída a apenas um agente e sujeito a restrições de capacidade.

A relaxação Lagrangeana / *Surrogate* combina relaxações Lagrangeanas e *surrogates* usuais, relaxando primeiro um conjunto de restrições do modo substituto.

Gomes Da Silva, Clímaco e Figueira (2004) apresentam um método baseado na busca por dispersão para o problema da mochila multi-dimensional. A relaxação *Surrogate* é usada no método de dispersão e para avaliar a qualidade das soluções encontradas. A definição dos multiplicadores *surrogate* apropriados também é discutida. Os autores apresentam testes computacionais com grandes instâncias e meta-heurísticas de solução.

Molina et al. (2009) estudam o problema de dimensionamento de lotes e distribuição considerando os custos de estoque, produção, preparação e transporte para o armazém de uma empresa. Os autores utilizam um modelo matemático proposto na literatura e o resolvem utilizando uma heurística Lagrangeana/*Surrogate*. Além disso, os autores também propõem um modelo adicionando restrições de capacidade e permitindo atraso da demanda, para o último caso os autores mostram que abordagem utilizando combinada Lagrangeana/*Surrogate* obteve melhores resultados que a Relaxação Lagrangeana pura.

Uma aplicação mais recente é vista em Martello e Monaci (2018), que estudam o problema de múltiplas mochilas 0–1 em transportes logísticos. Os autores determinam limitantes superiores do problema através das Relaxações Lagrangeanas e *Surrogates* e encontram limitantes inferiores é feita a partir de uma heurística construtiva acoplada a uma metaheurística de refinamento.

Exemplos na programação não linear podem ser vistos em Dinkel e Kochenberger (1978) que apresentam resultados teóricos e o desenvolvimento de um algoritmo para o uso da Relaxação *Surrogate* em aplicações de programação matemática não linear. E em Chen et al. (1998) que apresentam uma técnica baseada em restrições *Surrogate*, definidas pelo princípio de máxima entropia para um problema de fluxo de energia ótimo.

Pode-se observar que a utilização da Relaxação *Surrogate* em problemas de otimização é bastante utilizada para resolver o problema da mochila binária. Também é comum o uso da relaxação combinada Lagrangeana/*Surrogate* em alguns problemas de otimização linear, como o problema de dimensionamento de lotes, por exemplo. Neste trabalho, optou-se pelo uso de uma relaxação *Surrogate* pura de um modelo de dimensionamento de lotes, com ênfase no atendimento de pedidos.

### 3 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O problema estudado foi baseado no trabalho de [Furtado \(2012\)](#), o qual utilizou os trabalhos de [Araujo, Arenales e Clark \(2008\)](#) e [Tonaki \(2006\)](#) que aborda o problema de dimensionamento de lotes de uma fundição de mercado do interior de São Paulo. A autora trata este problema sob a abordagem do planejamento de pedidos.

A fundição estudada trabalha com o sistema de produção *make to order* (MTO), isto é, produção de itens sob encomenda. O forno presente na fundição possui capacidade máxima para fundir 360 kg de liga e pode ser utilizado até 10 vezes em um dia de trabalho, porém deve ser ligado antes do início da jornada de trabalho em função do tempo que demora para realizar a primeira carga de forno.

A matéria-prima utilizada para a produção das ligas é composta de lingotes de metal e de sucata, as sobras descartadas durante uma fornada são reutilizadas para a produção de novas ligas. Apesar das sobras serem reutilizadas como matéria-prima, os custos gerados com produção de lingotes são altos, e por isso um bom planejamento da produção deve ser feito, de forma a melhor aproveitar o forno para fabricação dos itens demandados.

Os clientes realizam pedidos que podem conter diversos tipos de itens, produzidos com ligas diferentes e que podem ser interdependentes entre si, ou seja, não podem ser entregues separadamente, pois são componentes de um mesmo produto final. Para que um pedido seja considerado atendido, todos os itens contidos nele devem ser entregues, caso isso não ocorra dentro do período previsto para entrega, o pedido é considerado atrasado, ou, caso permitido pelos clientes, pode-se atender o pedido parcialmente dividindo-o em múltiplas entregas, ambos os casos geram custos de atraso ou de expedição para a empresa. O caso com entregas parciais é trabalhado por [Furtado \(2012\)](#), mas não é objeto de estudo desse trabalho.

O plano de produção deve decidir o sequenciamento de ligas a serem fundidas no forno, de forma que somente uma liga seja utilizada por vez. Para atender a demanda pode-se produzir os itens nos períodos ou estocá-los para uso em períodos posteriores, desde que se considere os custos relativos à estocagem de itens. O objetivo é minimizar custos relativos aos atrasos em atender os pedidos dos clientes, satisfazendo às restrições de demanda e de capacidade.

Para resolver o problema, [Furtado \(2012\)](#) propôs modelagens matemáticas com dimensionamento de lotes multiestágio considerando itens como parte integrante de pedidos, com o objetivo de minimizar os custos inerentes da produção, como atraso na entrega de pedidos, estoque de itens e *setup* do forno.

Para o problema proposto, considere um horizonte de planejamento finito dividido em períodos de trabalho. Em cada período, o forno pode ser utilizado várias vezes, cada fusão do forno é chamada de fornada ([FURTADO, 2012](#)).

Os pedidos dos clientes já estão determinados e a demanda de cada um é considerada ao

fim de cada período de trabalho. Considera-se que a demanda pode ser atendida com atraso, ou pode existir estoque total ou parcial dos itens de um pedido.

Por problemas de solidificação das peças, um item não pode ser parcialmente produzido, ou seja, um molde não pode ser preenchido por partes. De forma que deve-se considerar todo o peso de uma peça a ser produzida dentro da fornada. Assim, as variáveis  $X_{j\eta}$ , referentes às quantidades produzidas de cada item, são inteiras.

Para incentivar a produção dos itens componentes e produzir parcialmente pedidos não completos até o último dia do horizonte de planejamento, desconta-se o custo de estoque de itens no último período.

Furtado (2012) nomeou esse problema de "Problema de Planejamento da Produção de Pedidos (4P)". Os índices, os parâmetros de entrada e as variáveis de decisão para o modelo 4P são definidos a seguir:

<b>Índices</b>	
$k \in \{1, \dots, K\}$	tipos de ligas a serem utilizadas
$i \in \{1, \dots, NP\}$	pedidos
$j \in \{1, \dots, N\}$	itens pertencentes aos pedidos
$\eta \in \{1, \dots, L_T\}$	subperíodos de tempo, onde $L_T$ é a última fornada no último período.
$t \in \{1, \dots, T\}$	períodos de tempo
$F_t$	é o primeiro subperíodo do período e $F_1 = 1$
$L_t$	é o último subperíodo do período t
<b>Conjuntos</b>	
$S(i)$	conjunto de itens que pertencem ao pedido i
$L(k)$	conjunto de itens que podem ser produzidos a partir da liga k
<b>Parâmetros de Entrada</b>	
$NS$	número de subperíodos em cada período
$cap$	capacidade em Kg do forno
$a_{ji}$	quantidade de itens j demandada pelo pedido i
$p_j$	peso bruto (Kg) do item j
$d_{it}$	$d_{it} = 1$ se o pedido i deve ser entregue no período t, $d_{it} = 0$ , caso contrário
$hp_{it}^-$	custo por atrasar a entrega do pedido i no período t
$h_{jt}^+$	custo por antecipar a produção do item j no período t
$s_{k\eta}$	custo de configurar o forno para a liga k no subperíodo $\eta$

Variáveis de Decisão	
$X_{j\eta}$	quantidade de itens $j$ produzidas no subperíodo $\eta$
$I_{jt}^+$	quantidade de itens $j$ estocadas no período $t$
$Y_{\eta}^k$	$Y_{\eta}^k = 1$ se o forno está configurado para a liga $k$ no subperíodo $\eta$ , $Y_{\eta}^k = 0$ , caso contrário
$Z_{\eta}^k$	$Z_{\eta}^k = 1$ se houve preparação para a liga $k$ no subperíodo $\eta$ , $Z_{\eta}^k = 0$ , se $Y_{\eta-1}^k \geq Y_{\eta}^k$ , $Y_{\eta}^k$
$XP_{it}$	$XP_{it} = 1$ se o pedido $i$ foi concluído no período $t$ , $XP_{it} = 0$ , caso contrário
$IP_{it}^+$	$IP_{it}^+ = 1$ se o pedido $i$ é estocado do período $t$ para o período $t + 1$ , $IP_{it}^+ = 0$ , caso contrário
$IP_{it}^-$	$IP_{it}^- = 1$ se o pedido $i$ está atrasado do período $t$ , $IP_{it}^- = 0$ , caso contrário

O modelo para o problema 4P pode ser escrito como:

$$\min \sum_{k=1}^K \sum_{\eta=1}^{L_T} s_{k\eta} Z_{k\eta} + \sum_{i=1}^{NP} \sum_{t=1}^T h p_{it}^- IP_{it}^- + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} h_{jt}^+ I_{jt}^+ - \sum_{j=1}^N h_{jT}^+ I_{jT}^+ \quad (3.1)$$

S.a:

$$I_{jt-1}^+ + \sum_{\eta=F_t}^{L_t} X_{j\eta} = I_{jt}^+ + \sum_{\substack{i=1, \\ j \in S(i)}}^{NP} a_{ji} XP_{it} \quad \forall j, \quad \forall t \quad (3.2)$$

$$IP_{it-1}^+ - IP_{it-1}^- + XP_{it} = d_{it} + IP_{it}^+ - IP_{it}^- \quad \forall i, \quad \forall t \quad (3.3)$$

$$\sum_{j \in L(k)} p_j X_{j\eta} \leq cap Y_{\eta}^k \quad \forall \eta, \quad \forall k \quad (3.4)$$

$$\sum_{k=1}^K Y_{\eta}^k \leq 1 \quad \forall \eta \quad (3.5)$$

$$\sum_{\eta=F_1}^{L_T} X_{j\eta} \leq \sum_{i=1}^{NP} a_{ji} \quad \forall j \quad (3.6)$$

$$Z_{\eta}^k \geq Y_{\eta}^k - Y_{\eta-1}^k \quad \forall \eta, \quad \forall k \quad (3.7)$$

$$\sum_{k=1}^K Y_{\eta}^k \geq \sum_{k=1}^K Y_{\eta+1}^k \quad \forall \eta \in N(t) \setminus L_t \quad (3.8)$$

$$Y_{\eta}^k, Z_{\eta}^k \in \{0, 1\} \quad \forall \eta, \quad \forall k \quad (3.9)$$

$$XP_{it}, IP_{it}^-, IP_{it}^+ \in \{0, 1\} \quad \forall i, \quad \forall t \quad (3.10)$$

$$X_{j\eta} \geq 0 \quad \text{e inteiro} \quad \forall j, \quad \forall \eta \quad (3.11)$$

$$I_{jt}^+ \geq 0 \quad \forall j, \quad \forall t \quad (3.12)$$

A função objetivo (3.1) visa minimizar os custos de produção dos pedidos, como custo de preparação das ligas, custos de estoque de itens e custo de atraso na entrega dos pedidos. Para

incentivar a produção dos itens para produção de pedidos ainda não completados até o último dia do horizonte de planejamento, desconta-se o custo de estoque dos itens no último período, representada pela última parcela da função objetivo.

As restrições (3.2)-(3.3) determinam o balanço de estoque para os pedidos e para os itens componentes. As restrições (3.4) determinam o limite de capacidade do forno de forma que o total (em kg) de itens produzidos para cada item não ultrapasse a capacidade (em kg) do forno. As restrições (3.5) determinam que apenas uma liga pode ser fundida em cada subperíodo. As restrições (3.6) limitam a produção à quantidade de itens demandados. As restrições (3.7) indicam as configurações de troca de ligas. As restrições (3.8) evitam soluções simétricas. E as restrições (3.9)-(3.12) determinam o domínio das variáveis.

Após realizar testes computacionais com o modelo 4P, Furtado (2012) propõe uma adaptação na função objetivo com a retirada das parcelas de custo de *setup* de forno e custos de estoques de itens da função objetivo. Tal abordagem foi considerada porque os custos de troca de configuração durante os subperíodos de trabalho e os custos de estoque de peças são pouco significativos para os custos totais. A fim de diminuir a subutilização do forno manteve-se a parcela de incentivo a produção, representada pelo desconto do custo de estoque de itens no último período na função objetivo.

Como os custos de estoque de itens e de *setup* não são incluídos no modelo, a variável  $Z_\eta^k$  perde sua utilidade, por consequência as restrições (3.7) referentes às trocas de ligas não são consideradas no segundo modelo.

Os índices, os conjuntos, os parâmetros de entrada e as variáveis do modelo 4P2 são os mesmos do modelo 4P apresentados anteriormente. Dessa forma, o modelo para o problema 4P2 pode ser escrito como:

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{NP} h p_{it}^- IP_{it}^- - \sum_{j=1}^N h_{jT}^+ I_{jT}^+ \quad (3.13)$$

S.a:

$$I_{jt-1}^+ + \sum_{\eta=F_t}^{L_t} X_{j\eta} = I_{jt}^+ + \sum_{\substack{i=1, \\ j \in S(i)}}^{NP} a_{ji} X P_{it}, \quad \forall j, \quad \forall t \quad (3.14)$$

$$IP_{it-1}^+ - IP_{it-1}^- + X P_{it} = d_{it} + IP_{it}^+ - IP_{it}^- \quad \forall i, \quad \forall t \quad (3.15)$$

$$\sum_{j \in L(k)} p_j X_{j\eta} \leq \text{cap} Y_\eta^k \quad \forall \eta, \quad \forall k \quad (3.16)$$

$$\sum_{k=1}^K Y_\eta^k \leq 1 \quad \forall \eta \quad (3.17)$$

$$\sum_{\eta=F_1}^{L_T} X_{j\eta} \leq \sum_{i=1}^{NP} a_{ji} \quad \forall j \quad (3.18)$$

$$\sum_{k=1}^K Y_{\eta}^k \geq \sum_{k=1}^K Y_{\eta+1}^k \quad \forall \eta \in N(t) \setminus L_t \quad (3.19)$$

$$Y_{\eta}^k \in \{0, 1\} \quad \forall \eta, \quad \forall k \quad (3.20)$$

$$XP_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall i, \quad \forall t \quad (3.21)$$

$$X_{j\eta} \geq 0 \quad \text{e inteiro} \quad \forall j, \quad \forall \eta \quad (3.22)$$

$$I_{jt}^+ \geq 0 \quad \forall j, \quad \forall t \quad (3.23)$$

$$IP_{it}^- \in \{0, 1\} \quad \forall i, \quad \forall t \quad (3.24)$$

$$IP_{it}^+ \in \{0, 1\} \quad \forall i, \quad \forall t \quad (3.25)$$

A função objetivo (3.13) visa minimizar os custos de atraso na entrega de pedidos e mantém o benefício de não contabilizar os custos de estoque no último período, de forma a melhor aproveitar a utilização do forno. E as restrições (3.14)-(3.25) são as mesmas do modelo 4P, com a retirada das restrições referentes à configuração de troca de ligas.

A autora mostrou que o uso do incentivo para estoque no último período contribui de forma significativa para a redução de custos. Pedidos não finalizados no plano de produção atual passam a configurar pedidos atrasados em planos subsequentes, assim utilizar a capacidade atual para produzir itens atrasados evita a competição por recursos de produção entre esses itens e os que não estão em atraso.

Os modelos desenvolvidos são relevantes para fundições em que os pedidos não podem ser entregues parcialmente. Além disso, caso os custos de estoque de itens e custo de *setup* não sejam significativos, o modelo 4P2 é eficiente. Por outro lado, caso esses custos sejam elevados, o problema deve ser tratado pelo modelo 4P.

No Capítulo 4, apresenta-se uma proposta de Relaxação *Surrogate* para o modelo 4P2, bem como os resultados teóricos que comprovam que o modelo desenvolvido trata-se de uma relaxação e testes computacionais iniciais realizados com o uso do CPLEX.

# 4 RELAXAÇÃO DO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DE PEDIDOS

A relaxação de um problema de otimização linear consiste em substituir o problema original que pretende-se resolver por um de mais fácil resolução. As soluções obtidas com a relaxação geram limitantes inferiores para o problema original (no caso de um problema de minimização), que podem ser utilizados em heurísticas para a resolução do problema original ou como método para determinar soluções ótimas para o problema original (WOLSEY, 1998).

Neste capítulo, apresenta-se um modelo matemático de Planejamento e Dimensionamento de Lotes (PDL) obtido a partir da relaxação da restrição de capacidade do modelo 4P2, o qual será exibido na Seção 4.1. Na Seção 4.2 descreve-se os resultados teóricos que demonstram que o modelo proposto trata-se de uma relaxação *Surrogate* do modelo 4P2. Testes computacionais foram realizados para a verificação dos resultados teóricos e avaliação do modelo relaxado e são apresentados na Seção 4.3, as soluções obtidas por esses testes serão utilizadas como soluções iniciais para abordagem heurística de solução apresentada no Capítulo 5.

## 4.1 MODELO RELAXADO PARA O PLANEJAMENTO DE PEDIDOS (MRPP)

Nessa Seção, apresenta-se o modelo matemático desenvolvido neste trabalho. Como é mostrado na Seção 4.2, o modelo trata-se de uma relaxação do modelo 4P2 de Furtado (2012), por isso o modelo foi chamado de Modelo Relaxado para o Planejamento de Pedidos (MRPP). Neste trabalho, optou-se por relaxar a restrição de capacidade do modelo 4P2, com o intuito de determinar soluções iniciais para uma abordagem de resolução do problema do planejamento de pedidos.

Na prática, se todos os itens de um pedido são produzidos em quantidade igual à demandada, este pedido é considerado completo, portanto, o estoque de pedidos não é utilizado, dessa forma, a variável  $IP_{it}^+$  se torna nula e pode ser retirada do modelo, por consequência a restrição (3.15) é alterada. A nova restrição para o balanço de pedidos que determina se um pedido está pronto ou atrasado no período  $t$  é dada, sem perda de generalidade, por:

$$XP_{it} + IP_{it}^- = d_{it} + IP_{i,t-1}^-, \quad \forall i, t.$$

A ampliação do conjunto de soluções do modelo 4P2 é feita utilizando a estratégia de substituir a variável  $Y_{\eta}^k$ , que é binária, por uma variável inteira  $T_{kt}$  definida como o número de vezes que uma liga  $k$  é fundida no período  $t$ , que passa a multiplicar o parâmetro de capacidade,  $cap$ , tornando essa restrição relaxada. A restrição de capacidade do forno (3.16) passa a ser:

$$\sum_{j \in L(k)} p_j \cdot X_{jt} \leq cap \cdot T_{kt}, \quad \forall k, t.$$

A relaxação não utiliza o índice de subperíodo  $\eta$ , portanto o parâmetro  $NS$  deixa de ser o número de subperíodos e passa a ser o número máximo de fornadas permitidas em um dia de trabalho. Como  $NS$  é o limite máximo para a quantidade de fornadas, a soma das variáveis  $T_{kt}$ , para o índice  $k$  não pode exceder esse limite, tal fato é representado pela restrição a seguir que é adicionada ao modelo MRPP.

$$\sum_{k=1}^K T_{kt} \leq NS.$$

Os índices, os parâmetros de entrada e as variáveis de decisão para o modelo MRPP são apresentados a seguir

<b>Índices</b>	
$k \in \{1, \dots, K\}$	tipos de ligas a serem utilizadas
$i \in \{1, \dots, NP\}$	pedidos
$j \in \{1, \dots, N\}$	itens pertencentes aos pedidos
$t \in \{1, \dots, T\}$	períodos de tempo
<b>Conjuntos</b>	
$S(i)$	conjunto de itens que pertencem ao pedido $i$
$L(k)$	conjunto de itens que podem ser produzidos a partir da liga $k$
$A(j)$	pedidos que contém o item $j$
<b>Parâmetros de Entrada</b>	
$NS$	número de fornadas em cada período
$cap$	capacidade em (kg) do forno
$a_{ji}$	quantidade de itens $j$ demandada no pedido $i$
$p_j$	peso bruto (kg) do item $j$
$d_{it}$	$d_{it} = 1$ se o pedido $i$ deve ser entregue no período $t$ , $d_{it} = 0$ , caso contrário
$hp_{it}^-$	custo por atrasar a entrega de um pedido $i$ no período $t$
$h_{jT}^+$	custo de estocagem do item $j$ no último dia do horizonte de planejamento $T$
<b>Variáveis de Decisão</b>	
$X_{jt}$	quantidade de itens $j$ produzida no período $t$
$I_{jt}$	quantidade de itens $j$ estocada no período $t$
$XP_{it}$	$XP_{it} = 1$ se o pedido $i$ foi concluído no período $t$ , $XP_{it} = 0$ , caso contrário
$IP_{it}^-$	$IP_{it}^- = 1$ se o pedido $i$ está atrasado no período $t$ , $IP_{it}^- = 0$ , caso contrário
$T_{kt}$	número de preparação de fornos para a liga $k$ no período $t$

### Modelo Relaxado para o Planejamento de Pedidos (MRPP)

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{NP} hp_{it}^- IP_{it}^- - \sum_{j=1}^N h_{jT}^+ I_{jT}^+ \quad (4.1)$$

$$I_{jt-1} + X_{jt} = I_{jt} + \sum_{i \in A(j)} a_{ji} \cdot XP_{it}, \quad \forall j, t \quad (4.2)$$

$$XP_{it} + IP_{it}^- = d_{it} + IP_{it-1}^-, \quad \forall i, t \quad (4.3)$$

$$\sum_{j \in L(k)} p_j \cdot X_{jt} \leq cap \cdot T_{kt}, \quad \forall k, t \quad (4.4)$$

$$\sum_{t=1}^T X_{jt} \leq \sum_{i=1}^{NP} a_{ji}, \quad \forall j, t \quad (4.5)$$

$$\sum_{k=1}^K T_{kt} \leq NS, \quad \forall t \quad (4.6)$$

$$XP_{it}, IP_{it}^- \in \{0, 1\} \quad \forall i, t \quad (4.7)$$

$$X_{jt} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall j, t \quad (4.8)$$

$$T_{kt} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall k, t \quad (4.9)$$

$$I_{jt} \geq 0 \quad \forall j, t \quad (4.10)$$

A função objetivo (4.1) visa minimizar os custos de atraso na entrega de pedidos e mantém o benefício de não contabilizar os custos de estoque no último período, de forma a melhor aproveitar a utilização do forno. As restrições (4.2)-(4.3) determinam o balanço de fluxo para os pedidos e para os itens componentes. As restrições (4.4) determinam o limite de capacidade do forno, considerando que a capacidade (kg) do forno é multiplicada pelo número de vezes que o forno foi preparado para a mesma liga por período. As restrições (4.5) limitam a produção à quantidade de itens demandados. As restrições (4.6) indicam que a quantidade de configurações de forno não ultrapasse a quantidade total de fornadas de um dia de trabalho. E as restrições (4.7) - (4.10) determinam os domínios e as condições de não negatividade das variáveis de decisão.

A relaxação do modelo MRPP consiste em substituir a variável binária  $Y_{\eta}^k$ , presente no modelo 4P2, por uma variável inteira  $T_{kt}$ , que contabilizará a quantidade de vezes que o forno utiliza a mesma liga, tal valor será multiplicado pela capacidade do forno, relaxando a restrição de capacidade do problema 4P2. Como a variável  $T_{kt}$  não controla os subperíodos  $\eta$ , o modelo MRPP deixa de sequenciar as ligas e passa a ser um problema de dimensionamento de lotes (PDL).

## 4.2 RESULTADOS TEÓRICOS

Nessa seção, prova-se as relações existentes entre o modelo 4P2, proposto por [Furtado \(2012\)](#) e o modelo MRPP. Para isso, procura-se demonstrar que o conjunto de soluções factíveis para o modelo 4P2 estão contidas no conjunto de soluções factíveis MRPP, e qual a relação existente entre os valores das funções objetivos dos dois modelos.

Wolsey (1998) definiu o que é uma relaxação de um PLI de minimização da seguinte maneira:

**Definição 4.1.** "Um problema (RP)  $z^R = \min\{f(x) : x \in T \subseteq \mathbb{R}^n\}$  é uma relaxação para o problema de otimização linear (P)  $z = \min\{c(x) : x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}$  se:

1.  $X \subseteq T$ , e
2.  $f(x) \leq c(x)$  para todo  $x \in X$ ."

A partir da Definição 4.1, seja  $M$  um modelo de programação linear inteira, considere  $S(M)$  como o conjunto de soluções factíveis e  $f(x)$ , com  $x \in S(M)$  seja o valor da função objetivo para o modelo  $M$ . Utilizando essa notação, pretende-se mostrar que  $S(4P2) \subseteq S(MRPP)$ .

**Lema 4.1.**  $S(4P2) \subseteq S(MRPP)$ .

*Demonstração.* Primeiramente, observe que na prática a estocagem de um pedido completo não faz sentido, pois, uma vez que todos os itens componentes de um pedido estão prontos esse pedido é considerado entregue. Por isso a variável  $IP_{it}^+$  não foi considerada no modelo MRPP, e não há violação das restrições (3.15), de forma que essas restrições são representadas no modelo MRPP pelas restrições (4.2).

A soma das quantidades de um item  $j$  produzidas em cada subperíodo  $\eta$ ,  $\sum_{\eta} X_{j\eta}$  é igual a quantidade total produzida deste item  $j$  no período  $t$ ,  $X_{jt}$ , assim:

$$\sum_{\eta} X_{j\eta} = X_{jt}, \quad \forall j, \forall t. \quad (4.11)$$

Portanto, as restrições (4.3) e (3.14), bem como as restrições (4.5) e (3.18) são equivalentes.

Ao substituir a variável binária  $Y_{\eta}^k$  pela variável inteira  $T_{kt}$ , as restrições (3.19) perdem a utilidade no modelo e, portanto, são retiradas. Somando-se todas as vezes que uma mesma liga foi utilizada dentro de um período,  $\sum_{\eta}^{NS} Y_{\eta}^k$ , tem-se o número total de vezes que ela foi utilizada nesse período, ou seja:

$$\sum_{\eta} Y_{\eta}^k = T_{kt}, \quad \forall k, \forall t. \quad (4.12)$$

Por construção, a restrição (3.16) diz que:

$$\sum_{j \in L(k)} p_j X_{j\eta} \leq cap Y_{\eta}^k, \quad \forall \eta, \forall k. \quad (4.13)$$

Considere, agora, o conjunto  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_\eta\}$ , um conjunto de multiplicadores *surrogates*. O conjunto de restrições (4.13) pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\lambda_1 \sum_{j \in L(k)} p_j X_{j1} \leq \lambda_1 \text{cap} Y_1^k, \quad \forall k. \quad (4.14)$$

$$\lambda_2 \sum_{j \in L(k)} p_j X_{j2} \leq \lambda_2 \text{cap} Y_2^k, \quad \forall k. \quad (4.15)$$

$$\lambda_3 \sum_{j \in L(k)} p_j X_{j3} \leq \lambda_3 \text{cap} Y_3^k, \quad \forall k. \quad (4.16)$$

⋮

$$\lambda_\eta \sum_{j \in L(k)} p_j X_{j\eta} \leq \lambda_\eta \text{cap} Y_\eta^k, \quad \forall k. \quad (4.17)$$

Somando-se as inequações (4.14) - (4.17) segue que:

$$\sum_{j \in L(k)} p_j \cdot (\lambda_1 X_{j1} + \lambda_2 X_{j2} + \lambda_3 X_{j3} + \dots + \lambda_\eta X_{j\eta}) \leq \text{cap} \cdot (\lambda_1 Y_1^k + \lambda_2 Y_2^k + \lambda_3 Y_3^k \dots \lambda_\eta Y_\eta^k) \quad \forall k. \quad (4.18)$$

Se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_\eta = \lambda$ , a desigualdade (4.18) passa a ser:

$$\sum_{j \in L(k)} p_j \cdot \lambda (X_{j1} + X_{j2} + X_{j3} + \dots + X_{j\eta}) \leq \text{cap} \cdot \lambda (Y_1^k + Y_2^k + Y_3^k \dots Y_\eta^k) \quad \forall k. \quad (4.19)$$

Dividindo-se por  $\lambda$  em ambos os lados da inequação:

$$\sum_{j \in L(k)} p_j \cdot (X_{j1} + X_{j2} + X_{j3} + \dots + X_{j\eta}) \leq \text{cap} \cdot (Y_1^k + Y_2^k + Y_3^k \dots Y_\eta^k) \quad \forall k. \quad (4.20)$$

Logo:

$$\sum_{j \in L(k)} p_j \sum_{\eta} X_{j\eta} \leq \text{cap} \sum_{\eta} Y_\eta^k \quad \forall \eta, \forall k. \quad (4.21)$$

Portanto, pelas igualdades (4.11) e (4.12):

$$\sum_{j \in L(k)} p_j X_{jt} \leq \text{cap} T_{kt}, \quad \forall k, \forall t.$$

Assim, o conjunto de restrições (3.16) estão contidas no conjunto de restrições (4.4).

Por fim, prova-se que as restrições (3.17) estão contidas no conjunto de restrições (4.6).

Uma vez que a variável  $Y_\eta^k$  é binária nas restrições (3.17),  $\sum_{k=1}^K Y_\eta^k, \forall \eta$ , resultam sempre em 0 ou 1, e como  $T_{kt}, \forall t$  é uma variável inteira segue que:

i) Se  $\sum_{k=1}^K Y_\eta^k = 0, \forall \eta$

Não houve utilização do forno durante todo período  $t$  de trabalho, portanto  $\sum_{k=1}^K T_{kt} = 0$

e

$$\sum_{k=1}^K Y_\eta^k = \sum_{k=1}^K T_{kt} = 0 \leq NS. \quad (4.22)$$

ii) Se  $\sum_{k=1}^K Y_\eta^k \neq 0$ , para algum  $\eta$  de um determinado período  $t$

Houve pelo menos uma utilização do forno durante todo um período de trabalho, portanto  $\sum_{k=1}^K T_{kt} \geq 1$ .

Pelas restrições restrições (3.17):

$$\sum_{k=1}^K Y_\eta^k \leq 1.$$

E pelas restrições (4.6)

$$\sum_{k=1}^K T_{kt} \leq NS, \forall t.$$

Mas,

$$\sum_{k=1}^K T_{kt} \geq 1. \quad (4.23)$$

Por transitividade:

$$\sum_{k=1}^K Y_\eta^k \leq 1 \leq \sum_{k=1}^K T_{kt} \leq NS, \forall t. \quad (4.24)$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^K Y_\eta^k \leq NS, \forall t$$

Concluindo-se que o conjunto de restrições (3.17), estão contidas no conjunto de restrições (4.6). As demais restrições são as mesmas para os dois modelos.

Logo,  $S(4P2) \subseteq S(MRPP)$ , ou seja o conjunto de soluções factíveis do modelo 4P2 está contido no conjunto de soluções factíveis do modelo MRPP.

□

Como os dois modelos possuem a mesma função objetivo, segue que os valores de função objetivo para o modelo MRPP são limitantes inferiores para o modelo 4P2, matematicamente  $f(x) \leq c(x)$ , para todo  $x \in S(4P2)$ , sendo  $f(x)$  e  $c(x)$  os valores das funções objetivos para MRPP e 4P2, respectivamente.

Assim, pelo que foi mostrado no Lema 4.1 o modelo MRPP é uma relaxação do problema 4P2, obtido a partir da ampliação do conjunto soluções factíveis do problema original, e os valores para função objetivo de MRPP são menores ou iguais aos valores de função objetivo de 4P2, na solução ótima.

Além disso, as sequências de sentenças matemáticas (4.14)-(4.21) mostram que a relaxação da restrição de capacidade, trata-se de um caso de Relaxação *Surrogate*, na qual todos os multiplicadores *surrogates* são iguais e positivos.

## 4.3 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS INICIAIS

Nesta Seção apresentam-se os testes computacionais realizados que buscam comprovar os resultados teóricos obtidos na Seção 4.2. Na Subseção 4.3.1, descreve-se as instâncias utilizadas para os testes e na Subseção 4.3.2, mostra-se os resultados obtidos computacionalmente e a comparação destes com os resultados teóricos para o modelo MRPP.

Os testes computacionais realizados para o modelo MRPP foram realizados em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i7-6500U CPU @ 2.50GHz, 2601 Mhz e 16,0 GB de memória RAM, sistema operacional *Microsoft Windows 10 Home Single Language* e o *software* de otimização linear IBM ILOG CPLEX Optimization Studio, versão 12.6.2.0, com a configuração padrão de seus parâmetros e tempo limite de execução de 3600 segundos.

### 4.3.1 Instâncias de Teste

Utilizou-se neste trabalho as instâncias geradas por Furtado (2012), as quais foram baseadas na carteira utilizada por Araujo, Arenales e Clark (2008), também presente nos trabalhos de Tonaki e Toledo (2010) e Camargo (2009).

A fundição em que o trabalho de Tonaki e Toledo (2010) foi inspirado, apresentava à época um total de 19 tipos diferentes de ligas e 383 itens. O forno tinha capacidade para fundir 360 kg de ligas e podiam ser realizadas até 10 fornadas diariamente, totalizando 3.600 kg de capacidade por dia.

Tonaki (2006) definiu 11 instâncias baseadas no trabalho de Araujo e Arenales (2003) de acordo com a Tabela 1. As instâncias pares e a instância 11 possuem 5 dias de planejamento, as demais possuem 3 dias. As instâncias 1 e 2 possuem os itens atrasados feitos das 5 ligas mais frequentes e as instâncias 3 e 4 possuem todos os itens feitos dessas mesmas ligas. Nas instâncias 5 e 6, considerou-se os itens atrasados das 16 ligas mais utilizadas. Nas instâncias 7 e 8, trabalhou-se com 90 % dos itens atrasados, utilizando-se todas as ligas, e as carteiras 9 e 10 consideraram 80 % de itens atrasados. A instância 11 é a carteira completa.

Tabela 1 – Instâncias utilizadas por Tonaki (2006).

<b>Instância</b>	<b>Número de ligas</b>	<b>Número de itens</b>	<b>Dias de planejamento</b>	<b>Capacidade máxima (kg)</b>	<b>Demanda (kg)</b>
1	5	165	3	10.800	13.863,9
2	5	165	5	18.000	13.863,9
3	5	228	3	10.800	20.139,5
4	5	293	5	18.000	24.040,5
5	16	225	3	10.800	17.211,3
6	16	225	5	18.000	17.211,3
7	16	224	3	10.800	15.441,5
8	16	224	5	18.000	15.441,5
9	15	224	3	10.800	13.731,3
10	15	224	5	18.000	13.731,3
11	19	383	5	18.000	29.312,0

Fonte: Tonaki (2006).

As carteiras criadas por Tonaki (2006) consideram o planejamento da produção de itens e não são considerados os pedidos dos clientes. Dessa forma, Furtado (2012) gerou três cenários, baseados nas instâncias apresentadas na Tabela 1: número mínimo, médio e máximo de pedidos. Contabiliza-se os itens que possuem a mesma data prevista de entrega como um único pedido, constituindo o número mínimo de pedidos. O cenário com o número máximo de pedidos considera que cada item é um pedido, e para o cenário com o número médio de pedidos, a autora utilizou um gerador randômico que para cada item com a mesma data de entrega define de qual pedido o item fez parte. O número de pedidos da carteira média é a média aritmética entre o número de pedidos da carteira mínima e da carteira máxima.

Tabela 2 – Número de pedidos utilizados nas carteiras mínima, média e máxima.

<b>Instâncias</b>	<b>Número de Pedidos</b>		
	<b>Carteira Mínima</b>	<b>Carteira Média</b>	<b>Carteira Máxima</b>
1	43	104	165
2	43	104	165
3	46	137	228
4	48	170	293
5	47	136	225
6	47	136	225
7	47	135	224
8	47	135	224
9	47	135	224
10	47	135	224
11	52	217	383

Fonte: Furtado (2012).

As 33 instâncias, divididas nos cenários mínimo, médio e máximo número de pedidos, geradas por [Furtado \(2012\)](#), foram utilizadas para os testes realizados no modelo MRPP.

### 4.3.2 Resultados Computacionais

Apresenta-se nesta seção, os resultados dos testes computacionais realizados com objetivo de validar o modelo proposto e gerar soluções iniciais, que posteriormente são utilizadas para uma abordagem de resolução heurística.

Testou-se os modelos 4P2 e o modelo MRPP com o *software* de otimização CPLEX, até que este encontrasse uma solução ótima, ou atingisse o tempo máximo de execução de 3.600s. A Tabela 3 mostra os resultados obtidos após realização desses testes.

Na Tabela 3, a coluna  $FO_R$  exibe o valor da função objetivo obtido para o modelo MRPP, e a coluna  $FO_P$  para o modelo 4P2, obtidos no CPLEX após o *software* atingir a otimalidade ou o tempo máximo de execução. As colunas  $NP_R$  e  $NP_P$  mostram o número de pedidos atendidos para cada instância pelo modelo relaxado e para o modelo 4P2, respectivamente.

As diferenças percentuais em relação à otimalidade da função objetivo estão apresentadas nas colunas  $Gap_R$  para o modelo MRPP e  $Gap_P$  para o modelo 4P2. Os tempos computacionais exigidos pelos CPLEX para resolução dos modelos são mostrados, em segundos, nas colunas  $T_R$  e  $T_P$ .

Tabela 3 – Resultados obtidos pelo CPLEX para os modelos MRPP e 4P2

Instância	MRPP				4P2			
	$FO_R$	$NP_R$	$Gap_R$	$T_R$	$FO_P$	$NP_P$	$Gap_P$	$T_P$
Min 01	36,95	42	0,00%	2,3	36,95	42	0,03%	3.600
Min 02	37,42	43	0,00%	2,84	37,42	43	0,18%	3.600
Min 03	43,36	43	0,00%	5,58	43,36	43	0,02%	3.600
Min 04	53,22	44	0,00%	33,91	55,41	44	5,40%	3.600
Min 05	67,61	40	0,00%	21,64	68,44	40	5,15%	3.600
Min 06	82,77	43	0,00%	138,89	91,66	43	15,18%	3.600
Min 07	85,24	40	0,00%	10,3	87,61	40	5,71%	3.600
Min 08	95,37	47	0,00%	26,47	97,15	47	5,98%	3.600
Min 09	124,49	40	0,00%	8,44	125,55	40	4,02%	3.600
Min 10	130,7	47	0,00%	66,42	137,60	47	11,29%	3.600
Min 11	110,58	<b>45</b>	0,00%	578,73	117,80	44	11,24%	3.600
Med 01	48,69	103	0,00%	5,48	48,69	103	0,10%	3.600
Med 02	56,3	104	0,00%	5,16	56,31	104	0,05%	3.600
Med 03	67,65	110	0,00%	7,23	67,68	110	0,12%	3.600
Med 04	68,02	123	0,00%	159,69	68,36	<b>129</b>	0,49%	3.600
Med 05	104,39	117	0,00%	36,05	104,82	<b>118</b>	1,16%	3.600
Med 06	125,73	127	0,00%	196,97	131,99	<b>130</b>	8,24%	3.600
Med 07	84,35	114	0,00%	17,63	85,39	<b>119</b>	1,66%	3.600
Med 08	167,64	135	0,00%	191,48	171,69	135	5,27%	3.600
Med 09	154,93	113	0,00%	36,17	156,50	<b>117</b>	2,50%	3.600
Med 10	143,35	135	0,00%	141,88	145,80	135	4,92%	3.600
Med 11	170,52	137	0,05%	3600	176,86	137	6,05%	3.600
Max 01	55,95	<b>164</b>	0,00%	4,03	55,99	163	0,57%	3.600
Max 02	55,95	165	0,00%	9,69	56,01	165	0,29%	3.600
Max 03	67,39	<b>171</b>	0,00%	10,45	67,65	169	0,60%	3.600
Max 04	81,43	201	0,00%	330,89	82,35	<b>209</b>	1,77%	3.600
Max 05	106,23	191	0,00%	48,81	106,44	195	1,75%	3.600
Max 06	120,35	210	0,00%	1567,16	121,69	<b>215</b>	2,79%	3.600
Max 07	165,94	193	0,00%	63,5	166,74	<b>196</b>	1,52%	3.600
Max 08	179,09	224	0,00%	292,88	180,26	224	2,78%	3.600
Max 09	174,49	191	0,00%	64,94	174,73	<b>194</b>	1,04%	3.600
Max 10	178,71	224	0,00%	115,58	184,13	224	5,45%	3.600
Max 11	165,17	<b>231</b>	0,00%	925,25	170,65	230	4,82%	3.600

Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

Em comparação com os valores de função objetivo obtidos para o modelo 4P2, exibidos na coluna  $FO_P$ , observa-se que o modelo MRPP atingiu valores de função objetivo menores ou iguais aos valores obtidos pelo modelo 4P2 para todas as instâncias testadas. Tal resultado era esperado, uma vez que provou-se na Seção 4.2 que o modelo MRPP é uma relaxação do modelo 4P2.

Nota-se que para as instâncias em que o resultado de  $NP_P$  encontra-se em negrito, o modelo 4P2 completou maior número de pedidos que o modelo MRPP, tal resultado acontece pois minimizar os custos de atraso de pedidos, não significa necessariamente atender a um maior número de pedidos.

Para exemplificar tal fato analisou-se os custos de atraso de pedidos e o custo de estoque do último período para a instância *Med04*, na qual o modelo 4P2 atendeu um número maior de pedidos que o modelo MRPP, conforme mostra a Tabela 4

Tabela 4 – Comparação dos custos para a Instância *Med04*.

Custos de Atraso		
	4P2	MRPP
Período 1	26,54	26,52
Período 2	16,47	16,46
Período 3	13,58	13,57
Período 4	6,80	6,78
Período 5	4,74	4,69
Custo Atraso Total	68,13	68,02
Custo Estoque	0,01	0,01
FO	68,12	68,01

Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

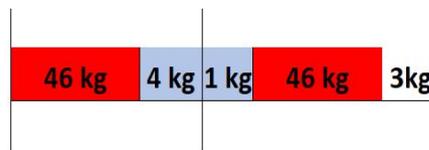
A instância *Med04* possui 5 períodos de planejamento, ambos os modelos encontraram o mesmo valor de custo de estoque no último período, as diferenças dos custos estão nos custos de atraso durante os períodos. No primeiro período o modelo 4P2 não atendeu o pedido 114 que custou nesse período 0,06 unidades monetárias. O modelo MRPP atendeu esse pedido no primeiro período, porém deixou de atender dois outros pedidos: 101 e 120, os quais custam 0,02 cada um, atendidos pelo modelo 4P2 nesse período. Percebe-se que para atender um pedido mais caro a relaxação deixou de atender outros pedidos mais baratos, minimizando o custo de atraso, o que também acontece em outros períodos do planejamento. O mesmo ocorre com as outras instâncias em que o modelo 4P2 atendeu mais pedidos que o modelo MRPP. Vale lembrar que o modelo 4P2 não está na otimalidade, então o número de pedidos atendidos pode diminuir na solução ótima.

A coluna  $Gap_P$  apresenta a diferença percentual entre o valor da função objetivo para a melhor solução encontrada pelo modelo 4P2 e o limitante inferior quando o CPLEX atingiu o tempo máximo de execução de 3.600s.

Para a instância *Med 11*, o tempo limite de execução do *software* foi atingido e a diferença percentual entre a melhor solução e o limitante inferior encontrado pelo CPLEX foi de 0,05%. Para as demais instâncias o CPLEX resolveu o modelo na otimalidade no tempo de execução apresentado na Tabela 3, isto significa que o *Gap* para essas instâncias possui valor zero.

Embora, as soluções encontradas pelo CPLEX para o modelo relaxado sejam ótimas (ou próximo da otimalidade no caso da instância *Med11*) não se pode usar esse modelo em substituição ao modelo 4P2, pois, na prática todo o peso de uma peça deve estar contido numa única fornada. Ao relaxar a restrição de capacidade é possível produzir um único item em mais de uma fornada, por exemplo, considere um forno com capacidade fundir  $50kg$  de liga em até duas fornadas durante um dia de trabalho. Para atender a um pedido que possui um 2 itens de  $46kg$  e um item de  $5kg$  de mesma liga, o modelo relaxado considera as duas fornadas como uma só e permitiria a produção de todos os itens, como ilustra a Figura 3.

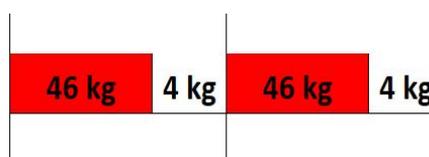
Figura 3 – Exemplo de uma solução para o modelo MRPP.



Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

Na Figura 3, a parte em vermelho representa a peça de  $46kg$  e a parte em azul o item de  $5kg$ , a parte em branco representa a capacidade do forno que não foi utilizada. Em uma única fornada com  $50kg$  de capacidade, não caberia um item de  $46kg$  e um de  $5kg$ , porém, nesse caso a variável  $T_{kt} = 2$ , e a capacidade do forno passa a ser  $100kg$ , de forma que é possível a produção de todos os itens do exemplo. Observe, que na prática o forno foi alimentado com a mesma liga duas vezes. O item de  $5kg$  foi produzido uma parte na primeira fornada e o restante na última fornada, o que não é permitido na fundição por questões de solidificação da liga. Ao ordenar a produção de um item, todo o peso dele deve estar incluído dentro de uma única fornada, portanto essa solução não é factível na prática e também para o modelo 4P2.

Figura 4 – Exemplo de uma solução para o modelo 4P2.



Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

A Figura 4 mostra uma possível solução viável para o modelo 4P2 para esse exemplo, utilizando apenas esse período e as duas fornadas com capacidade de  $50kg$  cada uma, não seria possível atender esse pedido, pois o item de  $5kg$  não caberia nos fornos. Por esse motivo, o modelo MRPP sozinho não resolve o PDSL com enfoque no planejamento de pedidos para uma fundição e uma abordagem heurística de solução foi proposta.

No Capítulo 5, propõe-se uma abordagem heurística de solução composta de 3 fases: Solução Inicial, Factibilização e Melhoria. A heurística é capaz de resolver o problema exemplificado pelas Figuras 3 e 4, factibilizando as soluções encontradas pelo modelo MRPP para o modelo 4P2.

# 5 ABORDAGEM HEURÍSTICA PARA O PROBLEMA DO PLANEJAMENTO DE PEDIDOS

Para resolver o problema do Planejamento de Pedidos, respeitando a restrição de capacidade, que foi relaxada no modelo MRPP, propõe-se dois algoritmos para alocar os itens, indicados pelo modelo relaxado para produção, dentro dos fornos.

Neste capítulo, apresenta-se uma abordagem heurística de resolução para o problema do Planejamento de Pedidos. A abordagem consta de três fases: na primeira fase se obtém uma solução inicial, a partir da resolução, via CPLEX, da Relaxação *Surrogate* apresentada no Capítulo 4. Na segunda fase, aplica-se um algoritmo para factibilização das soluções iniciais para que elas atendam às restrições propostas por [Furtado \(2012\)](#). Por fim, a terceira fase propõe um algoritmo para realocar os itens nos fornos, buscando melhorar os resultados obtidos na segunda fase.

Além disso, também é apresentado um método alternativo que busca dentro do mix de soluções viáveis, apresentadas pelo CPLEX, uma outra solução inicial que possibilite ao algoritmo de factibilização e de melhoria chegar a resultados melhores em relação ao valor obtido para a função objetivo.

Ao final das três fases, se obtém o plano de produção dos itens para atender aos pedidos em cada período, fazendo o sequenciamento das fornadas, que não é feito pela resolução do modelo MRPP.

Na Seção 5.1 é discutida a obtenção da solução inicial gerada pelo CPLEX para o modelo MRPP. Na Seção 5.2, os algoritmos de factibilização e os testes computacionais para essa fase são apresentados. A fase de melhoria e os respectivos testes computacionais são abordados na Seção 5.3. Por fim, na Seção 5.4 é apresentada uma alternativa para a obtenção da solução inicial e os resultados obtidos.

## 5.1 SOLUÇÕES INICIAIS

O CPLEX obteve solução ótima para 32 das 33 instâncias avaliadas para o modelo MRPP e com baixo tempo computacional. Por esse motivo, utilizou-se os valores encontrados para as variáveis  $X_{jt}$  e  $T_{kt}$  como soluções iniciais para a abordagem heurística.

Para resolver o modelo MRPP e armazenar em vetores os valores das variáveis  $X_{jt}$  e  $T_{kt}$ , utilizou-se a linguagem Julia, com os pacotes de extensão *JuMP* para otimização linear e o resolvidor CPLEX. Limitou-se o tempo em 3.600s e o modelo foi executado até que atingisse a

otimalidade ou o tempo máximo. Os resultados obtidos utilizando-se essas configurações são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Soluções iniciais.

<b>Instância</b>	$FO_R$	$NP_R$	$CA_R$	$CE_R$	$Tempo_R$
Min 01	36,95	42	37,42	0,47	2,30
Min 02	37,42	43	37,42	0,00	2,84
Min 03	43,36	43	43,58	0,22	5,58
Min 04	53,22	44	53,31	0,09	19,10
Min 05	67,61	40	67,70	0,09	21,64
Min 06	82,78	43	82,81	0,03	130,88
Min 07	85,24	40	85,37	0,13	13,23
Min 08	95,37	47	95,37	0,00	27,91
Min 09	124,49	40	124,71	0,22	8,05
Min 10	130,70	47	130,70	0,00	76,83
Min 11	110,58	45	110,74	0,17	501,20
<b>Média</b>	<b>78,88</b>	<b>43</b>	<b>79,01</b>	<b>0,13</b>	<b>73,60</b>
Med 01	48,69	103	48,85	0,16	5,16
Med 02	56,30	104	56,30	0,00	3,94
Med 03	67,65	110	67,66	0,01	6,38
Med 04	68,02	123	68,04	0,01	182,89
Med 05	104,39	117	104,47	0,08	37,42
Med 06	125,73	127	125,76	0,03	177,66
Med 07	84,35	115	84,40	0,05	20,58
Med 08	167,64	135	167,64	0,00	235,59
Med 09	154,93	113	155,06	0,13	32,25
Med 10	143,35	135	143,35	0,00	182,34
Med 11	170,52	137	170,59	0,07	3600,00
<b>Média</b>	<b>108,32</b>	<b>120</b>	<b>108,37</b>	<b>0,05</b>	<b>407,66</b>
Max 01	55,95	164	55,95	0,00	4,67
Max 02	55,95	165	55,95	0,00	8,05
Max 03	67,39	171	67,39	0,00	10,45
Max 04	81,43	201	81,43	0,00	412,77
Max 05	106,24	191	106,25	0,01	45,61
Max 06	120,35	210	120,35	0,00	1567,16
Max 07	165,94	194	165,96	0,02	73,61
Max 08	179,08	224	179,08	0,00	357,50
Max 09	174,49	192	174,52	0,03	67,94
Max 10	178,71	224	178,71	0,00	127,63
Max 11	165,17	231	165,18	0,01	1249,59
<b>Média</b>	<b>122,79</b>	<b>197</b>	<b>122,80</b>	<b>0,01</b>	<b>356,82</b>
<b>Média to- tal</b>	<b>103,33</b>	<b>120</b>	<b>103,39</b>	<b>0,06</b>	<b>279,36</b>

Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

A coluna  $FO_R$  mostra os valores obtidos para a função objetivo do modelo, a coluna  $NP_R$  apresenta os números de pedidos atendidos pela relaxação, os custos de atraso estão representados na coluna  $CA_R$  e o custo de estoque no último período na coluna  $CE_R$ . O tempo de execução, em segundos, do modelo é apresentado na coluna  $Tempo_R$ .

Observe que as instâncias *Min 02*, *Min 08*, *Min 10*, *Med 02*, *Med 08*, *Med 10*, *Max 02*, *Max 08* e *Max 10* atenderam a todos os pedidos demandados. Logo, a parcela relativa ao custo de atraso está relacionada aos pedidos que foram atendidos em datas posteriores à data de entrega prevista. Para essas instâncias o custo de estoque é nulo devido à restrição (4.5), a qual garante que a produção total de itens, durante o horizonte de planejamento, não exceda à demanda total por esse item. Assim, se todos os pedidos foram atendidos, não restam itens a serem deixados em estoque no último período. As instâncias que não atendem a todos os pedidos demandados e apresentam custo de estoque iguais a zero, indicam que os itens componentes desses pedidos não foram produzidos.

Considerando que existam soluções que não são viáveis para o modelo 4P2 é necessário determinar o sequenciamento dos fornos, respeitando a restrição de capacidade e, portanto, factibilizar a solução inicial, como é visto na Seção 5.2.

## 5.2 FACTIBILIZAÇÃO

Suponha que a solução inicial encontrada não seja factível para o modelo 4P2, ou seja, ao utilizar os valores obtidos da resolução do modelo MRPP, a capacidade do forno seja excedida em algum período. A partir da solução encontrada pelo CPLEX, busca-se encontrar uma nova solução que respeite a restrição de capacidade para o problema 4P2.

Com os valores de  $X_{jt}$  em mãos, tentou-se duas alternativas para ordenação dos itens a serem alocados nos fornos, uma que se considera o peso total produzido pela relaxação para cada item no período. A outra maneira de ordenar os itens foi considerar o peso individual de cada item a ser produzido.

A fase de factibilização é dividida da seguinte maneira:

1. Ordenação dos itens.
2. Alocação dos itens nas fornadas.
3. Separação dos itens produzidos de acordo com os pedidos.
4. Cálculo do valor da função objetivo.

### 5.2.1 Ordenação dos itens por peso total produzido no período

Ao receber os valores gerados pelos CPLEX para  $X_{jt}$  é preciso ordená-los de acordo com algum critério para alocar os itens nas fornadas.

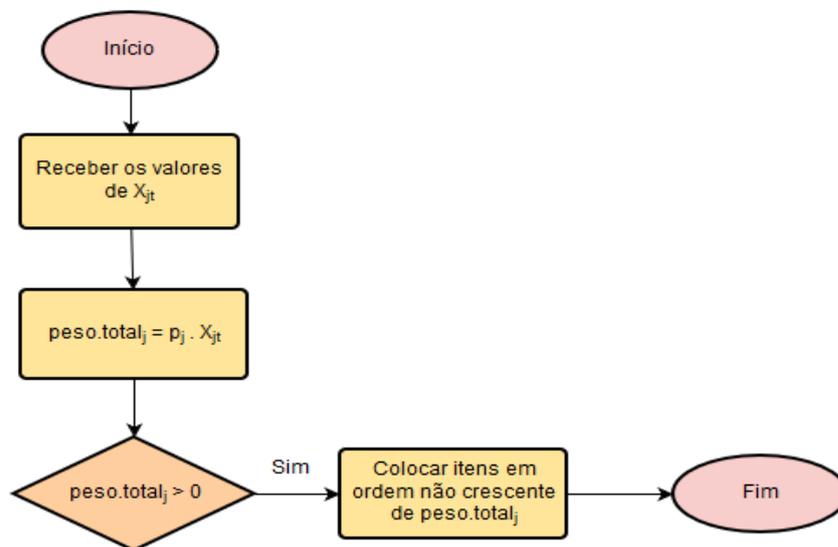
Nesse passo, ordenou-se de forma decrescente os itens de acordo com o peso total produzido. Calculou-se o peso total produzido de um item  $j$  no período  $t$ , da seguinte maneira:

$$peso.total_{jt} = p_j \cdot X_{jt}, \quad (5.1)$$

onde  $p_j$  é o parâmetro de entrada de peso (kg) do item  $j$  e  $X_{jt}$  é a quantidade de itens  $j$  produzidas no período  $t$ .

Se  $peso.total_{jt} > 0$  houve produção do item  $j$  no período  $t$ , e para cada período  $t$  e para cada liga  $k$  coloca-se em ordem não crescente todos os itens de acordo com  $peso.total_{jt}$ . Esse processo é ilustrado pela Figura 5.

Figura 5 – Ordenação dos itens de acordo com o peso total produzido.



Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

Após a ordenação dos itens, é feita a alocação dos mesmos nas fornadas, conforme descrito na Subseção 5.2.3.

## 5.2.2 Ordenação dos itens por peso individual de cada item

Na primeira alternativa de ordenação dos itens considerou-se o peso total produzido para cada item, em cada período, de acordo com a Equação (5.1). Na segunda alternativa, considera-se o peso individual de cada item na hora de alocá-los nas fornadas.

Recebe-se os valores para as variáveis  $X_{jt}$  pela resolução do modelo MRPP no CPLEX. Separa-se os itens produzidos por liga e por período e então classifica-os em ordem não crescente do peso individual de cada um,  $p_j$ . O peso total produzido é calculado para atualizar as quantidades que serão alocadas nas fornadas.

Pode-se resumir o processo de ordenação pelo Algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1:** Ordenação dos itens de acordo com o maior peso individual de cada item (kg).

---

**Entrada:**  $X_{jt}$

**início**

```
forno.ordenado = [ ]
// Colocar os itens produzidos em ordem não crescente dos
  pesos individuais.
```

**para todo**  $t, k, j \in L(k)$  **faça**

```
forno.ordenadot = [ ]
```

```
item.ligak = [ ]
```

```
item.liga.ordenadok = [ ]
```

```
pesoprodjt =  $p_j \cdot X_{jt}$ 
```

**se**  $pesoprod_{jt} > 0$  **então**

```
  | item.ligak ← item.ligak + (j,  $X_{jt}$ ,  $p_j$ , pesoprodjt)
```

**fim**

```
item.liga.ordenadok ← ordenar(item.ligak, por  $p_j$ , ordem decrescente)
```

```
forno.ordenadot ← item.liga.ordenadok
```

**fim**

**fim**

**retorna**  $forno.ordenado$

---

Ao processo de ordenação dos itens pelo peso total produzido dá-se o nome de Heurística 01 e pelo peso individual dos itens Heurística 02. Com os vetores de itens a serem produzidos, separados por liga e período, segue-se para a fase de alocação dos fornos.

### 5.2.3 Alocação dos itens nas fornadas

Após a ordenação dos itens é preciso alocar o peso calculado nos fornos de acordo com a capacidade disponível por período. Para determinar o número de fornadas utilizado para cada liga em cada período, utilizou-se os valores obtidos por  $T_{kt}$ . Por exemplo, se para alguma instância  $T_{1,1} = 4$ , significa que a liga  $k = 1$  está preparada no período  $t = 1$  em 4 fornadas.

Verifica-se a possibilidade do forno estar vazio, em caso afirmativo, se o peso total calculado, para o item a ser alocado, não exceder a capacidade do forno aloca-se esse item para aquela fornada. Caso o forno não esteja vazio calcula-se a capacidade disponível no forno, da seguinte forma:

$$cap.restante = cap - \sum_j q_{j\eta} \cdot p_j.$$

onde  $q_{j\eta}$  indica a quantidade do item  $j$  alocada na fornada  $\eta$ . Esse cálculo é feito para todas as fornadas configuradas com a liga  $k$  no período  $t$ .

Como o  $peso.total_{jt}$  pode ser maior que a capacidade dos fornos em alguns casos, foi preciso verificar se os itens não alocados num primeiro momento podem ser distribuídos nas fornadas. Para isso, calculou-se a capacidade restante em cada forno e as quantidades disponíveis de cada item a serem alocadas.

$$qtde.max = \frac{cap.restante}{p_j}$$

A quantidade máxima disponível ( $qtde.max$ ) do item  $j$ , disponível em cada fornada é dada pelo maior inteiro menor que a divisão entre a capacidade restante ( $cap.restante$ ) e o peso unitário do item  $j$  (kg). Calcula-se também a quantidade disponível para ser alocada de cada item:

$$qtde.max.item = \frac{peso.total_{jt}}{p_j}$$

A quantidade a ser alocada de cada item ( $qtde.max.item$ ) é determinada pelo maior inteiro menor que a razão entre o peso produzido para aquele item naquele período ( $peso.total_{jt}$ ) calculado pela Equação 5.1, e o peso individual do item ( $p_j$ ). Então, verifica-se a condição do item caber dentro da fornada, determinando o mínimo entre a quantidade máxima disponível em cada forno e a quantidade de cada item a ser alocada.

$$\min(qtde.max, qtde.max.item)$$

Procura-se em todas as fornadas que utilizam a mesma liga se aquele item cabe no forno, se couber alguma unidade do item em alguma fornada esse item é alocado e deve-se descontar esse valor da quantidade disponível a ser alocada ( $qtde.max.item$ ). Conforme ilustra o Algoritmo 2.

---

**Algoritmo 2:** Alocar o item nas fornadas, respeitando a restrição de capacidade do forno.

---

**Entrada:**  $forno.ordenado, T_{kt}$

**início**

$x$  : quantidade disponível de cada item a ser alocado

$peso.total_{jt}$  : peso total disponível de cada item a ser alocado

**para todo**  $t, k, \eta \leq T_{kt}$  **faça**

    // Calcular o quanto ainda cabe em (kg) em cada  
    fornada

$cap.restante = cap - \sum_j q_{j\eta} \cdot p_j$

**para**  $j \in forno.ordenado_{tk}$  **faça**

        // Calcular o número máximo de cada item que cabe  
        em cada fornada

$inteiro(qtde.max = \frac{cap.restante}{p_j})$

        // Calcular o número máximo de cada item que ainda  
        deve ser feito

$inteiro(qtde.max.item = \frac{peso.total_{jt}}{p_j})$

**se**  $qtde.max \geq 0$  e  $qtde.max.item \geq 0$  **então**

            Calcule  $min(qtde.max, qtde.max.item)$

**se**  $forno_{tk\eta} = \emptyset$  **então**

                |  $forno_{tk\eta} \leftarrow p_j \cdot min(qtde.max, qtde.max.item)$

**senão**

                |  $forno_{tk\eta} \leftarrow forno_{tk\eta} + p_j \cdot min(qtde.max, qtde.max.item)$

**fim**

        // Atualizar as quantidades ainda disponíveis  
        para serem alocadas

$x \leftarrow x - min(qtde.max, qtde.max.item)$

$peso.total_{jt} \leftarrow peso.total_{jt} - p_j \cdot min(qtde.max, qtde.max.item)$

**senão**

            | Pare.

**fim**

**fim**

**fim**

**fim**

**retorna**  $forno_{tk\eta}$

---

Após a produção dos itens é necessário verificar a quais pedidos os itens são pertencentes, iniciando a próxima fase.

### 5.2.4 Atendimento dos pedidos

O processo de atendimento de pedidos é realizado em dois passos. No primeiro passo, em cada período, calcula-se a quantidade total de itens produzidos nas fornadas, compara-se com as quantidades demandadas nos pedidos e registra-se o período em que aquele item foi adicionado ao pedido. No segundo passo, há a conferência de que todos os itens componentes do pedido foram produzidos e do período em que o pedido foi finalizado de forma a verificar se o pedido é atendido com ou sem atraso.

A quantidade total produzida de cada item em cada período, é a somatória das quantidades desse item, produzida em todas as fornadas do período:

$$X.heur_{jt} = \sum_{\eta} \sum_j q_{j\eta} \quad (5.2)$$

onde  $X.heur_{jt}$  é a quantidade de itens  $j$ , alocada no período  $t$  pela heurística.

A quantidade total do item  $j$  produzida pela heurística é calculada para verificar se a demanda por esse item foi atendida

$$qtd_j = \sum_{t=1}^T X.heur_{jt} \quad (5.3)$$

Finalmente, compara-se item a item de cada pedido com a quantidade produzida e contabiliza o período em que o período em que cada componente de um pedido foi adicionado. O Algoritmo 3 mostra esse passo.

---

#### Algoritmo 3: Verificar se os itens pertencentes aos pedidos foram produzidos

---

**Entrada:**  $qtd_j, a_{ji}$

**início**

```

item.pedidoji = [ ] // vetor para controlar se o item  $j$ ,
                    demandado no pedido  $i$ , foi produzido
item.periodoji = [ ] // vetor para controlar em qual período o
                    item  $j$ , demandado no pedido  $i$ , foi produzido

```

**para todo**  $i, j \in S(i), t$  **faça**

```

    se  $qtd_j \geq a_{ji}$  então

```

```

         $qtd_j \leftarrow qtd_j - a_{ij}$ 

```

```

        item.pedidoji  $\leftarrow 1$  // item  $j$  foi adicionado ao pedido  $i$ 

```

```

        item.periodoji  $\leftarrow t$  // item  $j$  foi adicionado ao pedido  $i$ ,
        no período  $t$ 

```

```

    fim

```

```

fim

```

**fim**

**retorna**  $item.pedido, item.periodo$

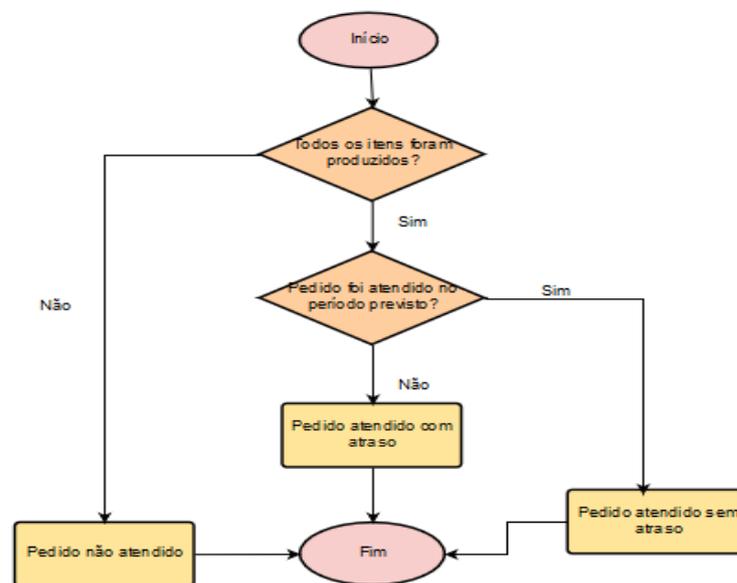
---

Se algum item componente de um pedido não foi produzido em nenhuma fornada, esse pedido não será atendido dentro desse horizonte de planejamento. Se todos os itens componentes de um pedido foram produzidos deve-se verificar a data de entrega prevista para aquele pedido.

O pedido é considerado completo no período em que o último item componente é adicionado a ele. Se esse período é anterior ou igual à data prevista de entrega, o pedido não é atendido sem atraso. Se o período em que o pedido é completo é posterior à data prevista de entrega, ele será atendido com atraso.

A fase de atendimento de pedidos é ilustrada na Figura 6.

Figura 6 – Verificação de quais pedidos foram atendidos.



Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

Computacionalmente essa fase pode ser representada pelo Algoritmo 4.

**Algoritmo 4:** Verificar se os itens pertencentes aos pedidos foram produzidos**Entrada:**  $d_{it}, \text{item.pedido}, \text{item.periodo}$ **início**     $\text{pedido.naoatendido} = [ ]$      $\text{pedido.atendido} = [ ]$     **para todo**  $i, t$  **faça**        **se**  $d_{it} = 1$  **então**

            // Se algum item componente do pedido não foi  
            produzido, então esse pedido não será atendido  
            em nenhum período  $t$ .

**se**  $\exists! x | x = 0 \text{ e } x \in \text{item.pedido}$  **então**             $\text{pedido.naoatendido}_{ti} \leftarrow 1$             **se**  $t \neq T$  **então**                **para**  $l = (t + 1) : T$  **faça**                     $\text{pedido.naoatendido}_{li} = 1$                 **fim**            **fim**        **fim**

        // Se o pedido foi completado em período anterior  
        ou no período previsto para entrega, o pedido é  
        considerado completo sem atraso.

**senão se**  $t \geq \max(\text{item.periodo}_j)$  **então**             $\text{pedido.atendido}_{ti} \leftarrow 1$         **fim**

        // Se o pedido foi completado em data posterior à  
        data de entrega, o pedido é considerado completo  
        com atraso.

**senão se**  $t < \max(\text{item.periodo}_j)$  **então**             $m = \max(\text{item.periodo}_j)$              $\text{pedido.atendido}_{mj} = 1$             **para**  $l = t : (m - 1)$  **faça**                 $\text{pedido.naoatendido}_{li} \leftarrow 1$             **fim**        **fim**    **fim**    **fim****fim****retorna**  $\text{pedido.naoatendido}, \text{pedido.atendido}$ 

Calcula-se então todos os pedidos atendidos dentro do horizonte de planejamento e o custo de atraso para os pedidos atendidos em data posterior à data de entrega e para os pedidos

que não são atendidos.

### 5.2.5 Testes computacionais para a fase de factibilização

Realizada a verificação dos pedidos atendidos, é calculado os estoques dos itens durante os períodos. Os itens deixados em estoque no último período são contabilizados para o cálculo dos custos na função objetivo. Caso um pedido não seja atendido e tenha algum item componente produzido, todos esses itens são estocados no último período.

Todas as instâncias foram testadas para as duas maneiras de ordenação dos itens: pelo peso total produzido, *Heurística 01* (H1), e pelo peso individual de cada peça, *Heurística 02* (H2). Na Tabela 6, são apresentados os resultados obtidos para os valores de função objetivo ( $FO_1$  e  $FO_2$ ), custos de atraso ( $CA_1$  e  $CA_2$ ) e estoque ( $CE_1$  e  $CE_2$ ), número de pedidos atendidos ( $NP_1$  e  $NP_2$ ) em que os nomes de índice 1 são referentes à Heurística 01 e os de índice 2 à Heurística 02, para a etapa de factibilização.

Tabela 6 – Resultados computacionais para as heurísticas de factibilização.

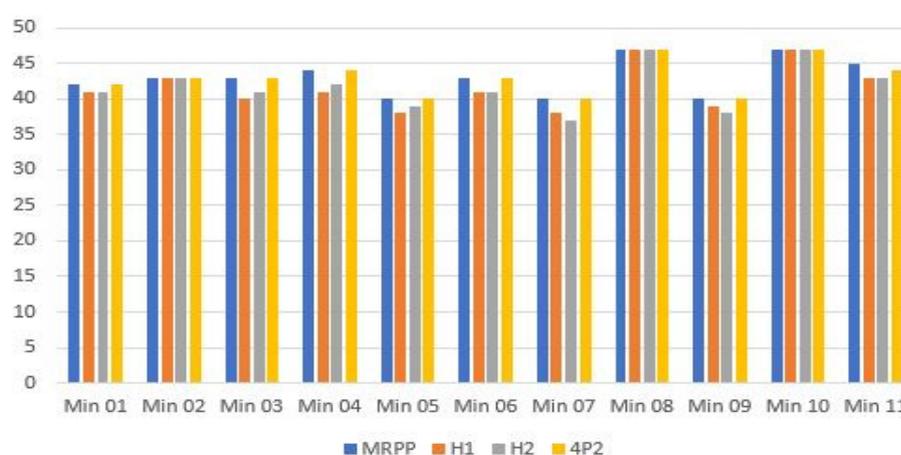
Instância	Heurística 01					Heurística 02				
	$FO_1$	$NP_1$	$CA_1$	$CE_1$	$Gap_1$	$FO_2$	$NP_2$	$CA_2$	$CE_2$	$Gap_2$
Min 01	<b>41,06</b>	41	41,61	0,55	10,01%	42,41	41	43,06	0,65	12,87%
Min 02	49,85	43	49,85	0,00	24,93%	<b>37,42</b>	43	37,42	0,00	0,00%
Min 03	<b>49,07</b>	40	50,52	0,63	11,64%	50,55	<b>41</b>	50,91	0,36	14,22%
Min 04	85,45	41	85,82	0,37	37,72%	<b>64,41</b>	<b>42</b>	64,65	0,24	17,37%
Min 05	84,12	38	87,39	0,50	19,63%	<b>69,90</b>	<b>39</b>	70,02	0,12	3,28%
Min 06	112,64	41	113,02	0,38	26,52%	<b>111,10</b>	41	111,47	0,37	25,50%
Min 07	106,24	<b>38</b>	106,85	0,62	19,77%	<b>98,34</b>	37	99,00	0,66	13,32%
Min 08	114,04	47	114,04	0,00	16,37%	<b>108,87</b>	47	108,87	0,00	12,40%
Min 09	150,78	<b>39</b>	151,66	0,87	17,44%	<b>142,76</b>	38	143,77	1,01	12,80%
Min 10	178,65	47	178,65	0,00	26,84%	<b>159,53</b>	47	159,53	0,00	18,07%
Min 11	120,49	43	120,72	0,22	8,22%	<b>117,02</b>	43	117,93	0,91	5,50%
Med 01	51,71	103	51,71	0,16	5,84%	<b>51,27</b>	103	51,43	0,16	5,03%
Med 02	<b>56,36</b>	104	56,36	0,00	0,11%	57,19	104	57,19	0,00	1,56%
Med 03	<b>67,72</b>	<b>108</b>	67,73	0,01	0,10%	68,68	107	68,77	0,09	1,50%
Med 04	<b>69,26</b>	120	69,28	0,02	1,79%	70,16	120	70,21	0,05	3,05%
Med 05	<b>105,46</b>	116	105,47	0,01	1,01%	105,98	116	106,10	0,12	1,50%
Med 06	129,99	125	130,08	0,08	3,28%	<b>126,36</b>	<b>126</b>	126,39	0,03	0,50%
Med 07	<b>85,72</b>	113	88,20	0,10	1,60%	92,77	113	92,90	0,13	9,08%
Med 08	176,86	135	176,86	0,00	5,21%	<b>169,58</b>	135	169,58	0,00	1,14%
Med 09	164,59	111	164,88	0,29	5,87%	<b>158,53</b>	111	158,84	0,31	2,27%
Med 10	<b>147,24</b>	134	147,26	0,02	2,64%	148,62	<b>135</b>	148,62	0,00	3,55%
Med 11	178,60	136	178,68	0,08	4,52%	<b>171,63</b>	134	171,73	0,10	0,65%
Max 01	<b>56,28</b>	164	56,28	0,00	0,59%	57,60	164	57,60	0,00	2,86%
Max 02	<b>56,63</b>	165	56,63	0,00	1,20%	59,44	165	59,44	0,00	5,87%
Max 03	<b>67,86</b>	168	67,86	0,00	0,69%	69,94	168	69,96	0,02	3,65%
Max 04	<b>82,16</b>	<b>198</b>	82,17	0,01	0,89%	86,01	197	86,06	0,05	5,32%
Max 05	<b>106,33</b>	188	106,35	0,02	0,09%	106,48	<b>190</b>	106,51	0,03	0,23%
Max 06	<b>120,54</b>	207	120,54	0,01	0,16%	120,74	<b>208</b>	120,74	0,00	0,32%
Max 07	<b>166,08</b>	192	166,10	0,02	0,08%	166,45	<b>193</b>	166,47	0,02	0,31%
Max 08	<b>179,47</b>	224	179,33	0,00	0,22%	179,48	224	179,48	0,00	0,22%
Max 09	<b>174,69</b>	188	174,73	0,03	0,11%	175,01	<b>190</b>	175,06	0,05	0,30%
Max 10	<b>179,25</b>	224	179,25	0,00	0,30%	179,36	224	179,36	0,00	0,36%
Max 11	<b>165,35</b>	228	165,37	0,02	0,11%	165,64	<b>230</b>	165,66	0,02	0,28%

Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

Os pedidos atendidos estão nas colunas  $NP_1$  e  $NP_2$  para a H1 e H2, respectivamente. As duas abordagens atenderam ao mesmo número de pedidos para 17 das 33 instâncias: *Min 01, Min 06, Min 08, Min 10, Min 11, Med 01, Med 02, Med 04, Med 05, Med 07, Med 08, Med 09, Max 01, Max 02, Max 03, Max 08 e Max 10*.

A Heurística 01 atendeu mais pedidos que a Heurísticas 02 para 5 instâncias: *Min 07, Min 09, Med 03, Med 11 e Max 04*. Em relação ao número de pedidos atendidos a Heurística 02 apresentou resultado melhor ou igual que a Heurística 01 em 27 instâncias, uma vez que atendeu a um número maior de pedidos para 10 cenários: *Min 03, Min 04, Min 05, Med 06, Med 10, Max 05, Max 06, Max 07, Max 09 e Max 11*.

Figura 7 – Número de pedidos atendidos o cenário *Mínimo*.



Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

O gráfico apresentado na Figura 7 compara o número de pedidos atendidos pelas duas heurísticas de factibilização (H1 e H2), a relaxação MRPP e o modelo 4P2 de Furtado (2012). Nota-se que para as instâncias *Min 02, Min 08 e Min 10* o número de pedidos atendidos foi o mesmo para todos os métodos, de forma que é possível factibilizar as soluções obtidas pela relaxação, atendendo ao mesmo número de pedidos, ou a solução obtida pela relaxação já era factível para o modelo 4P2.

Caso algum pedido não seja atendido dentro do horizonte de planejamento ou se o pedido for completado em data posterior a data de entrega, deve-se calcular o custo de atraso desse pedido. Os resultados para o custo de atraso são apresentados na coluna  $CA_1$  para a H1 e na coluna  $CA_2$  para H2.

Determinada a produção dos itens nos fornos, verifica-se a existência de estoques de peças durante os períodos e calcula-se o custo de estoque no último período. Os valores obtidos estão apresentados nas colunas  $CE_1$  para a Heurística 01 e  $CE_2$  para a Heurística 02.

O valor da função objetivo para a Heurística 01 pode ser obtido calculando-se a diferença entre o custo de atraso e o custo de estoque no último período, para todas as instâncias,

$$FO_1 = CA_1 - CE_1,$$

os resultados encontrados, após a realização dos testes, são mostrados na coluna  $FO_1$ . De forma análoga, se obtém os valores para a função objetivo para a *Heurística 02*,

$$FO_2 = CA_2 - CE_2.$$

Para saber a qualidade das soluções obtidas calculou-se a diferença percentual entre os valores obtidos para a função objetivo das heurísticas de factibilização e o resultados obtidos inicialmente pelo CPLEX ao resolver-se o modelo MRPP. A coluna  $Gap_1$  foi determinada da seguinte forma:

$$Gap_1 = \frac{FO_1 - FO_R}{FO_1} \cdot 100 \quad (5.4)$$

onde  $FO_1$  é o valor da função objetivo para a *Heurística 01* e  $FO_R$  é o valor da função objetivo para a solução inicial obtida pelo CPLEX.

Observa-se que os valores obtidos para o cenário *Mínimo* estão longe da otimalidade, pois apresentaram valores elevados para  $Gap_1$ . Por outro lado, para o cenário *Máximo* os valores encontrados já estão mais próximos dos valores obtidos pela relaxação. Já para o cenário *Médio*, embora os valores de  $Gap_1$  estejam melhores que para o cenário *Mínimo*, ainda existem instâncias com soluções com valores de  $Gap_1$  acima de 5%, tais resultados indicam a necessidade de uma tentativa de melhoria na alocação dos itens nos fornos, buscando diminuir os valores encontrados para a função objetivo.

De forma semelhante, pode-se analisar a *Heurística 02*. A coluna  $Gap_2$  foi determinada da seguinte forma:

$$Gap_2 = \frac{FO_2 - FO_R}{FO_2} \cdot 100 \quad (5.5)$$

onde  $FO_2$  é o valor da função objetivo para a *Heurística 02* e  $FO_R$  é o valor da função objetivo para a solução inicial obtida pelo CPLEX.

Observa-se que para o cenário *Mínimo* os valores de  $Gap_2$  são menores que os resultados obtidos pela *Heurística 01* em 9 instâncias, porém esses valores ainda são elevados e precisam ser melhorados, com exceção da instância *Min 02*, que deve ser destacada, pois apresentou valor de  $Gap_2$  igual a zero.

Segundo [Wolsey \(1998\)](#), dada uma solução ótima para a relaxação de um MIP, se essa solução for factível para o problema original e, além disso, os valores de função objetivo para os dois modelos forem iguais, então a solução também é ótima no problema original.

Dado que os valores da função objetivo para a instância *Min 02* são iguais para os modelos MRPP e 4P2, e a solução encontrada pela relaxação é viável para o modelo 4P2, factibilizada pela *Heurística 02*, esse resultado encontra-se na otimalidade para o problema 4P2.

Para o cenário *Médio*, os valores de  $Gap_2$  foram menores que  $Gap_1$  para cinco instâncias e para o cenário *Máximo* a *Heurística 02* não apresenta nenhum resultado melhor que a *Heurística 01* em relação aos valores de função objetivo e  $Gap$  de otimalidade.

Em relação ao tempo de execução, ambas as heurísticas se resolvem rapidamente, e os tempos são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 – Tempo de execução, em segundos, para as heurísticas de factibilização.

Instância	$t_0$	$t_1$	$t_{1t}$	$t_2$	$t_{2t}$
Min 01	2,30	1,84	4,14	2,39	4,69
Min 02	2,84	1,47	4,31	3,52	6,36
Min 03	5,58	2,59	8,17	4,68	10,26
Min 04	24,47	1,36	25,83	1,61	26,08
Min 05	21,64	1,95	23,59	1,31	22,95
Min 06	154,42	1,58	156,00	1,58	156,00
Min 07	18,66	1,31	19,97	1,29	19,95
Min 08	35,92	3,67	39,59	3,67	39,59
Min 09	9,78	3,45	13,23	3,45	13,23
Min 10	90,19	1,93	92,12	1,93	92,12
Min 11	892,44	9,61	902,05	2,30	894,74
<b>Média</b>	114,39	2,80	117,18	2,52	116,91
Med 01	6,38	1,24	7,62	1,76	8,14
Med 02	5,66	1,32	6,98	1,53	7,19
Med 03	6,38	1,67	8,05	1,92	8,30
Med 04	182,89	1,16	184,05	1,87	184,76
Med 05	37,42	2,94	40,36	2,20	39,62
Med 06	317,28	8,24	325,52	1,67	318,95
Med 07	20,58	1,61	22,19	1,61	22,19
Med 08	235,59	1,66	237,25	2,10	237,69
Med 09	32,25	2,22	34,47	1,67	33,92
Med 10	182,34	1,49	183,83	1,94	184,28
Med 11	3600,00	26,71	3626,71	58,82	3658,82
<b>Média</b>	420,62	4,57	425,18	7,01	427,62
Max 01	3,64	1,32	4,96	2,01	5,65
Max 02	8,13	1,59	9,72	2,07	10,20
Max 03	10,80	1,49	12,29	1,30	12,10
Max 04	308,67	4,58	313,25	4,04	312,71
Max 05	49,98	1,71	51,69	1,63	54,02
Max 06	1325,95	11,03	1336,98	12,07	1338,02
Max 07	52,75	1,72	54,47	1,75	54,50
Max 08	357,50	1,40	358,90	1,69	359,19
Max 09	79,98	2,20	82,18	2,26	82,24
Max 10	155,03	3,14	158,17	3,10	158,13
Max 11	915,05	3,13	918,18	4,12	919,17
<b>Média</b>	297,04	3,03	300,07	3,28	300,54

Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

As colunas  $t_1$  e  $t_2$  apresentam os tempos de execução para as heurísticas de factibilização. Observa-se que ambas as heurísticas apresentaram baixos tempos de processamento, resolvendo-se em poucos segundos. A coluna  $t_0$  apresenta o tempo para obtenção da solução inicial obtida pelo CPLEX e as colunas  $t_{1T}$  e  $t_{2T}$  mostram o tempo total de solução inicial e factibilização para a *Heurística 01* e *Heurística 02*, respectivamente.

Conclui-se que os algoritmos para a factibilização das soluções necessitaram de pouco tempo computacional e apresentaram soluções satisfatórias para os cenários *Médio* e *Máximo*, mas que ainda podem ser melhorados. Por outro lado, com exceção da instância *Min 02*, que atingiu otimalidade pela *Heurística 02*, os resultados de função objetivo para o cenário *Mínimo* apresentaram valores elevados de *Gap*, o que indica que esses resultados não estão próximos dos valores obtidos pela relaxação.

### 5.3 MELHORIA

A fase de melhoria consiste em tentar realocar os itens nas fornadas, buscando um valor inferior de função objetivo em relação ao valor obtido na fase de factibilização.

Após factibilizar as soluções iniciais verificou-se que alguns itens não foram alocados nas fornadas, pois violariam a capacidade do forno. Assim, para tentar encaixar esses itens no plano de produção, retira-se dos fornos o item de mesma liga com o menor peso individual e acrescenta-se o item retirado à lista de peças a serem produzidas. Reordena-se esses itens em de forma decrescente de peso, e reaplica-se a fase de factibilização.

O Algoritmo 5 mostra como essa fase foi realizada.

---

**Algoritmo 5:** Verificar se os itens pertencentes aos pedidos foram produzidos
 

---

**Entrada:**  $forno.ordenado, forno_{tk\eta}, X_{jt}$

**início**

$itens.restantes = [ ]$

**para todo**  $k, j$  **faça**

**se**  $j \in forno.ordenado$  **e**  $j \notin forno_{tk\eta}$  **então**

    // listar todos os itens produzidos com a liga  $k$ ,  
    que não foram alocados em nenhuma fornada.

$itens.restantes_k \leftarrow itens.restantes_k + j$

**fim**

**fim**

**para todo**  $k, j \in L(k)$  **faça**

  // acrescentar à lista de itens a serem produzidos com  
  a liga  $k$  o item que possui o menor peso ( $p_j$ )

$j' = \min(p_j) \cdot X_{jt}$

$itens.restantes_k \leftarrow itens.restantes_k + j'$

  // colocar os itens restantes em ordem decrescente de  
   $p_j$

  ordenar( $itens.restantes_k, por p_j$ , ordem decrescente)

**fim**

**para todo**  $t, k, \eta, j \in forno_{tk\eta}$  **faça**

  // retirar das fornadas os itens alocados que  
  possuírem o menor peso ( $p_j$ ), quando houver itens da  
  liga  $k$  a serem produzidos ainda.

**se**  $itens.restantes_k \neq \emptyset$  **e**  $j' = \min(p_j)$  **então**

$forno_{tk\eta} \leftarrow forno_{tk\eta} - j'$

**fim**

**fim**

**para todo**  $k, j \in itens.restantes_k$  **faça**

  | Algoritmos 2, 3, 4 novamente.

**fim**

**fim**

---

Ao recalculer os custos, se o valor da função objetivo for menor que o valor obtido pela fase de factibilização, atualiza-se o valor da solução obtida, caso contrário, mantém a solução anterior.

A Tabela 8 apresenta os valores obtidos após a fase de melhoria.

Tabela 8 – Resultados computacionais com a fase de melhoria.

Instância	$FO_1$	$NP_1$	$t_{m1}$	$Gap_1$	$FO_2$	$NP_2$	$t_{m2}$	$Gap_2$
Min 01	41,06	41	2,67	10,01%	<b>37,92</b>	<b>42</b>	4,61	<b>2,56%</b>
Min 02	49,85	43	2,91	24,93%	<b>37,42</b>	43	2,44	<b>0,00%</b>
Min 03	49,07	40	3,28	11,64%	<b>50,54</b>	<b>41</b>	2,99	<b>14,21%</b>
Min 04	85,45	41	4,06	37,72%	<b>64,42</b>	<b>42</b>	3,62	<b>17,39%</b>
Min 05	71,83	39	3,04	5,87%	<b>69,89</b>	39	3,75	<b>3,26%</b>
Min 06	112,64	41	2,69	26,52%	<b>105,04</b>	41	2,29	<b>21,20%</b>
Min 07	106,24	39	3,06	19,77%	<b>91,17</b>	39	3,45	<b>6,50%</b>
Min 08	114,04	47	4,12	16,37%	<b>108,87</b>	47	5,35	<b>12,40%</b>
Min 09	150,78	39	2,72	17,44%	<b>131,66</b>	<b>40</b>	2,63	<b>5,45%</b>
Min 10	178,65	47	6,27	26,84%	<b>159,53</b>	47	11,46	<b>18,07%</b>
Min 11	120,49	43	4,20	8,22%	<b>117,02</b>	43	2,45	<b>5,50%</b>
Med 01	51,71	103	3,16	5,84%	<b>51,26</b>	103	4,95	<b>5,01%</b>
Med 02	<b>56,36</b>	104	3,67	<b>0,11%</b>	57,19	104	5,22	1,56%
Med 03	<b>67,72</b>	<b>108</b>	3,56	<b>0,10%</b>	68,68	107	5,87	1,50%
Med 04	<b>69,26</b>	120	3,26	<b>1,79%</b>	70,16	120	2,26	3,05%
Med 05	105,45	116	3,61	1,01%	<b>104,92</b>	116	2,21	<b>0,51%</b>
Med 06	129,99	125	7,70	3,28%	<b>125,90</b>	126	2,07	<b>0,14%</b>
Med 07	<b>85,72</b>	113	9,04	<b>1,60%</b>	89,69	<b>114</b>	2,54	5,95%
Med 08	176,86	135	4,75	5,21%	<b>169,58</b>	135	2,10	<b>1,14%</b>
Med 09	164,59	111	6,72	5,87%	<b>158,53</b>	111	2,73	2,27%
Med 10	<b>147,24</b>	134	6,93	<b>2,64%</b>	148,62	<b>135</b>	2,64	3,55%
Med 11	178,6	<b>136</b>	7,02	4,52%	<b>171,62</b>	134	4,04	0,64%
Max 01	<b>56,28</b>	164	2,53	<b>0,59%</b>	57,60	164	3,13	2,86%
Max 02	<b>56,63</b>	165	4,71	<b>1,20%</b>	59,44	165	3,33	5,87%
Max 03	<b>67,86</b>	168	6,98	<b>0,69%</b>	69,94	168	2,78	3,65%
Max 04	<b>82,16</b>	198	7,17	<b>0,89%</b>	86,01	197	2,85	5,32%
Max 05	<b>106,33</b>	188	5,82	<b>0,09%</b>	106,40	190	2,62	0,15%
Max 06	<b>120,54</b>	207	11,53	<b>0,16%</b>	120,56	<b>209</b>	2,37	0,17%
Max 07	<b>166,08</b>	192	6,42	<b>0,08%</b>	166,18	<b>194</b>	3,21	0,14%
Max 08	<b>179,47</b>	224	6,81	<b>0,22%</b>	179,48	224	3,80	0,22%
Max 09	<b>174,69</b>	188	6,53	<b>0,11%</b>	174,88	<b>191</b>	3,63	0,22%
Max 10	<b>179,25</b>	224	12,95	<b>0,30%</b>	179,36	224	3,05	0,36%
Max 11	<b>165,35</b>	228	11,03	<b>0,11%</b>	165,38	<b>231</b>	4,15	0,13%

Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

A coluna  $FO_1$  mostra os valores obtidos para a função objetivo da Heurística 01 após aplicar-se o algoritmo de melhoria. Observa-se que para essa abordagem se obtém apenas uma solução melhor em relação ao valor da função objetivo para a instância *Min 05*, a qual passa a atender um pedido a mais que na fase de factibilização e apresenta menor valor de função objetivo, resultado que pode ser comprovado nas Tabelas 6 e 8 para a instância *Min 05*. Para as demais instâncias o algoritmo apresentou solução pior ou igual à fase de factibilização, permanecendo então, os valores encontrados na Tabela 6.

A coluna  $FO_2$  exibe os valores de função objetivo para a segunda heurística de factibilização. Os resultados encontrados foram melhores que aos da fase anterior para 16 instâncias, logo, o algoritmo de melhoria funciona melhor para a segunda maneira de factibilizar as soluções iniciais.

Outro resultado interessante é o fato de a Heurística 01 atingir resultados melhores para todas as instâncias do cenário *Máximo*. Nesse cenário, a demanda total de cada item representa um pedido, assim, a alocação de itens nos fornos pelo peso total produzido atende a mais pedidos no período previsto para entrega e portanto, se obtém menores valores para a função objetivo.

A Heurística 02 obtém melhores resultados para as instâncias do cenário *Mínimo*. Porém os *Gaps* de otimalidade em relação aos valores obtidos por MRPP ainda são elevados, com exceção da instância *Min 02*, que atingiu a otimalidade.

As colunas  $t_{m1}$  e  $t_{m2}$  apresentam os tempos, em segundos, de execução do algoritmo para as duas abordagens de factibilização. Pode-se perceber que a heurística de melhoria executa rapidamente, e em alguns segundos se obtém as respostas.

Buscando uma maneira de se obter menores valores para a função objetivo, a próxima seção aborda uma maneira alternativa para obtenção das soluções iniciais obtidas pelo CPLEX e os resultados encontrados para essa nova abordagem.

## 5.4 ABORDAGEM ALTERNATIVA PARA OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO INICIAL

O algoritmo da heurística apresentada nesse trabalho depende da solução inicial gerada pelo CPLEX, mais precisamente depende dos valores da variável  $X_{jt}$ . Se existir alguma solução para a relaxação que apresente valores próximos da otimalidade e diferentes valores para a  $X_{jt}$ , então a fase de factibilização sequenciará os fornos de maneira diferente e assim, pode-se obter melhores valores para a função objetivo.

Dessa forma, buscou-se uma forma de criar um *solution pool* do modelo MRPP gerado pelo CPLEX e procurar uma solução inicial que traga melhores resultados para as fases de factibilização e melhoria.

O *solution pool* armazena várias soluções de um MIP além da solução ótima. A geração de várias soluções permite a escolha de uma que melhor se adapte aos critérios a que se pretende atender, nesse caso encontrar uma solução em que os valores obtidos para as variáveis  $X_{jt}$  e  $T_{kt}$

permitam uma melhor alocação dos itens produzidos nos fornos, respeitando a capacidade do forno, atendendo mais pedidos e gerando um valor menor para a função objetivo.

Para acessar o *solution pool* do modelo MRPP utilizou-se uma *callback* durante a programação do modelo em linguagem Julia. Uma *callback* é uma função capaz de modificar o processo de resolução de um MIP pelo resolvidor.

Foram testadas duas formas de se obter respostas alternativas à solução ótima, a primeira manteve-se o limite máximo de tempo do resolvidor em 3.600s e coletou-se as soluções geradas que apresentavam *Gap* de otimalidade abaixo de 1%.

A segunda maneira limitou-se o tempo em dez minutos, 600s, e coletou-se as soluções com *Gap* abaixo de 1%, caso o modelo não conseguisse uma solução com esse valor de *Gap*, armazenou-se as soluções obtidas no último minuto de resolução do modelo.

Aplicou-se a fase de factibilização, com as duas formas de ordenação de itens, para todas as diferentes soluções geradas. Para a solução que apresentou menor valor de função objetivo aplicou-se a fase de melhoria.

#### 5.4.1 Resultados computacionais para com *Gap* abaixo de 1% e tempo limite de 3.600s

Matendo-se o limite máximo de tempo em 3.600s para a obtenção das soluções iniciais, adicionou-se uma *callback* para a resolução do modelo MRPP para armazenar as soluções em que o *Gap* de otimalidade fosse abaixo de 1%. Caso, o algoritmo não encontrasse soluções com *Gap* inferior a 1%, armazenou-se as soluções encontradas no último minuto de execução.

Utilizou-se o pacote de extensão *MathProgBase* ao modelo, que permite acessar os nós da árvore de solução e coletar os resultados. A função utilizada para acessar o *solution pool* é

representada pelo Algoritmo 6.

---

**Algoritmo 6:** Função utilizada para armazenar as soluções existentes no *solution pool* do modelo MRPP com tempo limite de 3.600s

---

$SOLUCOES = [ \ ]$ : vetor para armazenar os valores de  $X_{jt}$  para cada solução alternativa

$OBJETIVO = [ \ ]$ : vetor para armazenar os valores de FO para cada solução alternativa

**início**

obj = getobj(m)

Gap = getgap(m)

a = getstarttime(m)

b = gettimestamp(m)

tempo = 3600 - (b - a)

**se** Gap < 0,01 **ou** tempo ≥ 3540 **então**

$X = getvalue(X_{jt})$

$SOLUCOES \leftarrow SOLUCOES + X$

$OBJETIVO \leftarrow OBJETIVO + obj$

**fim**

**fim**

**retorna**  $SOLUCOES$  e  $OBJETIVO$ .

---

As funções  $getobj(m)$  e  $getgap(m)$ , presentes no pacote *MathProgBase* coletam os valores de função objetivo e do *Gap* de otimalidade para o modelo  $m$  a ser resolvido.

A função  $getstarttime(m)$  registra o tempo, em horas, minutos e segundos, em que o programa se iniciou, e a função  $gettimestamp(m)$  registra o momento em que o programa finaliza. Calcula-se o tempo de execução, em segundos, pela diferença entre o tempo final e o tempo inicial.

Após coletar as soluções alternativas para o modelo MRPP, aplicou-se o algoritmo de factibilização, utilizando as duas formas de ordenação dos itens e os resultados estão presentes na Tabela 9.

Tabela 9 – Resultados computacionais para a fase de factibilização, após utilizar as soluções alternativas para cada instância.

Instância	MRPP			HEURÍSTICA 01			HEURÍSTICA 02		
	$FO_0$	$NP_0$	Nsol	$FO_1$	$NP_1$	$Gap_1$	$FO_2$	$NP_2$	$Gap_2$
Min 01	36,95	41	13	38,59	41	4,25%	<b>36,95</b>	<b>42</b>	<b>0,00%</b>
Min 02	37,42	43	1	39,03	43	4,12%	<b>37,42</b>	43	<b>0,00%</b>
Min 03	43,39	43	20	49,66	39	12,68%	<b>44,63</b>	<b>43</b>	<b>2,84%</b>
Min 04	53,25	44	20	72,12	41	26,21%	<b>57,23</b>	<b>43</b>	<b>7,00%</b>
Min 05	67,61	40	11	74,37	39	9,09%	<b>71,82</b>	39	<b>5,86%</b>
Min 06	82,78	43	10	95,35	42	13,20%	<b>92,61</b>	42	10,63%
Min 07	85,25	40	21	90,47	39	5,78%	<b>85,70</b>	39	<b>0,53%</b>
Min 08	95,44	47	3	106,88	47	10,77%	<b>95,82</b>	47	<b>0,47%</b>
Min 09	124,49	40	15	133,06	39	6,44%	125,17	39	<b>0,54%</b>
Min 10	130,78	47	3	149,82	47	12,76%	<b>131,35</b>	47	<b>0,49%</b>
Min 11	110,58	45	14	<b>113,91</b>	44	2,92%	114,87	44	3,74%
Med 01	48,72	103	10	51,29	103	5,07%	<b>48,77</b>	103	<b>0,17%</b>
Med 02	56,30	104	13	56,33	104	0,05%	<b>56,31</b>	104	<b>0,02%</b>
Med 03	67,70	110	28	<b>67,71</b>	107	<b>0,09%</b>	68,05	<b>108</b>	0,59%
Med 04	68,11	123	69	<b>68,52</b>	<b>122</b>	<b>0,74%</b>	68,54	125	0,76%
Med 05	104,40	120	25	<b>104,43</b>	<b>119</b>	<b>0,03%</b>	104,68	118	0,28%
Med 06	125,88	127	14	<b>126,37</b>	127	<b>0,51%</b>	127,01	127	1,01%
Med 07	84,85	115	7	85,70	113	1,58%	<b>85,39</b>	<b>114</b>	<b>1,22%</b>
Med 08	167,73	135	22	171,06	135	2,00%	<b>167,83</b>	<b>135</b>	<b>0,11%</b>
Med 09	155,15	118	12	<b>155,19</b>	<b>117</b>	<b>0,17%</b>	156,25	111	0,84%
Med 10	143,44	135	15	146,44	135	2,11%	<b>145,64</b>	135	<b>1,57%</b>
Med 11	170,52	142	78	173,14	<b>141</b>	1,51%	<b>170,64</b>	135	<b>0,07%</b>
Max 01	55,99	164	13	<b>56,02</b>	164	<b>0,12%</b>	57,61	164	2,88%
Max 02	56,24	165	15	56,21	165	0,47%	<b>56,01</b>	165	<b>0,11%</b>
Max 03	67,43	169	43	<b>67,46</b>	167	<b>0,10%</b>	67,52	167	0,20%
Max 04	81,55	204	47	81,71	203	0,34%	84,91	204	4,28%
Max 05	106,26	190	36	106,26	190	0,02%	<b>106,27</b>	<b>195</b>	<b>0,03%</b>
Max 06	120,44	213	13	<b>120,44</b>	<b>212</b>	<b>0,07%</b>	120,45	208	0,08%
Max 07	165,96	194	32	166,03	194	0,06%	<b>166,00</b>	194	<b>0,03%</b>
Max 08	179,12	224	21	<b>179,23</b>	224	<b>0,08%</b>	179,53	224	0,25%
Max 09	174,52	193	35	174,64	193	0,08%	<b>174,53</b>	<b>195</b>	<b>0,02%</b>
Max 10	178,79	224	22	183,24	224	2,47%	<b>179,14</b>	<b>224</b>	<b>0,24%</b>
Max 11	165,28	230	42	165,37	227	0,12%	<b>165,29</b>	<b>226</b>	<b>0,07%</b>

Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

A coluna  $FO_0$  apresenta a solução inicial obtida pelo CPLEX para o modelo MRPP, que gerou o melhor resultado para a fase de factibilização e a coluna  $NP_0$  apresenta o número de pedidos atendidos por essa solução. O número de soluções alternativas encontradas para cada instância é apresentada na coluna  $Nsol$ .

A coluna  $FO_1$  apresenta o valor da função objetivo para a *Heurística 01* e a coluna  $NP_1$  apresenta o número de pedidos atendidos. Observe que após a utilização de uma solução inicial alternativa a Heurística 01 apresentou melhores valores de função objetivo que os resultados apresentados na Tabela 6 para 29 das 33 instâncias testadas.

Para a Heurística 02 os resultados são apresentados na coluna  $FO_2$  para a função objetivo, e  $NP_2$  para o número de pedidos atendidos. Os valores em negrito mostram em qual das duas abordagens heurísticas o resultado foi melhor. A Heurística 02 apresentou melhores valores de função objetivo para 27 das 33 instâncias em relação à fase de factibilização retratada na Tabela 6.

Para verificar a qualidade da solução encontrada calculou-se o *Gap* em relação à resposta encontrada pelo CPLEX para o modelo MRPP, para a otimalidade. Dessa forma, as colunas  $Gap_1$  e  $Gap_2$  são calculadas pelas Equações (5.4) e (5.5), respectivamente. Pode-se observar que mesmo sem ainda ter passado pela fase de melhoria, os resultados mostrados na Tabela 9 apresentaram *Gaps* mais baixos, em 84% das instâncias testadas, que os valores obtidos utilizando-se as soluções ótimas para o modelo MRPP. Assim, o uso de soluções iniciais alternativas se mostrou interessante para a resolução do problema.

As soluções obtidas pela *Heurística 02* foram melhores que os resultados encontrados pela *Heurística 01* em relação ao valor da função objetivo em 21 de 33 instâncias.

Após o uso da *Heurística 02* as soluções encontradas são factíveis para o modelo 4P2, e uma vez que as instâncias *Min 01* e *Min 02* apresentaram o mesmo valor de função objetivo que a relaxação, as duas soluções são ótimas em relação ao modelo 4P2, resolvidas em poucos segundos. A Tabela 10 apresenta os tempos gastos para se resolver a fase de factibilização após a obtenção de múltiplas soluções para a fase inicial.

Tabela 10 – Tempo, em segundos, de execução da fase de solução inicial e factibilização, após utilização do *solution pool*.

Instância	$t_0$	$t_1$	$t_2$
Min 01	2	3	3
Min 02	3	1	1
Min 03	12	5	3
Min 04	37	14	5
Min 05	13	12	3
Min 06	3600	140	200
Min 07	15	11	5
Min 08	172	6	4
Min 09	21	8	5
Min 10	79	19	2
Min 11	3600	205	210
<b>Média</b>	686,7	38,5	40,1
Med 01	9	6	2
Med 02	5	8	2
Med 03	31	13	5
Med 04	3600	128	462
Med 05	27	22	3
Med 06	3600	31	26
Med 07	14	10	2
Med 08	706	29	30
Med 09	35	22	6
Med 10	383	7	29
Med 11	3600	127	89
<b>Média</b>	1092	36,6	59,6
Max 01	10	5	2
Max 02	9	17	5
Max 03	110	23	14
Max 04	394	66	16
Max 05	886	46	25
Max 06	1696	65	17
Max 07	226	32	11
Max 08	790	48	42
Max 09	319	21	9
Max 10	3600	64	48
Max 11	3600	576	69
<b>Média</b>	1058	87,5	23,5

Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

A coluna  $t_0$  apresenta o tempo gasto pelo resolvidor após acrescentar a função para acesso as múltiplas soluções do modelo MRPP, observa-se que as instâncias *Min 06*, *Min 11*, *Med 04*, *Med 06*, *Med 11*, *Max 10* e *Max 11*, todas com 5 períodos no horizonte de planejamento, gastaram 3.600s de execução.

As colunas  $t_1$  e  $t_2$  exibem os tempos gastos pela fase de factibilização pelas Heurísticas 01 e 02, após receberem os vetores com as soluções iniciais geradas pelo CPLEX. Pode-se perceber que os algoritmos são executados rapidamente, e apenas as instâncias *Med 04* e *Max 11* gastaram um tempo maior para serem resolvidas pelo algoritmo de factibilização.

Para algumas instâncias se conseguiu atender a um número maior de pedidos que os apresentados na Tabela 9, porém com um acréscimo no valor da função objetivo, mas ainda apresentando um *Gap* baixo em relação ao valor obtido pela relaxação, conforme mostra a Tabela 11.

Tabela 11 – Soluções alternativas que apresentam maior número de pedidos atendidos.

Instância	FO1	NP01	GAP1	FO2	NP2	GAP2
Min 07	*	*	*	86,85	40	1,85%
Med 03	68,32	111	0,98%	*	*	*
	67,75	110	0,15%	*	*	*
Med 04	68,58	126	0,79%	*	*	*
Med 05	104,43	120	0,04%	105,17	119	0,74%
Med 09	*	*	*	157,98	118	1,93%
Max 01	67,49	171	0,15%	68,29	170	1,33%
Max 04	82,33	205	1,10%	*	*	*
Max 05	106,43	196	0,18%	*	*	*
Max 06	*	*	*	121,02	211	0,55%
Max 07	166,30	199	0,21%	166,69	197	0,45%
				165,55	232	0,23%
Max 11	165,91	231	0,45%	165,40	231	0,14%

Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

Para as instâncias apresentadas na Tabela 11, o número de pedidos atendidos foi maior que os resultados obtidos na Tabela 9, porém há um aumento no valor da função objetivo, tais soluções dependem da solução inicial que o CPLEX retornou, que como explicado anteriormente pode atender a um número maior de pedidos que possuem custo de atraso mais baixo, porém como a função objetivo prioriza minimizar os custos, é possível atender um pedido mais caro, mesmo que isso signifique deixar de atender outros pedidos.

Na próxima seção, apresenta-se a fase de melhoria para as soluções obtidas na Tabela 9.

#### 5.4.1.1 Melhoria

Após obter as soluções alternativas com *Gap* inferior a 1%, factibilizou-se todas as soluções encontradas, e para o menor valor encontrado de função objetivo aplicou-se o algoritmo

de melhoria, buscando realocar itens nos fornos e com isso diminuir o valor da função objetivo encontrada.

Os resultados encontrados para essa fase e o tempo computacional gasto para duas abordagens de factibilização são apresentados na Tabela 12.

Tabela 12 – Resultados computacionais para a fase de melhoria com a utilização de soluções alternativas e tempo limite de 3.600s.

Instância	$FO_1$	$NP_1$	$Gap_1$	$tm_1$	$FO_2$	$NP_2$	$Gap_2$	$tm_2$
Min 01	38,56	42	4,18%	2,32	<b>36,95</b>	<b>42</b>	<b>0,00%</b>	1,68
Min 02	39,03	43	4,12%	2,33	<b>37,42</b>	<b>43</b>	<b>0,00%</b>	1,97
Min 03	47,27	41	8,27%	2,52	<b>44,63</b>	<b>43</b>	<b>2,84%</b>	1,75
Min 04	72,12	41	26,21%	2,89	<b>57,23</b>	<b>43</b>	<b>7,00%</b>	1,98
Min 05	71,83	39	5,87%	2,53	<b>68,72</b>	<b>40</b>	<b>1,62%</b>	1,88
Min 06	<b>87,81</b>	42	<b>5,74%</b>	2,56	<b>92,61</b>	42	10,63%	2,20
Min 07	90,47	39	5,78%	2,52	<b>85,70</b>	<b>39</b>	<b>0,53%</b>	1,72
Min 08	106,88	47	10,77%	2,45	<b>95,82</b>	<b>47</b>	<b>0,47%</b>	2,07
Min 09	124,51	40	0,02%	2,48	124,51	40	0,02%	1,66
Min 10	131,35	47	0,49%	2,61	<b>131,34</b>	<b>47</b>	<b>0,49%</b>	2,00
Min 11	113,91	44	<b>2,92%</b>	2,65	<b>113,54</b>	<b>42</b>	2,61%	2,67
<b>Média</b>	83,98	42	6,76%	2,53	80,77	43	2,38%	1,96
Med 01	49,12	103	0,88%	2,83	<b>48,77</b>	<b>103</b>	<b>0,17%</b>	1,75
Med 02	56,33	104	0,05%	3,20	<b>56,31</b>	<b>104</b>	<b>0,02%</b>	1,57
Med 03	<b>67,67</b>	108	<b>0,03%</b>	2,81	67,87	<b>109</b>	<b>0,32%</b>	1,95
Med 04	<b>68,53</b>	122	<b>0,74%</b>	6,31	68,54	<b>125</b>	<b>0,76%</b>	26,79
Med 05	<b>104,43</b>	<b>119</b>	<b>0,03%</b>	2,96	104,68	118	<b>0,28%</b>	2,20
Med 06	126,37	127	0,51%		<b>125,84</b>	<b>127</b>	<b>0,09%</b>	7,49
Med 07	85,70	113	1,58%	3,11	<b>85,39</b>	<b>114</b>	<b>1,22%</b>	2,10
Med 08	171,06	135	2,00%	10,33	<b>167,83</b>	<b>135</b>	<b>0,11%</b>	11,00
Med 09	<b>155,19</b>	<b>117</b>	<b>0,17%</b>	3,13	156,25	111	<b>0,84%</b>	1,94
Med 10	146,44	135	2,11%	12,00	<b>145,63</b>	<b>135</b>	<b>1,57%</b>	11,00
Med 11	173,14	141	1,51%	5,87	<b>170,64</b>	<b>135</b>	<b>0,07%</b>	9,28
<b>Média</b>	109,45	120	0,87%	5,26	108,89	120	0,50%	7,01
Max 01	<b>56,02</b>	<b>164</b>	<b>0,12%</b>	3,20	57,61	164	<b>2,88%</b>	2,02
Max 02	56,15	165	0,36%	3,16	<b>56,00</b>	<b>165</b>	<b>0,09%</b>	2,03
Max 03	<b>67,46</b>	<b>167</b>	<b>0,10%</b>	3,67	67,52	167	<b>0,20%</b>	2,37
Max 04	<b>81,71</b>	203	<b>0,34%</b>	4,19	84,91	<b>204</b>	<b>4,10%</b>	4,04
Max 05	106,27	189	0,03%	6,62	<b>106,27</b>	<b>195</b>	<b>0,03%</b>	6,91
Max 06	<b>120,44</b>	<b>212</b>	<b>0,07%</b>	12,48	120,45	208	<b>0,08%</b>	8,56
Max 07	166,00	194	0,04%	3,61	<b>165,98</b>	<b>195</b>	<b>0,02%</b>	2,60
Max 08	<b>179,19</b>	<b>224</b>	<b>0,06%</b>	14,62	179,52	224	<b>0,25%</b>	5,59
Max 09	174,55	194	0,03%	9,82	<b>174,53</b>	<b>195</b>	<b>0,02%</b>	2,21
Max 10	183,28	224	2,49%	20,67	<b>179,13</b>	<b>224</b>	<b>0,23%</b>	14,03
Max 11	165,37	<b>227</b>	0,12%	39,73	<b>165,27</b>	226	<b>0,06%</b>	6,15
<b>Média</b>	123,31	197	0,34%	11,07	123,38	197	0,73%	5,14

Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

Após a fase de melhoria a *Heurística 01* apresentou 12 resultados com valor de função objetivo inferior aos apresentados na Tabela 9 e a *Heurística 02* obteve melhores resultados para 13 instâncias. As demais instâncias permaneceram com o mesmo valor obtido anteriormente.

As colunas  $tm_1$  e  $tm_2$  apresentam os tempos gastos, em segundos, para que o algoritmo de melhoria seja executado para as duas abordagens. Pode-se perceber que os tempos são baixos e o algoritmo executa rapidamente para todas as instâncias.

Conclui-se que a utilização de soluções alternativas à solução ótima na resolução do MRPP pelo CPLEX permitiu a obtenção de melhores resultados para as fases de factibilização e melhoria. A *Heurística 02* apresentou melhores respostas de função objetivo para um número maior de instâncias que a *Heurística 01*.

Pode-se obter soluções com maior número de pedidos atendidos, porém com maior custo total de atraso, tal escolha depende dos critérios da empresa para atendimento de pedidos e custo máximo permitido.

Os algoritmos de factibilização e melhoria executam rapidamente, mesmo com um número maior de soluções a ser analisados. Porém, a fase de obtenção da solução inicial se mostrou demorada para algumas instâncias, assim, realizou-se novos testes com o limite máximo de dez minutos.

#### 5.4.2 Resultados computacionais com *Gap* abaixo de 1% e tempo limite de 600s

Para algumas instâncias o tempo gasto para se obter as soluções alternativas à resposta ótima do modelo MRPP foi muito elevado. Por esse motivo, alterou-se o tempo limite de execução para 600s e coletou-se novamente os resultados, caso o modelo não atingisse soluções com *Gap* menor a 1%, armazenou-se os resultados obtidos durante o último minuto de execução do *software* de otimização linear para o modelo MRPP.

O algoritmo 7 representa a nova função para acessar as múltiplas soluções encontradas

para o problema MRPP.

---

**Algoritmo 7:** Função utilizada para armazenar as soluções existentes no *solution pool* do modelo MRPP com tempo limite de 600s.

---

$SOLUCOES = [ \ ]$ : vetor para armazenar os valores de  $X_{jt}$  para cada solução alternativa

$OBJETIVO = [ \ ]$ : vetor para armazenar os valores de FO para cada solução alternativa

**início**

obj = getobj(m)

Gap = getgap(m)

a = getstarttime(m)

b = gettimestamp(m)

tempo = 3600 - (b - a)

**se** Gap < 0,01 **ou** tempo ≥ 540 **então**

$X = getvalue(X_{jt})$

$SOLUCOES \leftarrow SOLUCOES + X$

$OBJETIVO \leftarrow OBJETIVO + obj$

**fim**

**fim**

**retorna**  $SOLUCOES$  e  $OBJETIVO$ .

---

Caso, o modelo atinja soluções com *Gap* inferior a 1% armazena-se os valores da variável  $X_{jt}$  e da função objetivo para todas as respostas encontradas. Caso contrário, armazena-se as soluções obtidas no último minuto de execução, ou seja todas as soluções encontradas acima de 540s.

Os resultados obtidos para essa etapa, após a fase de factibilização e melhoria, estão apresentados na Tabela 13.

Tabela 13 – Resultados computacionais para as fases de factibilização e melhoria, após utilização das soluções alternativas e limite máximo de 600s.

Instância	$FO_1$	$NP_1$	$Gap_1$	$FO_2$	$NP_2$	$Gap_2$
Min 01	38,56	42	4,18%	<b>36,95</b>	<b>42</b>	<b>0,00%</b>
Min 02	39,03	43	4,12%	<b>37,42</b>	<b>43</b>	<b>0,00%</b>
Min 03	47,27	41	8,27%	<b>44,63</b>	<b>43</b>	<b>2,84%</b>
Min 04	72,12	41	26,21%	<b>57,23</b>	<b>43</b>	<b>7,00%</b>
Min 05	71,83	39	5,87%	<b>68,72</b>	<b>40</b>	<b>1,62%</b>
Min 06	<b>87,81</b>	42	<b>5,74%</b>	93,91	<b>43</b>	11,86%
Min 07	90,47	39	5,78%	<b>85,70</b>	<b>39</b>	<b>0,53%</b>
Min 08	106,88	47	10,77%	<b>95,82</b>	<b>47</b>	<b>0,47%</b>
Min 09	124,51	40	0,02%	124,51	40	0,02%
Min 10	131,35	47	0,49%	<b>131,34</b>	<b>47</b>	<b>0,49%</b>
Min 11	117,16	41	5,62%	<b>113,54</b>	<b>42</b>	<b>2,61%</b>
Med 01	49,12	103	0,88%	<b>48,77</b>	<b>103</b>	<b>0,17%</b>
Med 02	56,33	104	0,05%	<b>56,31</b>	<b>104</b>	<b>0,02%</b>
Med 03	<b>67,67</b>	108	<b>0,03%</b>	67,87	<b>109</b>	0,32%
Med 04	68,58	122	0,82%	<b>68,54</b>	<b>125</b>	<b>0,76%</b>
Med 05	<b>104,43</b>	<b>119</b>	<b>0,03%</b>	104,68	118	0,28%
Med 06	125,99	126	0,21%	<b>125,84</b>	<b>127</b>	<b>0,09%</b>
Med 07	85,70	113	1,58%	<b>85,39</b>	<b>114</b>	<b>1,22%</b>
Med 08	171,19	135	2,07%	<b>167,83</b>	<b>135</b>	<b>0,11%</b>
Med 09	<b>155,19</b>	<b>117</b>	<b>0,17%</b>	156,25	111	0,84%
Med 10	146,44	135	2,11%	<b>145,63</b>	<b>135</b>	<b>1,57%</b>
Med 11	175,88	134	3,05%	<b>170,69</b>	<b>137</b>	<b>0,10%</b>
Max 01	<b>56,02</b>	<b>164</b>	<b>0,12%</b>	57,61	164	2,88%
Max 02	56,15	165	0,36%	<b>56,00</b>	<b>165</b>	<b>0,09%</b>
Max 03	<b>67,46</b>	<b>167</b>	<b>0,10%</b>	67,52	167	0,20%
Max 04	<b>81,71</b>	203	<b>0,34%</b>	84,91	<b>204</b>	<b>4,28%</b>
Max 05	106,27	189	0,03%	<b>106,27</b>	<b>195</b>	<b>0,03%</b>
Max 06	120,46	206	0,09%	<b>120,45</b>	<b>208</b>	<b>0,08%</b>
Max 07	166,00	194	0,04%	<b>165,98</b>	<b>195</b>	<b>0,02%</b>
Max 08	<b>179,19</b>	<b>224</b>	<b>0,06%</b>	179,52	224	0,25%
Max 09	174,55	194	0,03%	<b>174,53</b>	<b>195</b>	<b>0,02%</b>
Max 10	183,28	224	2,49%	<b>179,13</b>	<b>224</b>	<b>0,23%</b>
Max 11	165,29	<b>227</b>	0,07%	<b>165,27</b>	226	<b>0,06%</b>

Elaborado pela autora, 2019.

De acordo com os resultados obtidos para a função objetivo pela  $FO_1$ , para a *Heurística 01*, e  $FO_2$  para a *Heurística 02*, é possível obter resultados semelhantes aos obtidos na Tabela 12, mesmo com o limite de tempo em dez minutos.

A *Heurística 02* apresentou resultados melhores ou iguais a *Heurística 01* para 24 das 33 instâncias, ou seja, 72,73% dos casos testados obtiveram menor valor de função objetivo quando resolvidos pela *Heurística 02*.

Em relação ao número de pedidos atendidos, as duas heurísticas atenderam ao mesmo número de pedidos apenas para 15 instâncias, a *Heurística 01* atendeu a um maior número de pedidos apenas para 3 instâncias: *Med 05*, *Med 09* e *Max 11*, e a *Heurística 02* atendeu a mais pedidos que a primeira abordagem em outras 15 instâncias.

A Tabela 14 apresenta os tempos de execução para obter as soluções alternativas e a resolução dos algoritmos de factibilização e melhoria com utilização do *solution pool* e tempo limite de 600s.

Tabela 14 – Tempo de execução total, em segundos, para obtenção de solução inicial, factibilização e melhoria com utilização de soluções alternativas e limite máximo de 600s.

Instância	$t_0$	$t_1$	$t_{m1}$	$t_{T1}$	$t_2$	$t_{m2}$	$t_{T2}$
Min 01	1	3	2,32	7	3	1,68	6
Min 02	3	1	2,33	6	1	1,97	6
Min 03	12	5	2,52	20	3	1,75	17
Min 04	37	14	2,89	54	5	1,98	44
Min 05	13	12	2,53	28	3	1,88	18
Min 06	600	143	8,84	752	208	10,10	818
Min 07	15	11	2,52	29	5	1,72	22
Min 08	172	5	2,35	179	4	2,07	178
Min 09	21	6	2,48	29	5	1,66	28
Min 10	79	19	2,61	101	2	2,00	83
Min 11	600	220	9,72	830	209	17,42	826
<b>Média</b>	141	40	3,74	185	41	4,02	186
Med 01	9	6	2,83	18	2	1,75	13
Med 02	5	8	3,2	16	2	1,57	9
Med 03	31	13	2,81	47	5	1,95	38
Med 04	600	428	19,74	1048	454	17,87	1072
Med 05	27	22	2,96	52	3	2,2	32
Med 06	600	229	12,56	842	235	18,48	853
Med 07	14	10	3,11	27	2	2,1	18
Med 08	600	114	12,95	727	147	16,98	764
Med 09	35	22	3,13	60	6	1,94	43
Med 10	383	7	12	402	29	11	423
Med 11	600	710	26,47	1336	678	19,68	1298
<b>Média</b>	264	143	9,25	416	142	8,68	415
Max 01	10	5	3,2	18	2	2,02	14
Max 02	9	17	3,16	29	5	2,03	16
Max 03	110	23	3,67	137	14	2,37	126
Max 04	394	66	4,19	464	16	4,04	414
Max 05	600	46	6,62	653	180	20,52	801
Max 06	600	19	12,48	631	150	2,57	753
Max 07	226	32	3,61	262	11	2,6	240
Max 08	600	22	2,71	625	18	3,16	621
Max 09	319	21	2,46	342	9	2,21	330
Max 10	600	26	2,83	629	15	2,72	618
Max 11	600	51	3,07	654	53	3,38	656
<b>Média</b>	370	30	4,36	404	43	4,33	417

Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

O maior do tempo gasto está na obtenção da solução inicial. Tais resultados podem ser vistos na coluna  $t_0$ .

A coluna  $t_1$  apresenta o tempo de factibilização das soluções obtidas na fase inicial e a coluna  $t_{m1}$  exhibe o tempo para a fase de melhoria pela *Heurística 01*. O tempo total para obtenção de uma resposta para a primeira heurística é apresentado na coluna  $t_{T1}$ . Analogamente, as colunas com índice 2 exibem os tempos de factibilização, melhoria e tempo total de execução para a *Heurística 02*.

Pode-se comparar os resultados obtidos com o modelo MRPP e os algoritmos de factibilização e melhoria, com os resultados obtidos pelo CPLEX para o modelo 4P2, conforme será discutido nas subseções 5.4.3.

### 5.4.3 Comparação das abordagens heurísticas do modelo MRPP com o modelo 4P2

Os resultados obtido pelo modelo MRPP são agora factíveis para o modelo 4P2. Assim, é possível comparar as abordagens heurísticas com os resultados obtidos pelo modelo 4P2. A Tabela 15 compara os valores encontrados para a função objetivo para a Heurística 01, Heurística 02 e o modelo 4P2.

Tabela 15 – Comparação entre os resultados obtidos pelas heurísticas e o modelo 4P2.

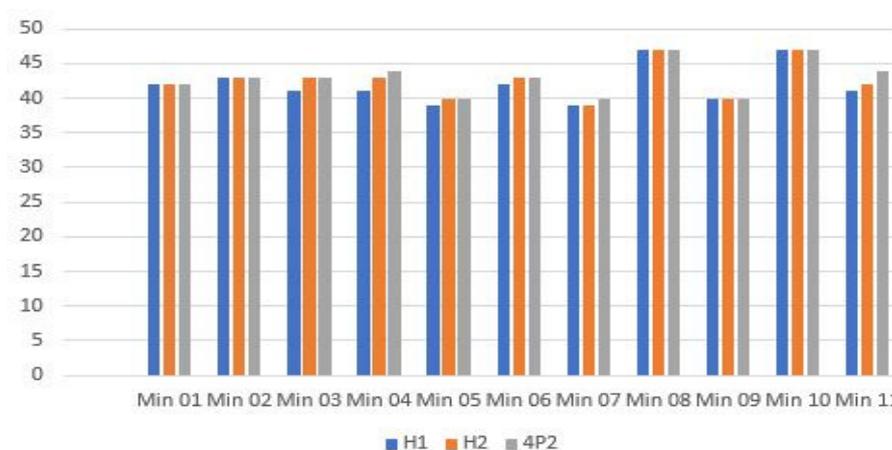
Instância	Heurística 01		Heurística 02		4P2	
	$FO_1$	$Gap_1$	$FO_2$	$Gap_2$	$FO_P$	$Gap_P$
Min 01	38,56	4,18%	<b>36,95</b>	<b>0,00%</b>	<b>36,95</b>	<b>0,00%</b>
Min 02	39,03	4,12%	<b>37,42</b>	<b>0,00%</b>	<b>37,42</b>	<b>0,00%</b>
Min 03	47,27	8,27%	44,63	2,84%	<b>43,36</b>	<b>0,00%</b>
Min 04	72,12	26,21%	57,23	7,00%	<b>55,41</b>	<b>3,95%</b>
Min 05	71,83	5,87%	68,72	1,62%	<b>68,44</b>	<b>1,21%</b>
Min 06	<b>87,81</b>	<b>5,74%</b>	93,91	11,86%	91,66	9,70%
Min 07	90,47	5,78%	<b>85,70</b>	<b>0,53%</b>	87,61	2,71%
Min 08	106,88	10,77%	<b>95,82</b>	<b>0,47%</b>	97,15	1,83%
Min 09	<b>124,51</b>	<b>0,02%</b>	<b>124,51</b>	<b>0,02%</b>	125,55	0,84%
Min 10	131,35	0,49%	<b>131,34</b>	<b>0,49%</b>	137,60	5,01%
Min 11	117,16	5,62%	<b>113,54</b>	<b>2,61%</b>	117,80	6,13%
<b>Média</b>	84,27	7,01%	<b>80,89</b>	<b>2,49%</b>	81,72	2,85%
Med 01	49,12	0,88%	48,77	0,17%	<b>48,69</b>	<b>0,00%</b>
Med 02	56,33	0,05%	<b>56,31</b>	<b>0,02%</b>	<b>56,31</b>	<b>0,02%</b>
Med 03	<b>67,67</b>	<b>0,03%</b>	67,87	0,32%	67,68	0,04%
Med 04	68,58	0,82%	68,54	0,76%	<b>68,36</b>	<b>0,50%</b>
Med 05	<b>104,43</b>	<b>0,03%</b>	104,68	0,28%	104,82	0,41%
Med 06	125,99	0,21%	<b>125,84</b>	<b>0,09%</b>	131,99	4,74%
Med 07	85,70	1,58%	<b>85,39</b>	<b>1,22%</b>	<b>85,39</b>	<b>1,22%</b>
Med 08	171,19	2,07%	<b>167,83</b>	<b>0,11%</b>	171,69	2,36%
Med 09	<b>155,19</b>	<b>0,17%</b>	156,25	0,84%	156,50	1,00%
Med 10	146,44	2,11%	<b>145,63</b>	<b>1,57%</b>	145,80	1,68%
Med 11	175,88	3,05%	<b>170,69</b>	<b>0,10%</b>	176,86	3,58%
<b>Média</b>	109,68	1,00%	<b>108,89</b>	<b>0,50%</b>	110,37	1,41%
Max 01	56,02	0,12%	57,61	2,88%	<b>55,99</b>	<b>0,07%</b>
Max 02	56,15	0,36%	<b>56,00</b>	<b>0,09%</b>	56,01	0,11%
Max 03	<b>67,46</b>	<b>0,10%</b>	67,52	0,20%	67,65	0,38%
Max 04	<b>81,71</b>	<b>0,34%</b>	84,91	4,10%	82,35	1,12%
Max 05	<b>106,27</b>	<b>0,03%</b>	<b>106,27</b>	<b>0,03%</b>	106,44	0,19%
Max 06	120,46	0,09%	<b>120,45</b>	<b>0,08%</b>	121,69	1,10%
Max 07	166,00	0,04%	<b>165,98</b>	<b>0,02%</b>	166,74	0,48%
Max 08	<b>179,19</b>	<b>0,06%</b>	179,52	0,25%	180,26	0,65%
Max 09	174,55	0,03%	<b>174,53</b>	<b>0,02%</b>	174,73	0,14%
Max 10	183,28	2,49%	<b>179,13</b>	<b>0,23%</b>	184,13	2,94%
Max 11	165,29	0,07%	<b>165,27</b>	<b>0,06%</b>	170,65	3,21%
<b>Média</b>	<b>123,31</b>	<b>0,34%</b>	123,38	0,72%	124,24	0,95%
<b>Média to- tal</b>	105,75	2,78%	<b>104,39</b>	<b>1,24%</b>	105,44	1,74%

Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

As colunas  $FO_1$ ,  $FO_2$  apresentam os valores obtidos para o modelo MRPP e as Heurísticas 01 e 02, respectivamente, e a coluna  $FO_P$  exibe os resultados de função objetivo para o modelo 4P2. Observa-se que a Heurística 01 apresentou respostas melhores ou iguais ao modelo 4P2 para 8 instâncias, enquanto que a Heurística 02 encontrou respostas iguais ou melhores que o modelo 4P2 para 19 instâncias.

Para o número de pedidos atendidos, apresenta-se três gráficos, um para cada cenário analisado, comparando-se o número de pedidos atendidos pela Heurística 01, Heurística 02 após a fase de melhoria, e o modelo 4P2.

Figura 8 – Número de pedidos atendidos o cenário *Mínimo* com a utilização do *solution pool* na fase inicial e tempo limitado em 600s.

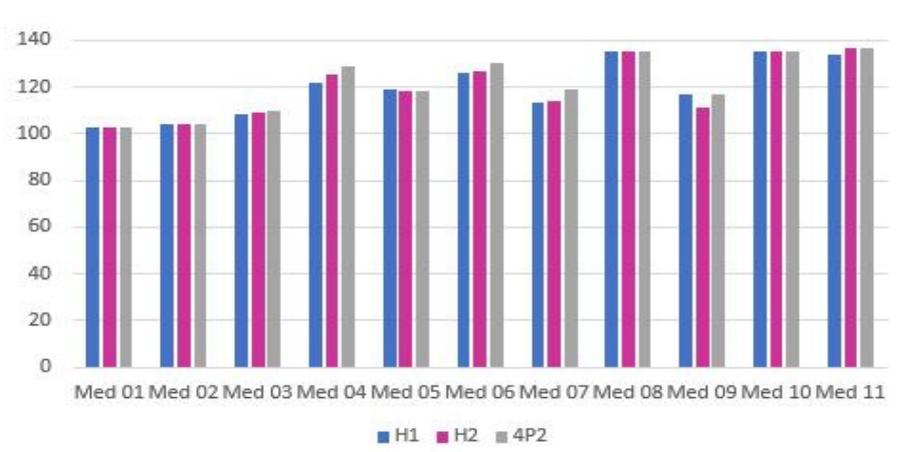


Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

Os três modelos atenderam ao mesmo número de pedidos para o cenário Mínimo para 5 instâncias: *Min 01*, *Min 02*, *Min 08*, *Min 09* e *Min 10*. Além das 5 instâncias citadas anteriormente a Heurística 02 atendeu ao mesmo número de pedidos que o modelo 4P2 em mais 3 instâncias: *Min 03*, *Min 05* e *Min 06*. Para as outras três instâncias o modelo 4P2 atendeu a pelo menos um pedido a mais que os heurísticas.

Os resultados para o número de pedidos atendidos para o cenário Médio pode ser visto na Figura 9.

Figura 9 – Número de pedidos atendidos o cenário *Médio* com a utilização do *solution pool* na fase inicial e tempo limitado em 600s.

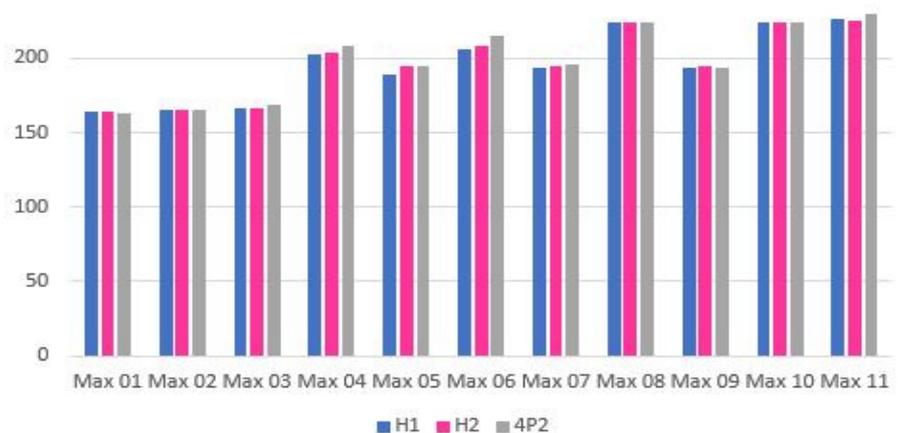


Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

Para o cenário *Médio* as três abordagens atendem ao mesmo número de pedidos para 4 instâncias: *Med 01*, *Med 02*, *Med 08* e *Med 10*. A Heurística 01 atende a um pedido a mais que os outros métodos para a instância *Med 05*, e para a instância *Med 09* também atende ao mesmo número de pedidos que o modelo 4P2. Para as instâncias *Med 03*, *Med 04*, *Med 06* e *Med 07* as Heurísticas 01 e 02 atendem a um número menor de pedidos em comparação ao modelo 4P2.

Por fim, a comparação entre o número de pedidos atendidos para o cenário *Máximo*, é apresentado na Figura 10.

Figura 10 – Número de pedidos atendidos o cenário *Máximo* com a utilização do *solution pool* na fase inicial e tempo limitado em 600s.



Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

Para as instâncias *Max 02*, *Max 08* e *Max 10*, as três abordagens atendem ao mesmo número de pedidos. Para a instância *Max 01*, as Heurísticas 01 e 02 atendem a um pedido a mais que o modelo 4P2.

A instância *Max 03* possui o mesmo número de pedidos atendidos pelas duas heurísticas apresentadas nesse trabalho, dois pedidos a menos em comparação ao modelo 4P2. A Heurística

02 atende a mais pedidos que os demais métodos para *Max 09* e o mesmo número de pedidos que o modelo 4P2 para *Max 05*.

É importante observar que as quantidades de pedidos atendidos apresentada nas Figuras 8, 9 e 10 são geradas pelas soluções que possuem o menor valor de função objetivo nas fases de factibilização e melhoria, conforme a Tabela 13. É possível encontrar outras soluções que apresentem número maior de pedidos atendidos, porém com um maior valor de função objetivo, como ilustra a Tabela 11.

## 5.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente, foram apresentadas duas maneiras de se factibilizar as soluções obtidas pelo CPLEX ao resolver o modelo MRPP. Foram realizados testes com as 33 instâncias para os 3 cenários descritos no Capítulo 4.

Foi possível perceber que atender a um número maior de pedidos não significa, necessariamente, obter um menor valor para a função objetivo. Pois, é possível atender um pedido que apresente alto custo de atraso em determinado período e para isso deixar de atender outros pedidos que apresentem custos de atrasos mais baratos.

Após se factibilizar os resultados, procurou-se em todos os períodos se era possível alocar algum item que não foi produzido na fase de factibilização. Para isso, retirou-se o item de menor peso da ordem de produção, e realizou-se uma varredura em todos os períodos para ver se era possível colocar as peças restantes em alguma fornada de mesma liga. O algoritmo mostrou melhores resultados para a segunda abordagem de factibilização, a qual considera o peso individual de cada produto a ser fabricado na hora de sequenciar os fornos.

Como o método de resolução depende das soluções encontradas inicialmente pelo CPLEX para o modelo MRPP, procurou-se uma maneira de obter novas soluções iniciais que gerassem melhores resultados na fase de factibilização. Acrescentou-se uma função ao resolver o modelo MRPP que conseguisse armazenar as soluções alternativas intermediárias no processo de resolução da relaxação.

As várias soluções possíveis para um MIP são chamadas de *solution pool* e permite ao tomador de decisão utilizar diferentes respostas e determinar qual é a mais adequada aos seus propósitos, mesmo que não seja a solução ótima para o problema em questão.

Utilizando o *solution pool*, foi possível determinar melhores soluções para a fase de factibilização em relação ao valor da função objetivo, inclusive, encontrando prova de otimalidade para as soluções encontradas para as instâncias *Min 01* e *Min 02*. Também foi possível encontrar diferentes soluções que atendessem a um número maior de pedidos, com *Gap* de otimalidade baixo.

Por outro lado, o tempo computacional para obtenção das soluções iniciais se mostrou elevado para algumas instâncias e foi necessário limitar a execução do *software* em no máximo dez minutos, não comprometendo a qualidade das soluções.

## 6 CONCLUSÕES E PRÓXIMOS PASSOS

Neste trabalho um problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes foi abordado com enfoque no planejamento de pedidos em uma fundição de pequeno porte, a qual trabalha com produção sob encomenda, possui capacidade de produção limitada e fabrica múltiplos itens. O problema em questão foi estudado anteriormente por [Araujo, Arenales e Clark \(2008\)](#), [Tonaki e Toledo \(2010\)](#), [Camargo \(2009\)](#), [Furtado \(2012\)](#) entre outros.

Este trabalho baseou-se no trabalho proposto por [Furtado \(2012\)](#), que apresenta uma abordagem para o planejamento da produção de pedidos em uma fundição de pequeno porte. A autora propõe modelos para o dimensionamento de lotes de produção com enfoque no atendimento dos pedidos, considerando a possibilidade de entregas parciais.

Uma relaxação *Surrogate* foi apresentada nesta dissertação, a partir de uma relaxação da restrição de capacidade de um dos modelos propostos por [Furtado \(2012\)](#). A relaxação não considera a possibilidade de entregas parciais e tem por objetivo minimizar os custos de atraso no atendimento de pedido, descontando-se os custos de estoque de itens no último período, como forma de incentivar a produção.

Ao substituir-se a restrição de capacidade do modelo de [Furtado \(2012\)](#) se obteve uma restrição *surrogate* para o modelo que possui multiplicadores *surrogates* iguais a 1 e apresentou-se os resultados teóricos que comprovam esse fato. Utilizou-se os cenários propostos por [Furtado \(2012\)](#) para realização dos testes computacionais e o modelo relaxado foi resolvido facilmente pelo CPLEX.

Uma vez que as respostas determinadas pelo CPLEX para a relaxação não são necessariamente viáveis para o problema estudado por [Furtado \(2012\)](#), foi proposta uma heurística composta de uma fase de factibilização e uma de melhoria, na qual tenta-se reduzir o valor da função objetivo encontrada na fase anterior. Na fase de factibilização, recebe-se um vetor com os valores das variáveis relativas às quantidades de itens produzidos e número de vezes que uma mesma liga foi utilizada por período e procura-se uma forma de alocar os itens sem violar a restrição de capacidade dos fornos. Vale lembrar que as restrições de capacidade foram alvo da relaxação *surrogate*.

Para isso, a fase de factibilização foi realizada em quatro partes: ordenação dos itens, alocação desses itens nas fornadas, verificar quais pedidos são atendidos após a produção dos itens e cálculo da função objetivo. Durante a etapa de ordenação, testou-se duas maneiras diferentes, uma em que considera-se o peso total produzido para cada item em cada período determinado pela solução inicial (Heurística 01), e outra em que se ordena os itens de acordo com o peso individual de cada produto (Heurística 02).

Foi proposto um algoritmo de melhoria que buscava alocar, em todos os períodos, itens

que não foram produzidos na fase de factibilização, e que foram produzidos na solução inicial. Para a Heurística 01, esse passo não se mostrou efetivo, apresentando melhoria em apenas uma instância testada, mas para a segunda heurística em 48,5% dos casos testados houve melhoria nos resultados obtidos na fase de factibilização.

Outra proposta apresentada foi em relação à obtenção das soluções iniciais atingidas pelo CPLEX, uma vez que elas influenciam no resultado encontrado nas etapas posteriores. Acrescentou-se uma função ao resolvedor no modelo para acessar o *solution pool* do modelo relaxado e com isso procurar soluções que se adequassem melhor ao problema estudado. Obteve-se soluções com *Gap* de otimalidade inferior aos apresentados anteriormente, incluindo-se soluções com garantia de otimalidade para o modelo de Furtado (2012) em duas instâncias. Porém, para instâncias maiores, o tempo computacional se mostrou elevado e foi necessário adaptar essa função a um tempo limite menor.

Após a realização dos testes computacionais, comparou-se os resultados obtidos pelo modelo de Furtado (2012). Com o limite máximo de 600s, a Heurística 01 apresentou melhores resultados que o modelo de Furtado (2012) em 57,58% das instâncias testadas, em relação ao valor da função objetivo. A Heurística 02 mostrou menores valores de função objetivo em 63,64% das instâncias, que o modelo de Furtado (2012).

Apesar da obtenção de melhores resultados para a função objetivo em relação aos encontrados na literatura, o tempo computacional ainda se encontra elevado. O maior tempo gasto se encontra na determinação da solução inicial. Utilizando a função para armezinar as soluções alternativas do modelo relaxado e limitando o tempo de execução do *software* em 600s o tempo médio gasto pelas heurísticas para resolver o problema é de 335s. Sugere-se a utilização de outra linguagem de programação como alternativa à linguagem Julia para o desenvolvimento da heurística em um tempo menor.

Outra opção que poderia ser utilizada como alternativa para lograr melhores valores de função objetivo e menor tempo computacional é a utilização de outros métodos para a obtenção das soluções iniciais. Podem ser citados um método que utilize a relaxação combinada lagrangeana/*Surrogate*, resolução da relaxação *Surrogate* a partir do método do subgradiente, atualização dos multiplicadores *surrogate* com a resolução do problema dual da relaxação e em relação a heurística proposta considerar uma form de ordenação dos pedidos.

A relaxação também é utilizada para verificar a qualidade das soluções obtidas para um problema de otimização linear. Por isso, sugere-se comparar a relaxação *Surrogate*, com o modelo de Furtado (2012) e verificar a qualidade das soluções de forma a determinar quais instâncias estão próximas da otimalidade. Também recomenda-se comparar as soluções obtidas com a relaxação *Surrogate* com a relaxações linear do problema original.

O planejamento da produção com enfoque no atendimento de pedidos ainda é um assunto pouco explorado na literatura. Conclui-se que a contribuição deste trabalho foi o desenvolvimento de um método de resolução para o planejamento da produção em uma fundição, com o objetivo de minimizar custos de atraso no atendimento de pedidos. Tal método se mostrou eficiente para

resolução do problema e a partir deste trabalho nova possibilidade de pesquisa foi determinada.

Uma inovação tecnológica em relação ao processo produtivo pode ser vista como uma medida implantada buscando aumento de eficiência dos meios de produção. Planejar a produção, de maneira a buscar melhor aproveitamento dos recursos fabris, bem como reduzir desperdícios e custos inerentes a produção é uma forma de melhoria do processo produtivo. Portanto, o dimensionamento de lotes proposto por esse trabalho, pode ser visto como uma inovação tecnológica de processo, a qual traz uma nova forma de planejar os itens a serem produzidos de forma mais rápida e buscando redução de custos e subutilização do forno.

# REFERÊNCIAS

- ABIFA. Recuperação à Vista. *Revista Oficial da Associação Brasileira de Fundição*, v. 197, p. 12–14, 2017. Citado na página 13.
- ABIFA. *Indústria de fundição fecha 1º semestre em alta*. 2018. Disponível em: <<http://www.abifa.org.br>>. Citado na página 13.
- AL-DHAHERI, N.; DIABAT, A. A Lagrangian relaxation-based heuristic for the multi-ship quay crane scheduling problem with ship stability constraints. *Annals of Operations Research*, Springer US, v. 248, n. 1-2, 2016. Citado na página 24.
- ARAUJO, S. A.; ARENALES, M. N. Dimensionamento de lotes e programação do forno numa fundição automatizada de porte médio. *Pesquisa Operacional*, v. 23, p. 403 – 420, 2003. Citado 5 vezes nas páginas 14, 17, 18, 19 e 38.
- ARAUJO, S. A. D.; ARENALES, M. N.; CLARK, A. R. Lot sizing and furnace scheduling in small foundries. *Computers & Operations Research*, v. 35, p. 916–932, 2008. Citado 6 vezes nas páginas 15, 19, 20, 27, 38 e 82.
- BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. 3. ed. [S.l.: s.n.], 2006. Citado na página 24.
- BERTULUCCI, M. F. *Modelagem matemática para otimização do planejamento e programação da produção em uma fundição de pequeno porte*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Triângulo Mineiro, 2017. Citado na página 19.
- BONNEY, M. Reflections On Production Planning And Control (PPC) . *Gestão & Produção*, v. 7, p. 181–207, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 16.
- BRAHIMI, N. et al. Single item lot sizing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 168, n. 1, p. 1–16, 2006. Citado na página 13.
- CAMARGO, V. C. B. *Um algoritmo evolutivo para o problema de dimensionamento de lotes em fundições de mercado*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 13, 14, 17, 19, 38 e 82.
- CHEN, L. et al. Surrogate Constraint Method for Optimal Power Flow OPF Based on Surrogate Con- straint. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n. 3, p. 1084–1089, 1998. Citado na página 26.
- DINKEL, J. J.; KOCHENBERGER, G. A. An Implementation of Surrogate Constraint Duality. *Operations Research*, v. 26, p. 358–364, 1978. Citado na página 26.
- DREXL, A.; KIMMS, A. Lot sizing and scheduling — Survey and extensions. *European Journal of Operational Research*, v. 99, n. 2, p. 221–235, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 17.
- ESPEJO, L. G. A.; GALVÃO, R. D. O uso das relaxações lagrangeana e surrogate em problemas de programação inteira. *Pesquisa Operacional*, v. 22, p. 387–402, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.

- FERREIRA, D.; MORABITO, R.; RANGEL, S. Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier B.V., v. 196, n. 2, p. 697–706, 2009. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2008.03.035>>. Citado na página 17.
- FISHER, M. L. Optimal Solution of Scheduling Problems Using Lagrange Multipliers: Part I. *Operations Research*, v. 42, n. 4, p. Fisher, M. L. (1973). Optimal Solution of Scheduling, 1973. ISSN 0030-364X. Disponível em: <<http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/opre.42.4.626>>. Citado na página 23.
- FLEISCHMANN, B.; MEYR, H. The general lotsizing and scheduling problem. *OR Spectrum*, v. 19, n. 1, p. 11–21, 1997. ISSN 01716468. Citado na página 17.
- FUMERO, F. A modified subgradient algorithm for Lagrangean relaxation. *Computers & Operations Research*, v. 28, n. 1, p. 33–52, 2001. ISSN 19351704. Citado na página 24.
- FURTADO, M. G. S. *O planejamento da produção de pedidos em fundições de pequeno porte*. 71 p. Dissertação (Mestrado), 2012. Citado 14 vezes nas páginas 15, 21, 27, 28, 30, 32, 34, 38, 39, 40, 45, 58, 82 e 83.
- GEOFFRION, A. M. Lagrangean relaxation for integer programming. *Mathematical Programming Studies*. *Mathematical Programming Study*, v. 2, n. 2, p. 82–114, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- GLOVER, F. Surrogate Constraint Duality in Mathematical Programming. *Operations Research*, v. 23, n. 3, p. 434–451, 1975. Disponível em: <<http://or.journal.informs.org/content/23/3/434.short>>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- Gomes Da Silva, C.; CLÍMACO, J.; FIGUEIRA, J. A scatter search method for the bi-criteria multi-dimensional  $\{0,1\}$ -knapsack problem using surrogate relaxation. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, v. 3, n. 3, p. 183–208, 2004. Citado na página 26.
- GREENBERG, H. J.; PIERSKALLA, W. P. Surrogate Mathematical Programming. *Operations Research*, v. 18, n. 5, p. 924–939, 1970. Citado na página 24.
- HELD, M.; KARP, R. M. The Traveling-Salesman Problem and Minimum Spanning Trees. *Operations Research*, v. 18, n. September 2015, p. 1138–1162, 1970. ISSN 0030-364X. Citado na página 23.
- HINDI, K. S.; Ab Ghani, M. R. Dynamic economic dispatch for large scale power systems: a Lagrangian relaxation approach. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, v. 13, n. 1, p. 51–56, 1991. Citado na página 24.
- JOHN, C. G.; KOCHENBERGER, G. A. Using surrogate constraints in a lagrangian relaxation approach to set-covering problems. *Journal of the Operational Research Society*, v. 39, n. 7, p. 681–685, 1988. ISSN 14769360. Citado na página 25.
- KARIMI, B.; FATEMI-GHOMI, S.; WILSON, J. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega*, v. 31, n. 5, p. 365–378, 2003. ISSN 03050483. Citado na página 16.
- LORENA, L. A. N.; Belo Lopes, F. A surrogate heuristic for set covering problems. *European Journal of Operational Research*, v. 79, n. 1, p. 138–150, 1994. ISSN 03772217. Citado na página 25.

- MARTELLO, S.; MONACI, M. Algorithmic Approaches to the Multiple Knapsack Assignment Problem. *Omega*, Elsevier Ltd, n. xxxx, p. 1–20, 2018. ISSN 03050483. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.omega.2018.11.013>>. Citado na página 26.
- MOLINA, F. et al. An approach using Lagrangian/surrogate relaxation for lot-sizing with transportation costs. *Pesquisa Operacional*, v. 29, n. 2, p. 269–288, 2009. ISSN 0101-7438. Citado na página 26.
- NARCISO, M. G.; LORENA, L. A. N. Lagrangean/surrogate relaxation for generalized assignment problems. *European Journal of Operational Research*, n. 1, p. 165–177, 1999. ISSN 03772217. Citado na página 25.
- NEMHAUSER, G. L.; WOLSEY, L. A. *Integer and Combinatorial Optimization*. New York: John Wiley & Sons, 1988. Citado na página 22.
- OLIVEIRA, B. F. *Fundição*. [S.l.: s.n.], 2013. 108 p. ISSN 09042512. ISBN 9788591538805. Citado na página 14.
- RAFIE-MAJD, Z.; PASANDIDEH, S. H. R.; NADERI, B. Modelling and solving the integrated inventory-location-routing problem in a multi-period and multi-perishable product supply chain with uncertainty: Lagrangian relaxation algorithm. *Computers and Chemical Engineering*, v. 109, p. 9–22, 2018. Citado na página 24.
- RARDIN, R. L.; UNGER, V. E. Surrogate Constraints and the Strength of Bounds Derived from 0-1 Benders' Partitioning Procedures. *Operations Research*, n. 6, p. 1169–1175, 1976. ISSN 0030-364X. Citado na página 25.
- SALAM, S. Hydrothermal scheduling based lagrangian relaxation approach to hydrothermal coordination. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n. 1, p. 226–235, 1998. Citado na página 24.
- SANTOS-MEZA, E.; OLIVEIRA, M. A lot-sizing problem in an automated foundry. *European Journal of Operational Research*, v. 139, p. 490–500, 2002. Citado na página 17.
- SILVA, R. D. J.; MORABITO, R. Otimização da programação de cargas de forno em uma fábrica de fundição em aço-inox. *Gestão & Produção*, v. 11, n. 2002, p. 135–151, 2004. Citado na página 18.
- SRIDHARAN, R. The capacitated plant location problem. *European Journal of Operational Research*, v. 87, n. 2, p. 203–213, 1995. ISSN 03772217. Citado na página 24.
- STAWOWY, A.; DUDA, J. Models and Algorithms for Production Planning and Scheduling in Foundries - Current State and Development Perspectives. *Archives of Foundry Engineering*, v. 12, n. 2, p. 69–74, 2012. Citado na página 16.
- STAWOWY, A.; DUDA, J. Coordinated Production Planning and Scheduling Problem in a Foundry. *Archives of Foundry Engineering*, v. 17, n. 3, p. 133–138, 2017. Citado na página 19.
- TEIXEIRA-JR, R. F.; FERNANDES, F. C. F.; PEREIRA, N. A. Sistema de apoio à decisão para programação da produção em Fundições de Mercado. *Gestão & Produção*, v. 13, p. 205–221, 2006. Citado na página 19.

- TEIXEIRA, V. U. D.; OLIVEIRA, W. A.; SANTOS, M. O. Um problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção com gerenciamento da demanda via pedidos e com tempos/custos de preparação dependentes da sequência. In: *XLIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. [S.l.: s.n.], 2017. Citado na página 21.
- TOLEDO, F. M. B. *Dimensionamento de lotes em Máquinas Paralelas*. 98 p. Tese (Doutorado), 1998. Citado na página 23.
- TONAKI, V. S. *Uma heurística lagrangeana para o dimensionamento de lotes em uma fundição de pequeno porte*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2006. Citado 7 vezes nas páginas 9, 15, 19, 21, 27, 38 e 39.
- TONAKI, V. S.; TOLEDO, F. M. B. An approach for solving the lot-sizing problem of a market-driven foundry. *Journal of the Operational Research Society*, v. 61, n. 1, p. 108–114, 2010. Citado 6 vezes nas páginas 14, 19, 21, 24, 38 e 82.
- TRIGEIRO, W. W. A simple heuristic for lot sizing with setup times. *Systems and Technology Research*, v. 20, p. 294–303, 1989. Citado na página 23.
- TRIGEIRO, W. W.; THOMAS, J. L.; MCCLAIN, J. O. Capacitated Lot Sizing with Setup Times. *Management Science*, v. 35, p. 353–366, 1989. Citado na página 23.
- WOLSEY, L. A. *Integer Programming*. New York: John Wiley, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 32, 35 e 59.
- XIE, J.; DONG, J. Heuristic Genetic Algorithms for General Capacitated Lot-Sizing Problem s. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 44, p. 263–276, 2002. Citado na página 17.