UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Algumas Contribuições de Newton para o desenvolvimento do Cálculo.

Aline Rodrigues da Cunha

Uberaba - MG
2016

Aline Rodrigues da Cunha

Algumas contribuições de Newton para o desenvolvimento do Cálculo

Dissertação apresentada à Banca Examinadora, como requisito parcial para aprovação no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, sob orientação da Profa. Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines.

Uberaba - MG
2016

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

C977a

Cunha, Aline Rodrigues da
Algumas contribuições de Newton para o desenvolvimento do cálculo / Aline Rodrigues da Cunha. -- 2016.
74 f. : il., fig., graf., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2016
Orientadora: Profa. Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines

1. Cálculo - História. 2. Cálculo diferencial. 3. Cálculo integral. 4. Newton, Isaac, Sir, 1642-1727. I. Martines, Mônica de Cássia Siqueira. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 517.2/.3

Aline Rodrigues da Cunha

Algumas contribuições de Newton para o desenvolvimento do cálculo

Dissertação apresentada à Banca Examinadora, como requisito parcial para aprovação no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

24 de outubro de 2016

Banca Examinadora

$Prof^a.Dr^a.$ Mônica de Cássia Siqueira Martines
Orientadora
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

$Prof^a.Dr^a.$ Marcela Luciano Vilela de Sousa
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

$Prof^a.Dr^a.$ Cristiane Coppe de Oliveira
Universidade Federal de Uberlândia - Campus Ituiutaba

DEDICO ESSE TRABALHO AOS MEUS PAIS:
LOURDES E JUJU (IN MEMORIAM) PELO INCENTIVO AOS ESTUDOS,
E A MINHA FILHA, NAJU, RAZÃO DE MINHA VIDA!

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus: pela oportunidade de realizar mais um sonho, pelas inspirações, pela presença constante em minha vida e por ter colocado tantos anjos para me ajudar nessa jornada.

Agradeço a minha mãe pela presença incondicional em todos os momentos e conquistas de minha vida.

Agradeço ao meu marido, Ed, pelo incentivo, companheirismo e paciência, e a minha filha, Ana Júlia, pela compreensão de minha ausência; agradeço por acreditarem muito em mim e por torcerem para que esse trabalho se realizasse.

Agradeço a Prof. Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines por ter me orientado sempre com muita atenção, profissionalismo e paciência.

Agradeço aos professores que participaram de minha conquista: dr. Thadeu, dr. José Gustavo, dr. Flávio, dr. Rafael Ottoboni, dr. Rafael Peixoto, dr. Heron, dr. Bruno, me. Wellington, dr. Osmar, dr. Nelson, dra. Mônica, dra. Marcela e dr. Fábio que generosamente compartilharam seus conhecimentos.

Agradeço à Prof. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira, à Prof. Dra. Marcela Luciano Vilella de Sousa e às professoras suplentes Prof. Dra. Nilva Lúcia Lombardi Sales e Prof. Ma. Rachel Mariotto, por aceitarem participar da banca de defesa desse trabalho.

Também agradeço ao Prof. Me. Marcelo Ferreira, pela dedicação e pelas palavras de incentivo que foram fundamentais para minha continuidade no curso.

Agradeço a minha irmã de coração, Ane, e a minha madrinha, Cláudia, pelo apoio e incentivo, por acreditarem em mim e não me deixarem desistir.

Agradeço a minha diretora, Ivone, pelo apoio constante.

Agradeço aos meus colegas do Profmat, das turmas de 2014 e 2015, pelo companheirismo e assistência em todos os momentos que precisei, em especial: Geraldo, Bizinoto, Gustavo, Jefferson e Ana Luísa.

Agradeço aos meus colegas-amigos-irmãos: Amanda, Maria Teresa, Edmilson, André, Gisele: conhecer e conviver com vocês foi a melhor parte desse curso.

Agradeço a toda minha família, tios, primos, amigos que rezaram e torceram por mim durante a minha caminhada.

Que Deus os proteja sempre e ilumine seus caminhos!

"Não sei o que o mundo pode pensar de mim; mas eu mesmo me considero tão somente um menino que, brincando na areia da praia, se diverte ao encontrar um seixo arredondado ou uma concha mais bonita que as comuns, enquanto o grande oceano da verdade jaz indecifrável ante meus olhos"

Isaac Newton

Resumo

Neste trabalho vamos relatar alguns fatos sobre a vida de *Isaac Newton* com ênfase em alguns dos trabalhos deste cientista sobre o Cálculo Diferencial e Integral. Apresentaremos um estudo sobre como Newton calculava áreas sob curvas e como traçava retas tangentes a uma curva dada. Para encontrar áreas sob as curvas, Newton primeiro utilizou o método das séries infinitas e, depois, aperfeiçoou os cálculos, apresentando o método das *fluxões* e *fluentes*. Para alcançarmos o objetivo, usamos algumas fontes originais para apresentarmos a ideia de Newton e, em seguida, fizemos uma interpretação atual das mesmas. Esta pesquisa tem abordagem qualitativa, privilegiando o estudo bibliográfico-documental, utilizando-se de fontes históricas originais (primárias), secundárias e terciárias para melhor compreendermos os cálculos.

Palavras-chave: história do cálculo, Newton, cálculo diferencial e integral.

Abstract

In this work we will report some facts about the life of Isaac Newton with emphasis on some of the works of this scientist on Differential and Integral Calculus. We will present a study of how Newton calculated areas under curves and how he traced lines tangent to a given curve. To find areas under the curves, Newton first used the infinite series method and then perfected the calculations by presenting the method of fluxions and fluids. To reach the goal, we used some original sources to present Newton's idea, and then we did a current interpretation of them. This research has a qualitative approach, privileging the bibliographic-documentary study, using original (primary), secondary and tertiary historical sources to better understand the calculations.

Keywords: history of calculus, Newton, differential and integral calculus.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A história da matemática é uma área de estudo dedicada à investigação sobre a origem das descobertas da matemática, seus métodos, registros e notações do passado. Entre os estudiosos que contribuíram para o desenvolvimento da matemática, está Isaac Newton: um inglês, nascido em 1642, que além de ter importante participação no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, também contribuiu com diversas outras áreas do conhecimento.

No decorrer de meus estudos em matemática, mais particularmente no que se refere à história da matemática, área de pesquisa escolhida neste Mestrado, sempre me interessou conhecer o processo de construção da sistematização do cálculo.

Ao desenvolver meus estudos no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional e analisar minhas práticas docentes como professora de matemática, sempre senti a necessidade de pesquisar a história da matemática para a ampliação de meus conhecimentos e como um recurso que pode contribuir para a formação dos demais professores de matemática da educação básica.

Segundo Fragoso, (2011, p.19), "o estudo da história da matemática deve visar não somente à vida e à obra de matemáticos, mas sim conhecer, refletir e discutir sobre como se constitui historicamente o saber matemático".

Se o professor puder conhecer a história da matemática, as necessidades e os desafios que a construíram, mais ferramentas ele terá para aprimorar suas práticas docentes cotidianas.

O conhecimento lógico e histórico é muito importante no ato de ensinar e aprender Matemática. Portanto, é essencial que os professores construam o seu conhecimento sobre os "aspectos essenciais que historicamente geraram as significações dos conceitos matemáticos que ele pretenda que seus alunos se apropriem. Uma das fontes desse conhecimento é a própria história da matemática" (SOARES, 2004).

O cálculo diferencial e integral é uma disciplina de muita importância e aplicabilidade em várias áreas das ciências exatas. Desenvolvido a partir da álgebra e da geometria, o cálculo trabalha com a taxa de variação de grandezas, áreas sob curvas, volume de sólidos, entre outras aplicações. Isaac Newton foi um dos estudiosos a inferir o que conhecemos hoje como o *teorema fundamental do cálculo*[1].

Tendo em vista meus interesses e curiosidades, resolvi delimitar o tema e investigar algumas das contribuições de Isaac Newton para o desenvolvimento do cálculo.

Nessa introdução, apresentamos a temática, os objetivos e as questões dessa pesquisa, preocupando-nos em contextualizar o estudo a partir de nossos interesses acadêmicos, centrados nos estudos sobre Newton e algumas de suas contribuições para o desenvolvimento do cálculo.

Em seu conjunto, o presente trabalho está organizado em cinco capítulos. No capítulo inicial descrevemos um breve histórico sobre a vida de Newton, seus estudos, pesquisas, descobertas e inventos. No segundo capítulo, apresentamos algumas contribuições de Newton sobre o cálculo.

Já no terceiro capítulo, são descritos importantes conceitos trabalhados por Newton: as séries infinitas e algumas regras para as áreas de curvas.

No capítulo seguinte, ressaltamos seus estudos sobre as fluentes e as fluxões e as primeiras e últimas razões: contribuições de Newton para a história

[1]Teorema fundamental do cálculo é a base das duas operações centrais do cálculo: diferenciação e integração, que são considerados como inversos um do outro. Isto significa que se uma função contínua é primeiramente integrada e depois diferenciada (ou vice-versa), volta-se na função original.

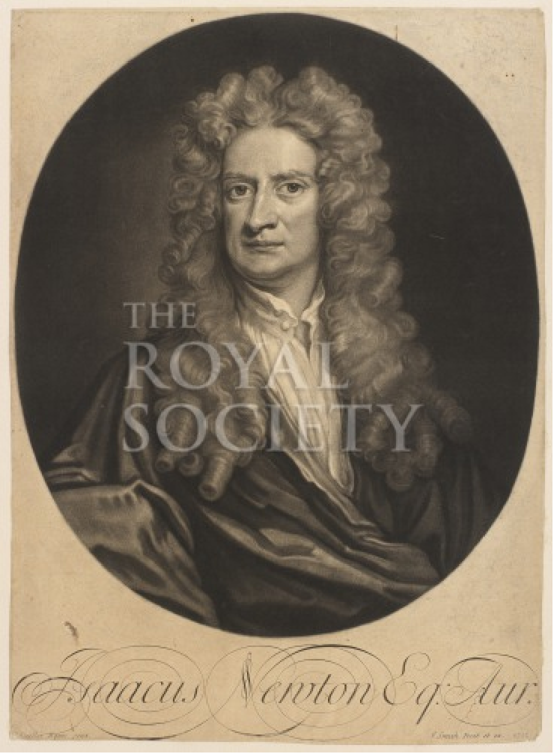
da educação e para a sistematização do cálculo diferencial e integral.

No quinto capítulo, levantamos alguns problemas resolvidos por Newton, para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

Esta pesquisa possui uma abordagem qualitativa, privilegiando o estudo bibliográfico-documental, utilizando-se de fontes históricas (manuscritos e cartas).

1. UM BREVE HISTÓRICO SOBRE A VIDA DE NEWTON

Figura 1.1: Isaac Newton



Fonte: The Royal Society

http://astro.if.ufrgs.br/bib/newton.htm

A vida de Newton pode ser dividida em três períodos: o primeiro de sua juventude de 1643 até sua graduação em 1669; o segundo de 1669 a 1687, em que ele foi professor Lucasiano[2] na Universidade de Cambrigde; e o terceiro, quando Newton foi funcionário do governo de Londres. (MAURY, 1992)

Seguindo essa divisão proposta por Maury (1992), veremos, no primeiro período, um pouco sobre os primeiros anos de vida de Newton até a conclusão sua graduação.

Isaac Newton nasceu na Inglaterra, num vilarejo denominado *Lincolnshire*, em 25 de dezembro de 1642, no calendário da época. No calendário Gregoriano, que adotamos hoje, seu nascimento seria considerado na data de 4 de janeiro de 1643. Este, foi adotado na Inglaterra em 1752 (MAURY, 1992).

Newton ainda pequeno e, órfão de pai, de acordo com Guillot (2012), viveu seus primeiros anos no campo, onde aprendeu a ler, escrever e contar junto aos meninos do vilarejo. Aos 12 anos, iniciou seus estudos em uma instituição de ensino e, devido à distância de sua casa à escola, mudou-se para a casa de um farmacêutico, chamado M. Clarke, onde passou a ter acesso a vários livros. Lia tudo o que encontrava e, em pouco tempo, desenvolveu a capacidade de criar pequenas máquinas.

Eves (2011, p. 436) relata algumas das invenções de Newton, ainda na sua juventude:

> O jovem, porém, revelou grande habilidade para projetar miniaturas mecânicas engenhosas e deleitava-se com suas experiências. Assim, construiu um moinho de brinquedo que triturava o trigo, transformando-o em farinha, usando como força motriz um rato e construiu também um relógio de madeira movido a água.

[2]Professor lucasiano é o nome que se dá a uma cátedra de matemática da Universidade de Cambridge, na Inglaterra. Esta já fora ocupada por Isaac Barrow (antecessor de Newton), Stephen Hawking (físico teórico e cosmólogo britânico e um dos mais consagrados cientistas da atualidade), dentre outros. É atualmente ocupada por Michael Cates, físico britânico, com trabalho científico focado em mecânica estatística e matéria condensada mole. A cadeira foi criada por Henry Lucas, que foi um membro do Parlamento pela Universidade de Cambridge, em 1663, e foi oficialmente estabelecida pelo rei Carlos II em 18 de janeiro de 1664.

Em junho de 1661, um tio enviou Newton para a Universidade *Trinity College*, em Cambrigde. Na universidade, ele estudou as filosofias de Aristóteles (384 a.E.c.[3] - 322 a.E.c.), de René-Descartes (1596-1650), Pierre Gassendi (1592-1655) e Robert Boyle (1627-1691), também a nova álgebra e geometria analítica de Viète (1540-1603) e Wallis (1616-1703). A mecânica e a astronomia de Galileu e a óptica de Kepler o atraíram (MAURY, 1992).

Formou-se em 1665 e começou a trabalhar na Universidade. Devido a uma peste devastadora, ocorrida na época, afastou-se desta e voltou para o campo, onde passou dois anos estudando e aprofundou os conhecimentos na área de exatas. Newton desenvolveu seu cálculo (até o ponto em que lhe era possível achar a tangente a uma curva em um de seus pontos e o raio de curvatura respectivo), interessou-se por várias questões físicas, fez suas primeiras experiências em óptica e formulou os princípios básicos de sua teoria da gravitação (EVES, 2011).

Quase 50 anos mais tarde, Newton explica seus trabalhos na juventude com estas palavras:

> No início do ano de 1665, eu encontrava o Método da aproximação das séries e a Regra para reduzir a potência de um binômio qualquer a tais séries. Em maio, do Método direto das fluxões; no ano seguinte, em janeiro, a teoria das cores e em maio eu possuía o Método inverso das fluxões. E no mesmo ano eu começava a pensar na gravidade que se estende à órbita da Lua [...]. Tudo isso aconteceu durante aqueles dois anos de peste, de 1665 e 1666, enquanto eu estava na flor da idade criativa e ocupado com a Matemática e com a Filosofia como jamais voltaria a ficar.(NEWTON APUD GUICCIARDINI, 2012, P.20)

[3]Usaremos a notação a.E.c. (antes da era comum) e E.c.(era comum) seguindo as novas orientações da história.

Em 1669, Newton é nomeado para a cadeira Lucasiana[4] na Universidade de Cambrigde, ocupando a posição de Isaac Barrow (1630-1677) por indicação do mesmo. Seu primeiro trabalho como professor Lucasiano foi em óptica. Newton argumentou que a luz branca era, na verdade, uma mistura de diferentes raios refratados em ângulos diferentes; e que cada tipo de raio produzia uma cor diferente.

Figura 1.2: Telescópio refletor construído por Newton em 1671.

Fonte: The Royal Society

http://astro.if.ufrgs.br/bib/newton.htm

A teoria das cores e algumas deduções que Newton fez a partir das experiências em óptica foram atacadas por alguns cientistas, o que fez Newton não publicar mais suas descobertas em ciências. Eves (2011, p.436), relata sua reação em relação às críticas da época.

[4]Uma cátedra é uma peça de mobiliário que se configura num assento de espaldar alto, poltrona ou trono, que seria para as pessoas mais ilustres se sentarem e ser colocado num local mais elevado de um recinto público onde podia ser notada à distância. Por extensão de sentido, também se denomina cátedra a posição do professor de uma instituição de ensino superior ou universidade que tem caráter contratual permanente, destinada ao ensino e investigação numa determinada disciplina científica numa universidade e à coordenação desse ensino e investigação (Fonte: Wikipedia).

> Newton achou a discussão subsequente tão desagradável que jurou jamais publicar mais nada em ciência. Essa enorme aversão pela controvérsia, que parecia tocar as raias do patológico, teve importantes desdobramentos na história da matemática, uma vez que a grande maioria de suas criações só veio a ser publicada muitos anos depois das descobertas. Essa postergação constante levou mais tarde a uma polêmica de baixo nível com Leibniz, em torno da prioridade da criação do cálculo. E foi devido a essa polêmica que os matemáticos ingleses, tomando incondicionalmente o partido de Newton, voltaram as costas para o Continente, retardando o progresso matemático na Inglaterra por quase um século.

Ainda segundo Eves (2011), as atividades docentes universitárias de Newton entre 1673 e 1683 se concentraram em álgebra e teoria das equações. Foi em 1679 que ele verificou sua lei da gravitação[5], usando uma nova medida do raio da Terra, agregando com o estudo do movimento da lua.

Newton, também segundo Eves (2011), estabeleceu a compatibilidade de sua lei da gravitação com as leis do movimento planetário de Kepler, com base na hipótese de que o sol e os planetas poderiam ser considerados como pontos materiais. Mas, não comunicou suas descobertas antes de 1684. Nesse ano, Halley e Newton discutiram sobre a força que faz com que o movimento dos planetas seja elíptico. Quando Halley viu o manuscrito de Newton, percebeu sua enorme importância e fez com que ele enviasse seus resultados a Royal Society[6].

Na terceira fase de sua vida, em 1689, Newton representou a universidade de Cambrigde como membro do Parlamento. Em 1696 foi indicado inspetor da Casa da Moeda, sendo promovido diretor dessa instituição em 1699. Em 1703, foi eleito presidente da Royal Society, reelegendo-se, anualmente, até sua morte, ocorrida em março de 1727, em Kensington, Londres,

[5]Lei da Gravitação: duas partículas quaisquer do universo atraem-se mutuamente com uma força diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

[6]The Royal Society of London for the Improvement of Natural Knowledge (A Sociedade Real de Londres para o Melhoramento do Conhecimento Natural) é uma instituição destinada à promoção do conhecimento científico. Foi fundada em 28 de novembro de 1660.

e foi sepultado na abadia de Westminster[7], onde lhe foi erguido o maior dos monumentos ali existentes.

Figura 1.3: Imagem do túmulo de Newton na abadia de Westminster.

Fonte: Clubes de Matemática da Obmep

http://clubes.obmep.org.br/blog/b-inewton

[7]A abadia de Westminster é uma igreja no estilo gótico, construída no século XI, e é considerada a mais importante de Londres. É famosa mundialmente por ser o local de coroação do Monarca do Reino Unido.

2. NEWTON: ALGUMAS DE SUAS OBRAS

Segundo Carvalho (2007), os problemas envolvendo cálculo de áreas e volumes, além da necessidade, fascinavam matemáticos desde 200 anos a.E.c. Os gregos da época, já faziam cálculos de áreas e volumes de figuras retilíneas e curvas. As áreas eram chamadas de quadraturas, pois, através de sucessivas transformações em diferentes polígonos, chegavam a um quadrado de mesma área do polígono inicial. Um dos grandes desafios matemáticos da época era o cálculo da quadratura de figuras curvas.

No século XVII, continuava o fascínio dos matemáticos por problemas relacionados às áreas, volumes e comprimento de arcos.

Segundo Guicciardini (2012), na época de Newton, na geometria de Descartes, havia uma abordagem algébrica com vantagens em relação ao desenvolvimento geométrico seguido desde Apolônio[8] (262 a.e.C.- 194 a.e.C.). No entanto, se limitava às expressões algébricas finitas. As áreas definidas por curvas fechadas, como um círculo por exemplo, não podiam ser reveladas utilizando-se apenas um número finito de termos. Por isso, os matemáticos do século XVII generalizaram a análise cartesiana recorrendo a várias técnicas, entre elas a que conhecemos hoje como séries infinitas.

[8]Apolônio de Pérgamo: estudioso grego famoso por seu trabalho nas seções cônicas. Foi Apolônio quem deu nome aos elementos geométricos que conhecemos como elipse, hipérbole e parábola.

Baron e Bos(1985), afirmam que os ensaios de Newton sobre o cálculo ficaram abandonados por quase 50 anos, devido à insegurança de Newton e às dificuldades gráficas de se publicar complexos trabalhos matemáticos na época. Estas são algumas publicações de Newton, que o tornou conhecido pelo mundo:

1.*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*: sobre a análise de equações com número ilimitado de termos, enviado por Barrow à Sociedade Real em 1669. Neste trabalho, estão os métodos para calcular o comprimento de curvas e as áreas delimitadas por elas; método das séries infinitas.

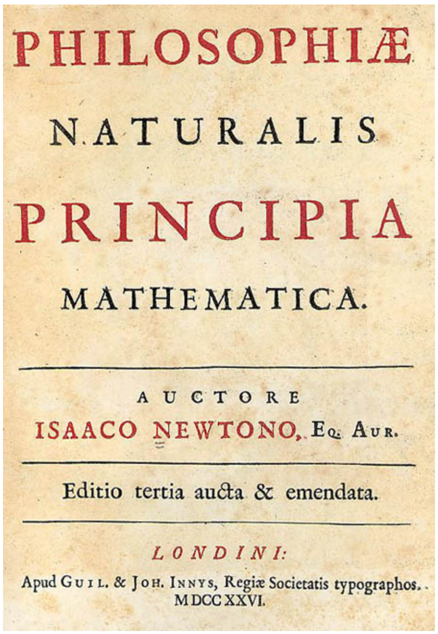
2.*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*: um tratado sobre fluxões e séries infinitas, escrito em 1671, mas publicado tardiamente. Newton expõe os fundamentos de um novo tipo de matemática: as primeiras e últimas razões; cálculo infinitesimal e o conceito de fluxão.

3.*Tractatus de quadratura curvarum*: um tratado sobre quadraturas, escrito em 1693, mas publicado posteriormente.

4.*Principia*: em 1687, com passagens na forma geométrica, onde baseia seu método no conceito das primeiras e últimas razões. Esta é uma obra de três volumes, onde contém as leis de Newton para o movimento dos corpos, fundamentação da mecânica clássica, lei da gravitação universal, entre outros estudos.

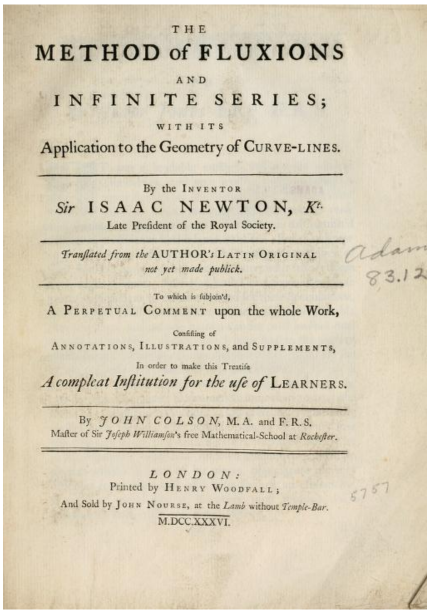
Eves (2011), afirma que Newton escreveu o primeiro livro *Principia* por volta do verão de 1685. Um ano mais tarde, também terminou o segundo livro e começou o terceiro intitulado *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicado na metade do ano de 1687.

Figura 2.4: Capa da terceira e última edição do livro *Principia* de Newton



Fonte: www.library.usyd.edu.au

Segundo Guicciardini (2012), em 1704 e 1705, Newton publica o tratado *Óptica*, onde analisa a natureza da luz, reflexões, refrações e inflexões, a primeira obra completa do cálculo de fluxões, e a rainha Ana Stuart, da Inglaterra, confere-lhe um título de nobreza. Em 1707, publica *Arithmetica Universalis*, onde aborda a notação algébrica, a aritmética, a relação entre a geometria e a álgebra e a solução de equações. Alguns anos depois, publica os escritos sobre o cálculo infinitesimal, chamado de *Método Matemático dos Fluxos* e outras obras matemáticas como: *Opticks (1704)*, *Arithmetica universalis (1707)*, *Fluxiones and Infinite Series (1736)*, dentre outras.



THE
METHOD of FLUXIONS
AND
INFINITE SERIES;
WITH ITS
Application to the Geometry of CURVE-LINES.

By the INVENTOR
Sir ISAAC NEWTON, Kt.
Late Prefident of the Royal Society.

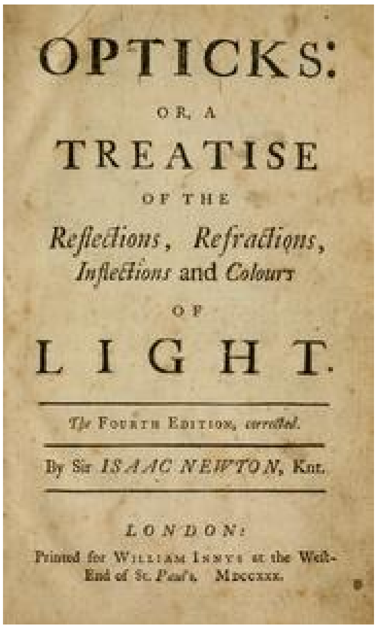
Tranflated from the AUTHOR's LATIN ORIGINAL
not yet made publick.

To which is fubjoin'd,
A PERPETUAL COMMENT upon the whole Work,
Confifting of
ANNOTATIONS, ILLUSTRATIONS, and SUPPLEMENTS,
In order to make this Treatife
A compleat Inftitution for the ufe of LEARNERS.

By JOHN COLSON, M. A. and F. R. S.
Mafter of Sir Jofeph Williamfon's free Mathematical-School at Rochefter.

LONDON:
Printed by HENRY WOODFALL;
And Sold by JOHN NOURSE, at the Lamb without Temple-Bar.
M.DCC.XXXVI.

Figura 2.5: Capa do Livro Método das Fluxões



OPTICKS:
OR, A
TREATISE
OF THE
Reflections, Refractions,
Inflections and Colours
OF
LIGHT.

The FOURTH EDITION, corrected.

By Sir ISAAC NEWTON, Knt.

LONDON:
Printed for WILLIAM INNYS at the Weft-End of St. Paul's. MDCCXXX.

Figura 2.6: Capa do Livro Opticks

Fonte:archive.org/details/methodoffluxions00newt

3. SÉRIES INFINITAS

Newton aprendeu muito sobre as séries infinitas com as obras de John Wallis (1616 - 1703) e, generalizando seus resultados, chegou à série binomial. Com a ajuda da série binomial, Newton calculava a área delimitada por várias curvas.

Segundo Baron e Bos (1985), Newton desenvolveu, através do método *subnormal de Descartes*[9] e das regras de Hudde[10], um algoritmo para a diferenciação e o estendeu à curvatura, utilizando a notação de dois pontos para as derivadas completas[11] e um ponto para as parciais. Também, elaborou ideias sobre indivisíveis e quadraturas[12], que levaram à integração de Wallis.

[9]Método subnormal de Descartes: método utilizado para encontrar o comprimento de um segmento sobre o eixo x entre a abscissa de um ponto sobre a curva e a interseção da normal com o eixo x

[10]Regras de Hudde: trata-se um conjunto operacional de regras e fórmulas para traçar tangentes a curvas algébricas do tipo $f(x, y) = 0$ (em notação atual), onde f(x,y) é um polinômio de x e y

[11]Derivadas completas: derivadas de uma função com somente uma variável independente (derivadas ordinárias).

[12]Quadrar uma figura poligonal, segundo Baron e Bos, significa encontrar um quadrado com a mesma área desta figura, através de uma sequência de transformações geométricas. Lembramos que nessa época, os cientistas comentavam sobre encontrar áreas de curvas e não áreas **sob as curvas** como falamos hoje. As curvas tinham equação e não eram representadas como funções.

Seja CE uma certa curva e de C tracemos uma reta fazendo ângulo reto com CE, conforme figura ??. Suponhamos também que a reta CP intercepte a reta GA cujos pontos serão relacionados com os de CE. Então, seja $MA[= CB] = y$ e $CM[= BA] = x$. Devemos encontrar uma equação relacionando x a y. Faço $PC = s$, $PA = v$, logo $PM = v - y$. Como PMC é um triângulo retângulo, vemos que s^2, o quadrado da hipotenusa, é igual a $x^2 + v^2 - 2vy + y^2$, a soma dos quadratos dos catetos. Isto significa que $x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$ ou $y = v - \sqrt{s^2 - x^2}$. Por meio destas duas últimas equações, posso eliminar uma das duas quantidades x e y da equação que relaciona os pontos da curva CE e os da reta GA. Se queremos eliminar x, não há problema, pois podemos trocá-lo, onde ele aparece, por $\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$; x^2 pelo quadrado desta expressão, x^3 por seu cubo, etc. Se queremos eliminar y, basta trocá-lo, onde aparece, por $v - \sqrt{s^2 - x^2}$ e $y^2, y^3, \ldots$ pelo quadrado, cubo, etc., desta expressão. O resultado será uma equação com apenas uma quantidade desconhecida, x ou y.(Método da Subnormal de Descartes apud Baron e Bos, 1985,p.33)

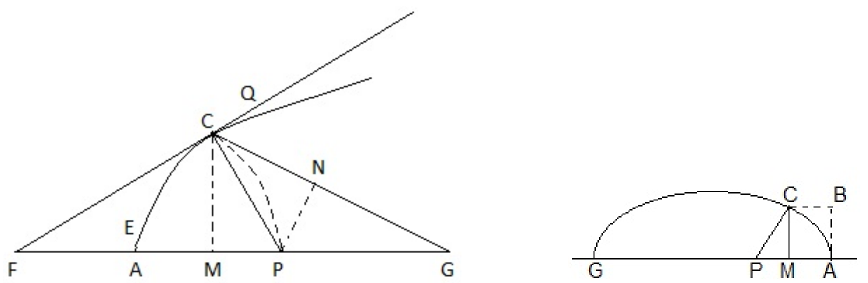


Figura 3.7: Figura do método da subnormal de Descartes

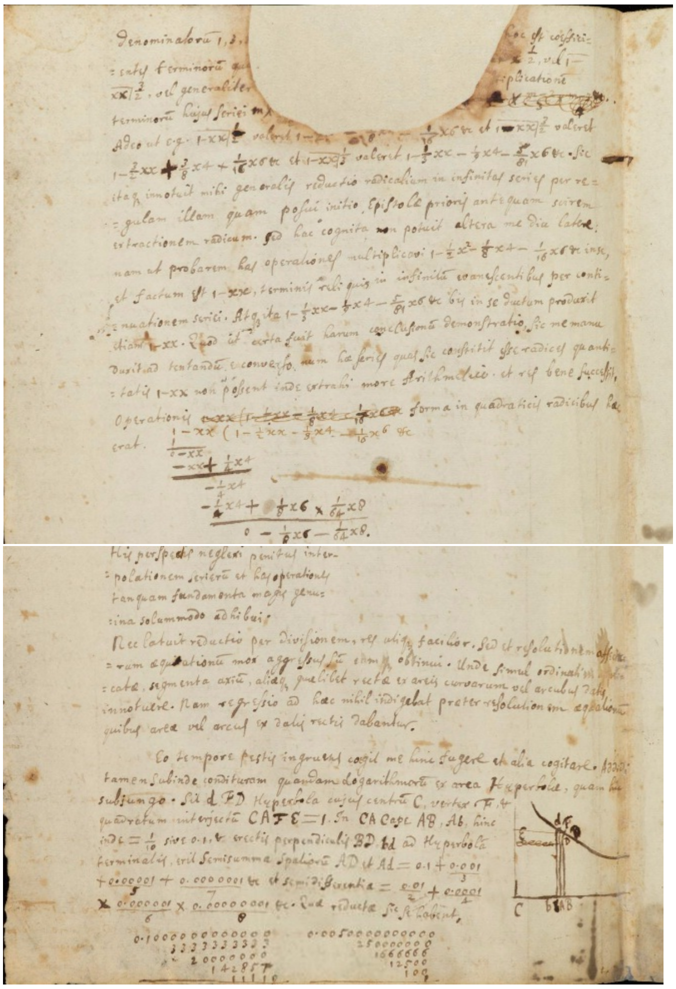
Fonte: Baron e Bos, 1985, p.33

Vejamos como Newton desenvolveu o *Método das Séries Infinitas.*

3.1 Método das Séries Infinitas de Newton

Com o intuito de entendermos o *Método das Séries Infinitas de Newton*, analisaremos a matemática envolvida em uma carta que Newton escreveu a Henry Oldenbug (primeiro secretário da Royal Society no século $XVII$) e que depois, Oldenburg remeteu a Leibniz.

Figura 3.8: Carta de Newton a Oldenburg, 24 de outubro de 1676 - Original disponível no museu Britânico



FONTE: The Newton Project

http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03977/36

Segundo Baron e Bos (1985), baseando nos trabalhos de Wallis sobre a série de intercalação, Newton considerou uma série de curvas cuja base comum é x e suas ordenadas são: $(1-x^2)^{\frac{0}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{2}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{4}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$, etc.

Considerando as curvas cujas equações possuíam expoente natural, suas respectivas áreas delimitadas pelas curvas, intercaladas nesta mesma sequência, seriam:

Tabela 3.1

Curva	Área
$(1-x^2)^{\frac{0}{2}}$	x
$(1-x^2)^{\frac{2}{2}}$	$x-\frac{x^3}{3}$
$(1-x^2)^{\frac{4}{2}}$	$x-\left(\frac{2}{3}\right)x^3+\frac{x^5}{5}$
$(1-x^2)^{\frac{6}{2}}$	$x-\left(\frac{3}{3}\right)x^3+\left(\frac{3}{5}\right)x^5-\frac{x^7}{7}$

Fonte: arquivo da autora

Mas Newton pretendia descobrir as áreas dos fatores cujos expoentes eram números não naturais. Considerando o primeiro termo como $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, o qual ele identifica como a área do círculo[13], nota-se que em todas as curvas, com expoentes naturais, o primeiro termo era x e os segundos termos eram $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, etc., numa Progressão Aritmética (P.A.) de razão $\frac{1}{3}$.

Logo, para os termos intercalados, ou seja, os que tinham expoente não natural, o primeiro termo seria x e o segundo termo seria igual ao segundo termo da curva anterior (expoente natural) mais a metade da razão, pois, o mesmo possui expoente igual à média aritmética dos termos imediatamente anterior e posterior a ele. Assim, teríamos:

[13] $y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ é a equação de uma circunferência, com centro na origem do sistema e raio igual a 1.

$$(x-0)^2+(y-0)^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Tabela 3.2

Curva	Área (até o segundo termo)
$(1-x^2)^{\frac{0}{2}}$	$x-\frac{0}{3}x^3$
$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$	$x-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)x^3$
$(1-x^2)^{\frac{2}{2}}$	$x-\frac{1}{3}x^3$
$(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$	$x-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\right)x^3 \Rightarrow x-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)x^3$
$(1-x^2)^{\frac{4}{2}}$	$x-\frac{2}{3}x^3$
$(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$	$x-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\right)x^3 \Rightarrow x-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\right)x^3$

Fonte: arquivo da autora

Nos termos de expoentes naturais, Newton percebeu que os denominadores estão em P.A. $(1, 3, 5, 7, \ldots)$, e os coeficientes numéricos dos numeradores variando do seguinte modo:

$$\begin{array}{llll}
1 & 0\left(\frac{1}{3}\right) & & \\
1 & 1\left(\frac{1}{3}\right) & & \\
1 & 2\left(\frac{1}{3}\right) & 1\left(\frac{1}{5}\right) & \\
1 & 3\left(\frac{1}{3}\right) & 3\left(\frac{1}{5}\right) & 1\left(\frac{1}{7}\right) \\
 & \ldots & &
\end{array}$$

Newton verificou que esta variação poderia ser observada no triângulo aritmético[14]:

$$\begin{gathered}
11^0 = 1 \\
11^1 = 11 \\
11^2 = 121 \\
11^3 = 1331
\end{gathered}$$

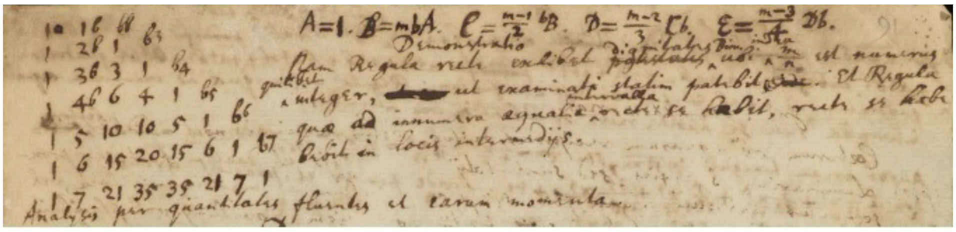
[14]Figura das potências do número 11, muito utilizado para encontrar os coeficientes binomiais para alguns expoentes positivos e inteiros.

Figura 3.9: Triângulo Aritmético

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

Fonte: brincomat.blogspot.com.br

Figura 3.10: Observações de Newton 1



Fonte: University of Cambrigde Digital Library
http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03960/185

Ele investigou como as demais curvas poderiam ser deduzidas a partir das duas primeiras dadas: $(1-x^2)^{\frac{0}{2}}$ e $(1-x^2)^{\frac{2}{2}}$. Assim, percebeu que colocando m para a segunda curva, as demais surgiriam pelo produto dos seguintes termos:

$$\frac{m-0}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-4}{5}\dots$$

Onde o valor de m é o valor do expoente de determinada curva. Substituindo m, encontramos o numerador do termo seguinte. Em seguida, tem-se um exemplo:

Para a curva $(1-x^2)^{\frac{8}{2}}$, ou seja $m=4$, os numeradores seriam os valores da potência 11^4, ou seja, primeiro termo $a_1=1$ (o primeiro termo é x, cujo coeficiente é 1), segundo termo $a_2 = 4$, terceiro termo $a_3 = 6$, quarto termo $a_4 = 4$ e quinto termo $a_5 = 1$. Substituindo na expressão $m = \frac{8}{2} = 4$, temos:

$$a_3 = \frac{m-0}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \iff a_3 = \frac{4}{1} \cdot \frac{(4-1)}{2} = 6$$

Este será o numerador do 3^o termo.

$$a_4 = \frac{m-0}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \iff a_4 = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 4$$

Este será o numerador do 4^o termo.

$$a_5 = \frac{m-0}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \iff a_5 = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Este será o numerador do 5^o termo.

$$a_6 = \frac{m-0}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} \iff a_6 = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$$

onde a série termina.

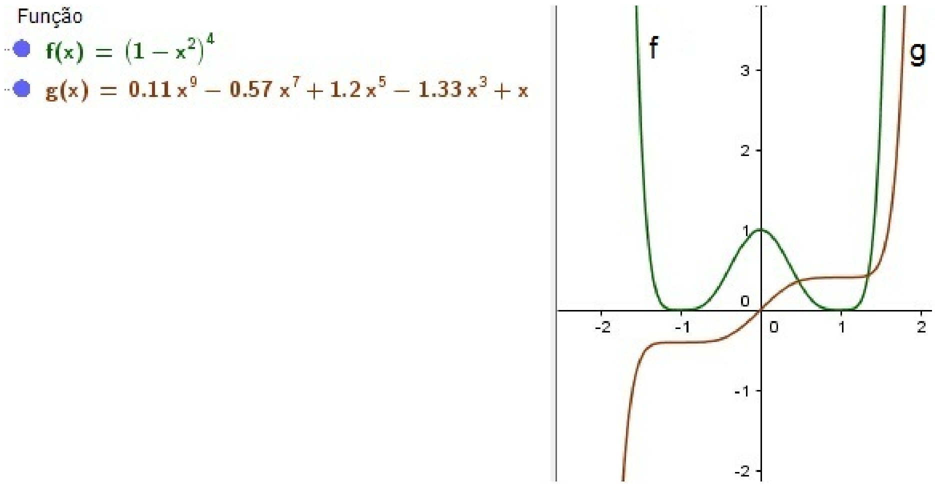
Os valores de a_1 e a_2 já estão definidos: $a_1 = 1$ (sempre) e $a_2 = 4$ (que é o valor de m).

Logo, para a curva $(1-x^2)^{\frac{8}{2}}$, teremos área igual a:

$$x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$$

onde, conforme os cálculos, os denominadores estão em P.A. e os numeradores obedecendo a fórmula dada.

Figura 3.11: Gráfico da curva $(1-x^2)^{\frac{8}{2}}$ e da função de sua área



FONTE: arquivos da autora, feito no Geogebra

Em conseguência disto, Newton aplicou a regra para interpor séries entre séries.

Para o cálculo, cuja equação é $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, por exemplo, o valor de m é $\frac{1}{2}$ e o segundo termo do círculo era $\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}x^3\right)\right]$. Assim, teremos $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$ e os demais serão:

$$a_3 = \frac{m-0}{1}\cdot\frac{m-1}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2}-0\right)}{1}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2} = -\frac{1}{8}$$

Este será o numerador do 3^o termo.

$$a_4 = \frac{m-0}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3} = \frac{\left(\frac{1}{2}-0\right)}{1}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3} = \frac{1}{16}$$

Este será o numerador do 4^o termo.

$$a_5 = \frac{m-0}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4} = \frac{\left(\frac{1}{2}-0\right)}{1}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4} = -\frac{5}{128}$$

Este será o numerador do 5^o termo; e, assim, infinitamente.

De acordo com Baron e Bos (p.15), a área do segmento círcular, portanto, será:

$$x - \left(\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}\right) + \left(-\frac{\frac{1}{8}x^5}{5}\right) - \left(\frac{\frac{1}{16}x^7}{7}\right) + \left(-\frac{\frac{5}{128}x^9}{9}\right) etc.$$

ou seja:

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9} etc.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, Newton obtém as áreas das demais curvas, com expoentes não naturais. Examinando seus cálculos, percebeu que as curvas: $(1-x^2)^{\frac{0}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{2}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{4}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{6}{2}}$, etc., ou seja 1, $1-x^2$, $1-2x^2+x^4$, $1-3x^2+3x^4-x^6$, etc., poderiam ser interpoladas do mesmo modo que as áreas geradas por elas, porém sem os denominadores 1, 3, 5, 7, etc. Assim, os coeficientes dos termos das curvas com expoentes não naturais, surgem pela multiplicação repetida dos termos da série $m.(\frac{m-1}{2}).(\frac{m-2}{3}).(\frac{m-3}{4})$, etc. Portanto, para $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, teríamos, com $m = \frac{1}{2}$, $a_1 = 1$ e $a_2 = \frac{1}{2}$:

$$a_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\frac{-1}{2}}{2}\right) = \frac{-1}{8}$$

que será o coeficiente do 3^o termo.

$$a_4 = \frac{-1}{8} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}-2}{3}\right) = \frac{-1}{8} \cdot \left(\frac{\frac{-3}{2}}{3}\right) = \frac{1}{16}$$

que será o coeficiente do 4^o termo.

$$a_5 = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}-3}{4}\right) = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{\frac{-5}{2}}{4}\right) = \frac{-5}{128}$$

que será o coeficiente do 5^o termo. Ou seja:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 \dots$$

Seguindo o mesmo raciocínio, para $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$, teríamos, com $a_1 = 1$ e $a_2 = \frac{3}{2}$:

$$a_2 = \frac{m-0}{1} = \frac{\left(\frac{3}{2}-0\right)}{1} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{m-0}{1} \cdot \frac{m-1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}-1\right)}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$a_4 = \frac{m-0}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}-2\right)}{3} = -\frac{1}{16}$$

Ou seja:

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 ...$$

Continuando seus estudos, Newton escreve:

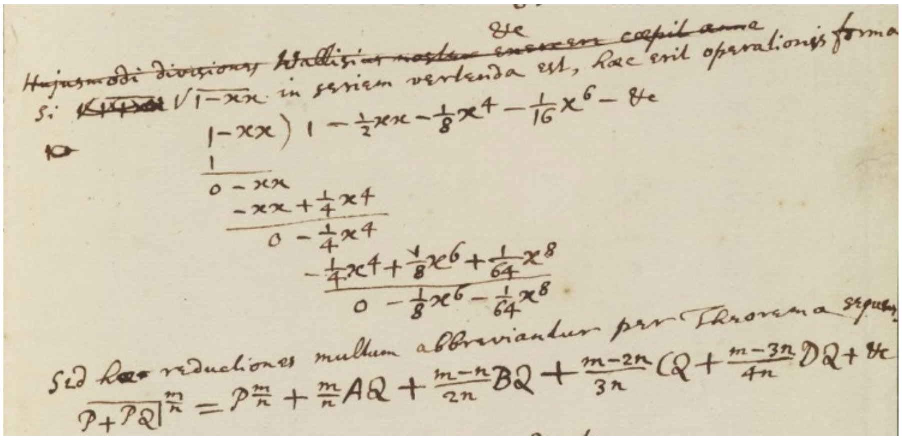
> Assim, a redução geral de radicais a séries infinitas, através da regra que expus no começo de minha carta anterior, chegou ao meu conhecimento antes que eu tivesse estado familiarizado com a extração de raízes. Mas uma vez conhecido isso, o outro não podia ficar oculto de mim por muito tempo. Pois, para testar esses processos, multipliquei
>
> $$1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6, etc$$
>
> por si mesmo; tornou-se $1-x^2$, porque os termos que ficavam desapareciam pela continuação da série até o infinito.

Da mesma maneira, multiplicando-se

$$1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6, etc$$

duas vezes por si mesmo, resultou $1 - x^2$ também. Com isso não obtive apenas a demonstração segura dessas conclusões, fui conduzido também a verificar se, reciprocamente, as séries assim formadas, que representavam as raízes da quantidade $1 - x^2$, não poderiam ser extraídas dela aritmeticamente. E deu certo. Era essa a forma de trabalhar com raízes quadradas. (Newton apud Baron e Bos, 1985, p.16)

Figura 3.12: Observações de Newton 2



Fonte: University of Cambrigde Digital Library
http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03960/177

Elevando $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6...$ ao quadrado, obtemos:

1. Usando apenas os dois primeiros termos, temos:

$$\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 = 1 - x^2 + \frac{1}{4}x^4.$$

2. Usando os três primeiros termos, temos:

$$\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4\right)=$$
$$=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{16}x^6-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6+\frac{1}{64}x^8$$
$$=1-x^2+\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{64}x^8$$

Observemos que considerando os três primeiros termos, a variável x^4 desaparece.

3. Usando os quatro primeiros termos, temos:

$$\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6\right)=$$
$$=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{16}x^6+\frac{1}{32}x^8-$$
$$-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6+\frac{1}{64}x^8+\frac{1}{128}x^{10}-\frac{1}{16}x^6+\frac{1}{32}x^8+\frac{1}{128}x^{10}+\frac{1}{256}x^{12}=$$
$$=1-x^2+\frac{5}{64}x^8+\frac{1}{64}x^{10}+\frac{1}{256}x^{12}$$

Observemos que considerando os quatro primeiros termos, as variáveis x^4 e x^6 desaparecem.

Assim, conforme aumentamos os termos da série na multiplicação por ela mesma, os demais termos, depois de $1-x^2$, vão desaparecendo. Como a sequência tende para o infinito, Newton concluiu que o resultado se resumia em $1-x^2$, porque os termos que ficavam, desapareciam pela continuação da série até o infinito. (Baron e Bos, 1985, p.15)

Da mesma forma, elevando-se o valor de $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6...$ ao cubo, resulta-se, também, em $(1-x^2)$. Pois:

1. Usando apenas os dois primeiros termos, obtemos:

$$\left(1-\frac{1}{3}x^2\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}x^2\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}x^2\right)=$$
$$=\left(1-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x^4\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}x^2\right)$$
$$=1-\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{9}x^4+\frac{1}{9}x^4-\frac{1}{27}x^6$$
$$=1-x^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{27}x^6$$

2. Usando os três primeiros termos, obtemos:

$$=\left(1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4\right)=$$
$$=\left(1-\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+\frac{2}{27}x^6+\frac{1}{81}x^8\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4\right)$$
$$=1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{9}x^4+\frac{2}{27}x^6-\frac{1}{9}x^4+\frac{1}{27}x^6+\frac{1}{81}x^8+\frac{2}{27}x^6-$$
$$-\frac{2}{81}x^8-\frac{2}{243}x^{10}+\frac{1}{81}x^8-\frac{1}{243}x^{10}-\frac{1}{729}x^{12}$$
$$=1-x^2+\frac{5}{27}x^6-\frac{1}{81}x^{10}-\frac{1}{729}x^{12}$$

Note que usando os três primeiros termos, somem os termos x^4 e x^8.

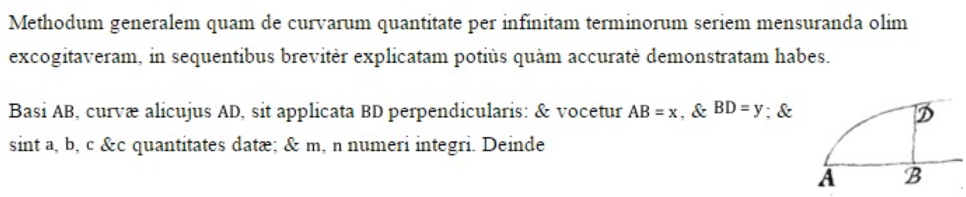
Newton concluiu que, devido a série ser infinita, os termos seguintes, a partir do terceiro termo, desaparecem, resultando somente em $(1-x^2)$, tal como podemor ver abaixo:

> Depois de ter esclarecido isso, abandonei totalmente a interpolação de séries e usava somente essas operações, pois davam fundamentações mais naturais. Tampouco existia um segredo qualquer acerca da redução pela divisão que, em todo caso, é um assunto mais fácil. (Newton apud Baron e Bos, 1985, p.16)

3.2 Newton e as regras para encontrar áreas delimitadas por curvas.

Segundo Baron e Bos (1985), Newton, à princípio, estava interessado em métodos algébricos. Através de seus estudos da geometria de Descartes, ele adquiriu a ideia de aplicar a álgebra nos estudos de geometria. Na introdução de *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, temos:

Figura 3.13: Manuscrito transcrito de Newton 1



Methodum generalem quam de curvarum quantitate per infinitam terminorum seriem mensuranda olim excogitaveram, in sequentibus brevitèr explicatam potiùs quàm accuratè demonstratam habes.

Basi AB, curvæ alicujus AD, sit applicata BD perpendicularis: & vocetur AB = x, & BD = y; & sint a, b, c &c quantitates datæ; & m, n numeri integri. Deinde

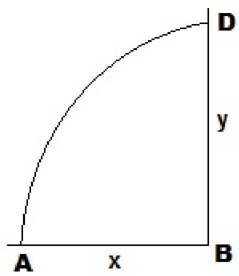
Fonte: The Newton Project
http://www.newtonproject.sussex.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00204

> O método geral que inventei há algum tempo atrás para medir a quantidade de curvas por uma série infinita de termos será apresentada a seguir com explicações concisas sem demonstrações profundas. A base AB de uma curva AD é perpendicular à ordenada BD. Chame AB de x e BD de y. Sejam ainda $a, b, c, \cdots$ quantidades dadas e sejam m, n inteiros. (Newton apud Baron e Bos, 1985, p.19)

Para tanto, Newton considerou uma base AB de uma curva AD perpendicular a BD, conforme figura 3.14, onde $AB = x$ e $BD = y$, com $a, b, c \cdots$ quantidades dadas e m, n pertencentes aos inteiros. Daí, Newton expõe duas regras que tornaram possíveis, na época, calcular a integral de expressões que envolviam raízes, integrando-as termo a termo:

Portanto, Newton sugeriu a quadratura sob uma curva $y = ax^{\frac{m}{n}}$ sendo calculada como:

Figura 3.14: Curva AD



Fonte: Newton apud Baron e Bos 1985, p.19

$$\left[\frac{na}{m+n}\right] x^{\frac{m+n}{n}} \Rightarrow a \cdot \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} \Rightarrow a \cdot \frac{x^{\frac{m+n}{n}}}{\frac{m+n}{n}}$$

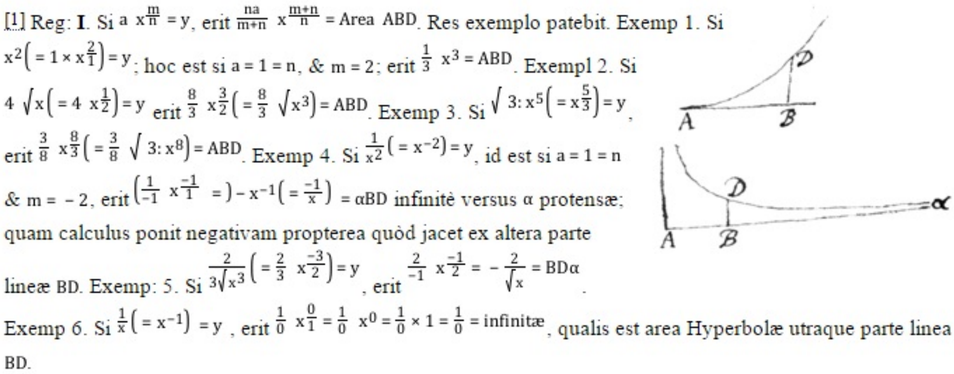
Assim, se a raiz da equação $y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 \ldots$, então a quadratura sob esta curva poderia ser obtida substituindo 1 por x, alternando os sinais em positivo e negativo, somando 1 unidade aos expoentes da variável x e estes mesmos valores seriam colocados nos denominadores de cada respectiva variável x.

Logo, a quadratura sob a curva $y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, seria:

$$x - \frac{\left(\frac{1}{2}\right) x^{2+1}}{2+1} - \frac{\left(\frac{1}{8}\right) x^{4+1}}{4+1} - \frac{\left(\frac{1}{16}\right) x^{6+1}}{6+1} + \ldots + \frac{ax^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}$$

Para definir as regras, Newton mostrava exemplos numéricos e depois assumia como verdadeira. Vejamos como ele propôs:

Figura 3.15: Manuscrito transcrito de Newton 2



[1] Reg: **I**. Si $a\ x^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{na}{m+n}\ x^{\frac{m+n}{n}} =$ Area ABD. Res exemplo patebit. Exemp 1. Si $x^2\left(= 1 \times x^{\frac{2}{1}}\right) = y$; hoc est si $a = 1 = n$, & $m = 2$; erit $\frac{1}{3}\ x^3 =$ ABD. Exempl 2. Si $4\ \sqrt{x}\left(= 4\ x^{\frac{1}{2}}\right) = y$ erit $\frac{8}{3}\ x^{\frac{3}{2}}\left(= \frac{8}{3}\ \sqrt{x^3}\right) =$ ABD. Exemp 3. Si $\sqrt{3: x^5}\left(= x^{\frac{5}{3}}\right) = y$, erit $\frac{3}{8}\ x^{\frac{8}{3}}\left(= \frac{3}{8}\ \sqrt{3: x^8}\right) =$ ABD. Exemp 4. Si $\frac{1}{x^2}\left(= x^{-2}\right) = y$, id est si $a = 1 = n$ & $m = -2$, erit $\left(\frac{1}{-1}\ x^{\frac{-1}{1}} = \right) - x^{-1}\left(= \frac{-1}{x}\right) = \alpha$BD infinitè versus α protensæ; quam calculus ponit negativam propterea quòd jacet ex altera parte lineæ BD. Exemp: 5. Si $\frac{2}{3\sqrt{x^3}}\left(= \frac{2}{3}\ x^{\frac{-3}{2}}\right) = y$, erit $\frac{2}{-1}\ x^{\frac{-1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{x}} =$ BDα. Exemp 6. Si $\frac{1}{x}\left(= x^{-1}\right) = y$, erit $\frac{1}{0}\ x^{\frac{0}{1}} = \frac{1}{0}\ x^0 = \frac{1}{0} \times 1 = \frac{1}{0} =$ infinitæ, qualis est area Hyperbolæ utraque parte linea BD.

Fonte: The Newton Project
http://www.newtonproject.sussex.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00204

3.2.1 Primeira regra e exemplos

Regra 1: Se $ax^{\frac{m}{n}} = y$ então sua área[15] será $\left[\frac{na}{(m+n)}\right] x^{\frac{m+n}{n}}$.

Exemplo 1: Para $x^2 = y$, que é o mesmo que $1 \cdot x^{\frac{2}{1}} = y$ onde $a = n = 1$ e $m = 2$, temos: (denotaremos por **S** a área calculada.)

$$S = \left[\frac{na}{(m+n)}\right] x^{\frac{m+n}{n}}$$

$$S = \frac{1}{3} x^{\frac{2+1}{1}}$$

$$S = \frac{1}{3} x^3$$

que é equivalente, em notação moderna, a $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$.

Exemplo 2: Para $4\sqrt{x} = y$, que é o mesmo que $4 \cdot x^{\frac{1}{2}} = y$, onde $a = 4$, $m = 1$ e $n = 2$, temos:

$$S = \left[\frac{na}{(m+n)}\right] x^{\frac{m+n}{n}}$$

[15]A expressão "a área da curva" utilizada por Newton, expressa a **área delimitada** pela curva.

$$S = \left[\frac{4 \cdot 2}{3}\right] x^{\frac{1+2}{2}}$$

$$S = \left[\frac{8}{3}\right] x^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\sqrt{x^3} = \text{área } ABD$$

que é equivalente, em notação moderna, a

$$\int 4\sqrt{x}dx = \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + C.$$

Exemplo 3: Para $\sqrt[3]{x^5} = y$, que é o mesmo que $y = 1 \cdot x^{\frac{5}{3}}$, onde $a = 1$, $m = 5$ e $n = 3$, temos:

$$S = \left[\frac{na}{(m+n)}\right] x^{\frac{m+n}{n}}$$

$$S = \left[\frac{1 \cdot 3}{8}\right] x^{\frac{5+3}{3}}$$

$$S = \left[\frac{3}{8}\right] x^{\frac{8}{3}} = \text{área } ABD$$

que é equivalente, em notação atual, a

$$\int \sqrt[3]{x^5}dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + C.$$

Exemplo 4: Para $y = \frac{1}{x^2}$ que é o mesmo que $y = x^{-2}$, onde $a = n = 1$ e $m = -2$.

$$S = \left[\frac{na}{(m+n)}\right] x^{\frac{m+n}{n}}$$

$$S = \left[\frac{1}{-1}\right] x^{\frac{-2+1}{1}}$$

$$S = -1x^{-1} = -\frac{1}{x} = \text{área } \alpha BD$$

Newton identifica como uma área infinitamente extendida em direção a α. O cálculo ajusta os sinais negativos porque ele está inclinado sob o lado adicional da linha BD, conforme figura 3.17.

$$\int_x^\infty \frac{1}{x^2}dx = \left[\frac{-1}{x}\right]$$

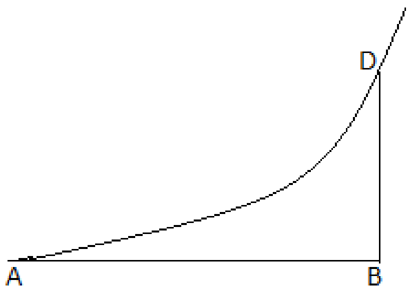


Figura 3.16: Gráfico do exemplo 3

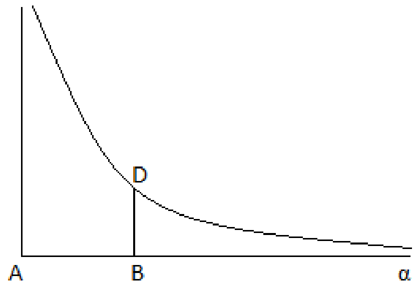
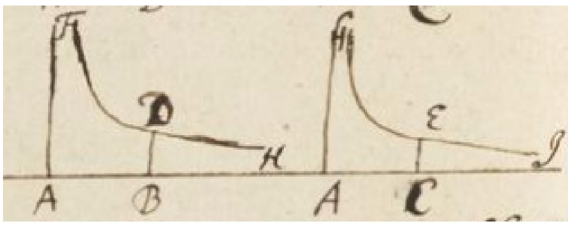


Figura 3.17: Gráfico do exemplo 4

Fonte: Newton apud Baron e Bos 1985, p.20

Figura 3.18: Gráfico original de Newton para exemplo 4



Fonte: University of Cambrigde Digital Library
http://www.newtonproject.sussex.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00297

Exemplo 5: Para $\frac{2}{3\sqrt{x^3}} = y$ que é o mesmo que $\frac{2}{3}x^{\frac{-3}{2}} = y$, onde a=$\frac{2}{3}$, $m = -3$ e $n = 2$, temos:

$$S = \left[\frac{na}{(m+n)}\right] x^{\frac{m+n}{n}}$$
$$S = \left[\frac{\frac{2}{3}\cdot 2}{-3+2}\right] x^{\frac{-3+2}{2}}$$
$$S = \frac{-4}{3}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{-4}{3\sqrt{x}} = \text{área } BD\alpha$$

que é equivalente à notação atual:

$$\int \frac{2}{3\sqrt{x^3}}dx = \frac{-4}{3\sqrt{x}} + C.$$

Observação: Conforme pode ser visto no transcrito original, p. 29, a resposta diverge da encontrada acima. Porém, utilizado o próprio método que Newton utilizou e os métodos atuais, encontramos a resposta citada no exemplo 5.

Exemplo 6: Para $\frac{1}{x}$ que é o mesmo que $x^{-1} = y$, onde $a = n = 1$ e $m = -1$, Newton escreve:

$$S = \left[\frac{na}{(m+n)}\right] x^{\frac{m+n}{n}}$$
$$S = \left[\frac{1\cdot 1}{-1+1}\right] x^{\frac{-1+1}{1}}$$
$$S = \frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}} = \frac{1}{0}\cdot 1 = \infty$$

que é equivalente à notação atual:

$$\int \frac{1}{x}dx = \infty$$

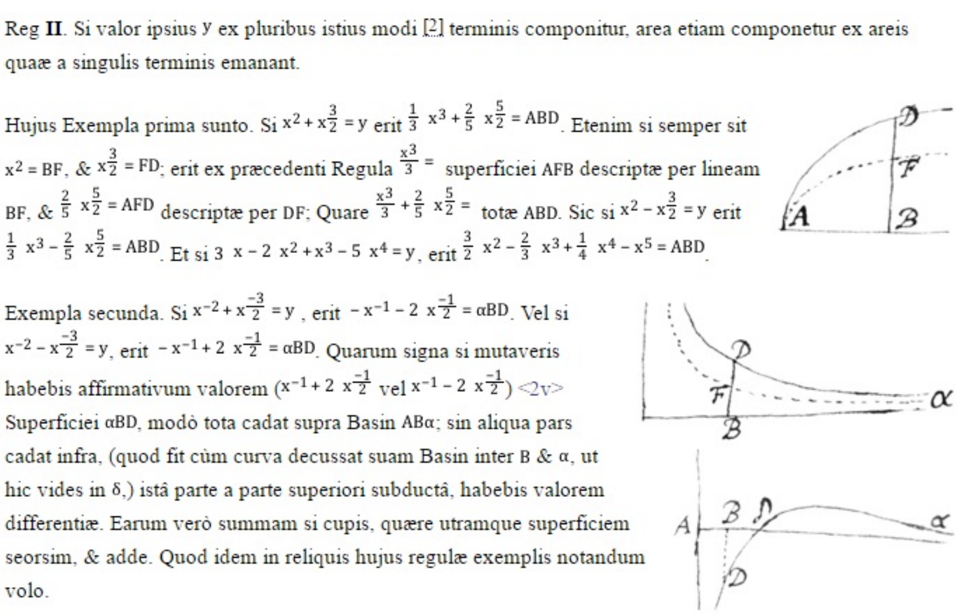
E conclui, visto que a área da hipérbole está de ambos os lados da linha BD.

Em seguida, anuncia a regra para quadratura de curvas compostas de curvas simples[16].

3.2.2 Segunda regra e exemplos

Regra 2: Caso o valor de y seja composto por vários termos da regra 1, a área também será composta dos resultados dos termos separados.

Figura 3.19: Manuscrito transcrito de Newton 3



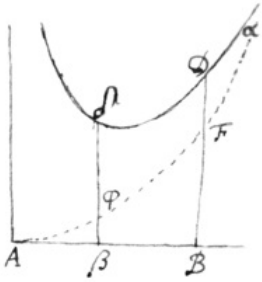
Reg **II**. Si valor ipsius y ex pluribus istius modi [2] terminis componitur, area etiam componetur ex areis quaæ a singulis terminis emanant.

Hujus Exempla prima sunto. Si $x^2 + x^{\frac{3}{2}} = y$ erit $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = ABD$. Etenim si semper sit $x^2 = BF$, & $x^{\frac{3}{2}} = FD$; erit ex præcedenti Regula $\frac{x^3}{3} =$ superficiei AFB descriptæ per lineam BF, & $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = AFD$ descriptæ per DF; Quare $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ totæ ABD. Sic si $x^2 - x^{\frac{3}{2}} = y$ erit $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = ABD$. Et si $3x - 2x^2 + x^3 - 5x^4 = y$, erit $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - x^5 = ABD$.

Exempla secunda. Si $x^{-2} + x^{\frac{-3}{2}} = y$, erit $-x^{-1} - 2x^{\frac{-1}{2}} = \alpha BD$. Vel si $x^{-2} - x^{\frac{-3}{2}} = y$, erit $-x^{-1} + 2x^{\frac{-1}{2}} = \alpha BD$. Quarum signa si mutaveris habebis affirmativum valorem ($x^{-1} + 2x^{\frac{-1}{2}}$ vel $x^{-1} - 2x^{\frac{-1}{2}}$) <2v> Superficiei αBD, modò tota cadat supra Basin ABα; sin aliqua pars cadat infra, (quod fit cùm curva decussat suam Basin inter B & α, ut hic vides in δ,) istâ parte a parte superiori subductâ, habebis valorem differentiæ. Earum verò summam si cupis, quære utramque superficiem seorsim, & adde. Quod idem in reliquis hujus regulæ exemplis notandum volo.

[16]Curvas simples: curvas onde as linhas não se cruzam.

Exempla tertia. Si $x^2 + x^{-2} = y$, erit $\frac{1}{3}x^3 - x^{-1} =$ superficiei descriptæ. Sed hic notandum est quod dictæ superficiei {partes} sic inventæ jacent ex diverso latere lineæ BD: nempe, posito $x^2 = BF$ & $x^{-2} = FD$, erit $\frac{1}{3}x^3 = ABF$ superficiei per BF descriptæ, & $-x^{-1} = DF\alpha$ descriptæ per DF. Et hoc semper accidit cum indices $(\frac{m+n}{n})$ rationum basis x in valore superficiei quæsitæ sint varijs signis affectæ. In hujus modi casibus pars aliqua $BD\delta\beta$ superficiei media (quæ sola dari poterit, cùm superficies sit utrinque infinita) sic invenitur. Subtrahe superficiem ad minorem basin $A\beta$ pertinentem a Superficie ad majorem basin AB pertinente & habebis $\beta BD\delta$ superficiem differentiæ basium insistentem. Sic in hoc exemplo, Si $AB = 2$ & $A\beta = 1$, erit $\beta BD\delta = \frac{17}{6}$. Enim superficies ad AB pertinens (viz $ABF - DF\alpha$) erit $\frac{8}{3} - \frac{1}{2}$, sive $\frac{13}{6}$; Et superficies ad $A\beta$ pertinens (viz $A\varphi\beta - \delta\varphi\alpha$) erit $\frac{1}{3} - 1$, sive $-\frac{2}{3}$: Et earum differentia (viz $ABF - DF\alpha - A\varphi\beta + \delta\varphi\alpha = \beta BD\delta$) erit $\frac{13}{6} + \frac{2}{3}$ sive $\frac{17}{6}$. Eodem modo si $A\beta = 1$, & $AB = x$ erit $\beta BD\delta = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$. Sic si $2x^3 - 3x^5 - \frac{2}{3}x^{-4} + x^{\frac{-3}{5}} = y$, & $A\beta = 1$; Erit $\beta BD\delta = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{9}x^{-3} + \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} - \frac{49}{18}$.

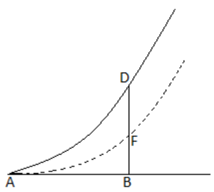


Denique notari poterit quòd si quantitas x^{-1} in valore ipsius y reperiatur, iste terminus (cùm hyperbolicam superficiem generat) seorsim a reliquis considerandus est. Ut si $x^2 + x^{-3} + x^{-1} = y$: Sit $x^{-1} = BF$, & $x^2 + x^{-3} = FD$, ac $A\beta = 1$; Et erit $\delta\varphi FD = \frac{1}{6} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^{-2}}{2}$, utpote quæ ex terminis $x^2 + x^{-3}$ generatur: quare si reliqua superficies $\varphi\beta FB$, quæ Hyperbolica est, ex calculo aliqua sit data, dabitur tota $\beta BD\delta$.

Fonte: The Newton Project
http://www.newtonproject.sussex.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00204

> Se $x^2 + x^{\frac{3}{2}} = y$ então $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = ABD$. Pois, se sempre $BF = x^2$ e $FD = x^{\frac{3}{2}}$, então pela regra precedente, $\frac{1}{3}x^3 =$ a área AFB descrita pela linha BF e $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = AFD$ descrito por DF; consequentemente $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ o ABD todo. Portanto, se $x^2 - x^{\frac{3}{2}} = y$, então $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = ABD$; se $3x - 2x^2 + x^3 - 5x^4 = y$, então $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - x^5 = ABD$. (Newton apud Baron e Bos, 1985, p.20)

Figura 3.20: Gráfico da Regra 2



Fonte: Newton apud Baron e Bos, 1985, p.20

Exemplo 1: $x^2 + x^{\frac{3}{2}} = y$, onde o primeiro termo é $1 \cdot x^{\frac{2}{1}}$, e $a = n = 1$ e $m = 2$; e o segundo termo é $1 \cdot x^{\frac{3}{2}}$, onde $a = 1$, $m = 3$ e $n = 2$. Assim, teremos: $S_T = S_1 + S_2$.

$$S_1 = \left[\frac{1 \cdot 1}{1+2}\right] x^{\frac{1+2}{1}}$$

$$S_1 = \frac{1}{3}x^3$$

$$S_2 = \left[\frac{1 \cdot 2}{2+3}\right] x^{\frac{3+2}{2}}$$

$$S_2 = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$$

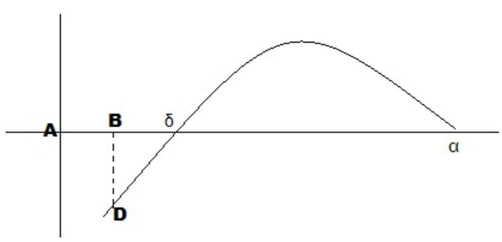
Portanto, se $x^2 + x^{\frac{3}{2}} = y$, então:

$$S_T = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = \text{área } ABD$$

Exemplo 2: Se $x^{-2} + x^{\frac{-3}{2}} = y$, então $-x^{-1} - 2x^{\frac{-1}{2}} = \text{área } \alpha BD$ ou se $x^{-2} - x^{\frac{-3}{2}} = y$, então $-x^{-1} + 2x^{\frac{-1}{2}} = \text{área } \alpha BD$

Newton conclui que, mudando os sinais, resultará um valor positivo para a área αBD, se a mesma tiver inteiramente do lado superior da base $AB\alpha$. Caso uma parte da área estiver na parte inferior a $AB\alpha$, terá a diferença entre a área total e a superior.

Figura 3.21: Curva αBD



Fonte: Newton apud Baron e Bos, 1985, p.21

Caso seja necessária a soma, deve-se achar as áreas separadamente e adicioná-las.

Exemplo 3: Se $x^2 + x^{-2} = y$, então a área será igual a $\frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$. Pois teremos: $S_T = S_1 + S_2$.

$$S_1 = \left[\frac{1 \cdot 1}{1+2}\right] x^{\frac{1+2}{1}}$$

$$S_1 = \frac{1}{3}x^3$$

$$S_2 = \left[\frac{1 \cdot 1}{-2+1}\right] x^{\frac{-2+1}{1}}$$

$$S_2 = -x^{-1}$$

Logo:

$$S_T = \frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$$

Neste caso, as partes desta área ficam de lados opostos da linha BD, conforme 3.21. Teríamos:

$BF = x^2$ e $\frac{1}{3}x^3 =$ área ABF

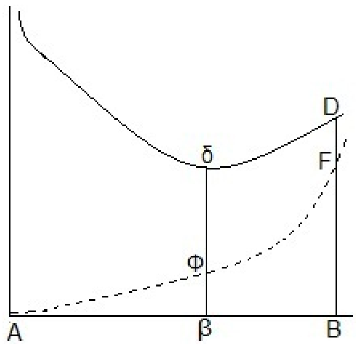
$FD = x^{-2}$ e $-x^{-1} =$ área DFα.

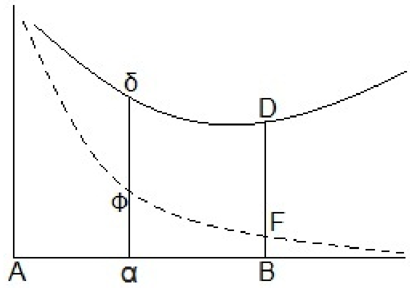
Isto ocorrerá quando m e n tiverem sinais diferentes. Nestes casos, qualquer parte da área $BD\delta\beta$, será encontrada desta maneira. Assim, deve-se subtrair a área da menor base $A\beta$ da maior AB, para encontrar a área $\beta BD\delta$.

Exemplo 4: Se $AB = 2$ e $A\beta = 1$, então $\beta BD\delta = \frac{17}{6}$.

A área $AB = ABF - DF\alpha = \frac{8}{3} - \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$ e a área que se refere a $A\beta = A\phi\beta - \delta\phi\alpha = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3}$

Figura 3.22: Gráficos do exemplo 4





Fonte: Newton apud Baron e Bos, 1985, p.22

Assim, $ABF - DF\alpha - A\phi\beta + \delta\phi\alpha = \beta BD\delta = \frac{13}{6} + \frac{2}{3} = \frac{17}{6}$

Da mesma forma, $A\beta = 1$ e AB = x, então $\beta BD\delta = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$.

Portanto, se $2x^3 - 3x^5 - \frac{2}{3}x^{-4} + x^{\frac{-3}{5}} = y$ e Aβ = 1, então, $\beta BD\delta = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{9}x^{-3} + \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} - \frac{49}{18}$. Onde:

Pela regra 1, a área de $2x^3$ é $\left[\frac{2\cdot 1}{3+1}\right] x^{\frac{3+1}{1}} = \frac{1}{2}x^4$

A área de $-3x^5$ é $\left[\frac{-3\cdot 1}{5+1}\right] x^{\frac{5+1}{1}} = \frac{-1}{2}x^6$

A área de $\frac{-2}{3}x^{-4}$ é $\left[\frac{\frac{-2}{3}\cdot 1}{-4+1}\right] x^{\frac{-4+1}{1}} = \frac{2}{9}x^{-3}$

A área de $x^{\frac{-3}{5}}$ é $\left[\frac{1\cdot 5}{-3+5}\right] x^{\frac{-3+5}{5}} = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}}$

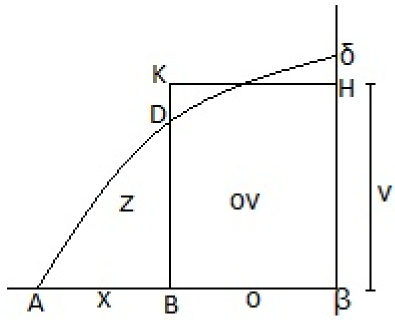
E o termo independente $\frac{-49}{18}$, resulta da subtração dos coeficientes das áreas: $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{9} - \frac{5}{2} = -\frac{49}{18}$.

A seguir, apresentamos a demonstração de Newton para a primeira regra exposta.

3.2.3 Demonstração da Primeira regra

Considere uma curva $AD\delta$, onde a base $AB =$ x, a ordenada perpendicular $BD = y$ e a área $ABD =$ z. Seja $B\beta = o$ e $BK =$ v. Assim, a área do retângulo $B\beta HK =$ ov e esta, igual a área $B\beta\delta D$.

Figura 3.23: Curva ADδ



Fonte: Newton apud Baron e Bos, 1985, p.24

Desta forma, teremos $A\beta$ = x+o e $A\delta\beta$ = z + ov. Assim, deve-se determinar um y a partir da relação entre x e z. Tomemos z = $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ou z^2 = $\frac{4}{9}x^3$.(1)

Substituindo x por x + o (lado $A\beta$) e z por z + ov (área $A\delta\beta$), surgirá em (1):

$$\frac{4}{9}x^3 = z^2$$

$$\frac{4}{9}(x+o)^3 = (z+ov)^2$$

$$\frac{4}{9}(x^2+2xo+o^2)(x+o) = z^2+2zov+o^2v^2$$

$$\frac{4}{9}(x^3+3x^2o+3xo^2+o^3) = z^2+2zov+o^2v^2$$

Eliminando os valores $\frac{4}{9}x^3$ e z^2, pois $\frac{4}{9}x^3 = z^2$ e simplificando o restante por o, temos:

$$\frac{4}{9}(3x^2+3xo+o^2) = 2zv+ov^2$$

Supondo Bβ infinitamente pequeno (o = 0), v e y serão iguais e os termos multiplicados por o se anularão, resultando:

$$\frac{4}{9}\cdot 3x^2 = 2zv \Rightarrow \frac{2}{3}x^2 = zv(I)$$

Ou

$$\frac{2}{3}x^2 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$$

Se $x^{\frac{1}{2}} = y$, $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ e de (I), teremos:

$$\frac{2}{3}x^2 = zy$$

$$\frac{2}{3}x^2 = z\cdot x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow z = \frac{\frac{2}{3}x^2}{x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

Em geral, se:

$$\left[\frac{n}{m+n}\right]ax^{\frac{m+n}{n}} = z$$

.

Substituindo $\left[\frac{na}{m+n}\right] = c$ e $m+n=p$, temos:

$$cx^{\frac{p}{n}} = z \Rightarrow z^n = c^n x^p$$

Logo, substituindo x por x+o e z por z+ov, teremos:

$$c^n(x^p + pox^{p-1}...) = z^n + noyz^{n-1}...$$

Eliminando os termos iguais a $c^n x^p$ e z^n e simplificando por o, omitindo os demais termos, os quais foram desprezados para sermos exatos, teremos:

$$c^n px^{p-1} = nyz^{n-1}$$

$$c^n px^{p-1} = ny\frac{z^n}{z} = ny\frac{c^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}}$$

Ao dividirmos por $c^n x^p$, obtemos:

$$px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}} \Rightarrow pcx^{\frac{(p-n)}{n}} = ny$$

Pela restauração de $\frac{na}{(m+n)}$ por c e $m+n$ para p, temos que m para $p-n$ e na para pc. Assim, teremos:

$$pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny \Rightarrow nax^{\frac{m}{n}} = ny \Rightarrow ax^{\frac{m}{n}} = y$$

Reciprocamente, se $ax^{\frac{m}{n}} = y$, então $\left[\frac{n}{m+n}\right] ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. ∎

Após a demonstração, Newton menciona um método para encontrar curvas de áreas conhecidas. Assumindo uma equação que relaciona a área z, pode-se procurar a ordenada y.

Por exemplo, se tivermos a área z= $\sqrt{a^2+x^2}$, podemos determinar:

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Em notação moderna, temos:

$$\int_0^x ydx = z$$

com z $= f(x)$

$$y = \frac{dz}{dx} = f'(x) \Rightarrow z = \left[\frac{n}{m+n}\right] ax^{\frac{m+n}{n}} \Rightarrow y = ax^{\frac{m}{n}}$$

3.3 Algumas considerações a respeito do Cálculo de Newton

De acordo com Baron e Bos (1985, p.21), alguns conceitos desta primeira parte são vagos. Os infinitesimais, diferenciais, incrementos ou momentos, que são as quantidades infinitamente pequenas, não podem ser gerados claramente. A prática de trabalhar com tais quantidades no cálculo, envolve uma contradição: primeiro supõe-se que sejam diferentes de zero, para dividir, e depois, iguais a zero, para que desapareçam os termos de potências de o.

Ainda segundo Baron e Bos(1985, p.21), George Berkeley (1685-1753) formulou algumas críticas sobre o cálculo em um tratado intitulado *The analyst*, onde ele mostra que os princípios do cálculo necessitavam de maior clareza e segurança. Ele formula à base de sua crítica em um lema:

> Se com o objetivo de demonstrar uma proposição qualquer supõe-se um certo ponto, devido ao qual outros determinados pontos são atingidos; e se o ponto suposto for depois destruído ou rejeitado por uma suposição contrária; neste caso, todos os outros pontos atingidos por meio deste e em consequência deste também devem ser destruídos e rejeitados, de forma a não serem mais supostos nem aplicados à demonstração a partir de então. Isto é tão simples que não necessita de provas. (BERKELEY apud BARON E BOS, 1985, P.21)

Para ele, os resultados verdadeiros, interpretados por Newton, mesmo baseados em fundamentos incertos, aconteceram porque, no processo de aplicação das regras do cálculo, dois erros compensam-se mutuamente.

> Se tivéssemos cometido somente um erro, não chegaríamos à verdadeira solução do problema. Mas, em virtude de um duplo erro chegamos à verdade, embora não à ciência. Pois quando procedemos cegamente e chegamos à verdade sem saber como, ou por que meios, não chegamos à ciência. (BERKELEY apud BARON E BOS, 1985, P.21)

No cálculo de Newton existiam problemas graves quanto a consistência lógica dos conceitos fundamentais, mas essas dificuldades são esclarecidas, no cálculo moderno, pelo uso do conceito de *limite*. Por isso, não encontramos no cálculo atual, nas operações práticas, as quantidades infinitamente pequenas (Alves, 2009, p.21).

4. AS FLUENTES E AS FLUXÕES:

Segundo Carvalho(2007), Newton antes de escrever o *De Analysi*, utilizou outros tipos de notações e demonstrações, como, por exemplo, a demonstração por *exaustão* de Arquimedes e a quadratura. Em 1666, Newton escreveu um tratado com vários problemas de cálculo baseado na ideia da geração de curvas por movimentos, onde o espaço percorrido era chamado **fluente** e a velocidade do móvel, **fluxão**. Ideias que fundamentaram o que ele chamava de "método das fluxões", que foram aprofundados no tratado de 1671 e publicadas posteriormente.

As fluxões e fluentes de Newton, sugerem vínculos com as ideias sobre o movimento, desenvolvidas por Galileu, Torricelli e Barrow, e talvez por isso, não seja fácil acompanhar seu raciocínio (Baron e Bos, 1985, p.26).

> Falta agora, como ilustração dessa arte analítica, explicitarmos alguns problemas típicos e tão especiais como a natureza de curvas que os representam. Mas, sobretudo eu observaria que as dificuldades dessa espécie podem ser todas reduzidas a somente dois problemas que proporei com vista ao espaço percorrido por qualquer movimento local acelerado ou retardado.

> 1. Dado o comprimento do espaço percorrido continuamente (quer dizer, em cada instante do tempo), ache a velocidade do movimento num instante qualquer.
> 2. Dada continuamente a velocidade do movimento, ache o comprimento do espaço percorrido num instante qualquer. Assim, na equação $x^2 = y$ se y significa o comprimento do espaço percorrido num instante qualquer que é medido e representado por um segundo espaço x, que cresce com velocidade uniforme, então, $2\dot{x}x$ designará a descrição da velocidade pela qual o espaço no mesmo momento de tempo está sendo percorrido. E, portanto, considerarei em seguida as quantidades como se fossem geradas por um aumento contínuo do espaço no qual um objeto se move descrevendo sua trajetória.(NEWTON APUD BARON E BOS, 1985, P.27)

Newton exemplifica o que quer dizer: na equação $x^2 = y$, onde y é o espaço percorrido num instante qualquer e x é um segundo espaço, que cresce com velocidade uniforme. Assim, considera $2\dot{x}x$ como a descrição da velocidade pelo qual este espaço está sendo percorrido.

Ou seja, se $y = x^2$, então $\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$. Como x aumenta uniformemente, $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ é constante. Sendo $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dx}{dt}$ as taxas de variação (derivada) das grandezas: espaço em relação ao tempo e velocidade em relação ao tempo, respectivamente.

Newton, concluiu:

> Mas, para distinguir as quantidades que considero perceptíveis, porém indefinidamente crescentes, das outras que em todo caso devem ser consideradas como conhecidas e determinadas e que são designadas pelas letras iniciais a, b, c, etc, chamarei as primeiras de fluentes e designá-las-ei pelas letras finais v, y, x, z. As velocidades com as quais elas fluem e que aumentam pelo movimento gerador (que eu chamaria mais adequadamente de fluxões ou simplesmente velocidade) designarei pelas letras $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$: a saber para a velocidade da quantidade v colocarei $\dot{v}$ e para as velocidades das outras quantidades colocarei $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, respectivamente. (NEWTON APUD BARON E BOS, 1985, p.27)

Newton designa o espaço percorrido, fluentes, pelas letras v, x, y, z e as velocidades pelos quais são percorridos, fluxões, pelas letras $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, respectivamente.

Observemos uma relação que Newton fez entre as fluxões das quantidades quando uma relação entre seus fluentes era conhecida.

> Os momentos das quantidades fluentes(quer dizer, as suas partes infinitamente pequenas, pela adição das quais elas aumentam durante um período qualquer de tempo infinitamente pequeno) estão relacionados com as suas velocidades de fluxo. Por essa razão, se o momento de cada uma e em particular se x for expresso pelo produto da sua velocidade $\dot{x}$ por uma quantidade o que é infinitamente pequena (quer dizer, por $\dot{x}o$) então os momentos das outras $v, y, z, \ldots$ o que mostra que $\dot{v}o, \dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o$ estão relacionados com $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Agora, como os momentos (digamos $\dot{x}o, \dot{y}o$) das quantidades fluentes (digamos x e y) são os incrementos infinitamente pequenos, pelos quais aquelas quantidades aumentam durante cada intervalo de tempo infinitamente pequeno, segue que apenas quantidades x e y, depois de qualquer intervalo infinitamente pequeno, tornar-se-ão $x+\dot{x}o$ e $y+\dot{y}o$. Consequentemente, uma equação que expressar uma relação uniforme entre as quantidades fluentes em todos os instantes expressará aquela relação uniforme entre $x+\dot{x}o$ e $y+\dot{y}o$ da mesma maneira como entre x e y. Portanto, $x+\dot{x}o$ e $y+\dot{y}o$ podem ser substituídos pelas últimas quantidades x e y na equação considerada. (NEWTON APUD BARON E BOS, 1985, p.29)

Os momentos de Newton, são quantidades de movimento. Logo, o momento dos espaços percorridos, fluentes, estão relacionados ao produto de suas respectivas velocidades e o tempo o. (Baron e Bos, p.29).

Newton considera o minúsculo como um período de tempo infinitamente pequeno, ou seja δt. Para $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$, Baron e Bos, p.29, considera como $\left(\frac{dx}{dt}\right)\delta t$ e $\left(\frac{dy}{dt}\right)\delta t$. Como $\dot{x}o, \dot{y}o$ dos fluentes x e y são incrementos infinitamente pequenos, tem-se que x e y, depois de qualquer intervalo infinitamente pequeno, torna-se $x+\dot{x}o$ e $y+\dot{y}o$.

Newton segue com um exemplo:

Dada a equação: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, substituindo x e y por $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$, respectivamente, teremos:

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$$

$$(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - (ax^2 + 2ax\dot{x}o + a\dot{x}^2o^2) +$$

$$+(axy + a\dot{x}oy + ax\dot{y}o + a\dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3y^2\dot{y}o + 3y\dot{y}^2o^2 + \dot{y}^3o^3) = 0$$

Por hipótese, $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, cancelando estes termos e simplificando por o, teremos:

$$3\dot{x}x^2 + 3x^2ox + x^3o^2 - 2a\dot{x}x - ax^2o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3o^2 = 0$$

Supondo o infinitamente pequeno e desprezando os fatores que o contém, teremos:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$$

A relação: $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$ pode ser escrita na forma:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax} = \frac{dy}{dx} = \frac{f_x}{-f_y}$$

onde f_x e f_y são as derivadas parciais de $f(x, y)$, com respeito a x e y, respectivamente; f_x é a derivada de $f(x, y)$, com y constante. Logo, para $f(x, y) = x^3 - ax^2 + axy - y^3$, temos:

$$f_x = 3x^2 - 2ax + ay$$

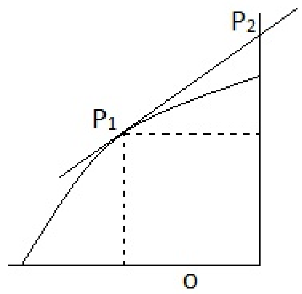
$$f_y = ax - 3y^2$$

sendo $-\frac{f_x}{f_y}$ a expressão dada. (Baron e Bos, p.30).

Segundo Baron e Bos (1985, p.30), é difícil expressar as operações newtonianas em termos de limites, mas deve-se tentar compreender o que realmente ocorre. Usando notação e interpretação atuais, vejamos como tentar compreender as operações newtonianas.

Se o ponto $P_1(x, y)$ está numa curva e $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ e o é um intervalo de tempo infinitamente pequeno, a razão $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ representa o vetor gradiente da tangente em P_1. Assim, o ponto $P_2(x + xo, y + yo)$ não pertenceria à curva e sim à tangente, sendo $f(x, y) \neq f(x + xo, y + yo)$, a não ser que $o = 0$.

Figura 4.24: Exemplo



Fonte: Baron e Bos, 1985, p. 30

Ainda segundo Baron e Bos(1985, p.30), Newton enuncia que uma equação expressa uma relação entre quantidades fluentes tanto entre $x+xo$ e $y+yo$, quanto entre x e y. Assim, devemos supor que P_1 e P_2 pertençam à curva. Porém, $\dot{x}$ e $\dot{y}$ também são constantes ao longo do intervalo de tempo o, que é infinitamente pequeno. Embora, isso não seja extritamente verdadeiro a não ser que $o = 0$. Note que há erros envolvidos que Newton desprezou. A introdução do conceito de fluentes e das fluxões teve um efeito intuitivo, mas não eliminou o uso dos infinitésimos, nem a identificação do pequeno incremento do arco com o pequeno incremento da tangente. Newton, posteriormente, declarou que "erros, por pequenos que sejam, não devem ser negligenciados na matemática" e tentou estabelecer uma fundamentação para o seu cálculo fluxional sob uma base diferente.

Os fundamentos de Newton foram apresentados de várias maneiras, em épocas diferentes. Assim, ele procurava estabelecer seus métodos analíticos sobre uma base mais segura. Como o único modelo para o rigor na matemática estava na "geometria dos antepassados" e como Newton trabalhava no contexto de "métodos de descobertas", a tarefa de conseguir justificar em termos de seus próprios métodos não foi realizado. As demonstrações geométricas do *Principia* (livro 1) representava o melhor que podia fazer (Baron e Bos, 1985, p.40).

4.1 As primeiras e as últimas razões

De acordo com Baron e Bos (1985), no livro I do *Principia* (1687) e no *A quadratura das curvas* (1693), Newton baseia seu método no conceito das primeiras e últimas razões. Vejamos o Lema I do Livro I, o que ele diz a respeito:

> As quantidades e as razões das quantidades que convergirem continuamente para a igualdade, num intervalo de tempo finito, e que antes do final do intervalo de tempo se aproximarem mais entre si do que entre qualquer uma diferença, tornar-se-ão iguais. Se você não aceitar isso, suponha que sejam ultimamente diferentes. Seja D a sua última diferença. Elas não poderão aproximar-se mais perto do que aquela diferença dada D; isso é contra a suposição. (NEWTON APUD BARON E BOS, 1985, P.31)

Newton parece explicar que, se tivermos duas quantidades, Q_1 e Q_2, que variam no tempo e se a diferença entre elas diminuir continuamente de tal maneira que, dentro de um tempo finito, se aproximem cada vez mais uma da outra, teremos, então, que $Q_1 = Q_2$ ou, em notação atual, $\lim_{t\to\infty}(Q_1) = \lim_{t\to\infty}(Q_2)$ (Baron e Bos, 1985 p.31).

Ainda segundo Baron e Bos (1985, p.31), Newton desenvolve algumas das "últimas razões" ligadas a linhas curvas que possibilitam-lhe trocar a corda, a tangente e o arco, já que as "últimas razões" entre eles é a igualdade.

No livro *Tractatus de quadratura curvarum*, Newton explica seu método das fluxões em termos das *primeiras* e *últimas* razões.

Não considerarei aqui as quantidades matemáticas como sendo compostas de partes extremamente pequenas, mas como sendo geradas por um movimento contínuo. Linhas são descritas, e ao descrevê-las são geradas. Não por um alinhamento de partes, mas por um movimento contínuo de pontos. As superfícies são geradas pelo movimento de linhas, os sólidos pelo movimento de superfícies, os ângulos pela rotação dos seus lados, o tempo por um fluxo contínuo, etc. Essa gênese está baseada na natureza e pode ser vista dia a dia no movimento dos corpos. E desta maneira os antigos nos ensinaram a gerar retângulos justapondo-se linhas retas móveis ao longo de retas imóveis numa posição ou situação normal a elas. Percebe-se que as quantidades que aumentam em tempos iguais e que são geradas por esse aumento serão maiores ou menores conforme sua velocidade, na qual aumentam e são geradas, seja maior ou menor; esforcei-me para encontrar um método que determinasse as quantidades das velocidades, dos movimentos ou incrementos, que as geraram. Chamando de *fluxões* às velocidades dos movimentos ou dos aumentos e de *fluentes* às quantidades geradas, esclareci aos poucos (nos anos 1665 e 1666) o método das fluxóes, que aproveito aqui na *Quadratura das curvas.* As fluxões são semelhantes aos aumentos dos fluentes, os quais são gerados em intervalos de tempo iguais, mas são infinitamente pequenos; e para ser mais exato, diria que estão na *primeira razão* dos aumentos nascentes, mas podem ser representados por quaisquer linhas proporcionais a elas. Se as áreas ABC, $ABDG$ forem descritas pelas ordenadas BC e BD, que se movem uniformemente ao longo da base AB, então as fluxões dessas áreas estarão entre si como as ordenadas BC e BD que as descrevem e poderão se representadas por aquelas ordenadas; isto é, tais ordenadas estão na mesma proporção que os aumentos nascentes das áreas. Deixe a ordenada BC deslocar-se da sua posição BC para uma nova posição bc; complete o paralelogramo $BCEb$, trace a linha reta VTH tocando a curva em C e cortando os prolongamentos de bc e BA em T e V; agora os aumentos gerados da abscissa AB, da ordenada BC e da curva ACc serão Bb, Ec e Cc; e os lados do triângulo CET estão na *primeira razão* desses aumentos nascentes. Portanto, as fluxões de AB, BC e AC são como os lados CE, ET e CT do triângulo CET e poderão ser representadas por aqueles lados do triângulo VBC que é semelhante a CET.

> O mesmo acontece se tomarmos as fluxões na *última razão* das partes ínfimas. Trace a linha reta Cc e prolongue-a até K. Com a ordenada bc em sua posição original BC faça os pontos C e c se aproximarem. A linha reta CK vai coincidir com a tangente CH e o triângulo ínfimo CEc tornar-se-á semelhante ao triângulo CET. Seus lados ínfimos CE, Ec e Cc estarão na mesma proporção que os lados CE, ET e CT do outro triângulo CET. Portanto, as fluxões das linhas AB, BC e AC terão a mesma razão. Se os pontos C e c estiverem numa distância pequena qualquer, CK estará a uma distância pequena da tangente CH. Quando a linha reta CK concidir com a tangente CH, e quando as últimas razões das linhas CE, Ec e Cc forem encontradas, os pontos C e c deverão se aproximar e coincidir exatamente. Erros, por menores que sejam, não devem ser negligenciados na matemática. (NEWTON APUD BARON E BOS, 1985, P.32-33)

De acordo com Baron e Bos, p.33, "Newton refere-se à geração de um retângulo pelo movimento de um segmento BC ao longo de uma reta AB."

Conforme figura 4.25, Newton expõe que as áreas ABC e $ABDG$ são geradas pelo movimento das ordenadas BC e BD. Como a linha BCD move-se uniformemente sobre a base AB, temos que:

$$\frac{\text{fluxão de } ABC}{\text{fluxão de } ABDG} = \frac{BC}{BD}$$

Um *aumento* é um incremento pequeno, *nascente* significa "chegar a existir". Newton diz que as razões das fluxões são parecidas aos aumentos.

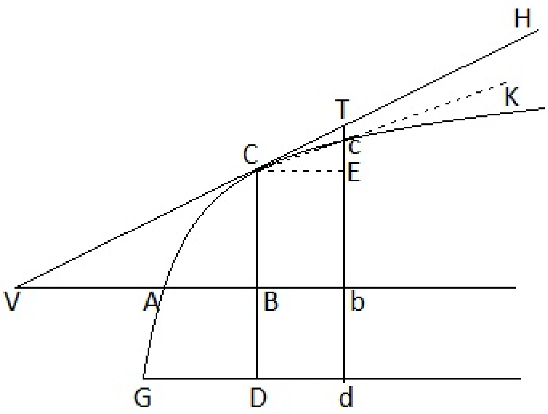
Pela figura 4.25, a razão dos aumentos é dada por:

$$\frac{\text{área } BCcb}{\text{área } BbdD}$$

Porém, considerando as primeiras razões dos aumentos, ou seja, quando as razões passam a existir, teremos:

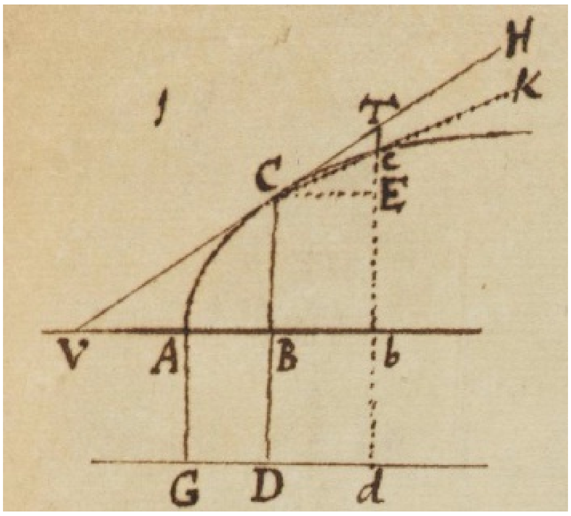
$$\frac{\text{fluxão de } ABC}{\text{fluxão de } ABDG}$$

Figura 4.25: Curva GAC



Fonte: Newton apud Baron e Bos, 1985, p.31

Figura 4.26: Curva GAC original de Newton



Fonte: University of Cambrigde Digital Library
https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03962/53

que é igual a primeira razão dos aumentos nascentes, isto é:

$$\frac{\text{fluxão de } ABC}{\text{fluxão de } ABDG} = \frac{BC}{BD}$$

Deslocando BC para a posição bc, tem-se o paralelogramo $BCEb$. Traçando a linha VTH, tocando a curva em C, e cortando os prolongamentos de bc e BA em T e V, respectivamente, teremos os aumentos gerados de AB, BC e AC (digamos x, y, s) como Bb, Ec e Cc (digamos $\delta x : \delta y : \delta s$), respectivamente, e os lados CET estarão na primeira razão desses aumentos. Em notação atual, as derivadas $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{ds}{dt}$ estão entre si nas primeiras razões dos aumentos nascentes, ou seja $\dot{x} : \dot{y} : \dot{s}$. Portanto, as fluxões de AB, BC e AC são os lados CE, ET e CT do triângulo CET que poderão, também, ser representados pelos lados do triângulo VBC, semelhante a CET.

Traçando a linha Cc e prolongando até K, com bc em sua posição original, façamos os pontos C e c se aproximarem. Assim, a reta CK coincide com a tangente CH e o triângulo CEc torna-se semelhante a CET. Como os lados CE, Ec e Cc estarão na mesma proporção que os lados CE, ET e CT, as fluxões de AB, BC e AC terão a mesma razão.

Se os pontos C e c estiverem a uma distância pequena um do outro, CK estará, também, a uma pequena distância da tangente CH. Quando CK coincidir com CH e as razões CE, Ec e Cc forem encontradas, C e c tendem a se coincidirem.

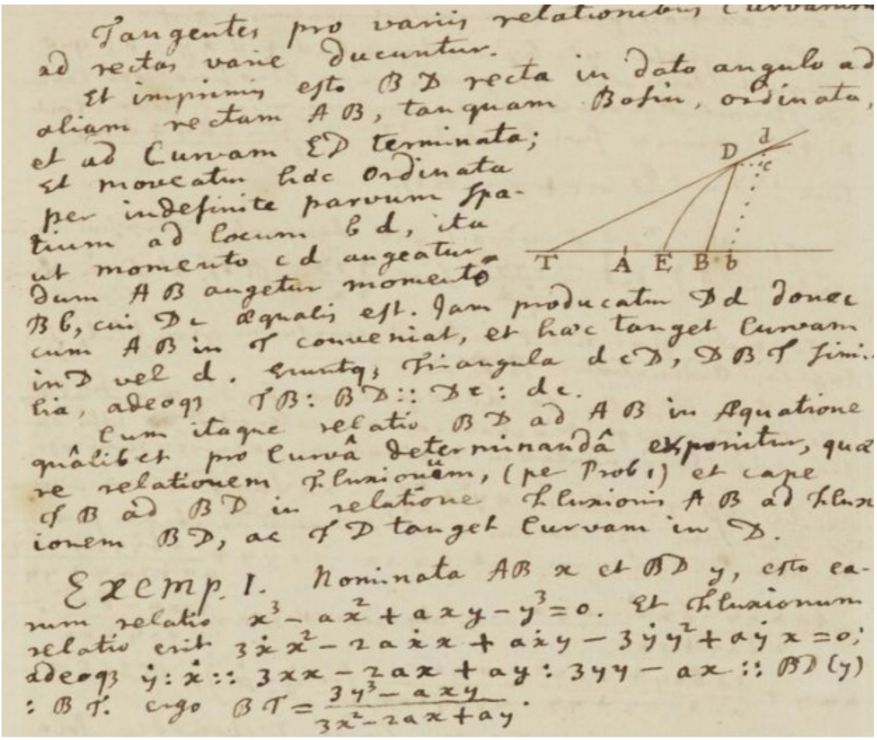
5. ALGUNS PROBLEMAS RESOLVIDOS POR NEWTON

Segundo Baron e Bos (1985, p.35), na época de Newton, quando o modelo geométrico estava em destaque, ele reconheceu a necessidade de um método padrão para resolução de problemas sobre propriedade das linhas curvas.

Newton reconheceu a natureza absorvida na diferenciação e na integração e estabeleceu tabelas para seu cálculo direto. Ele tinha como objetivo estabelecer regras que deduzissem as propriedades das curvas com um mínimo de esforço.

Ainda segundo Baron e Bos (1985, p.36), Newton, em todos os seus tratados sobre cálculo, elabora um esquema para resolver problemas, deduz métodos, fórmulas, regras e algoritmos, mostrando as aplicações em várias curvas. Ele estuda as propriedades das curvas, priorizando as que eram resolvidas pela diferenciação. Seu método "padrão" de traçar tangentes a curvas, foi utilizar $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{-f_y}{f_x} = \frac{t}{y}$, onde $f(x, y) = 0$ é a equação da curva e t a subtangente. As expressões fx e fy correspondem às atuais derivadas parciais. Newton mostra a adaptação desse método para coordenadas polares e bipolares; considera pontos de máximo, mínimo e de inflexão e teoremas para investigação da curvatura.

Figura 5.27: Exemplo de uma tangente de Newton



Fonte: University of Cambrigde Digital Library
http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03960/107

Na figura 5.27, temos um exemplo de Newton para o cálculo da tangente. Traduzindo o texto, temos:

As tangentes são desenhadas para as várias relações das curvas. E especialmente com esta reta BD em dado ângulo para outra reta AB ordenadas como base e terminadas na curva ED. E se move ordenadas por um pequeno espaço indefinidamente ao local bd, de modo que com o momento cd se aumenta enquanto AB se aumenta com o momento Bb, ao qual Dc é igual. Já convém que se faça Dd até com AB em T e este toca a curva em D ou d, e estes triângulos dcD, DBT de modo semelhante. Assim $TB : BD : : Dc : dc$. Assim sendo com esta relação BD a AB em cada equação que se expõe para as curvas que são determinadas, se procura as relações de fluxos para o problema

1, e tomar TB a BD na razão do fluxo AB ao fluxo BD, e TD toca a curva em D.

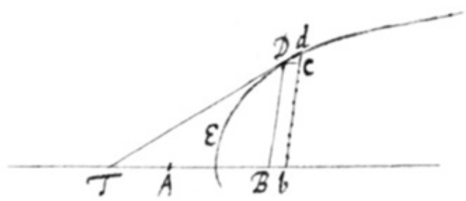
Exemplo 1. Nomeadas ABx e BDy seja esta relação $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. E a relação de fluxos será $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$. Consequentemente:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3x^2 - 2ax + ay : 3y^2 - ax = BD(y) : BT$$

Logo,

$$BT = \frac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$$

Figura 5.28: Tangente à curva ED



Fonte: http://www.newtonproject.sussex.ac.uk/

Neste exemplo, Newton trabalha com as derivadas parciais para o cálculo da tangente relativa à curva ED em questão. Podemos observar no texto onde ele deriva a função em relação a x e obtém sua derivada em relação a y multiplicada por (-1):

Temos: $f(x, y) = x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, onde:

$$\frac{f_y}{f_x} = \frac{-3y^2 + ax}{3x^2 - 2ax + ay}$$

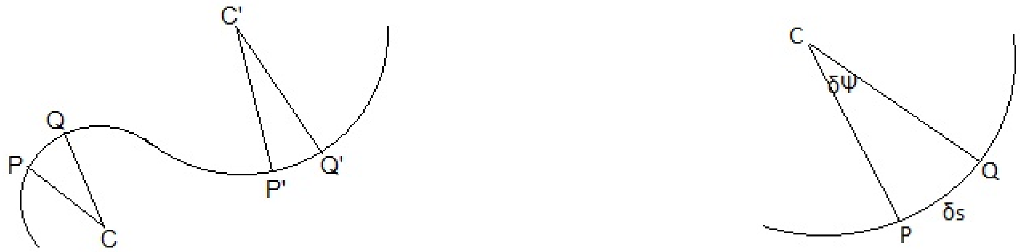
Para explicar o que Newton investigava sobre curvatura, é necessário um desvio para algumas definições:

Intuitivamente, uma reta tem curvatura zero; um círculo se curva uniformemente. Para uma curva qualquer, marcando-se dois pontos diferentes P e Q e tendo suas normais se interceptando em um ponto C, teremos:

$$\frac{\text{ângulo } PCQ}{\text{arco } PQ}$$

sendo a curvatura média de PQ. Ou seja, se P'Q'=PQ e ângulo P'C'Q' é menor que o ângulo PCQ, então a curvatura de P'Q' será menor que a curvatura de PQ. (Baron e Bos, 1985, p.37)

Figura 5.29: Arco PQ

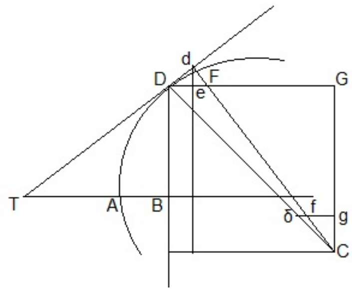


Fonte: Newton apud Baron e Bos, págs. 36 e 37.

Se arco $PQ = \delta s$ e $PCQ = \delta\psi$, então a curvatura da curva em P será definida por $\lim_{Q\to P} \frac{\delta\psi}{\delta s}$, em notação atual. O centro de curvatura em P é a posição limite do ponto de interseção das normais em P e Q com $Q \to P$. Assim, temos que $\lim_{Q\to P} \frac{\delta s}{\delta\psi} = \rho$. A curvatura é recíproca ao raio de curvatura, ou seja $\frac{1}{\rho}$.

Ainda segundo Baron e Bos (1985, p.37), Newton desenvolveu vários métodos para resolver problemas de curvatura. Sendo um deles o descrito a seguir:

Figura 5.30: Gráfico do exemplo de curvatura:



Newton apud Baron e Bos, 1985, pág. 37

Sejam $D(x, y)$ e $d(x+\dot{x}o, y+\dot{y}o)$ dois pontos vizinhos na curva ADd e C a interseção das normais nesses pontos. Deseja-se determinar o raio da curvatura em D. Tracemos DG, paralelo ao eixo AB, e CG, paralelo à ordenada BD, de modo que $DC^2 = DG^2 + CG^2$. Seja **e** a interseção de DG com a ordenada d e seja F a interseção de DG com a normal dC. Tracemos δfg, paralelo a DG e cortando dC em f, tal que Cg= 1. Temos: $\delta g = z$ e $\delta f = \dot{z}o$ (momento de z). $De = \dot{x}o$, $de = \dot{y}o$, $\frac{de}{De} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{de}{De} = \frac{\delta g}{gC}$$

$gC = 1$, $\delta g = z$, $z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Ainda por semelhança de triângulos, temos: $\frac{DF}{\delta f} = \frac{DC}{\delta C} = \frac{DG}{\delta g} = \frac{CG}{Cg}$. Como $DF = De + eF$, $De = \dot{x}o$, $\frac{eF}{ed} = \frac{ed}{De}$, teremos:

$$eF = \frac{\dot{y}^2 o}{\dot{x}}, DF = \dot{x}o + \frac{\dot{y}^2 o}{\dot{x}} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}} o$$

.

Segue que $CG = \frac{DF.Cg}{\delta f} = \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\dot{z}}$. Seja $\dot{x} = 1$, então $z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dot{y}$ e $CG = \frac{1+z^2}{\dot{z}}$, $DG = \frac{z(1+z^2)}{\dot{z}}$ e $DC = \frac{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{z}}$.

Em notação moderna, se $y = f(x), z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f'(x), \dot{z} = f"(x)$, e:

$$DC = \rho = \frac{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{f"(x)}$$

que é uma fórmula usada atualmente.

Newton foi capaz de associar o problema da curvatura ao ponto onde a curvatura se anulasse ou se tornasse infinito (ponto de inflexão).

Na integração, de acordo com Alves (2009, p.15), dois problemas foram considerados por Newton. No primeiro, dada uma relação ligando alguns fluentes, pretende-se estabelecer uma relação envolvendo esses fluentes e seus fluxos, que é equivalente à diferenciação. No segundo, dada uma relação entre alguns fluentes e fluxos, pretende-se achar uma relação envolvendo apenas os fluentes; trata-se do problema inverso, que equivale a resolver uma equação diferencial.

Newton fez numerosas e notáveis aplicações de seu método de fluxos: determinou máximos e mínimos, tangente à curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas, aplicou-o em muitas quadraturas e retificações de curvas. Também demonstrou habilidade na integração de equações diferenciais. Seu trabalho inclui, também, um método para a aproximação dos valores das raízes de uma equação numérica, algébrica ou transcendente[17] (Alves, 2009, p.16).

De acordo com Baron e Bos (1985, p.39), o uso das séries infinitas de Newton foi uma ferramenta importante para o cálculo das curvas cuja quadratura podia ser determinada e, sua aplicação foi útil em problemas relacionados à retificação.

A ideia de que a diferenciação e a integração eram operações inversas (princípio fundamental do cálculo), foi firmemente estabelecida por Newton. As conquistas de Newton foram possibilitadas pelo uso do simbolismo algébrico e técnicas analíticas. Ele estabeleceu a notação "padrão" com ponto para

[17] Um número a é algébrico se ele é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Se isso não ocorre, a é transcendente.

representar a diferenciação e não sentiu necessidade de introduzir notação específica para a integração. Para Newton, nos anos em que trabalhou sozinho, a necessidade de notações não eram tão relevantes, mas seria para aqueles que o seguiriam posteriormente (Baron e Bos, 1985, p.39).

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho nos trouxe como contribuição um maior conhecimento sobre alguns fatos da vida do cientista *Isaac Newton*. Newton, com sua dedicação, determinação e perseverança, conseguiu contribuir em várias áreas das ciências e, na matemática, contribuiu com o cálculo diferencial e integral. Os trabalhos de Newton eram baseados em estudos de importantes cientistas que o precederam.

Os estudos realizados em história da matemática nos permitiram entender como os processos matemáticos, atualmente utilizados, foram estudados, descobertos ou desenvolvidos. Toda descoberta foi manipulada por vários estudiosos, durante os séculos, tendo um ou outro maior destaque por algum avanço em especial.

É importante, para nós professores de matemática, incentivar nossos alunos a construir seus conhecimentos. Utilizando a história da matemática como recurso pedagógico, é possível mostrar como Newton e outros cientistas trabalhavam, testavam meios para resolução de certo problema, para que os alunos fossem capazes de chegar até o resultado desejado, ao invés de, através da fórmula pronta, chegar a solução do problema.

Com esse trabalho, notamos que Newton trabalhou com suas fluxões, que hoje conhecemos como derivadas, e suas fluentes, hoje integrais, de modo a tentar resolver os problemas que perseguiam estudiosos há muitos séculos, desde o cálculo de quadraturas de curvas com os gregos Arquimedes e Apolônio, por exemplo. Ele chegou a métodos que funcionavam para a época, mas sem conseguir prová-los de maneira a não deixar dúvidas. Muitas questões da época de Newton são resolvidas hoje, com o conceito de limites, como a questão do "infinitamente pequeno".

Os predecessores de Newton usavam métodos variados para os problemas de cálculo de quadraturas de curvas, para uma determinada curva haviam vários métodos de encontrar a quadratura e, nem sempre, o método era simplificado. Newton unificou o modo de resolução desses problemas, atendendo aos objetivos de sua época, ou seja, com suas regras conseguiu definir um jeito único de calcular suas áreas e/ou volumes de figuras curvas.

A pesquisa em história da matemática contribuiu enormemente para ampliar nossos conhecimentos sobre a matemática do ensino superior, assim como para a matemática da educação básica, uma vez que, os conhecimentos adquiridos neste último nível de educação permite uma melhor compreensão dos conhecimentos no nível superior.

REFERÊNCIAS

ALVES, Luana Lopes dos Santos. Artigo:*Derivadas como no tempo de Newton e Leibniz.* Universidade Católica de Brasília, Curso de Matemática, 2009.

BARON, Margaret E., BOS, H.J.M. *Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo.* Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília. Decanato de Extensão Serviço de Ensino à Distância, 1985.

BOERI,Camila Nicola; VIONE, Márcio Tadeu. *Abordagens em Educação Matemática.* 2009.

CARTA mencionando Leibniz. Disponível em http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03977/22

CARVALHO, Romeu Manuel de. *A invenção do Cálculo por Newton e Leibniz e sua evolução para o Cálculo Conteporâneo.* 2007. p.$4-50$. Monografia do Curso de Especialização em Matemática para professores com ênfase em Cálculo - UFMG, 2007.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática.* Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. ed.5.

FRAGOSO, Wagner da Cunha. *HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: uma disciplina do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora.* Juiz de Fora, 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora.

GUICCIARDINI, Niccolò. *Gênios da Ciência: Newton, Pai da Física Moderna.* Scientific American Brasil, São Paulo: Ediouro Duetto Editorial ltda, n.1, p.98, 2012.

GUILLOT, Renée-Paule. *História Viva: 20 personagens que mudaram o mundo.* São Paulo: Ediouro Duetto Editorial ltda, Edição Especial, p.47-49, 2012.

MAURY,Jean-Pierre. *Newton, the Father of Modern Astronomy.* 1992, Harry N. Abrans, Inc. editor.(disponível em: http://astro.if.ufrgs.br/bib/newton.htm).

ROYAL SOCIETY. *Imagens do telescópio de Isaac Newton.* Disponível em https://pictures.royalsociety.org/image-rs-8462. Acessado em 29 de abril de 2016 às 17h42.

SEGUNDA parte da carta de Newton a Henry Oldenburg. Disponível em http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03977/36. Acessado em 02 de maio de 2016 às 14h35.

SOARES, Kalessandra Mattos. *História da matemática na formação de professores do ensino fundamental.* (1ª a 4ª série. Florianópolis: 2004. Dissertação (Mestrado em Educação e Cultura). Universidade do Estado de Santa Catarina, UDESC.

SOUZA, Veriano Catinin. *A origem do Cálculo Diferencial e Integral.* Trabalho de Conclusão de Curso, 2001. Universidade Candido Mendes, Rio de Janeiro.

TERCEIRA parte da carta . Disponível em http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03977/37. Acessado em 02 de maio de 2016 às 15h59.

THE NEWTON PROJECT. Disponível em http://www.newtonproject.sussex.ac.uk/prism.php?id=150. Documentos 110, 111, 112, 113. Acessado em 01 de maio de 2016 as 11h03.