

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO - UFTM



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT



Dissertação de Mestrado

Introdução à Teoria dos Grafos e O Problema da Coloração

Ananda Kainne Oliveira Domeneguetti

Uberaba - Minas Gerais

Março de 2019

Introdução à Teoria dos Grafos e O Problema da Coloração

Ananda Kainne Oliveira Domenegueti

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFTM, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador: Prof. Dr. Leonardo de Amorim
e Silva**

Uberaba - Minas Gerais

Março de 2019

**Catálogo na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do
Triângulo Mineiro**

D712i

Domenegueti, Ananda Kainne Oliveira

Introdução à teoria dos grafos e o problema da coloração / Ananda Kainne Oliveira Domenegueti. -- 2019.

81 f. : il., fig., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)

-- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2019

Orientador: Prof. Dr. Leonardo de Amorim e Silva

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Teoria dos grafos. 3. Matemática (Ensino médio). I. Silva, Leonardo de Amorim e. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 51(07)

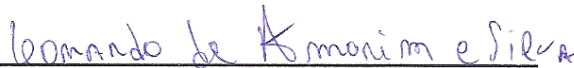
Ananda Kainne Oliveira Domenegueti

Introdução à Teoria dos Grafos e O Problema da Coloração

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

29 de março 2019.

Banca Examinadora



Prof. Dr. Leonardo de Amorim e Silva

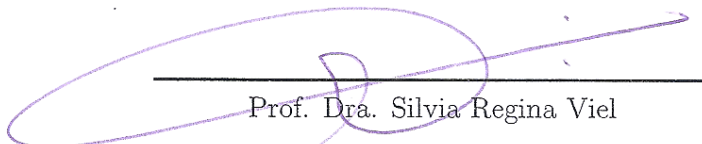
Orientador

Unversidade Federal do Triângulo Mineiro



Prof. Dr. Rafael Peixoto

Universidade Federal do Triângulo Mineiro



Prof. Dra. Silvia Regina Viel

Centro Universitário de Franca

*A Deus, que tem me sustentado até aqui.
Aos meus pais, Marcos e Rosana, por todo
apoio e incentivo.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me concedido sabedoria para concluir mais essa etapa da minha vida. Sem Ele, eu jamais conseguiria.

A toda minha família, principalmente aos meus pais e ao meu irmão, por todo auxílio e credibilidade em mim depositada.

Ao Kelvin Xavier, pelo apoio e compreensão durante esse processo.

A todos os docentes do PROFMAT da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, que foram fundamentais para minha formação, em especial meu orientador Prof. Dr. Leonardo de Amorim e Silva, pelo auxílio, dicas, paciência e apoio na escrita desse trabalho.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Aos meus professores de graduação do Uni-FACEF, Silvia, Lucinda, Antônio Carlos e Adriana, que sempre me incentivaram a dar continuidade aos meus estudos.

Aos meus amigos de turma PROFMAT 2016, especialmente à Larissa, Silvana, Alex e André, pelos longos dias de estudo com os quais aprendi muito e evolui durante o curso. Suas companhias fizeram essa etapa ainda mais proveitosa e agradável.

Aos meus amigos “TriboFull”, por todo incentivo, ao João Bianco pelo auxílio nas correções ortográficas.

E a todos que fizeram parte dessa etapa, que me incentivaram e torceram por mim, o meu muito obrigado.

“Confia no Senhor de todo o teu coração, e não te estribes no teu próprio entendimento”.

Provérbios 3:5

Resumo

A Teoria dos grafos é a área da Matemática que estuda a representação de um conjunto de objetos e as relações existentes entre eles retratadas através de um esquema chamado grafo. Essa teoria possui várias vertentes e diversos problemas, mas o foco deste trabalho é o estudo da coloração de grafos e das situações que envolvem esse tipo de conceito. Para isso foi feita uma introdução com as definições, teoremas e lemas mais relevantes e pesquisas sobre alguns tipos de algoritmos de coloração já existentes para solucionar essas questões. A partir desse estudo foram escolhidas e aplicadas atividades com problemas usuais de grafos para alunos do Ensino Médio de uma escola pública, com o objetivo de inserir o conceito de grafos em sala de aula e instigar a curiosidade e o desejo de aprender matemática.

Palavras-chave: Grafos. Coloração. Vértices. Arestas.

Abstract

The Theory of Graphs is an area of Mathematics that studies the representation of a set of objects and the differences created between them through a scheme called graph. This is an example that has several objectives, but the focus is the study of the coloring of graphs and the situations that involve this type of concept. This is done to be ready to insert, the lemmas and lemmas more relevant and told on some types of color samples are already already to the such issues. From this study were chosen and programmed with the usual resources of graphs for the students of High School and instigate the curiosity and the desire to learn mathematics.

Keywords: Graphs. Coloring. Vertices. Edges.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	CONCEITOS BÁSICOS DE GRAFOS	17
3	COLORAÇÃO	29
3.1	Coloração de vértices	29
3.1.1	Algoritmo de coloração sequencial	29
3.1.2	Algoritmo de Welsh-Powell	37
3.1.3	Algoritmo de Dsatur	39
3.2	Coloração de mapas	44
3.3	O Teorema das Quatro Cores	47
3.4	Coloração de arestas	53
3.4.1	Algoritmo de coloração de arestas baseado na demonstração do Teorema de Vizing	61
4	APLICAÇÃO DE GRAFOS NO ENSINO MÉDIO	65
4.1	Plano de aula - O problema das três casas	66
4.1.1	Objetivo	66
4.1.2	Ementa	66
4.1.3	Desenvolvimento	66
4.1.4	O problema das três casas	66
4.1.5	Demonstração	67
4.2	Plano de aula - Coloração de mapas e o Teorema das 4 cores	69
4.2.1	Objetivo	69
4.2.2	Ementa	69
4.2.3	Desenvolvimento	69
4.2.4	Coloração do Mapa político do Brasil	70
4.3	Registro Reflexivo da autora	73
4.3.1	1ª série do Ensino Médio	73
4.3.2	2ª série do Ensino Médio	74
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	76
	REFERÊNCIAS	77
A	ATIVIDADE 1	79

B	QUESTIONÁRIO	80
C	ATIVIDADE 2	81
D	ATIVIDADE 3	82

Lista de ilustrações

Figura 1 – Pontes de Königsberg	15
Figura 2 – Grafo das pontes de Königsberg	18
Figura 3 – Mapa da América do Sul	18
Figura 4 – Grafo da América do Sul	18
Figura 5 – Grafo com laço	19
Figura 6 – Grafo à esquerda da sua respectiva matriz de adjacência	20
Figura 7 – Grafo 3-regular	20
Figura 8 – Grafo 2-regular	20
Figura 9 – Grafo G	21
Figura 10 – Grafo H	21
Figura 11 – Caminho de um grafo	22
Figura 12 – Caminho fechado	22
Figura 13 – Grafo conexo	22
Figura 14 – Grafo desconexo	22
Figura 15 – Ciclo par	23
Figura 16 – Ciclo ímpar	23
Figura 17 – Árvores	23
Figura 18 – Árvore geradora	23
Figura 19 – Grafo K	24
Figura 20 – Conjunto independente maximal	25
Figura 21 – Grafo G com a primeira ordenação dos vértices	25
Figura 22 – Grafo G com a segunda ordenação dos vértices	26
Figura 23 – Grafo bipartido	27
Figura 24 – Grafo bipartido	27
Figura 25 – Cidades do Estado	27
Figura 26 – Conjunto independente do grafo das Cidades do Estado	28
Figura 27 – Grafo H com a primeira ordenação dos vértices	30
Figura 28 – Coloração do grafo H com a primeira ordenação dos vértices	31
Figura 29 – Grafo H com a segunda ordenação dos vértices	31
Figura 30 – Coloração do grafo H com a segunda ordenação dos vértices	32
Figura 31 – Ciclo par	34
Figura 32 – Coloração do ciclo par	34
Figura 33 – Ciclo ímpar	34
Figura 34 – Coloração do ciclo ímpar	34
Figura 35 – Grafo G e sua cadeia de Kempe $G_{2,3}$	34

Figura 36 – Grafo exemplo para checar o algoritmo de bipartido	35
Figura 37 – Sequência de coloração do grafo G	36
Figura 38 – Coloração final do grafo G	36
Figura 39 – Grafo exemplo de coloração pelo algoritmo de Welsh-Powell	37
Figura 40 – Coloração 1 pelo algoritmo de Welsh-Powell	38
Figura 41 – Coloração 2 pelo algoritmo de Welsh-Powell	38
Figura 42 – Coloração 3 pelo algoritmo de Welsh-Powell	38
Figura 43 – Coloração final pelo algoritmo de Welsh-Powell	39
Figura 44 – Coloração 1 pelo algoritmo de Dsaturn	40
Figura 45 – Coloração 2 pelo algoritmo de Dsaturn	40
Figura 46 – Coloração 3 pelo algoritmo de Dsaturn	40
Figura 47 – Coloração 4 pelo algoritmo de Dsaturn	40
Figura 48 – Coloração final pelo algoritmo de Dsaturn	41
Figura 49 – Grafo K da locação dos alunos nos exames finais	42
Figura 50 – Grafo K colorido de acordo com os elementos de cada conjunto	43
Figura 51 – Regiões do Estado de São Paulo	44
Figura 52 – Grafo do mapa das regiões do Estado de São Paulo	44
Figura 53 – Coloração final do Grafo das regiões do Estado de São Paulo	46
Figura 54 – Tetraedro, Cubo, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro	47
Figura 55 – Curva de Jordan	48
Figura 56 – Grafo G	50
Figura 57 – Grafo G'	50
Figura 58 – Caminho de vértice entre a e c	52
Figura 59 – Representação das relações entre reuniões e funcionários	53
Figura 60 – Coloração 1 do grafo das relações entre reuniões e funcionários	54
Figura 61 – Coloração 2 do grafo das relações entre reuniões e funcionários	54
Figura 62 – Coloração 3 do grafo das relações entre reuniões e funcionários	55
Figura 63 – Coloração final do grafo das relações entre reuniões e funcionários	55
Figura 64 – α_k disponível em v_k e w	57
Figura 65 – $\alpha_k = \alpha_j$, incide no vértice w	57
Figura 66 – fan antes da rotação.	57
Figura 67 – fan após a rotação em $n = k$ passos.	57
Figura 68 – A cor α_k , disponível em v_k , também está disponível em w	58
Figura 69 – Resultado após a rotação do fan em k passos.	58
Figura 70 – P termina em um vértice diferente de v_j ou w	59
Figura 71 – Resultado após alterar o caminho P e rotacionar o fan em k passos.	59
Figura 72 – Caso no qual P termina no vértice v_j	59
Figura 73 – Resultado após alternar o caminho P e rotacionar o fan em j passos.	59
Figura 74 – Caso no qual P termina no vértice w	60

Figura 75 – Resultado após alternar o caminho P e rotacionar o fan em $j + 1$ passos.	60
Figura 76 – Grafo A	62
Figura 77 – Coloração 1 das arestas do Grafo A	62
Figura 78 – Coloração 2 das arestas do Grafo A	63
Figura 79 – Coloração 3 das arestas do Grafo A	63
Figura 80 – Coloração 4 das arestas do Grafo A	63
Figura 81 – Coloração 5 das arestas do Grafo A	63
Figura 82 – Coloração 6 das arestas do Grafo A	64
Figura 83 – Coloração 7 das arestas do Grafo A	64
Figura 84 – Coloração final das arestas do Grafo A	64
Figura 85 – Problema das três casas	67
Figura 86 – Ligação de duas companhia às três casas	67
Figura 87 – Divisão do problema em regiões	68
Figura 88 – Tentativa de locação da ultima companhia	68
Figura 89 – Mapa do político Brasil	70
Figura 90 – Grafo representando o mapa do Brasil	70
Figura 91 – Matriz de adjacência	71
Figura 92 – Coloração 1: mapa do Brasil	72
Figura 93 – Coloração 2: mapa do Brasil	72
Figura 94 – Coloração 3: mapa do Brasil	72
Figura 95 – Coloração 4: mapa do Brasil	72
Figura 96 – Alunos do 1º ano tentando solucionar o problema das três casas	73
Figura 97 – Alunos do 2º ano resolvendo a primeira e a segunda etapa da atividade	75
Figura 98 – Alunos do 2º ano resolvendo a terceira e quarta etapa da atividade	75

Lista de tabelas

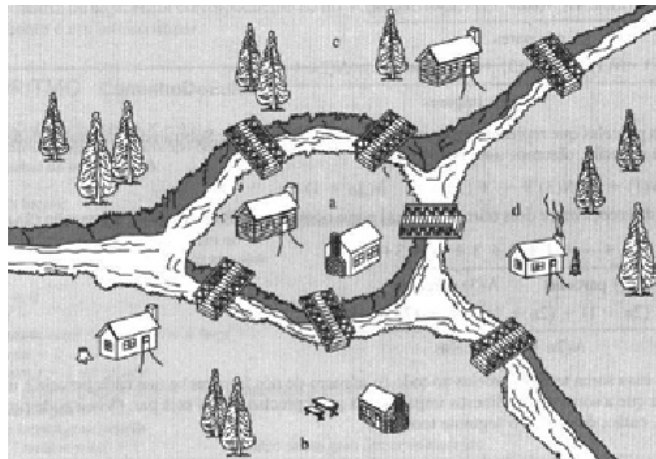
Tabela 1 – Vértices adjacentes do grafo	19
Tabela 2 – Grau dos vértice da figura 21	25
Tabela 3 – Locação dos alunos nos exames finais	41
Tabela 4 – Disciplinas e suas relações com conjunto da cor 1	42
Tabela 5 – Disciplinas com a cor 2	43
Tabela 6 – Disciplinas com a cor 3	43
Tabela 7 – Disciplinas com a cor 4	43
Tabela 8 – Conjunto da cor 1	45
Tabela 9 – Conjunto da cor 2	45
Tabela 10 – Conjunto da cor 3	46
Tabela 11 – Conjunto da cor 4	46

1 INTRODUÇÃO

A teoria de grafos foi primeiramente desenvolvida pelo brilhante matemático Leonhard Euler (1707-1783), que nasceu na Basileia, norte da Suíça. Conforme (SAUTOY, 2018), desde criança Euler tinha muita facilidade em lidar com números e cálculos; para ele, fazer contas era tão fácil como respirar. Ingressou na universidade de Basileia aos treze anos e logo se tornou discípulo de Jean Bernoulli (1667-1748).

No ano de 1727, Euler se mudou para a cidade de São Petersburgo, onde aceitou uma vaga na Academia Russa de Ciências. Enquanto trabalhava em São Petersburgo, Euler se deparou com o enigma das pontes de Königsberg. Königsberg é cortada por um rio onde há duas ilhas que juntas, formam um complexo que na época tinha sete pontes.

Figura 1 – Pontes de Königsberg



Fonte: (OLIVEIRA; PEZZETA, 2016).

O povo da cidade queria saber se era possível fazer um passeio a pé pela cidade começando e terminando no mesmo lugar, de tal forma que os caminhantes cruzassem cada ponte exatamente uma vez. Segundo (SAUTOY, 2018), em 1736 Euler escreveu ao astrônomo da Corte de Viena o seguinte: “Esta pergunta é tão banal, mas me parecia digna de atenção porque nem a geometria, nem a álgebra, nem sequer a arte de fazer contas eram suficientes para respondê-la. Diante disso, me ocorreu perguntar se a resposta estaria na geometria de posição. Portanto, depois de um pouco de deliberação, obtive uma regra simples, com a ajuda da qual pude decidir de imediato se esta ida e volta é possível.” No mesmo ano ele apresentou um artigo (*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*) à Academia de Ciências de St. Petersburgo, sua tradução está disponível em (LOPES; TÁBOAS, 2015), considerado o nascimento da teoria de Grafos, Euler mostrou de fato que o problema não tinha solução.

O trabalho de Euler, usando a notação de teoria de grafos, mostrou que para uma viagem de ida e volta (sem retornar pelo mesmo caminho) seja possível, cada ponto, com exceção do início e fim, deve ter um número par de linhas entrando e saindo.

Com a teoria de grafos foi possível modelar e resolver situações ditas complexas de forma simplificadas através de um esquema chamado grafo. Essa forma de resolver problemas teve implicações em diversos ramos da sociedade, desde o estudo de malhas viárias, problemas envolvendo redes de comunicação, fluxo de um jogo, utilização em programas computacionais dentre outros. Nosso foco neste trabalho é o estudo de coloração de vértices, arestas e mapas.

O estudo da coloração de grafos se destaca com o problema das quatro cores proposto pelo matemático Francis Guthrie, aluno De Morgan em 1852 que apresentou a seguinte questão: “Qualquer mapa político pode ser colorido com no máximo quatro cores?”. O problema teve várias tentativas de demonstração, mas foi provado somente em 1976 por Appel e Haken, com o uso de computadores com mais de mil horas de funcionamento e em alta velocidade, o que gerou desconforto pelos matemáticos pelo fato de ser impossível verificar-la manualmente, por isso é chamada por muitos a demonstração mais “feia” da matemática, conforme (JURKIEWICZ, 2009).

O Teorema das Quatro Cores afirma que quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa planar. Veremos no decorrer do trabalho que todo mapa pode ser representado por um grafo, mas nem todo grafo por um mapa. O grafo nada mais é do que um conjunto de pontos (vértices) ligados por retas (arestas), dessa forma a coloração de um mapa é semelhante a do grafo que é basicamente atribuir cores aos seus vértices (ou arestas) de forma que vértices adjacentes recebam cores disjuntas. O processo de colorir um grafo é simples, basta atribuir uma cor para cada vértice, porém o grande problema da coloração surge quando desejamos colorir o grafo com o menor número possível de cores.

No capítulo 1 iremos apresentar as definições e conceitos básicos da teoria dos grafos que serão ferramentas necessárias para compreender colorações de vértices, arestas e suas aplicações vistas no decorrer do trabalho.

No capítulo 2 apresentaremos mais especificamente o problema de coloração de vértices e de arestas, e estudaremos alguns algoritmos com o intuito de encontrar uma coloração mínima desejável.

No capítulo 3 mostraremos um trabalho de grafos desenvolvido com alunos das 1ª e 2ª Série do Ensino Médio de uma Escola Pública da cidade de Franca-SP, que teve como objetivo trabalhar a interpretação de problemas e inserir uma matemática moderna e dinâmica por meio do estudo de grafos. Na 1ª série do ensino médio, foi aplicado O Problema das Três Casas e através dele inserido o conceito de grafos, e um breve comentário de como eles estão presentes nas redes sociais. Na 2ª série do ensino médio, como os alunos já haviam estudado matriz, foi abordado o grafo também em forma de matriz de adjacência mais as atividades de Coloração de Mapas e O Problema dos Químicos.

2 Conceitos básicos de grafos

Neste capítulo serão estudadas as definições de grafo, subgrafo, matriz de adjacência, entre outras, com o objetivo de introduzir conceitos importantes para entender e desenvolver a coloração de grafos. As principais referências usadas neste capítulo são: (NETTO; JURKIEWICZ, 2009), (NETTO, 2003) e (ALVES, 2015).

Para qualquer conjunto V , denotamos $V^{(2)}$ o conjunto de todos os pares não ordenados de elementos de V . Os elementos de $V^{(2)}$ serão identificados com os subconjuntos de V que têm cardinalidade 1 ou 2.

Definição 1. Um **grafo** é um par $G = (V, E)$ em que $V \neq \emptyset$ é um conjunto arbitrário e E é um subconjunto de $V^{(2)}$. Os elementos de V são chamados **vértices** e os de E são chamados **arestas**.

Neste trabalho não estudaremos grafos direcionados, assim uma aresta (v, w) pode ser representada como (w, v) , ou de forma mais simples por vw ou wv . Dessa forma, cada elemento de $V^{(2)}$ terá a forma (v, w) , sendo v e w dois elementos de V . Se $V \neq \emptyset$ e n é o número de elementos de V então $V^{(2)}$ tem $\binom{n}{2} + n = \frac{n(n-1)}{2} + n$ elementos, considerando os casos (v, v) .

Seja $v, w \in V$ e $vw \in E$, nesse caso a aresta vw **incide** em v e em w e v e w são “pontas” da aresta vw . Além disso diremos que v e w são vértices **vizinhos** ou **adjacentes**.

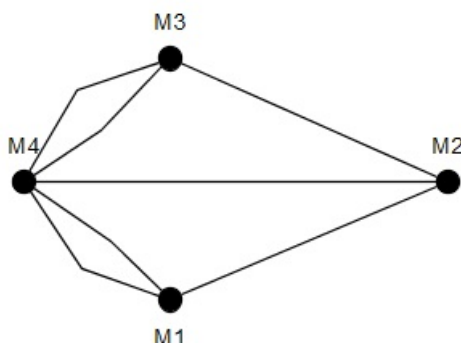
Definição 2. O **conjunto dos vizinhos** de $v \in V$, $N(v)$, é formado por todos os vértices adjacentes a v , ou seja, $N(v) = \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$.

A quantidade de relações de adjacência indicam o número de **ligações** de um grafo e o número de ligações indica o **tamanho** do grafo. O número de vezes que as arestas incidem sobre um vértice v é chamado de **grau do vértice** v , denotado por $d(v)$. O maior d de um grafo G é representado por $\Delta(G)$ e o menor por $\delta(G)$ sendo respectivamente o **grau máximo** e o **grau mínimo** de G . A **ordem** de um grafo é definida pelo número de vértices que ele possui.

Um grafo pode representar variadas situações, como é o caso de mapas. Os grafos são muito utilizados em problemas de coloração de mapas, que é o assunto dos próximos capítulos, mas inicialmente vamos entender como podemos representar um mapa em forma de grafo.

Temos a seguir um grafo com a representação do mapa das pontes de Königsberg, onde as margens são representadas pelos vértices $V = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ e as pontes pelas arestas $E = \{(M_1, M_2), (M_1, M_4), (M_2, M_3), (M_2, M_4), (M_3, M_4), (M_4, M_3), (M_4, M_1)\}$.

Figura 2 – Grafo das pontes de Königsberg



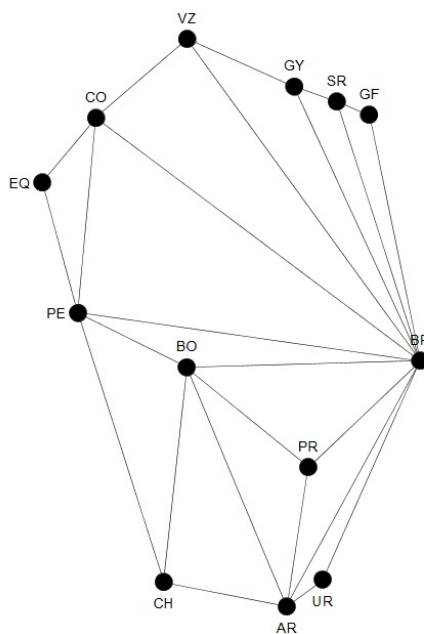
Mapas políticos, mapas de regiões, entre outros, também podem ser representados por grafos, como podemos ver no exemplo 2.1.

Exemplo 2.1. A seguir temos o mapa e o grafo da América do Sul. Os países são representados pelos vértices e as arestas do grafo ligam os países vizinhos.

Figura 3 – Mapa da América do Sul



Figura 4 – Grafo da América do Sul



Fonte: <https://www.guiageografico.com>

Definição 3. Um **laço** é uma aresta que conecta um vértice a ele mesmo.

Definição 4. Um grafo é **simples** se ele não tem laços nem arestas paralelas.

O grafo representado na figura 4 não possui laços, ou seja, não contém uma aresta que liga um vértice a ele mesmo, logo é um grafo simples.

Exemplo 2.2. O grafo representado na figura a seguir possui um laço no vértice 5, logo não é um grafo simples.

Figura 5 – Grafo com laço

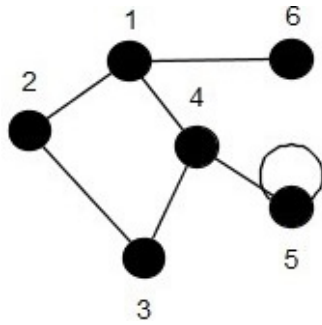


Tabela 1 – Vértices adjacentes do grafo

Vértices	Vértices adjacentes
1	2, 4, 6
2	1, 3
3	2, 4
4	1, 3, 5
5	4, 5
6	1

Para uma melhor observação foi feita uma tabela contendo duas colunas, uma com os vértices do grafo e outra com seus respectivos vértices adjacentes, o que nos fornece a relação de adjacência do grafo. Com ela é fácil perceber, por exemplo, que a aresta (2,3) é adjacente à (2,1), e que (1,2) é adjacente às arestas (1,4) e (1,6) e assim sucessivamente. É válido ressaltar que, como estamos tratando de grafos não orientados, as arestas (1,2) e (2,1) são equivalentes.

A coluna de vértices adjacentes também auxilia na construção da matriz de adjacência, que além de facilitar a observação de adjacência do grafo é um dos meios utilizados para informar a estrutura do grafo a um computador.

Dado um grafo G , podemos representá-lo em uma matriz de adjacência $n \times n$ e $M = [m_{ij}]$, sendo n o número de vértices. As entradas da matriz vão depender se as arestas do grafo têm pesos ou não, mas de modo geral os valores das linhas e colunas indicam a adjacência entre os vértices.

O grafo com pesos é usado, por exemplo, quando é levado em conta o tamanho das arestas; como não serão estudados grafos com essas características, usaremos apenas a definição de matrizes dos grafos sem pesos.

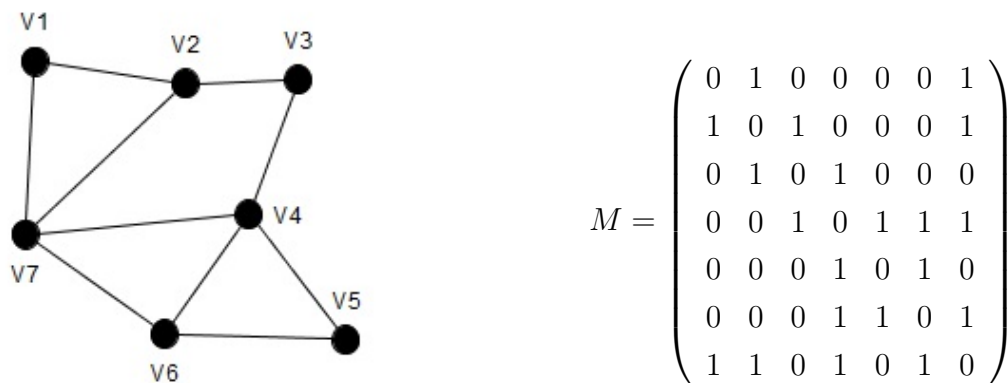
Definição 5. Dado um grafo $G = (V, E)$, a **matriz de adjacência** de G é uma matriz $M = [m_{ij}]$ de ordem $n \times n$ tal que:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{se } (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$$

Portanto, na representação de um grafo simples e sem pesos, a entrada m_{ij} é representada por 1 quando v_i e v_j são adjacentes e por 0 quando não são adjacentes.

Exemplo 2.3. Um grafo G e sua respectiva matriz de adjacência.

Figura 6 – Grafo à esquerda da sua respectiva matriz de adjacência



Definição 6. Um grafo em que todos os vértices têm o mesmo grau k é chamado de **grafo k -regular**.

As próximas figuras são exemplos de grafos regulares, pois todos os seus vértices possuem o mesmo grau, ou seja, a mesma quantidade de ligações. Na figura 7 o grafo possui 3 ligações por vértice, nesse caso é chamado de grafo 3-regular. Na figura 8 cada vértice possui 2 ligações e é chamado de grafo 2-regular.

Figura 7 – Grafo 3-regular

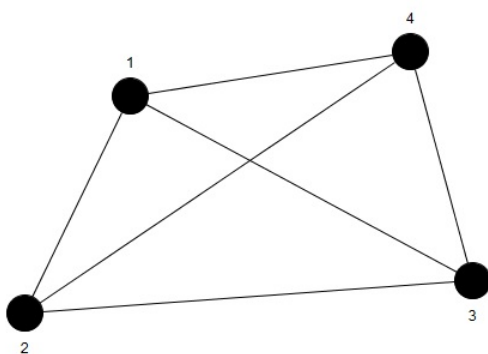
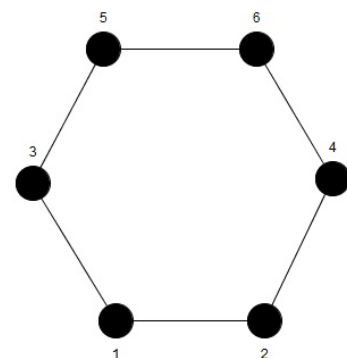


Figura 8 – Grafo 2-regular



Definição 7. Dado um grafo G , um **subgrafo** de G é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.

Exemplo 2.4. O grafo H é um subgrafo de G , pois todos os vértices e arestas de H estão contidos em G .

Figura 9 – Grafo G

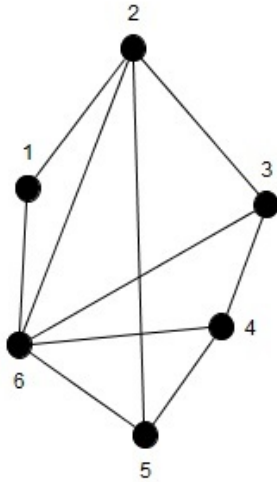
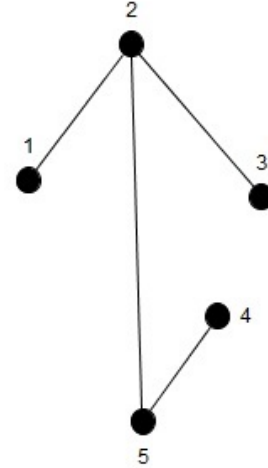


Figura 10 – Grafo H



Definição 8. Um grafo G é dito **completo** se é simples e se, para quaisquer pares distintos de vértices v e w , tivermos $(v, w) \in E(G)$. A notação do grafo completo com n vértices é K_n

A figura 7 é um exemplo de grafo completo, pois é um grafo simples e todos os seus vértices são adjacentes entre si.

Teorema 2.1. Seja m o número de arestas e n o número de vértices de um grafo completo então, $m = \frac{n(n-1)}{2}$

Demonstração. A prova é por indução matemática. Chamaremos G_n um grafo que contém n vértices. Consideramos primeiro o caso trivial, o grafo G_1 . Nesse caso, como existe somente um vértice, é impossível definir uma aresta que não seja um laço. Então não pode existir nenhuma aresta, e verificamos $m = \frac{n(n-1)}{2} = 0$ se $n = 1$.

Suponhamos que a hipótese é verdadeira para G_n , onde $n > 1$ então $m = \frac{n(n-1)}{2}$. Seja agora o grafo G_{n+1} , queremos provar que $m = \frac{n(n+1)}{2}$. O vértice v_{n+1} , que foi acrescentado a G_n obtendo então G_{n+1} , terá n novas arestas ligadas a ele. Assim, no número de arestas de G_{n+1} , teremos:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

□

Definição 9. Um **caminho** em um grafo G é um subgrafo simples H de G cujos vértices (distintos) podem ser rearranjadas numa seqüência v_1, v_2, \dots, v_n de forma tal que $E(H) = \{(v_i, v_{i+1}), 1 \leq i \leq n-1\}$. Se, além disso, H é tal que $v_n v_1 \in E(H)$, H é denominado um **caminho fechado**. O primeiro vértice é chamado de vértice inicial e o último é chamado de vértice final.

Ambos os grafos abaixo possuem vértices ordenados para representar um caminho, sendo que o grafo da figura 12 é um caminho fechado.

Figura 11 – Caminho de um grafo

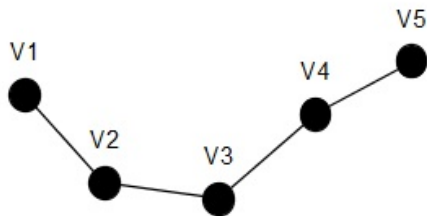
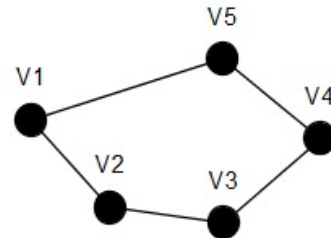


Figura 12 – Caminho fechado



Definição 10. O **comprimento de um caminho** de um vértice v a um vértice w é o número mínimo de arestas existentes entre eles.

Nas figuras 11 e 12 podemos formar vários pares de vértices, e ao escolher um par de vértice o comprimento do caminho obtido pode ser diferente de um grafo para o outro, por exemplo, o caminho de v_1 ao v_3 é igual a 2 em ambas as figuras, já o caminho de v_1 a v_5 , no grafo da figura 11 é igual a 4 e no da figura 12 é igual a 1.

Definição 11. O grafo G é dito **conexo** se existe um caminho entre quaisquer dois vértices distintos de G . Quando algum de seus vértices não satisfaz tal propriedade, o grafo é dito **desconexo**.

Figura 13 – Grafo conexo

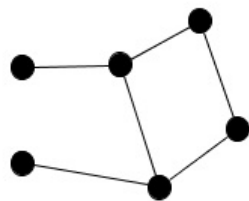
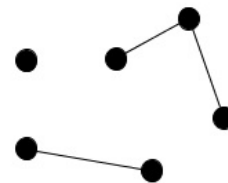


Figura 14 – Grafo desconexo



Definição 12. Um **ciclo** de um grafo G é um caminho fechado de G , que possui três ou mais vértices. Sua notação é C_n .

Podemos afirmar também, sobre um grafo formado por um ciclo, que ele é k -regular e possui grau 2.

Analisando novamente os grafos da figura 11 e 12 pela definição do ciclo de um grafo, podemos afirmar que o grafo da figura 11 não possui ciclo, pois não é fechado, enquanto o da figura 12 possui.

Definição 13. Um ciclo com um número par de vértices é chamado de **ciclo par**; um ciclo com um número ímpar de vértices é chamado de **ciclo ímpar**.

Figura 15 – Ciclo par

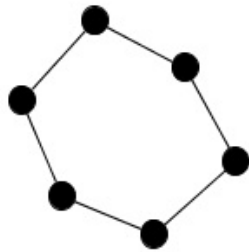
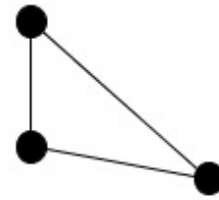
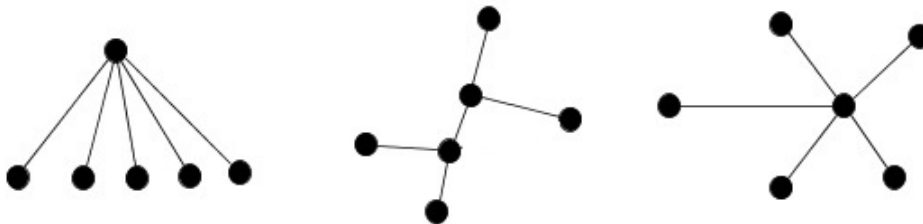


Figura 16 – Ciclo ímpar



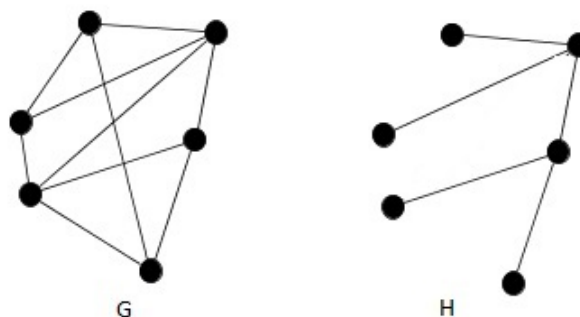
Definição 14. Uma **árvore** é um grafo conexo e acíclico (não possui ciclos). Uma **árvore geradora** de um grafo G é qualquer árvore de G que contenha todos os vértices de G .

Figura 17 – Árvores



Exemplo 2.5. O grafo H é uma árvore geradora do grafo G

Figura 18 – Árvore geradora



Lema 1. Seja G um grafo com n vértices. Se G é uma árvore, então o número de arestas de G é igual a $n - 1$.

Demonstração. Seja G uma árvore; provaremos por indução no número de vértices n que G tem $n - 1$ arestas. Os casos $n = 1$ e $n = 2$ são evidentes; suponhamos portanto que a propriedade vale para os casos em que G é uma árvore com menos que n arestas. Se eliminarmos uma aresta uv de G , ficamos com um grafo G_0 sem ciclos e com duas componentes conexas (se houvesse um caminho em G_0 de u para v , então em G esse caminho adicionado da aresta uv seria um ciclo). A hipótese de indução aplica-se a cada uma das componentes: se elas têm, respectivamente, p e q vértices, terão $p - 1$ e $q - 1$ arestas; mas G tem os mesmos vértices e mais uma aresta que G_0 , logo o número de arestas de G é $p - 1 + q - 1 + 1 = n - 1$, como queríamos demonstrar. \square

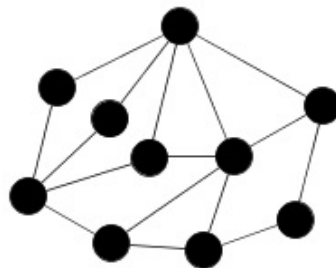
Lema 2. *Toda árvore não trivial (com mais de um vértice) tem pelo menos dois vértices com grau 1.*

Demonstração. Pelo lema anterior sabemos que uma árvore tem que ter exatamente $n - 1$ arestas, sendo n o número de vértices da árvore. Portanto, a soma dos graus dos vértices da árvore tem que ser igual ao dobro do número de arestas, ou seja, $2n - 2$. Além disso, o grau de todo vértice é pelo menos 1 porque uma árvore é um grafo conexo. Se a árvore tiver no máximo um vértice com grau 1, então a soma dos graus dos vértices será pelo menos $2(n - 1) + 1 > 2n - 2$, o que não é possível. Portanto, toda árvore com mais de um vértice tem pelo menos dois vértices com grau 1. \square

Definição 15. Um **conjunto independente** de um grafo G é um conjunto S de vértices de G tal que não existem dois vértices adjacentes contidos em S . Em outras palavras, se u e v são vértices quaisquer de um conjunto independente, não há aresta entre u e v . Um conjunto independente é dito **maximal** quando não existe nenhum outro conjunto independente que o contenha.

Exemplo 2.6. No grafo a seguir, formado por 10 vértices, é possível obter vários conjuntos independentes desse grafo.

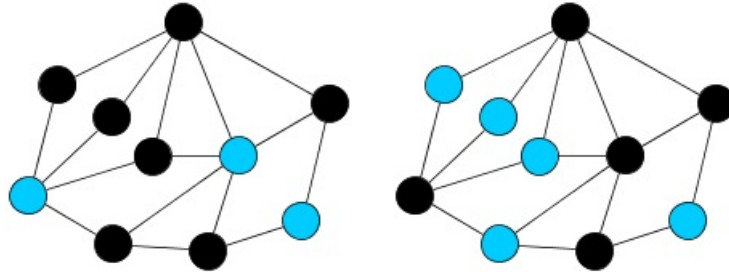
Figura 19 – Grafo K



Na figura [20](#), os vértices coloridos de azul representam conjuntos independentes do grafo anterior. Podemos observar que ambos os grafos formam um **conjunto independente maximal**, pois não existe nenhum outro conjunto independente que o contenha. No grafo

do lado direito, o conjunto independente possui maior número de vértices possíveis; quando isso ocorre é chamado de **subconjunto independente máximo de vértices** do grafo.

Figura 20 – Conjunto independente maximal



A seguir vamos estudar um algoritmo dito guloso, pois ele realiza a escolha que parece melhor no momento sem levar em conta as consequências, e tem como objetivo facilitar a formação do conjunto independente máximo de um grafo.

Algoritmo guloso para construção de um Conjunto Independente Máximo:

1. Selecione um vértice (de menor grau) ainda não considerado;
2. Se este vértice não possuir conflitos com vértices já adicionados, inclua-o no conjunto;
3. Remova as arestas deste vértice e os seus vértices vizinhos do grafo original;
4. Se houverem vértices ainda não considerados volte para 1.

Utilizando o grafo a seguir vamos desenvolver o algoritmo guloso para encontrar o Conjunto Independente Máximo, que chamaremos de V . Primeiro vamos determinar o grau de cada um dos vértices desse grafo (número de arestas ligadas a esse vértice).

Figura 21 – Grafo G com a primeira ordenação dos vértices

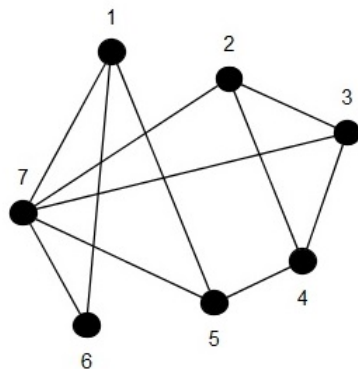


Tabela 2 – Grau dos vértice da figura

21

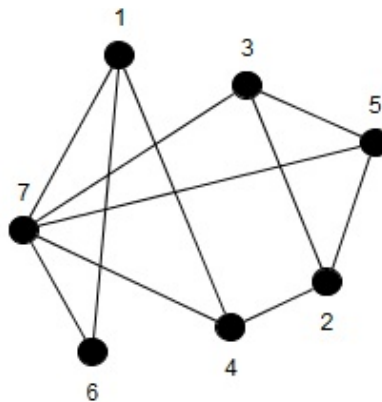
Vértices	Grau
1	3
2	3
3	3
4	3
5	3
6	2
7	5

Observando a tabela, o vértice de menor grau desse grafo é o v_6 , assim $v_6 \in V$, e pelo terceiro item devemos remover os vértices v_1 e v_7 . Para a escolha do próximo vértice

temos do v_2 até o v_5 ; todos possuem grau 3, então podemos escolher qualquer um entre eles. Para facilitar, faremos em ordem numérica crescente, assim o próximo vértice é o v_2 ; ele não é adjacente ao v_6 , assim $v_2 \in V$, e pelo terceiro item removeremos v_3 e v_4 . Desta maneira resta apenas o v_5 , e como ele não é adjacente aos outros vértices do conjunto V , então $v_5 \in V$. Portanto $V = \{v_6, v_2, v_5\}$

Esse algoritmo é bem útil, mas nem sempre fornece o Conjunto Independente Máximo do grafo. Um exemplo disso é se alterarmos a ordenação dos vértices como mostra na figura abaixo:

Figura 22 – Grafo G com a segunda ordenação dos vértices



Seguindo os mesmos passos que no exemplo anterior, $v_6 \in V$, E pelo terceiro item devemos remover os vértices v_1 e v_7 . O próximo vértice a ser escolhido é o v_2 , e removemos os demais vértices do grafo, pois todos os que restaram são adjacentes a v_2 . Portanto $V = \{v_6, v_2\}$. Nesse caso não encontramos Conjunto Independente Máximo do grafo e sim Conjunto Independente Maximal (não possui nenhum vértice que possa ser inserido nesse conjunto sem que ele perca a independência).

Definição 16. Diz-se que um grafo é **bipartido** sempre que o seu conjunto de vértices puder ser particionado em dois subconjuntos independentes U e V . Frequentemente se escreve $G = (U, V, E)$ para denotar um grafo bipartido cuja partição tem as partes U e V .

Definição 17. Um grafo bipartido completo, $G = (U, V, E)$, é um grafo bipartido tal que para quaisquer dois vértices, $u \in U$ e $v \in V$, uv é uma aresta em G . A notação de um grafo bipartido completo com n é $K_{n,n}$

Exemplo 2.7. Ambas as figuras a seguir são grafos bipartidos onde os vértices representados por cores diferentes são subconjuntos do grafo G de modo que sua intersecção é vazia, sua união é o grafo G e as extremidades de suas arestas estão uma em cada subconjunto.

Figura 23 – Grafo bipartido

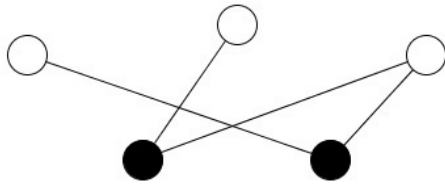
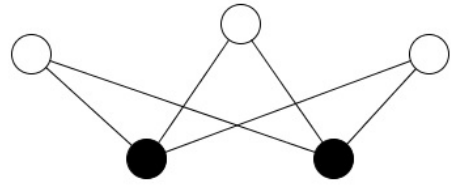


Figura 24 – Grafo bipartido



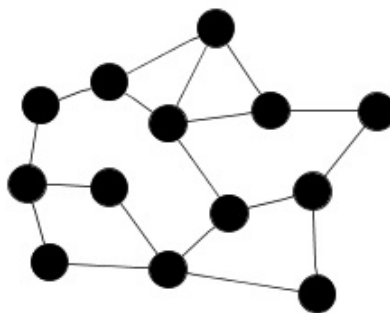
Chamando de U o subconjunto formado pelos vértices coloridos em preto da figura 24, e de V o subconjunto dos vértices em branco, podemos observar que esse grafo é bipartido completo, pois todos os vértices contidos em U são ligados a todos os vértices de V .

Definição 18. O *número de independência* $\alpha(G)$ de um grafo G é a cardinalidade de um subconjunto independente máximo de vértices do grafo.

O conceito de conjunto independente pode ser aplicado para resolver um problema quando desejamos evitar duplicações de esforços.

Exemplo 2.8. Suponhamos que um candidato a governador queira promover o máximo possível sua campanha, mas não possui verba suficiente para divulgar em todas as cidades do Estado, por isso limitou da seguinte forma: Cidades próximas (ligadas por estradas), só uma delas seria ponto de campanha. Neste exemplo as cidades são os vértices do grafo, as cidades próximas os vértices adjacentes e as estradas às arestas.

Figura 25 – Cidades do Estado

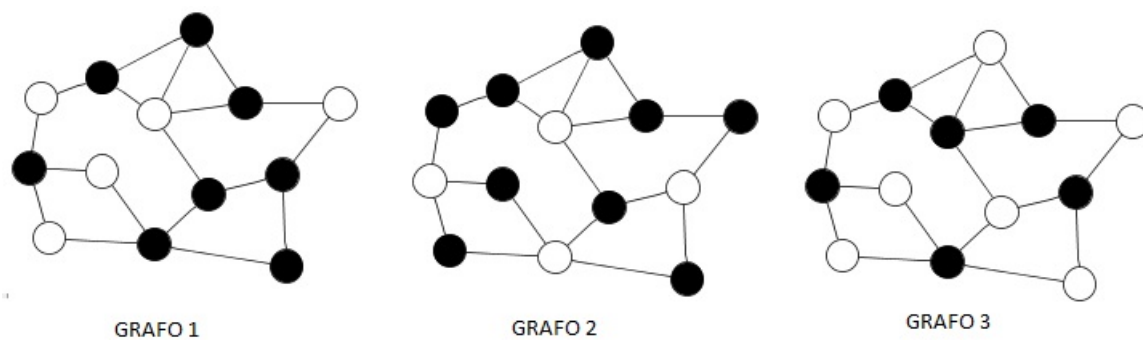


Para resolvermos o problema devemos encontrar o conjunto independente máximo. Para obter o subconjunto independente, os vértices que representam as cidades com ponto de campanha serão coloridos de branco.

A seguir temos três exemplos de subconjuntos de vértices independentes, no GRAFO 2 não é possível acrescentar mais nenhum vértice no subconjunto sem que ele perca a independência, dessa forma dizemos que ele é subconjunto independente maximal. No GRAFO 3 além de não ser possível acrescentar mais nenhum vértice sem que ele perca a independência é o subconjunto com a maior cardinalidade possível, então ele representa um subconjunto independente máximo.

Na situação problema o candidato quer o número máximo de cidades para divulgação desde que elas não sejam cidades ligadas por uma aresta (cidades próximas), portanto o GRAFO 3 é o recomendado.

Figura 26 – Conjunto independente do grafo das Cidades do Estado



Notamos que quanto mais vértices e mais arestas temos no problema, mais difícil se torna para encontrar o subconjunto independente máximo do grafo em questão.

3 Coloração

Seja um grafo G , podemos definir a coloração de seus vértices e suas arestas. Coloração de vértices nada mais é do que atribuir cores, números ou símbolos, aos vértices de um grafo, sendo que os vértices adjacentes possuem “cores” diferentes. O mesmo é válido para coloração de arestas obedecendo a restrição para suas arestas adjacentes. As principais referências usadas neste capítulo são: (NETTO; JURKIEWICZ, 2009), (NETTO, 2003) e (ALVES, 2015).

3.1 Coloração de vértices

Definição 19. *O número cromático $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores necessárias para colorir os vértices de um grafo de modo que vértices adjacentes não tenham a mesma cor. Se o número de cores utilizado na coloração de vértices de um grafo for igual a $\chi(G)$, a coloração é dita ótima.*

Uma coloração de vértices é sempre possível, pois se o grafo possuir n vértices podemos colorir-lo com n cores distintas, mas nem sempre dessa forma iremos obter uma coloração ótima. Por isso, estudaremos métodos para nos fornecer a melhor coloração.

O primeiro método de coloração a ser estudado é o **algoritmo de coloração sequencial**. Para realizar a coloração são feitas iterações, sendo que em cada uma temos uma coloração parcial válida usando cores que pertencem ao conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, sendo n o número de cores.

3.1.1 Algoritmo de coloração sequencial

De início, escolha uma sequência de vértices para realizar o algoritmo (essa sequência é livre não precisa ser necessariamente em ordem crescente ou decrescente), em seguida faça a iteração:

Enquanto houver vértice incolor, faça:

1. seja v um vértice incolor
2. se alguma cor i não é usada por nenhum vizinho de v , então item 3; senão item 4.
3. atribua cor i a v ;
4. atribua cor n a v e faça $n = n + 1$

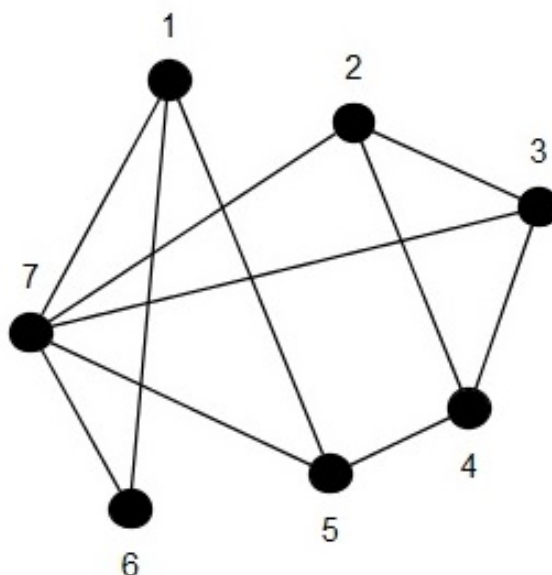
A coloração parcial no início de cada iteração é válida no seguinte sentido: não existe aresta (v, w) tal que v e w têm a mesma cor.

Podemos dizer que se trata de uma *heurística gulosa*, pois consiste inicialmente na escolha da primeira cor disponível, sem avaliar as consequências a longo prazo dessa escolha. Ou seja, o algoritmo pode encontrar uma coloração que usa um número de cores bem maior que o número cromático.

Seguindo os passos do algoritmo desenvolveremos o exemplo a seguir:

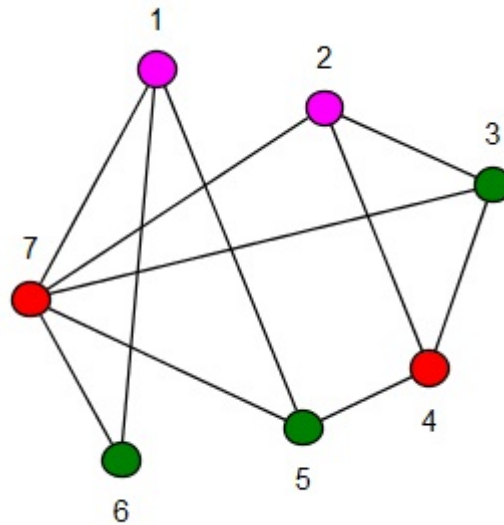
Exemplo 3.1. *Inicialmente foi atribuído uma sequência arbitrária para cada vértice, como segue o grafo abaixo.*

Figura 27 – Grafo H com a primeira ordenação dos vértices



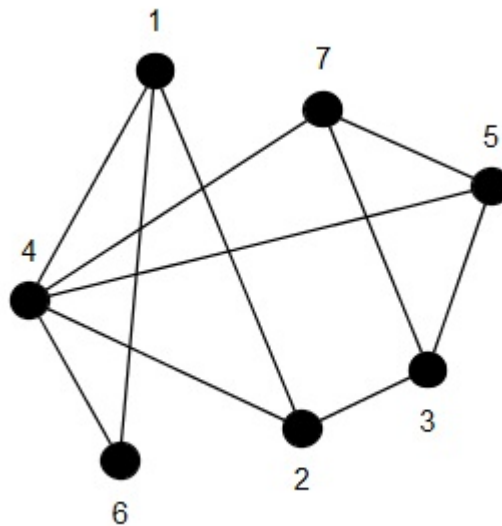
Respeitando a sequência atribuída anteriormente vamos colorir os vértices. O v_1 foi “colorido” de rosa, e como o v_2 não é adjacente ao v_1 atribuímos a mesma cor a ele. O v_3 é adjacente ao v_2 , assim terá uma nova cor, que no caso foi verde. O v_4 é adjacente ao v_2 e ao v_3 , portanto não pode ser colorido nem de rosa e nem de verde, assim atribuímos a ele a cor vermelha. Devemos fazer essa análise com todos os vértices até que estejam todos coloridos, respeitando a ordem estabelecida no início. Deste modo obtemos uma coloração para o grafo da figura [27](#).

Figura 28 – Coloração do grafo H com a primeira ordenação dos vértices



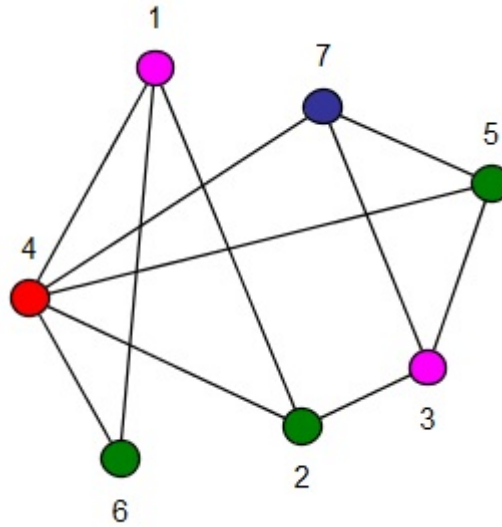
Um dos problemas do algoritmo de coloração sequencial é que se alterarmos a sequência dos vértices, as quantidades de cores usadas também pode se alterar para a coloração do mesmo grafo. Podemos observar isso no exemplo a seguir.

Figura 29 – Grafo H com a segunda ordenação dos vértices



Obedecendo a sequência, fomos colorindo os vértices sempre respeitando a regra quanto aos vértices adjacentes, e realizamos o mesmo processo do exemplo anterior.

Figura 30 – Coloração do grafo H com a segunda ordenação dos vértices



Tivemos um resultado diferente do primeiro exemplo quando alteramos a ordem da coloração dos vértices.

Para encontrarmos um resultado melhor para o algoritmo guloso podemos rever algumas decisões anteriores. Suponha um vértice v não colorido e não há mais cores disponíveis que atendam a condição para colori-lo. A questão é se em sua vizinhança a coloração de algum dos vértices pode ser alterada para que umas das cores já usadas fique disponível.

Podemos ver um exemplo na figura 30. Ao invés de atribuir uma nova cor ao v_7 , podemos alterar v_3 para a mesma coloração feita em v_4 , já que esses vértices não são adjacentes, liberando assim a cor que inicialmente tínhamos atribuído a v_3 , para atribuir a v_7 .

É certo que em todos os casos teremos uma coloração ótima e o desafio é encontrar qual sequência de vértices produz essa coloração, por isso a busca por outros métodos que sejam mais eficazes.

Teorema 3.1. *Dado qualquer grafo G , há uma ordenação dos seus vértices tal que o método de coloração sequencial de vértices, aplicado a essa ordenação, produz uma coloração ótima.*

Demonstração. Dado um grafo G , seja $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Por simplicidade vamos denotar $\chi(G)$ por χ . De acordo com a definição de χ , há uma coloração de vértices de G que utiliza χ cores. Isso significa que podemos particionar o conjunto $V(G)$ em χ subconjuntos independentes da forma $\{v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^{k_i}\}$, $1 \leq i \leq \chi$. Cada um desses subconjuntos de vértices é colorido com uma das χ cores. Consideremos a seguinte ordenação dos vértices de G :

$$v_1^1, \dots, v_1^{k_1}, v_2^1, \dots, v_2^{k_2}, \dots, v_{\chi(G)}^1, \dots, v_{\chi}^{k_{\chi}}$$

Aplicando o método de coloração sequencial de vértices com respeito a essa ordenação, obtemos uma coloração com χ cores. Provamos isso por indução em χ . De fato, se $\chi = 1$, podemos atribuir esse inteiro a cada elemento de $V(G)$. Ou seja, $V(G)$ é um subconjunto independente de G e o método de coloração sequencial aplicado aos vértices ordenados da forma v_1, \dots, v_n também atribui o inteiro 1 a cada um desses vértices, devido a ausência de arestas. Como hipótese de indução supomos que, sendo χ o número cromático de um grafo, ordenando os vértices de G na forma

$$v_1^1, \dots, v_1^{k_1}, v_2^1, \dots, v_2^{k_2}, \dots, v_\chi^1, \dots, v_\chi^{k_\chi}$$

o método de coloração sequencial fornece exatamente χ inteiros. Considere um grafo G com número cromático igual a $\chi + 1$ e a ordenação

$$v_1^1, \dots, v_1^{k_1}, v_2^1, \dots, v_2^{k_2}, \dots, v_\chi^1, \dots, v_\chi^{k_\chi}, v_{\chi+1}^1, \dots, v_{\chi+1}^{k_{\chi+1}}$$

O número cromático do grafo G' com $V(G') = \{v_1^1, \dots, v_1^{k_1}, v_2^1, \dots, v_2^{k_2}, \dots, v_\chi^1, \dots, v_\chi^{k_\chi}\}$ é exatamente igual a χ pois, caso contrário, se este fosse igual a $\eta < \chi$, G poderia ser colorido com as $\eta + 1 < \chi + 1$ cores, o que é absurdo. Logo, pela hipótese de indução, ao aplicarmos o método sequencial de coloração a $v_1^1, \dots, v_1^{k_1}, v_2^1, \dots, v_2^{k_2}, \dots, v_\chi^1, \dots, v_\chi^{k_\chi}$ obtemos exatamente χ inteiros que podem ser atribuídos a esses vértices. O processo sequencial, aplicado ao vértice $v_{\chi+1}^1$, atribui um inteiro i que é igual ao menor inteiro ainda não atribuído aos vizinhos $v_{\chi+1}^1$; ou seja, i é igual a $\chi + 1$ se $v_{\chi+1}^1$ está relacionado a pelo menos um vértice de cada conjunto $v_1^1, \dots, v_1^{k_1}, v_2^1, \dots, v_2^{k_2}, \dots, v_\chi^1, \dots, v_\chi^{k_\chi}$ ou $i \leq \chi$, caso contrário. O mesmo ocorre com os vértices $v_{\chi+1}^2, \dots, v_{\chi+1}^{k_{\chi+1}}$, já que estes vértices não estão relacionados entre si e tampouco com $v_{\chi+1}^1$. Em pelo menos um dos vértices $v_{\chi+1}^j$, com $1 \leq j \leq k_{\chi+1}$, será atribuído o inteiro $\chi + 1$, pois caso contrário, o número cromático de G seria igual a χ . Portanto, no final do processo sequencial aplicado ao grafo G , obtemos $\chi + 1$ inteiros. Pelo princípio da indução o teorema está provado. \square

Vamos encontrar $\chi(C_n)$, ou seja, o número cromático de um ciclo, quando n for par e quando n for ímpar.

Vamos considerar inicialmente G um grafo de ciclo par, segundo a Definição [12](#). Este deve possuir três ou mais vértices, e como n é par, $n = 2K$, sendo $K \geq 2$. Vamos ordenar os vértices do grafo da seguinte forma: $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$, como mostra a figura [31](#). Observamos que todos os vértices pares são adjacentes aos vértices ímpares, e vice-versa. Dessa forma podemos colorir os vértices pares com a “cor 1” e os ímpares com a “cor 2” como mostra a figura [32](#). Portanto serão necessárias 2 cores para colorir um grafo de n vértices, assim $\chi(C_n) = 2$.

Figura 31 – Ciclo par

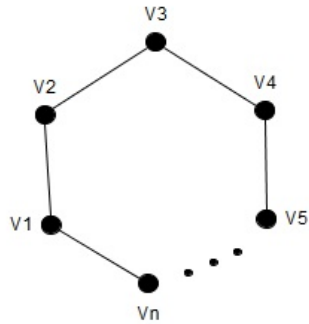
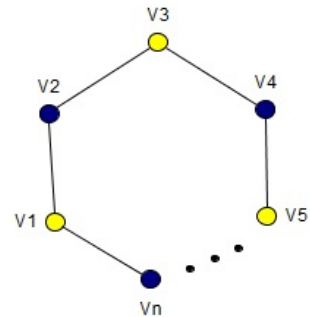


Figura 32 – Coloração do ciclo par



Quando o grafo é um ciclo ímpar faremos inicialmente o mesmo processo de coloração feito com o ciclo par, mas como os vértices v_1 e v_n são ímpares e adjacentes (figura 33) precisaremos de uma terceira cor para finalizar a coloração desse grafo, por tanto $\chi(C_n) = 3$, para n ímpar.

Figura 33 – Ciclo ímpar

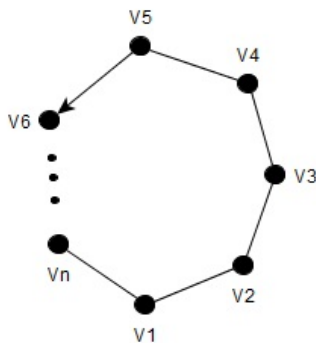
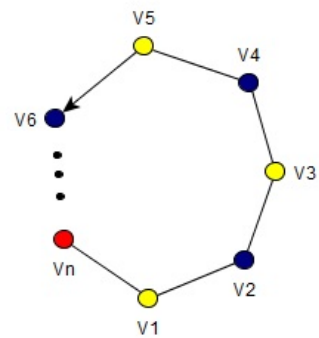


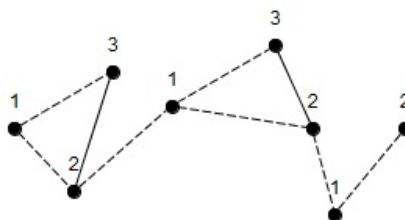
Figura 34 – Coloração do ciclo ímpar



Definição 20. Dado um grafo G , cujos vértices foram coloridos de duas cores, i e j . Seja $K(i, j)$ um subgrafo conexo maximal (não é possível adicionar nenhum outro vértice das cores i ou j) de G contendo vértices coloridos apenas com as cores i e j . $K(i, j)$ é chamada uma **Cadeia de Kempe**, que será representado como $G_{i,j}$.

No exemplo a seguir o grafo G é formado pelas arestas pontilhadas, o qual foi colorido pelas cores 1, 2 e 3 e arestas contínuas indicam a cadeia de Kempe $G_{2,3}$, formada pelos vértices coloridos por 2 e 3.

Figura 35 – Grafo G e sua cadeia de Kempe $G_{2,3}$



Teorema 3.2. *Um grafo G é bipartido se, e somente se, $\chi(G) = 2$.*

Demonstração. (\implies) Se G é um grafo bipartido, basta fazer cada conjunto independente corresponder a uma das duas cores, logo $\chi(G) = 2$. (\impliedby) Se um grafo possuir $\chi(G) = 2$, podemos separar um subconjunto do outro, de modo que os vértices de mesma cor permaneçam juntos. Pela definição de número cromático (Definição 19), não pode haver um vértice adjacente com a mesma cor, ou seja, não há arestas entre dois vértices da mesma cor. Logo, só poderá haver arestas entre um vértice de um subconjunto para um vértice do outro, o que corresponde à definição de grafo bipartido (Definição 16). \square

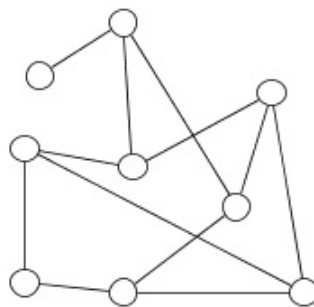
Algoritmo para checar se G é bipartido

Entrada: Grafo G . Vértice inicial $v \in V(G)$.

1. Inicie com um vértice v e pinte-o de uma cor, que chamaremos de c_1 .
2. Pinte todos os vértices vizinhos de v com uma nova cor, que chamaremos de c_2 .
3. Prossiga colorindo os vizinhos dos vértices que já possuem uma cor, usando ou o c_1 ou c_2 . Ao atribuir cores, se encontrarmos um vizinho colorido com a mesma cor do vértice atual, então o grafo não pode ser colorido com duas cores, assim o grafo não é bipartido.

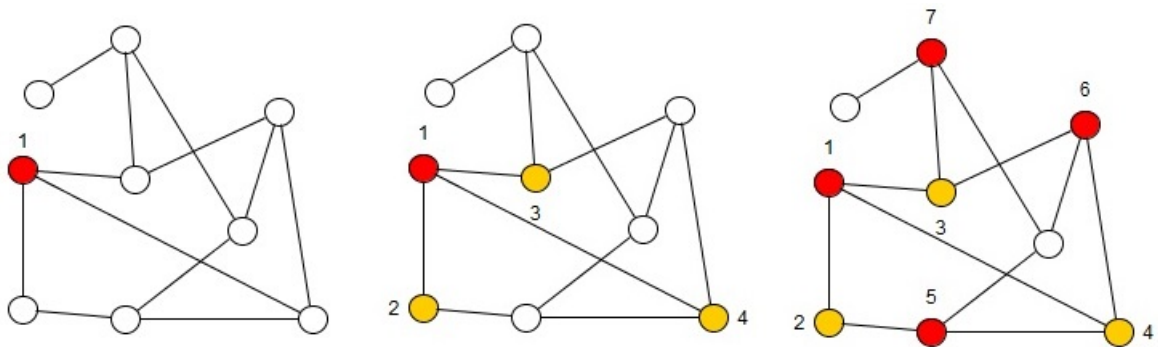
Exemplo 3.2. *Na figura 36 temos um um grafo qualquer e com o auxílio do algoritmo vamos verificar se ele é ou não um grafo bipartido.*

Figura 36 – Grafo exemplo para checar o algortimo de bipartido



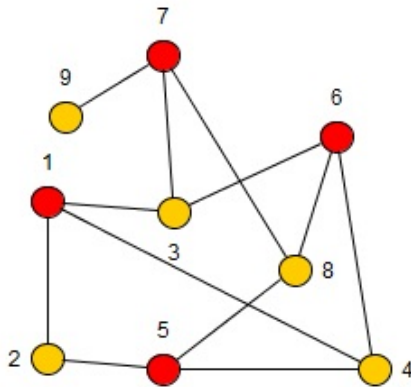
Inicialmente escolhemos um vértice aleatório e o colorimos com cor c_1 (correspondente a cor vermelha). O primeiro vértice escolhido possui três vértices vizinhos, pelo segundo passo do algoritmo devemos colorir estes pela cor c_2 (correspondente a cor amarela). Os vértices adjacentes aos amarelos, devem ser coloridos pela cor vermelha e assim sucessivamente até que todo o grafo seja colorido. Podemos ver esses passos representados pelos grafos da figura 37:

Figura 37 – Sequência de coloração do grafo G



A coloração resultante é a da figura 38. Como foram usadas somente duas cores, pelo teorema 3.2 podemos afirmar que é um grafo bipartido.

Figura 38 – Coloração final do grafo G



Corolário 3.1. Grafos que correspondem a ciclos pares ou que são caminhos bipartidos, têm $\chi = 2$.

Demonstração. Para o caso de grafos ciclos pares, podemos particionar os vértices do grafo de modo que vértices ímpares e pares sejam agrupados em dois conjuntos distintos, ou seja, trata-se de um grafo bipartido e, pelo teorema anterior, $\chi = 2$. Se o grafo em questão for um caminho, podemos realizar a partição de modo análogo ao grafo ciclo par, sendo que o grafo também será bipartido e, portanto, $\chi = 2$. □

Teorema 3.3 (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e nem um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$ (número cromático menor ou igual ao grau máximo dos seus vértices).

A demonstração do teorema de Brooks foi omitida, pois envolve elementos que estão fora do intuito deste trabalho. Para leitores interessados a demonstração está disponível em (FLEINER, 2014).

Abaixo apresentamos algumas heurísticas simples, que produzem uma coloração válida e que na maioria das vezes encontram “boas soluções”, outras vezes podem obter um número de cores muito maior que o necessário.

3.1.2 Algoritmo de Welsh-Powell

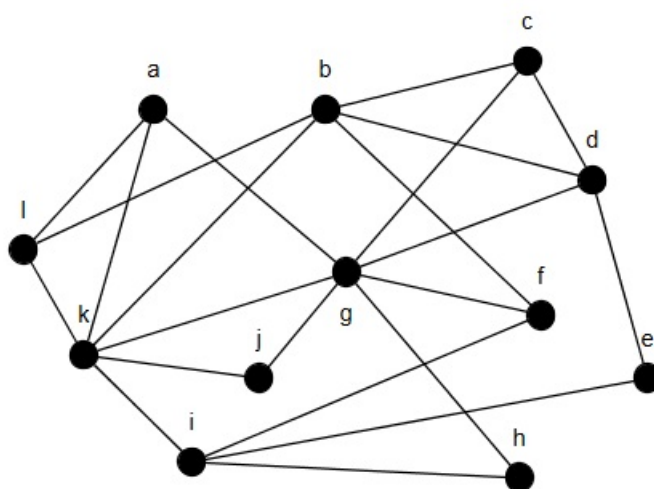
Entrada: Grafo G com n vértices v_1, v_2, \dots, v_n .

Saída: Uma coloração própria dos vértices de G .

1. Calcule o grau de cada vértice de G ;
2. Liste os vértices em ordem decrescente de grau;
3. Associe a cor 1 ao primeiro vértice da lista e ao próximo vértice da lista não adjacente a ele, e sucessivamente para cada vértice da lista não adjacente a um vértice com a cor 1;
4. Associe a cor 2 ao próximo vértice da lista ainda sem cor. Sucessivamente associe a cor 2 para o próximo vértice da lista não adjacente aos vértices com cor 2 e que ainda não está colorido;
5. Continue esse processo até que todos os vértices sejam coloridos.

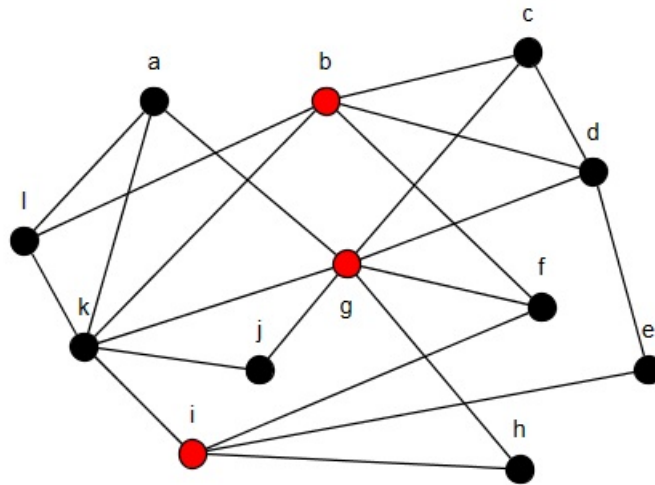
Vamos colorir o grafo da figura [39](#) com o algoritmo de Welsh-Powell.

Figura 39 – Grafo exemplo de coloração pelo algoritmo de Welsh-Powell



Seguindo o primeiro passo vamos calcular o grau de cada vértice $a=3$; $b=5$; $c=3$; $d=4$; $e=2$; $f=3$; $g=7$; $h=2$; $i=4$; $j=2$; $k=6$ e $l=3$. A sequência em ordem decrescente pelo grau dos vértices é: $g, k, b, d, i, a, c, f, l, e, h, j$.

Figura 40 – Coloração 1 pelo algoritmo de Welsh-Powell

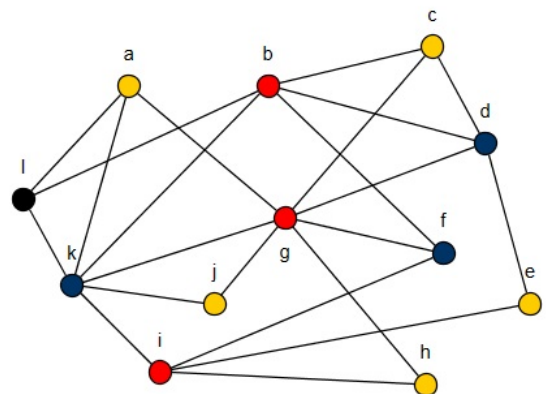
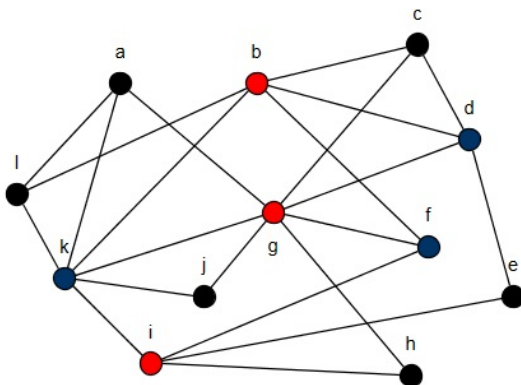


Pela sequência, o vértice g é o primeiro que deve ser colorido, em seguida o k , porém ele é adjacente ao g então não podemos colori-lo com a mesma coloração de g , assim partimos para o b que é o próximo vértice da sequência, e como ele não é adjacente ao g podemos colori-lo, fazendo assim com todos os vértices obtemos a primeira coloração representada pela figura 40.

Seguindo o 4º passo do algoritmo vamos atribuir a segunda cor. ao vértice k que é o próximo da lista que não foi colorido, em seguida temos o d que não é adjacente ao k e assim pode ser colorido com a mesma cor. Repetimos o processo até formar o conjunto de vértices da segunda cor, como mostra a Figura 41.

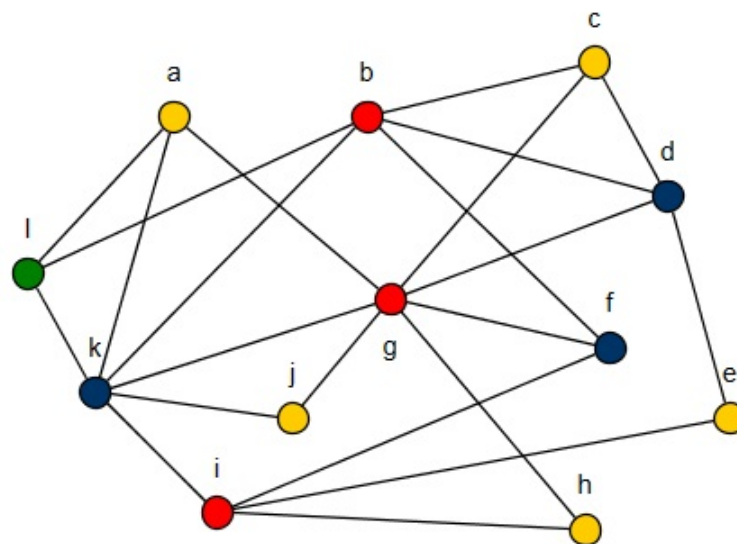
Figura 41 – Coloração 2 pelo algoritmo de Welsh-Powell

Figura 42 – Coloração 3 pelo algoritmo de Welsh-Powell



Na Figura 42 está representado o processo de coloração seguindo os passos do algoritmo. Para a coloração do grafo foram utilizadas 4 cores, como podemos ver o resultado final da figura 43.

Figura 43 – Coloração final pelo algoritmo de Welsh-Powell



3.1.3 Algoritmo de Dsaturn

1. Ordene os vértices de G em ordem decrescente de graus;
2. Atribua ao vértice de maior grau a cor 1;
3. Selecione o vértice com maior grau de saturação, ou seja, aquele que possui o maior número de vértices adjacentes coloridos. Se houverem vértices com mesmo grau de saturação, opte por qualquer um de grau máximo pertencente ao sub-grafo ainda não colorido;
4. Atribua ao vértice selecionado a cor de menor índice disponível (a primeira cor tem índice 1, a segunda índice 2 e assim sucessivamente);
5. Se todos os vértices estiverem coloridos, pare. Caso contrário, retorne à etapa 3.

Vamos realizar o algoritmo de Dsaturn com o grafo da figura [39](#) para verificar se o resultado continuará o mesmo do algoritmo de Welsh-Powell.

Os dois primeiros passos são semelhantes em ambos os algoritmos, assim já temos a sequência dos vértices em ordem decrescente de graus $g, k, b, d, i, a, c, f, l, e, h, j$. Pelo segundo passo, o primeiro vértice a ser colorido é o g como indicado na figura [44](#).

Pelo terceiro passo temos que encontrar o vértice com o maior grau de saturação. Como só temos um vértice colorido, todos os adjacentes a ele possuem 1 grau de saturação a, c, d, f, h, j, k ; assim, como critério de desempate, dentre esses o vértice que possui maior

grau é o k . Desta forma ele é o próximo a ser colorido (ver figura 45).

Figura 44 – Coloração 1 pelo algoritmo de Dsaturn

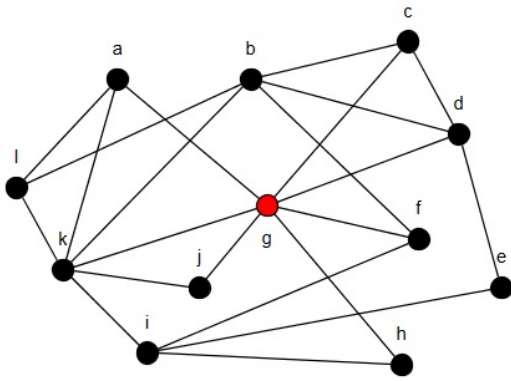
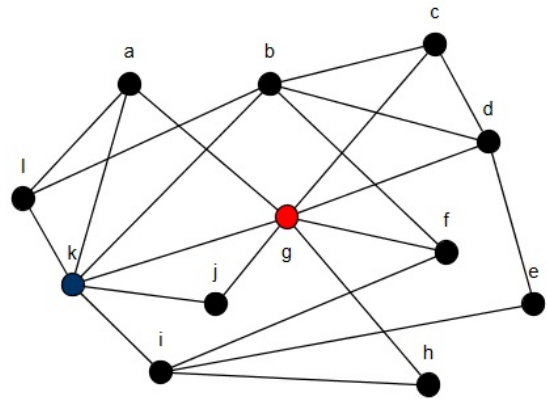


Figura 45 – Coloração 2 pelo algoritmo de Dsaturn



Para uma nova coloração vamos retornar ao passo 3. Os vértices que possuem o maior grau de saturação são a e j (ambos são adjacentes aos vértices g e k), seguindo o critério de maior grau o a é o próximo vértice que deve ser colorido (figura 46).

Para uma nova coloração, voltamos novamente ao passo 3. Como não temos nenhum vértice que é adjacente aos três já coloridos, o maior grau de saturação que temos até então é 2, que são os vértices l e j . Como l possui maior grau que j , ele será o próximo a ser colorido, lembrando que nosso objetivo é usar o menor número de cores possível e que l não é adjacente ao g . Não precisamos de uma nova cor e podemos colorir-lo com a mesma cor de g , como representado na figura 47.

Figura 46 – Coloração 3 pelo algoritmo de Dsaturn

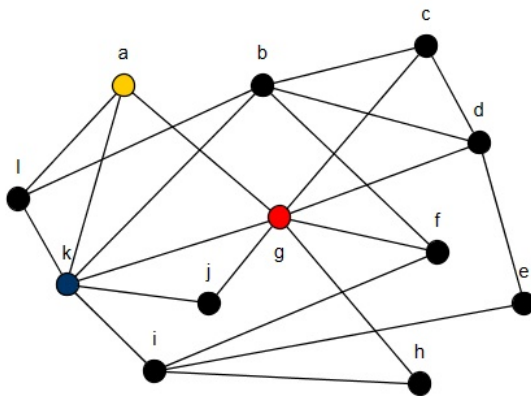
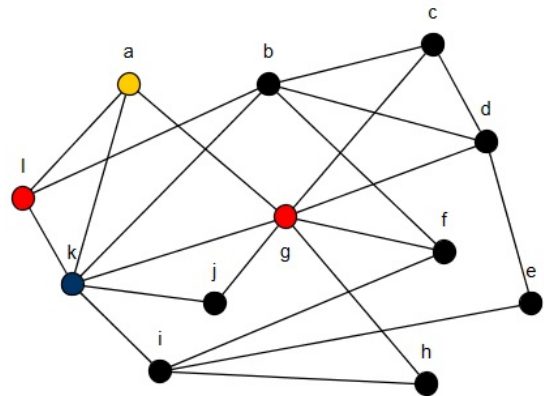


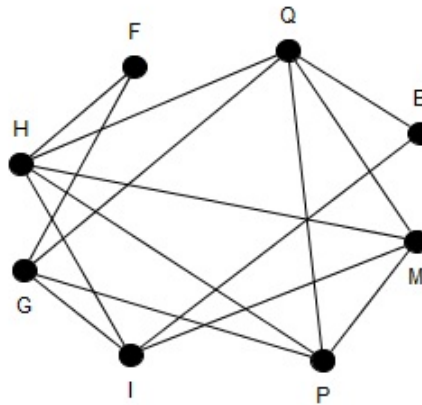
Figura 47 – Coloração 4 pelo algoritmo de Dsaturn



O passo 3 deve ser repetido quantas vez for necessário até que todos os vértices do grafo sejam coloridos, obtendo a figura 48.

A figura 49 é a representação da tabela anterior em forma de grafo, onde os vértices representam as disciplinas, e as arestas quando um aluno fará o exame das duas disciplinas ligadas.

Figura 49 – Grafo K da locação dos alunos nos exames finais



Observando o grafo da figura 49 $\Delta(K) = 5$, como o grafo não é um ciclo ímpar e nem completo, é válido o teorema de Brooks; assim, $\chi(G) \leq 5$.

Para solucionar esse problema aplicaremos o algoritmo de Welsh-Powell. Para facilitar a coloração utilizaremos tabelas para distribuir essas disciplinas. A tabela a seguir é a representação da cor 1 (o primeiro horário de elaboração dos exames). Vamos utilizar a ordem decrescente das disciplinas conforme a quantidade de alunos que fará seu exame, $\{G, H, Q, M, P, I, F, B\}$.

A primeira e a segunda disciplina (Geografia e História) “entra” no primeiro conjunto, a terceira (Química) “não entra”, pois possui um aluno comum com a Geografia; dessa maneira devemos observar todas as disciplinas seguindo a ordem proposta, gerando a tabela a seguir.

Tabela 4 – Disciplinas e suas relações com conjunto da cor 1

Cor 1	
Geografia	Entra
História	Entra
Química	Não entra
Matemática	Não entra
Português	Não entra
Inglês	Não entra
Física	Não Entra
Biologia	Entra

As demais tabelas seguiram a mesma ideia da tabela anterior e as disciplinas que já estão nos conjuntos anteriores não entram na escolha das próximas tabelas.

Tabela 5 – Disciplinas com a cor 2

Cor 2	
Geografia	-
História	-
Química	Entra
Matemática	Não entra
Português	Não entra
Inglês	Entra
Física	Entra
Biologia	-

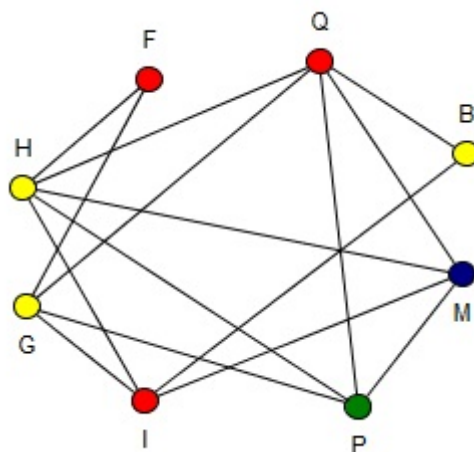
Tabela 6 – Disciplinas com a cor 3

Cor 3	
Geografia	-
História	-
Química	-
Matemática	Entra
Português	Não entra
Inglês	-
Física	-
Biologia	-

Tabela 7 – Disciplinas com a cor 4

Cor 4	
Geografia	-
História	-
Química	-
Matemática	-
Português	Entra
Inglês	-
Física	-
Biologia	-

Figura 50 – Grafo K colorido de acordo com os elementos de cada conjunto



Com base nas tabelas podemos observar a formação de quatro conjuntos $\{G, H, B\}$, $\{Q, I, F\}$, $\{M\}$ e $\{P\}$, portanto o grafo deve ser colorido de quatro cores distintas conforme representado na figura a seguir. Ou seja, são necessários 4 dias para a aplicação das provas.

3.2 Coloração de mapas

A coloração de mapas é semelhante a coloração de vértices, estudada na seção 2.1. Para representar um mapa em forma de um grafo são atribuídos aos vértices desse grafo as regiões do mapa e as arestas vão indicar as fronteiras entre essas regiões, como podemos ver no exemplo 2.1.

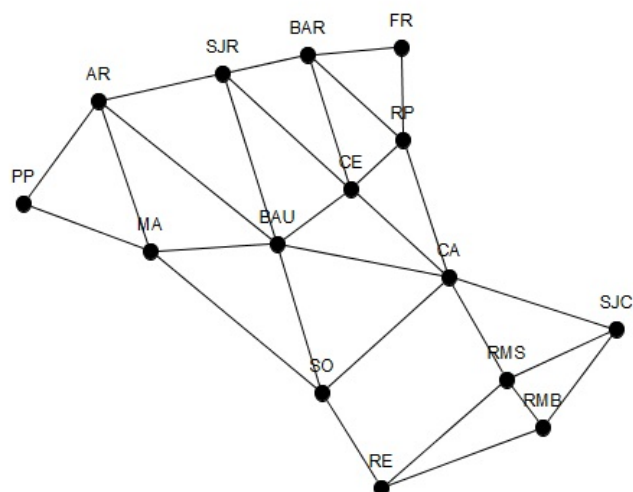
Figura 51 – Regiões do Estado de São Paulo



Fonte: https://www.al.sp.gov.br/acervo-historico/exposicoes/interior_paulista/mapa.htm

Podemos ver na figura 51 o mapa das Regiões do Estado de São Paulo, e na figura 52 a representação deste mapa em forma de grafo.

Figura 52 – Grafo do mapa das regiões do Estado de São Paulo



Como exemplo de coloração de mapas, vamos colori-lo pelo algoritmo de Welsh-Powell (visto na seção anterior), lembrando que sempre o objetivo da coloração é encontrar o número cromático do grafo. O primeiro passo do algoritmo de Welsh-Powell é colocar os vértices em ordem decrescente de acordo com o seu grau. Para facilitar a construção dessa sequência vamos fazer uma lista especificando o grau de cada vértice.

- Grau 6: BAU, CA
- Grau 5: CE
- Grau 4: AR, SJR, BAR, MA, RP, SO, RMS
- Grau 3: SJC, RMB, RE
- Grau 2: PP, FR

Colocando os vértices em ordem decrescente, vamos nomear esse conjunto de V ; assim teremos: $V = \{BAU, CA, CE, AR, SJR, BAR, MA, RP, SO, RMS, SJC, RMB, RE, PP, FR\}$

De acordo com o terceiro passo devemos ir colorindo os vértices de acordo com a ordem estabelecida anteriormente, sempre lembrando que vértices adjacentes devem possuir cores diferentes. Para realizar esse passo podemos ir colorindo os vértices e verificando a adjacência, ou para facilitar, podemos separar esses vértices em conjuntos distintos para então aplicar a coloração no final.

A seguir temos as tabelas para facilitar a formação dos conjuntos referente a cada cor, para então realizar a coloração do grafo.

Tabela 8 – Conjunto da cor 1

Regiões	Cor 1
BAU	Entra
CA	Não entra
CE	Não Entra
AR	Não entra
SJR	Não Entra
BAR	Entra
MA	Não Entra
RP	Não Entra
SO	Não Entra
RMS	Entra
SJC	Não Entra
RMB	Não entra
RE	Não Entra
PP	Entra
FR	Não Entra

Tabela 9 – Conjunto da cor 2

Regiões	Cor 2
BAU	-
CA	Entra
CE	Não Entra
AR	Entra
SJR	Não Entra
BAR	-
MA	Não Entra
RP	Não Entra
SO	Não Entra
RMS	-
SJC	Não Entra
RMB	Entra
RE	Não Entra
PP	-
FR	Não Entra

A tabela foi montada de acordo com a ordem decrescente do grau. A primeira cor irá conter o primeiro vértice da sequência e em seguida inseriremos os elementos que não são adjacentes a ele, lembrando que quando um novo vértice é inserido deve-se observar a adjacência de todos os elementos do conjunto, por exemplo, na primeira tabela o vértice RP não é adjacente ao BAU (o primeiro vértice com a cor 1), mas é adjacente ao BAR, e como BAR faz parte da colorção 1, o RP não pode pertencer a essa coloração.

Tabela 10 – Conjunto da cor 3

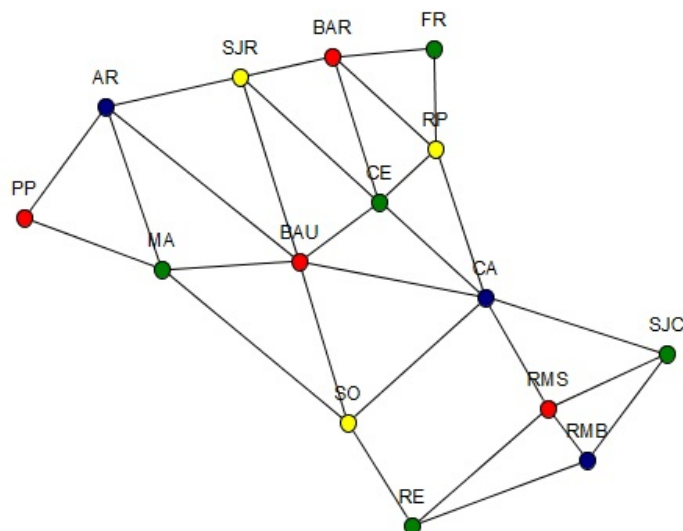
Regiões	Cor 3
BAU	-
CA	-
CE	Entra
AR	-
SJR	Não Entra
BAR	-
MA	Entra
RP	Não Entra
SO	Não Entra
RMS	-
SJC	Entra
RMB	-
RE	Entra
PP	-
FR	Entra

Tabela 11 – Conjunto da cor 4

Regiões	Cor 4
BAU	-
CA	-
CE	-
AR	-
SJR	Entra
BAR	-
MA	-
RP	Entra
SO	Entra
RMS	-
SJC	-
RMB	-
RE	-
PP	-
FR	-

Foram necessárias quatro tabelas, ou seja, quatro conjuntos, então podemos colorir grafo conforme a figura a seguir:

Figura 53 – Coloração final do Grafo das regiões do Estado de São Paulo



Como resultado da coloração vemos que 4 cores foram suficientes para colorir o mapa das regiões do estado de São Paulo. Veremos detalhadamente na próxima seção que, qualquer que seja o mapa, é possível colori-lo usando no máximo 4 cores. Essa afirmação é o que chamamos de teorema das quatro cores.

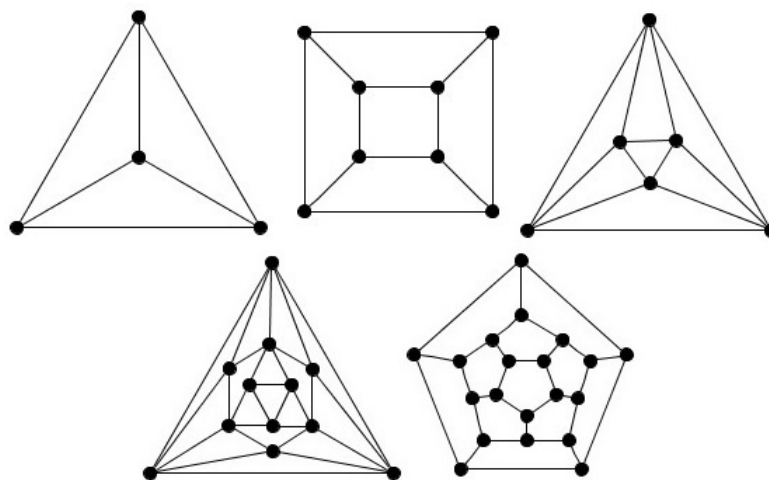
3.3 O Teorema das Quatro Cores

Para tratar do teorema das quatro cores precisamos analisar algumas definições e teoremas para concluir nosso objetivo.

Definição 21. Um **grafo planar** é um grafo que admite uma representação gráfica de modo que as arestas só se encontram nos vértices incidentes, ou seja, de tal forma que suas arestas não se cruzem.

Os grafos planares mais conhecidos são os poliedros. Na figura abaixo temos a representação em forma de grafo dos sólidos de Platão.

Figura 54 – Tetraedro, Cubo, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro

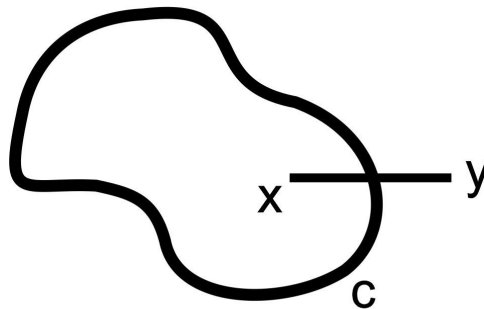


Teorema 3.4 (da Curva de Jordan). *Qualquer curva simples fechada C no plano particiona o em duas partes (uma das quais é limitada e a outra ilimitada).*

Ainda que a veracidade do teorema seja óbvia sua prova é um pouco complexa, e não será abordada neste trabalho, estando disponível no capítulo 6 de (SANTOS, 2010).

Se C é uma curva de Jordan no plano, se x é um ponto do interior de C , se y é um ponto do exterior de C , então o Teorema da Curva de Jordan implica que qualquer linha (reta ou curva) que una x a y deve cruzar C em algum ponto.

Figura 55 – Curva de Jordan



Uma das consequências do Teorema da Curva de Jordan é o fato de que um grafo planar divide o plano em regiões, pelas suas arestas. Essas divisões são chamadas de face do grafo (de modo que as faces são obtidas por curvas simples fechadas, formadas por arestas do grafo). Dois pontos do plano estão na mesma face se existir uma curva do plano que os une sem intersectar nenhuma das arestas do grafo. O número de faces de um grafo será designado por f .

Teorema 3.5 (Euler). *Seja G um grafo conexo planar com f faces, n vértices e m arestas. Temos que $f + n = m + 2$.*

Demonstração. A prova será feita por indução pelo número de faces f . Se $f = 1$, então G não possui ciclos, ou seja, G é uma árvore. Pelo Lema 1, $m = n - 1$, assim temos que $m - n + 2 = (n - 1) - n + 2 = 1 = f$. Logo, o resultado vale para $f = 1$. Suponha que o resultado vale para grafos com menos que f faces. Seja G um grafo conexo planar com $f > 1$ faces. Escolha uma aresta e de G que seja contida em qualquer ciclo (se tal aresta não existe, G seria um árvore; vimos que o resultado vale para árvores). Considere o grafo $H = G - e$. Como e não é uma ponte, a sua remoção mantém o grafo conexo. Assim, e necessariamente pertence a um ciclo. Logo, a remoção de e une duas regiões, de modo que o número de faces é reduzido em uma unidade. Como H possui menos que f faces, segue da hipótese de indução que $n - (m - 1) + (f - 1) = 2$, de onde segue o resultado. \square

Definição 22. O **grau** (ou comprimento) de uma face f , representado por $d(f)$, de um grafo planar G é igual ao número de arestas da fronteira de f .

Exemplo 3.4. Vamos calcular o $d(f)$ do cubo, cujo seu grafo está representado na 54. Como é um dos sólidos de platão, todas as suas faces possuem a mesma quantidade de arestas. Para formar uma face foi necessário 4 arestas, dessa forma seu $d(f)$ é 4.

Lema 3. *Seja G um grafo planar com m arestas e f faces. Então,*

$$\sum_{i=1}^f d(f_i) = 2m$$

Demonstração. Como cada aresta de um grafo G pertence a no máximo duas faces distintas ou está incluída duas vezes na trilha fechada que define uma face, o resultado segue. \square

Exemplo 3.5. Aplicando esse lema no tetraedro, representado na figura [54](#), no qual possui 4 faces sendo que o grau de cada uma é 3, assim a soma dos graus das faces é 12; além disso possui 6 arestas na qual o dobro dessas arestas também é 12. Esse resultado ocorre pois cada aresta está ligada a duas faces, assim ela é contada duas vezes.

Teorema 3.6. Seja G um grafo conexo e planar. Então, $f \leq \frac{2}{3}m$.

Demonstração. Temos que a soma dos graus das faces é $2m$. Mas, por outro lado, cada face é limitada pelo menos por 3 arestas (pois G é conexo), sendo que uma ou duas arestas não formam uma face. Então a soma dos graus das faces é, no mínimo, o triplo do número de faces, dado por $3f$. Assim, temos que $2m \geq 3f$ e, finalmente, $f \leq \frac{2}{3}m$. \square

Teorema 3.7. Em um grafo planar conexo G com $n \geq 3$ vale que $m \leq 3n - 6$.

Demonstração. Temos, por um lado a fórmula de Euler $n - m + f = 2$ e, por outro lado o resultado $f \leq \frac{2}{3}m$. Combinando os dois resultados, segue que:

$$n - m + \frac{2}{3}m \geq 2$$

Ou seja,

$$m \leq 3n - 6.$$

\square

Lebrando a definição [8](#), K_n é a nomenclatura de um grafo completo com n vértices.

É possível notar que os grafos K_1 e K_2 são planares, agora partindo do teorema [3.7](#) vamos provar que K_3 e K_4 também são planares. O grafo K_3 possui $n = 3$ e $m = 3$ assim $3 \cdot 3 - 6 = 3 \geq 3$ Já o grafo K_4 possui $n = 4$ e $m = 6$, assim $3 \cdot 4 - 6 = 6 \geq 6$.

Teorema 3.8. O grafo K_5 não é planar

Demonstração. Supondo por absurdo que K_5 é um grafo planar, dessa forma é válido o Teorema [3.7](#); sendo $n = 5$ e $m = 10$ temos que $3 \cdot 5 - 6 = 9 \geq 10$. Absurdo! Portanto K_5 não é planar. \square

Vejam para quais valores de n temos K_n planar. Pelo Teorema [3.7](#), temos que:

$$3n - m \geq 6$$

Pelo teorema [2.1](#), $m = \frac{n(n-1)}{2}$, assim:

$$3n - m = 3n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{-n^2 + 6n + n}{2} = \frac{-n^2 + 7n}{2} = \frac{n(7-n)}{2} \geq 6$$

O que resulta em:

$$n(7 - n) \geq 12$$

Observe que, nesta relação, verifica-se a igualdade ($n^2 - 7n + 12 = 0$), os valores inteiros de n que satisfazem a igualdade são somente $n = 3$ e $n = 4$. Assim, todos os grafos completos K_n com $n \geq 5$ não são planares.

Teorema 3.9. *Seja G um grafo conexo e planar com $n \geq 3$ e sem triângulos, isto é, sem ciclos de comprimento 3. Então $m \leq 2n - 4$.*

Demonstração. Como não há ciclos de comprimento 3, todos os ciclos têm 4 ou mais arestas, ou seja, cada face tem pelo menos 4 arestas e, portanto, a soma das arestas das faces é, no mínimo, $4f$. Logo, $4f \leq 2m$. Utilizando a fórmula de Euler, obtemos:

$$4f - 4m + 4n = 8.$$

Pelo fato de que $4f \leq 2m$, segue que:

$$\begin{aligned} 2m - 4m + 4n &\geq 8, \\ m &\leq 2n - 4. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.10. *O grafo $K_{3,3}$ não é planar*

Demonstração. Supondo por absurdo que $K_{3,3}$ é um grafo planar, dessa forma é válido o Teorema 3.9, sendo $n = 6$ e $m = 9$ temos que $2 \cdot 6 - 4 = 8 \geq 9$. Absurdo! Portanto $K_{3,3}$ não é planar. □

Definição 23. *Uma **subdivisão elementar** de um grafo G é a retirada ou o acréscimo de um vértice de grau 2 entre dois outros vértices.*

Definição 24. *Dizemos que dois grafos G e G' são **homeomorfos** se ambos podem ser obtidos a partir de um mesmo grafo por uma sucessão de subdivisões elementares de arestas.*

Figura 56 – Grafo G

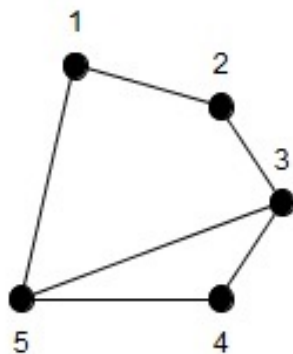
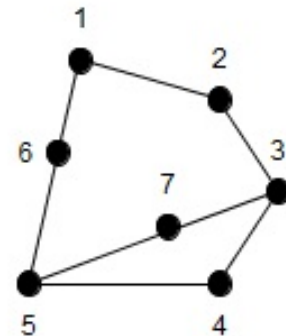


Figura 57 – Grafo G'



Nas figuras acima temos um exemplo de grafos homeomorfos, o grafo G' é o grafo G com a adição dos vértices 6 e 7, e ambos os vértices possuem grau 2.

Teorema 3.11 (Kuratowski). *Um grafo é planar se, e somente se, não contiver subgrafo homeomorfo a K_5 e $K_{3,3}$.*

Caso o leitor se interesse, a demonstração do Teorema de Kuratowski esta disponível em (WAKABAYASHI, 2015) e foi omitida pois utiliza conceitos não vistos neste trabalho.

Segundo (SILVA; DANTAS, 2009) um mapa é um grafo planar conexo e sem pontes. Como já vimos algumas definições necessárias para compreender as propriedades dos mapas, vamos estudar um dos problemas mais famosos não só da teoria dos grafos, mas também da Matemática.

O problema das quatro cores surgiu após o matemático Francis Guthrie, em 1852, tentar colorir o mapa da Inglaterra de forma que dois distritos vizinhos não tivessem a mesma cor. Após observar a coloração, escreveu a conjectura que hoje conhecemos como o teorema das quatro cores. Francis mostrou a conjectura ao seu irmão que era aluno de Augustus De Morgan, que foi quem apresentou o problema a comunidade científica.

Teorema 3.12 (das 4 cores). *Todo mapa pode ser colorido com 4 cores de modo que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor.*

Como vemos anteriormente a coloração de mapas pode ser representada da mesma forma que a coloração de vértices, sendo as regiões indicadas por vértices e as fronteiras pelas arestas, onde regiões que possuem fronteiras entre si devem ser coloridas com cores diferentes. Assim podemos formular o teorema em forma de coloração de vértices.

Teorema 3.13 (das 4 cores formulação). *Num grafo planar G tem-se que $\chi(G) \leq 4$.*

Observando um grafo K_4 vemos que 4 cores são necessárias para colori-lo, mas a questão é se elas são suficientes. Essa demonstração ficou em aberto durante muito tempo. Em 1879, Albert Bray Kempe publicou a demonstração completa do Teorema das quatro cores, e podemos ver em (LIMA, 2016) essa demonstração.

Após 11 anos da sua publicação, o matemático Percy John Heawood encontrou um erro na demonstração. Heawood também não conseguiu encontrar uma prova válida, mas com o auxílio da cadeia de Kempe demonstrou um resultado um pouco mais fraco que ficou conhecido como O teorema das cinco cores. Para entendermos esse teorema, vamos começar pelo lema a seguir.

Lema 4. *Num grafo planar há pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5.*

Demonstração. Pelo Lema 3 temos que, $\sum_{i=1}^f d(f_i) = 2m$. Supondo que $d(v) > 5$, em qualquer $v \in V$, então

$$6n \leq \sum_{i=1}^f d(f_i) = 2m$$

Mas num grafo planar temos $m \leq 3 \cdot n - 6$; isto é, $2m \leq 6 \cdot n - 12$. Ficamos com:

$$6 \cdot n \leq 6 \cdot n - 12;$$

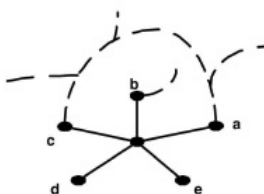
o que é um absurdo. Portanto é válido o lema. \square

A demonstração do teorema a seguir foi retirada de (JURKIEWICZ, 2009).

Teorema 3.14 (das 5 cores). *Num grafo planar simples G , tem-se $\chi(G) \leq 5$:*

Demonstração. Em todo grafo planar existe um vértice com grau menor ou igual a 5. Podemos decompor o grafo retirando sempre um vértice de grau menor que 5 e recompô-lo colorindo, vértice a vértice. Desta forma, podemos sempre supor que estamos colorindo um vértice v de grau menor ou igual a 5. Se os vértices em $N(v)$ (Definição 2) estão coloridas com menos do que 5 cores, basta colorir o vértice v . Podemos então supor que o vértice está cercado por 5 vértices coloridos cada um com uma cor do conjunto $\{a, b, c, d, e\}$. Consideremos o subgrafo induzido pelos vértices coloridos com as cores a e c . Se a componente que contém o vértice de $N(v)$ colorido com a não contiver o vértice colorido com c , podemos trocar as cores desta componente: quem está colorido com a fica colorido com c e vice-versa. Podemos então colorir o vértice v com a cor a . Se a componente que contém o vértice de $N(v)$, colorido com a , for o mesmo do vértice colorido com c , existe um caminho de vértices que “cerca” o vértice b , como na figura a seguir.

Figura 58 – Caminho de vértice entre a e c



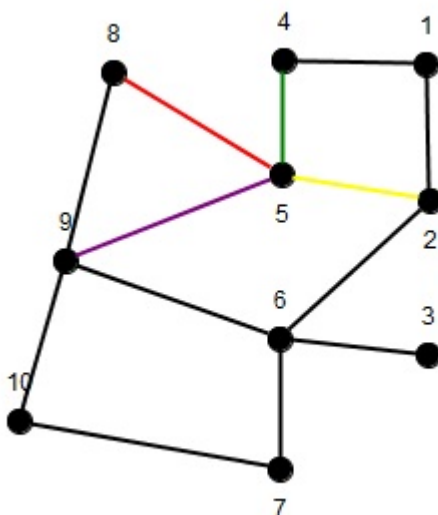
Fonte: (JURKIEWICZ, 2009).

Então, tomamos a componente do grafo induzido por vértices coloridos com b e d , que contém o vértice de $N(v)$ colorido com b . Depois de trocar as cores b e d nesta componente, podemos colorir o vértice v com a cor b . \square

Segundo (SOUSA, 2001), somente em 1976, com o auxílio de um computador IBM 360, Kerreth Appel e Wolfgang Haken conseguiram provar o teorema das quatro cores. A prova é muito extensa e por isso não foi possível verificá-la manualmente, o que gerou um desconforto nos matemáticos. Após tentar obter a prova Robertson, Sandem e Thomas em 1994 conseguiram encontrar uma prova, com menor número de operações do que a de Appel e Haken, mas mesmo assim é longa e a prova manual continua em aberto.

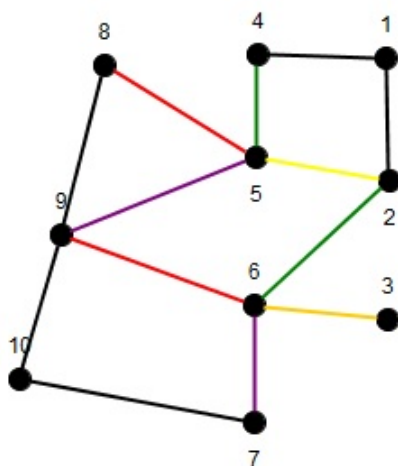
acontecendo simultaneamente. Vamos colorir o grafo anterior partindo sempre do vértice com o maior grau. Para facilitar vamos ordenar esses vértices em ordem decrescente quanto ao seu grau $V = \{5, 6, 9, 2, 1, 4, 7, 8, 10, 3\}$.

Figura 60 – Coloração 1 do grafo das relações entre reuniões e funcionários



Primeiramente colorimos todas as arestas do vértice 5.

Figura 61 – Coloração 2 do grafo das relações entre reuniões e funcionários



As próximas arestas a serem coloridas são as incidentes no vértice 6, como mostra a figura [61](#). Assim, vamos realizando a coloração de acordo com a sequência do grau dos vértices.

Figura 62 – Coloração 3 do grafo das relações entre reuniões e funcionários

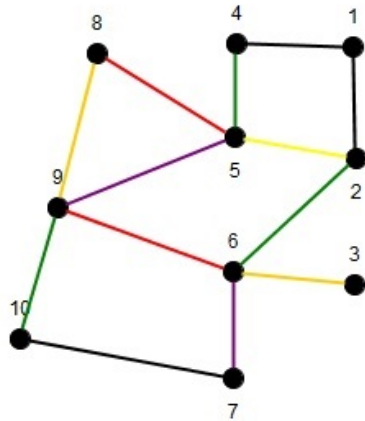
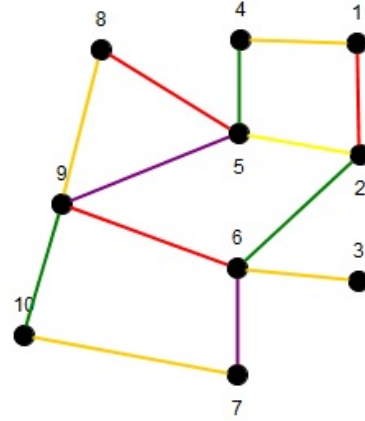


Figura 63 – Coloração final do grafo das relações entre reuniões e funcionários



Com a coloração final temos o seguinte resultado do problema:

- 1º horário: $\{v_1v_4, v_2v_5, v_3v_6, v_7v_{10}, v_8v_9\}$
- 2º horário: $\{v_2v_6, v_4v_5, v_9v_{10}\}$
- 3º horário: $\{v_1v_2, v_5v_8, v_6v_9\}$
- 4º horário: $\{v_5v_9, v_6v_7\}$

No exemplo anterior não encontramos problemas com a sua coloração, mas há algumas situações que a coloração inicial não é a ótima. Por isso, há alguns algoritmos computacionais para auxiliar nesses casos. Através da demonstração dos teoremas a seguir será retirado um algoritmo de coloração.

Sendo $\Delta(G)$ o grau máximo do grafo, ou seja, a quantidade de arestas que incide no vértice de maior grau do grafo G é válido que $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. A demonstração do teorema 3.16 foi retirada de (OLIVEIRA, 2011).

Teorema 3.15 (Vizing-1964). *Para um grafo bipartido G , $\chi'(G) = \Delta$.*

Demonstração. Suponha que estamos colorindo as arestas do grafo G , uma por uma, dispondo de Δ cores representadas pelo conjunto $c_1, c_2, \dots, c_\Delta$. Analisaremos dois casos:

1º caso: Ao colorir a aresta uv , tentamos encontrar uma cor que não esteja presente em arestas incidentes ao vértice u e nem em arestas incidentes ao vértice v . Caso isto seja possível, não teremos problema algum até o momento e tal coloração pode ser realizada (sendo uv arestas quaisquer do grafo bipartido G).

2º caso: Se ao tentarmos colorir a aresta uv do grafo G não for possível determinar tal cor, como descrito no primeiro caso, observemos que as arestas incidentes ao vértice u ocupam no máximo $\Delta - 1$ cores (pois uv não está colorida e Δ é o grau máximo do grafo

G), e o mesmo acontece com o vértice v . Isto nos garante que há uma aresta incidente ao vértice u que está colorida com a cor c_k , ausente nas arestas incidentes no vértice v (caso contrário, estaríamos novamente no primeiro caso e seria possível colorir a aresta uv); além disso, pelo mesmo motivo, existe uma cor c_l presente nas arestas incidentes em v e ausente nas arestas incidentes a u . Sejam V_1 e V_2 as partições dos vértices de G que contém os vértices u e v , respectivamente. Formemos uma cadeia de arestas começando em u e alternando arestas de cor c_k e c_l (esta cadeia pode até, eventualmente, só possuir uma aresta). Como o grafo G é bipartido, as arestas de cor c_k vão de V_1 para V_2 e as arestas de cor c_l retornam de V_2 para V_1 (pois vértices de uma mesma partição não possuem uma aresta entre si, lembrando que G é um grafo bipartido). Como c_k é uma cor que está ausente nas arestas incidentes a v , esta cadeia não passa pelo vértice v , pois c_k leva os vértices de V_1 para V_2 desde que o vértice presente em V_2 possua uma aresta incidente a ele com a cor c_k , o que não ocorre, pela hipótese, com o vértice v . Podemos então recolorir a cadeia obtida permutando as cores c_k e c_l , sem afetar a propriedade da coloração de que duas arestas incidentes em um mesmo vértice sejam coloridas com cores diferentes. Depois desta permutação a cor c_k estará ausente em u (pois o vértice u teve sua aresta incidente de cor c_k recolorida com a cor c_l) e v (pois pela hipótese a cor c_k não incide no vértice v) e podemos utilizá-la para colorir a aresta uv . Portanto, todas as arestas podem ser coloridas utilizando apenas Δ cores. \square

Teorema 3.16 (Vizing-1964). *Para qualquer grafo G , $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$.*

Demonstração. A inequação da esquerda é facilmente provada, uma vez que qualquer vértice de grau Δ precisa de uma cor diferente para cada uma de suas arestas incidentes. O restante da prova depende da estrutura de dados chamada *fan*. Seja $e_0(w, v_0)$ uma aresta não colorida de um grafo parcialmente colorido. Um *fan* F é uma sequência de arestas distintas $e_0(w, v_0), e_1(w, v_1), \dots, e_k(w, v_k)$, onde o vértice w é considerado o centro do *fan* e os vértices v_i são suas folhas, tal que dada uma sequência de cores distintas $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$, as seguintes condições são satisfeitas:

1. A cor α_i encontra-se disponível no vértice v_i ; $0 \leq i \leq k - 1$; e
2. Toda aresta e_i , $1 \leq i \leq k$, encontra-se colorida com a cor α_{i-1} .

A construção do *fan* inicia-se pela aresta descolorida $e_0(w, v_0)$, onde w é chamado de vértice central do *fan*. A seguir, adiciona-se a aresta $e_1(w, v_1)$, colorida com a cor α_0 disponível no vértice v_0 . Este procedimento repete-se para as arestas $e_i(w, v_i)$, coloridas com as cores α_{i-1} , até a construção do *fan* maximal, ou seja, até que não se possa mais adicionar uma aresta no *fan* de modo que as condições apresentadas anteriormente mantenham-se satisfeitas.

Figura 64 – α_k disponível em v_k e w .

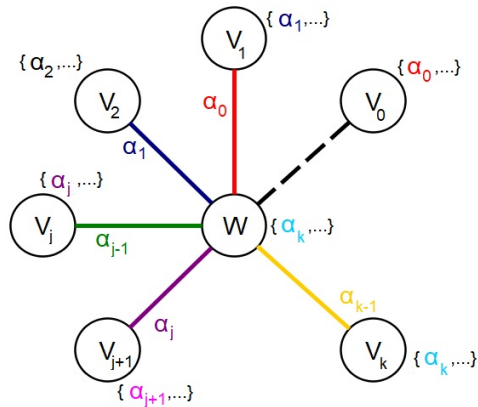
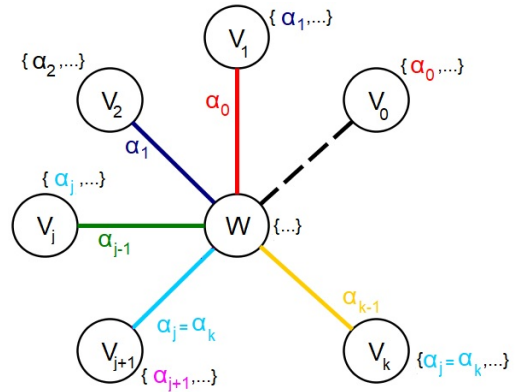


Figura 65 – $\alpha_k = \alpha_j$, incide no vértice w .



Fonte: Adaptada pela autora a partir de (OLIVEIRA, 2011)

Temos nas figuras anteriores os critérios de parada na construção do fan maximal. Um *fan* é dito maximal quando uma das seguintes condições for satisfeita: a cor α_k , disponível no vértice v_k , é uma cor disponível no vértice w ; ou, a cor $\alpha_k = \alpha_j$, $0 \leq j < k$, onde α_j é uma cor disponível em um vértice v_j e colore a aresta $e_{j+1}(w, v_{j+1})$.

Rotacionar o *fan* em n passos é um procedimento onde cada aresta $e_i \in F$ é colorida com a cor α_i , para todo $i, 0 \leq i \leq n \leq k$, e a cor α_{n-1} é removida da aresta e_n , fazendo com que esta aresta fique descolorida. Com a rotação de F em n passos, é possível obter uma outra coloração de arestas para G em que a aresta e_n , ao invés da aresta e_0 , aparece descolorida (ver Figuras 66 e 68).

Considere um grafo G parcialmente colorido com, no máximo, $\Delta + 1$ cores. Dada uma aresta descolorida $e(w, v_0) \in E(G)$, esta prova mostra como aumentar a coloração de G colorindo essa aresta, sem ultrapassar o limite de $\Delta + 1$ cores diferentes, o que pode exigir a troca das cores de algumas arestas já coloridas para garantir que a coloração permaneça válida.

Figura 66 – *fan* antes da rotação.

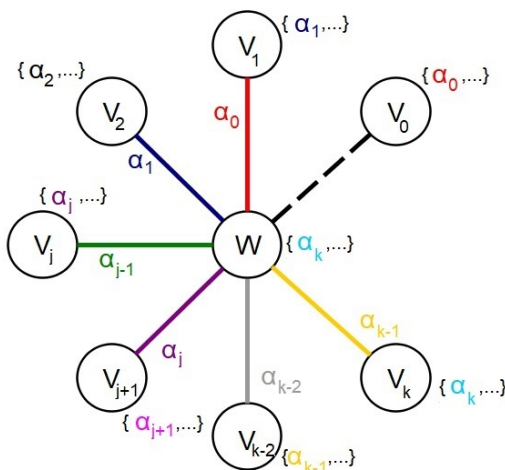
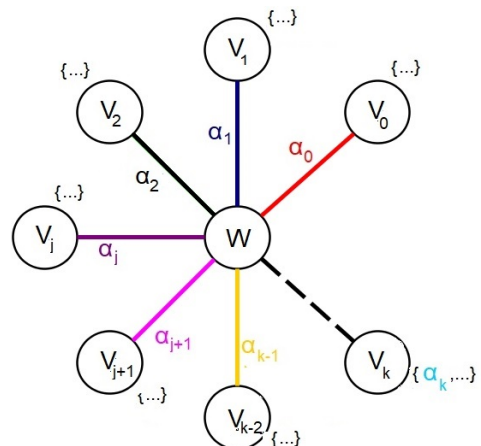


Figura 67 – *fan* após a rotação em $n = k$ passos.



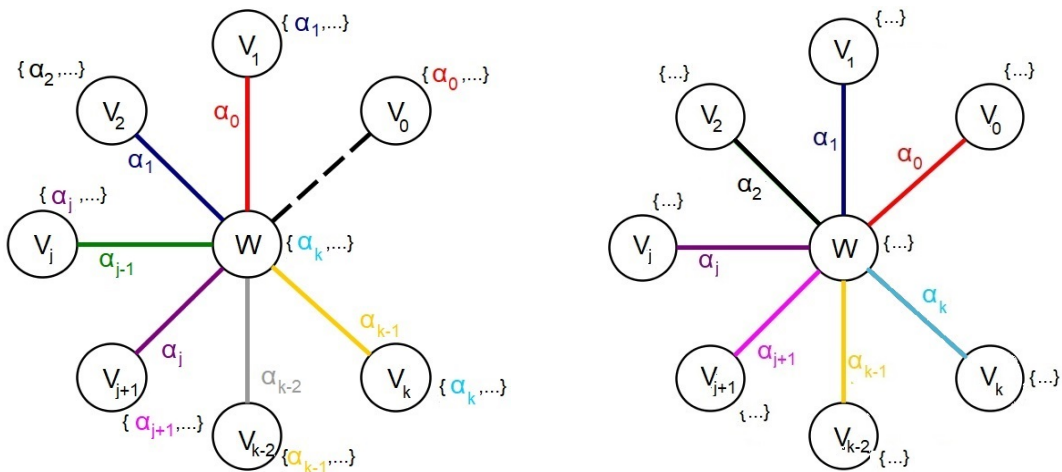
Fonte: Adaptada pela autora a partir de (OLIVEIRA, 2011)

Inicialmente, busca-se uma cor que esteja disponível tanto no vértice w quanto no vértice v_0 , ou seja, busca-se uma cor $\beta \in Free(w)$, e uma cor $\alpha_0 \in Free(v_0)$, tal que $\alpha_0 = \beta$, onde $Free(v)$ representa o conjunto de cores disponíveis em um vértice v . Se essa cor existe, então ela será usada para colorir a aresta $e_0(w, v_0)$ e aumentar a coloração do grafo G . Porém, suponha $\alpha_0 \neq \beta$.

Seja o *fan* maximal F de tamanho k , tendo w como vértice central, começando pela aresta descolorida $e_0(w, v_0)$ até a aresta $e_k(w, v_k)$, e seja também a cor α_k disponível no vértice v_k .

Se a cor α_k também é uma cor disponível em w , basta rotacionar F em k passos, fazendo com que α_k seja uma cor disponível em ambas as extremidades da aresta descolorida $e_k(w, v_k)$. Conseqüentemente, colorir e_k com α_k aumentaria a coloração do grafo G , como ilustrado pelas Figuras 68 e 69.

Figura 68 – A cor α_k , disponível em v_k , Figura 69 – Resultado após a rotação do também está disponível em w . *fan* em k passos.



Fonte: Adaptada pela autora a partir de (OLIVEIRA, 2011)

Porém, suponha que a cor α_k não é uma cor disponível no vértice w . Neste caso, $\alpha_k = \alpha_j$, tal que $0 \leq j < k$, uma vez que sabemos que F é maximal. Seja β uma cor disponível no vértice w , e seja P o caminho maximal (α_k, β) - *path* que parte do vértice v_k .

Se P termina em qualquer vértice diferente de w ou v_j , inverte-se o caminho P , fazendo com que a cor β torne-se uma cor disponível nas extremidades da aresta $e_k(w, v_k)$. Então, rotaciona-se F em k passos, tornando a aresta $e_k(w, v_k)$ descolorida, bem como permitindo que e_k seja recolorida com a cor β , e assim aumentando a coloração de G , como ilustrado pelas Figuras 70 e 70.

Figura 70 – P termina em um vértice diferente de v_j ou w .

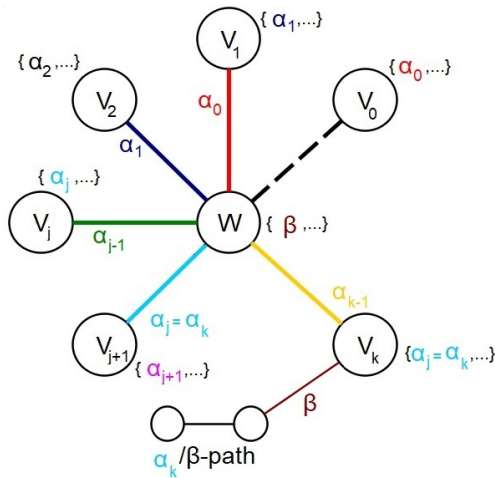
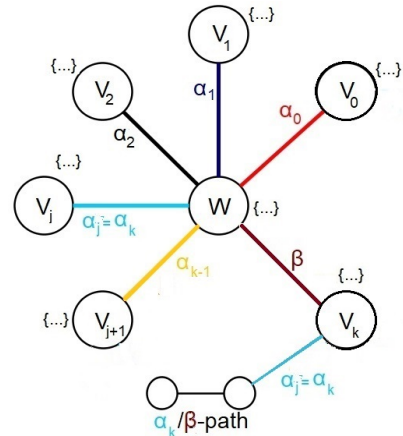


Figura 71 – Resultado após alterar o caminho P e rotacionar o fan em k passos.



Fonte: Adaptada pela autora a partir de (OLIVEIRA, 2011)

Se P termina no vértice v_j , por uma aresta de cor β , inverte-se o caminho P , fazendo com que a cor β torne-se uma cor disponível nas extremidades da aresta $e_j(w, v_j)$. Então, rotaciona-se F em j passos, tornando a aresta $e_j(w, v_j)$ descolorida, bem como permitindo que e_j seja recolorida com a cor β , aumentando a coloração de G , como ilustrado pelas Figuras 72 e 73.

Figura 72 – Caso no qual P termina no vértice v_j .

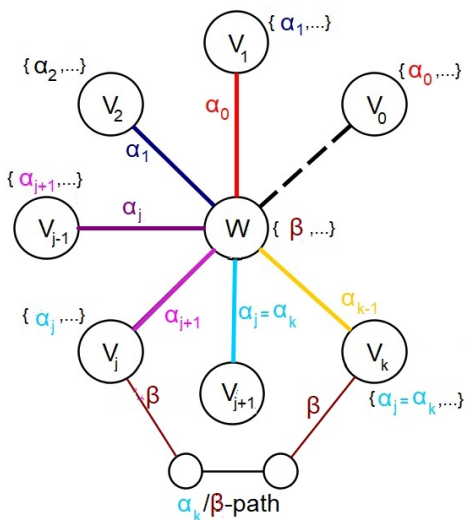
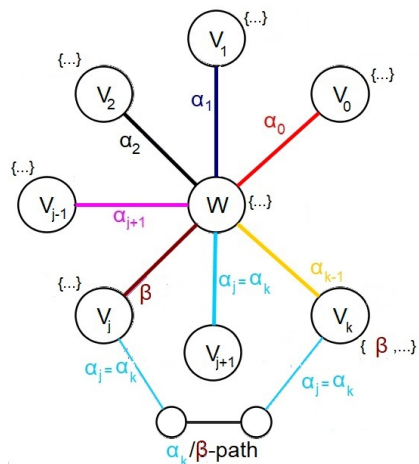


Figura 73 – Resultado após alternar o caminho P e rotacionar o fan em j passos.



Fonte: Adaptada pela autora a partir de (OLIVEIRA, 2011)

Figura 74 – Caso no qual P termina no vértice w

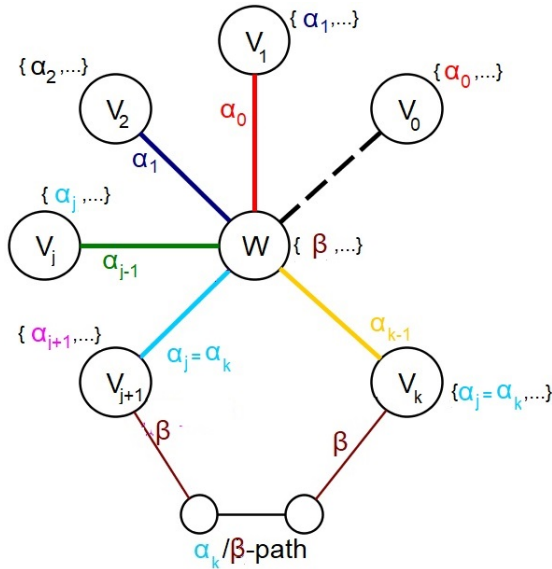
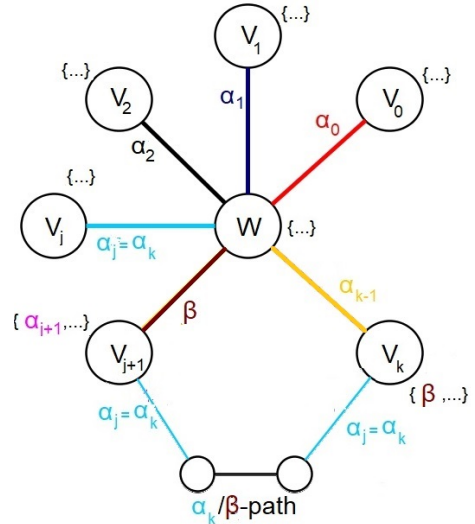


Figura 75 – Resultado após alternar o caminho P e rotacionar o fan em $j + 1$ passos.



Fonte: Adaptada pela autora a partir de [\(OLIVEIRA, 2011\)](#)

Se P termina no vértice w , por uma aresta de cor $\alpha_k = \alpha_j$, inverte-se P , fazendo com que a cor $\alpha_k = \alpha_j$ torne-se uma cor disponível nas extremidades da aresta $e_{j+1}(w; v_{j+1})$. Então, rotaciona-se F em $j + 1$ passos, tornando a aresta $e_{j+1}(w; v_{j+1})$ descolorida, bem como permitindo que e_{j+1} seja recolorida com a cor α_k , aumentando coloração de G , como ilustrado pelas Figuras [74](#) e [75](#).

Haja visto que não existem outros casos a serem tratados, o aumento da coloração fica provado, sem que se faça necessário utilizar mais que $\Delta + 1$ cores.

Os passos dessa demonstração construtiva podem ser aplicados repetidas vezes a partir de um grafo completamente descolorido até que todas as arestas do grafo sejam coloridas. □

Analisando a coloração obtida no grafo do exemplo [3.6](#) temos que $\Delta(G) = 4$, assim pelo teorema Vizing $4 \leq \chi'(G) \leq 5$.

O algoritmo de coloração de arestas a seguir foi montado com base na demonstração do teorema de Vizing. Esse algoritmo é usado em grafos que possuem muitos vértices e arestas, pois encontrar o índice cromático em pequenos grafos é simples, como podemos ver no exemplo [3.6](#), o grande problema são os grafos grandes, o que torna a aplicação manual desse algoritmo um pouco exaustiva, por isso ele é mais utilizado de forma computacional.

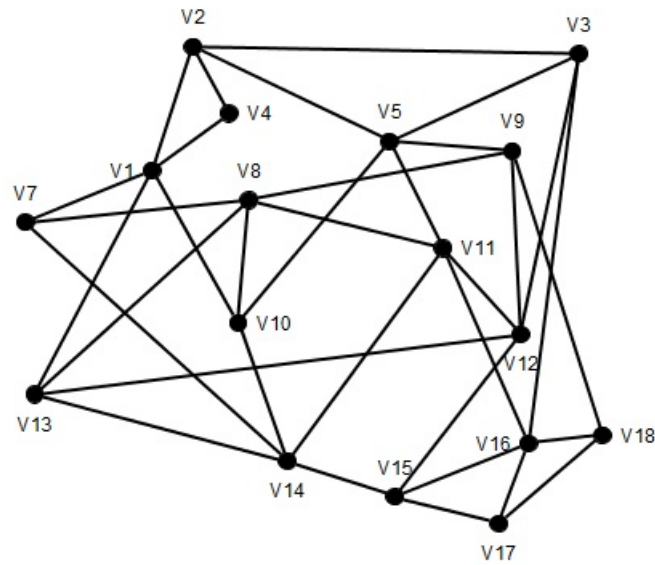
3.4.1 Algoritmo de coloração de arestas baseado na demonstração do Teorema de Vizing

1. Se existir $e \in E(G)$ sendo que aresta e não está colorida. Seja $e_0(w, v_0)$ uma aresta não colorida de um grafo parcialmente colorido, realize os passos a seguir.
2. Se existe α_0 pertencente ao conjunto de cores disponíveis em v_0 e em w ($Free(v_0) \cap Free(w)$) então vá para o item 3, senão vá para o item 4.
3. Faça a coloração da aresta e_0 utilizando a cor α_0 , volte ao item 1.
4. Construa com fan maximal, ou seja, uma sequência de arestas, $F = e_0(w, v_0), e_1(w, v_1), \dots, e_k(w, v_k)$. Seja $\alpha_k \in Free(v_k)$, se $\alpha_k \in Free(w)$ vá para o item 5, senão vá para o item 7.
5. Rotacione F em k passos.
6. Faça a coloração da aresta e_k utilizando a cor α_k e volte ao item 1.
7. Seja $\beta \in Free(w) \cap Free(j)$, tal que $\alpha_j = \alpha_k$, construa um caminho maximal $P = (\alpha_k, \beta)$ -path partindo de v_k .
8. Inverta as cores do caminho P . Se P termina em v_j vá ao item 9, se P termina em w vá ao item 11, se P não termina em v_k nem em w vá ao item 13.
9. Rotacione F em j passos
10. Faça a coloração da aresta e_j utilizando a cor β e volte ao item 1.
11. Rotacione F em $j + 1$ passos
12. Faça a coloração da aresta e_{j+1} utilizando a cor α_k e volte ao item 1.
13. Rotacione F em k passos
14. Faça a coloração da aresta e_k utilizando a cor β e volte ao item 1.

A seguir temos um exemplo de um grafo que faremos o uso de alguns passos desse algoritmo.

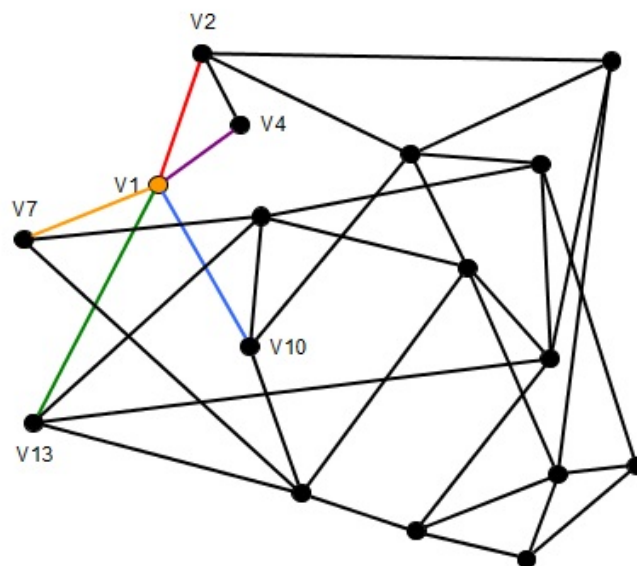
Exemplo 3.7. *Desejamos colorir as arestas do grafo a seguir afim de encontrar o seu índice cromático.*

Figura 76 – Grafo A



Observando o grafo, o $\Delta = 5$; assim, o menor número de cores que podemos usar para colorir as arestas é 5. De início vamos utilizar o menor número de cores possíveis e, se for preciso, acrescentamos outra cor mais a diante. Para facilitar a notação, vamos atribuir números às cores: 1-vermelho, 2-amarelo, 3-verde, 4-azul e 5-violeta. Começaremos a coloração por um vértice que contenha grau igual a 5.

Figura 77 – Coloração 1 das arestas do Grafo A



Como podemos observar na Figura 77, foi escolhido o v_1 como vértice central e coloridas as arestas formadas por ele e por seus vértices adjacentes. A coloração foi feita na ordem

das cores e seguindo a sequência do vértices $\{v_2, v_7, v_{13}, v_{10}, v_4\}$.

Figura 78 – Coloração 2 das arestas do Grafo A

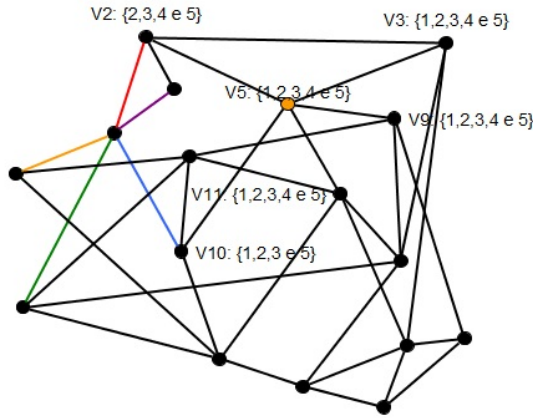
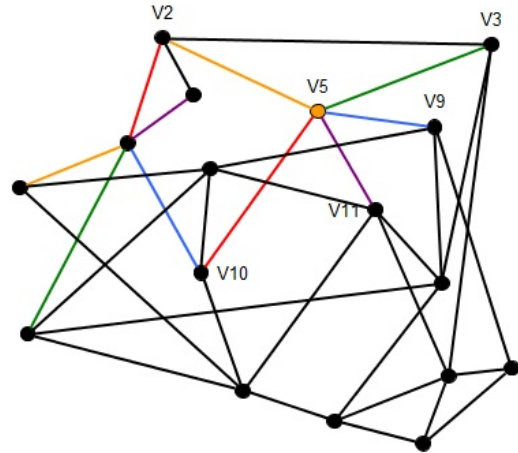


Figura 79 – Coloração 3 das arestas do Grafo A



O próximo vértice escolhido para ser o centro da coloração é o v_5 . Para auxiliar na coloração, foram colocadas entre chaves as cores disponíveis nos vértices correspondentes (Figura 78). Observado as cores disponíveis, não podemos começar a coloração pela aresta $\{v_2, v_5\}$, pois a cor 1 não está disponível no vértice v_2 ; então começamos a coloração pela aresta $\{v_5, v_{10}\}$ no sentido horário até colorir todas as arestas ligadas ao vértice v_5 , como mostra a Figura 79.

Foi feito esse processo em todos os vértices de grau 5 disponíveis, como podemos ver na Figura 80, mas encontramos um problema na coloração das arestas formadas pelo vértice central v_8 , (pois nenhum vértice possui a cor azul como disponível).

Figura 80 – Coloração 4 das arestas do Grafo A

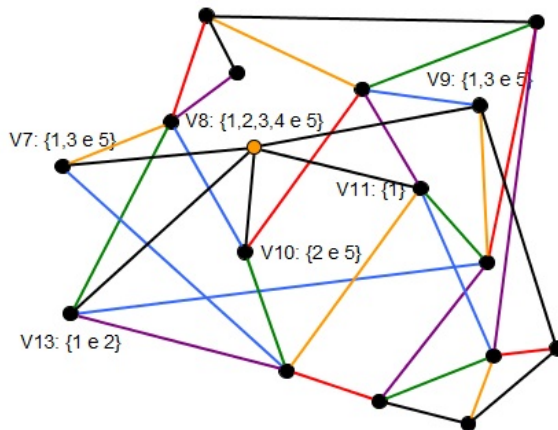
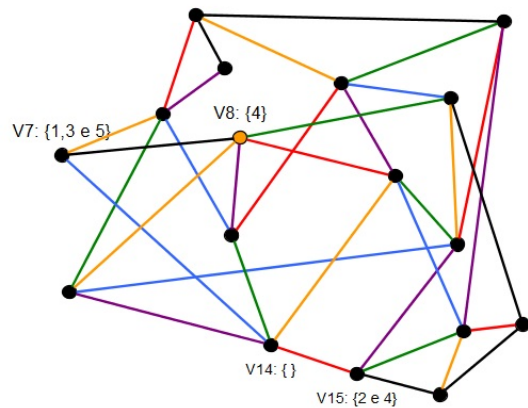


Figura 81 – Coloração 5 das arestas do Grafo A



Para resolver esse problema foram colorida as arestas que possuem menos cores dis-

poníveis, como é o caso da $\{v_8, v_{11}\}$ que só pode ser colorida com a cor 1, a $\{v_8, v_{13}\}$ que após utilizar a cor 1, a cor 2 é a única disponível em v_{13} e assim sucessivamente como mostra na figura 81. Observando a figura 82 restou apenas a aresta $\{v_7, v_8\}$, como não possui uma cor simultaneamente disponível em v_7 e em v_8 vamos seguir o passo 7 do algoritmo, invertendo a cor da aresta $\{v_7, v_{14}\}$ com $\{v_7, v_{15}\}$, liberando assim a cor 4, para a coloração da aresta $\{v_7, v_8\}$.

Figura 82 – Coloração 6 das arestas do Grafo A

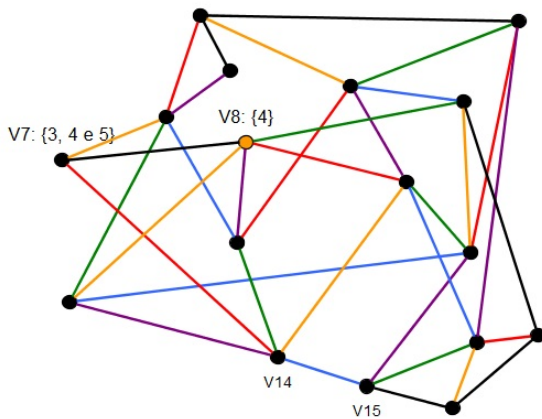
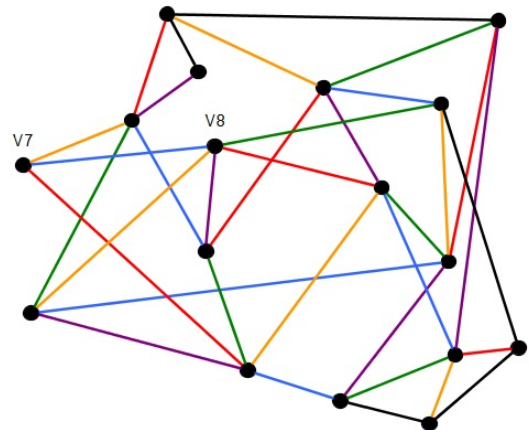
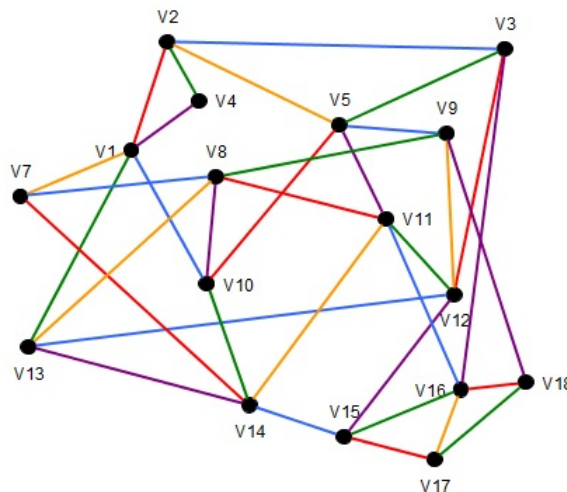


Figura 83 – Coloração 7 das arestas do Grafo A



Em seguida o restante da coloração é feita sempre levando em consideração as cores disponíveis nos vértices para colorir as arestas restantes, obtendo assim a coloração final como mostra a figura 84. Para colorir todas as arestas do grafo, figura 84, foi utilizado 5 cores que é o índice cromático desse grafo.

Figura 84 – Coloração final das arestas do Grafo A



4 Aplicação de grafos no Ensino Médio

Este capítulo traz algumas aplicações de grafos feitas na 1^a e 2^a séries do Ensino Médio de uma escola estadual na cidade de Franca, interior de São Paulo. Inicialmente, o objetivo de introduzir grafos nessas séries foi apresentar aos alunos uma matemática moderna e dinâmica em forma de problemas que despertassem o interesse pelo estudo da disciplina.

Para atender as demandas do trabalho contemporâneo é inegável que a Matemática pode dar uma grande contribuição à medida que explora a resolução de problemas e a construção de estratégias como um caminho para ensinar e aprender Matemática na sala de aula. Também o desenvolvimento da capacidade de investigar, argumentar, comprovar, justificar e o estímulo à criatividade, à iniciativa pessoal e ao trabalho coletivo favorecem o desenvolvimento dessas capacidades. (BRASIL, 1998, p. 34)

Os Parâmetros Nacionais Curriculares destacam a importância do estudo da Matemática, na formação e estruturação do pensamento e do raciocínio dedutivo dos alunos. O escritor e matemático Luís Roberto Dante relata a importância da resolução de problemas.

(...) é possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela. (DANTE, 1991, p. 25)

Vários outros autores tratam desse assunto como uma importante ferramenta para crescimento intelectual dos alunos, por isso é um dever do professor de Matemática instigar os alunos a conhecerem, pensarem e resolverem variados problemas matemáticos. Por este motivo a escolha de aplicar situações problemas para os alunos que envolvam o conceito de grafos.

Para trabalhar esses conceitos foram escolhidas salas do Ensino Médio da Escola Estadual Luiz Paride de Sinelli localizada na periferia da cidade de Franca, onde a autora era professora titular das salas.

A aplicação das atividades foram Ensino Médio, pelo fato dos alunos já possuem uma bagagem matemática maior para resolverem e entenderem a maneira que os problemas foram abordados, mas nada impede do professor elaborar planos de aulas para diferentes níveis de ensino.

Em ambas as turmas, foram desenvolvidas aulas de resolução de problemas clássicos da teoria de grafos. Na 1^a série do Ensino Médio, foi trabalhado o problema das três casas, sua representação em forma de um grafo e uma breve explicação do conceito de grafos e onde eles estão presentes no nosso cotidiano. Já na 2^a série do Ensino Médio, foi feito um

trabalho um pouco mais aprofundado; o problema apresentado foi a coloração de mapas e conseqüentemente a coloração de vértices, estudando alguns conceitos como matriz de adjacência (sendo matriz um conteúdo já trabalhado nessa série) e grau de um vértice, para então ser possível executar um algoritmo de coloração.

A seguir temos os planos de aula usados em cada sala e suas respectivas atividades.

4.1 Plano de aula - O problema das três casas

Turma: 1ª série do Ensino Médio

Duração: 1 aula

4.1.1 Objetivo

Inserir de forma sucinta o conceito inicial de grafo, desenvolver o raciocínio lógico, análise e interpretação através do problema das três casas, apresentando de forma clara e didática aos do alunos 1º ano do Ensino Médio uma matemática moderna e com um conteúdo diferente dos já vistos anteriormente.

4.1.2 Ementa

- Definição de grafos
- Representação de grafos
- Análise e Interpretação de Problemas

4.1.3 Desenvolvimento

Entregar uma folha de sulfite aos alunos e enunciar, por meio de multimídias, o problema das três casas, e propor a sua resolução em sala. Após alguns minutos, propor uma discussão sobre a resolução do problema expondo de forma clara, a demonstração do porque o problema não tem solução, e em seguida inserir o conceito básico de grafo, sua definição, utilização na organização das redes sociais e esboçar por meio de um grafo o problema inicial.

4.1.4 O problema das três casas

Suponha que haja três casas em um plano e cada uma precisa ser ligada às empresas de gás, água e eletricidade. O uso de uma terceira dimensão ou o envio de qualquer uma das conexões através de outra empresa ou casa não é permitido. Existe uma maneira de fazer todas as nove ligações sem que qualquer uma das linhas que se cruzem?

Na Figura 85 temos uma representação do problema das três casas. É importante dizer aos alunos que eles podem rearranjar as casas e as empresas distribuidoras da forma que eles preferirem, desde que estejam em um plano.

Figura 85 – Problema das três casas



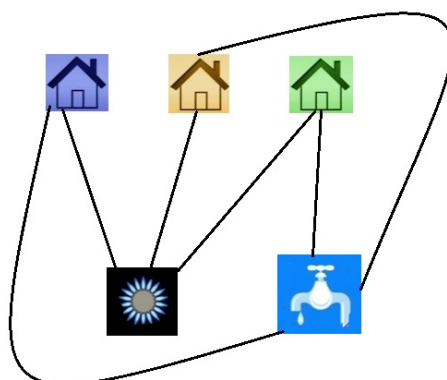
Fonte: Adaptada pela autora a partir de (MARTINS, 2014)

4.1.5 Demonstração

A solução desse problema não é possível em um plano. Para demonstrar isso aos alunos, temos como base a Revista Professor de Matemática (RPM), número 12, na qual Elon Lages Lima realizou a demonstração sem a utilização da fórmula de Euler. E na mesma linha, só que de forma mais prática, o matemático Rogério Martins fez um vídeo com essa demonstração, (as imagens da resolução desse problema foram inspiradas nesse vídeo) (MARTINS, 2014).

Inicialmente vamos ligar a companhia de água e gás em todas as casas, como podemos ver na Figura 86.

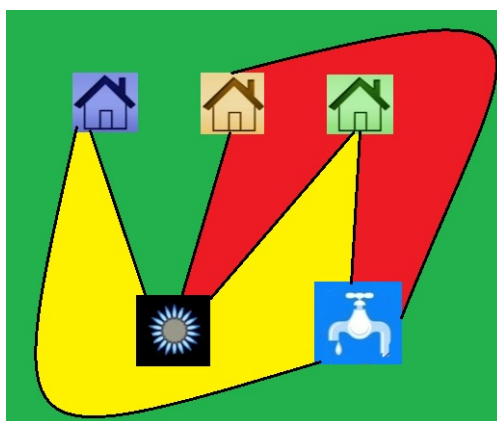
Figura 86 – Ligação de duas companhia às três casas



Fonte: Adaptada pela autora a partir de (MARTINS, 2014)

Com as delimitações traçadas, foram formadas três regiões, podendo ser coloridas para melhor visualização, como indicada na Figura 87.

Figura 87 – Divisão do problema em regiões



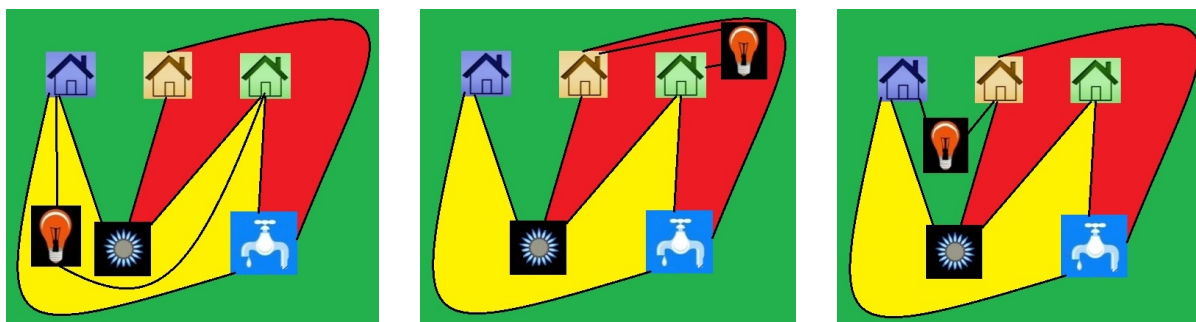
Fonte: Adaptada pela autora a partir de (MARTINS, 2014)

Observando as regiões delimitadas, em cada uma delas há apenas duas casas; assim, se inserirmos a companhia elétrica em qualquer uma das regiões, não será possível ligar a casa que não está contida naquela região sem que a ligação cruze com uma das outras já estabelecidas.

Na Figura 88 podemos ver esse acontecimento de forma prática. Na primeira imagem foi inserida a companhia elétrica na região em amarelo; como a casa em laranja não está contida nessa região, é impossível estabelecer uma relação entre elas sem que as instalações se cruzem. O mesmo aconteceu quando a companhia foi inserida nas demais regiões, como podemos ver na outras imagens. Assim, está demonstrado que o problema das três casas não apresenta solução em um plano.

O resultado pretendido neste problema é um grafo na forma $K_{3,3}$, e a demonstração de que esse grafo não é planar já havia sido feita no capítulo 2 pelo teorema 3.10.

Figura 88 – Tentativa de locação da ultima companhia



Fonte: Adaptada pela autora a partir de (MARTINS, 2014)

4.2 Plano de aula - Coloração de mapas e o Teorema das 4 cores

Turma: 2ª série do Ensino Médio

Duração: 3 aulas

4.2.1 Objetivo

Inserir o conceito inicial de grafo, desenvolver o raciocínio lógico, análise e interpretação através de problemas de grafos planares, utilizando coloração de mapas, apresentando de forma clara e didática aos alunos do 2º ano do Ensino Médio uma matemática moderna e com um conteúdo diferente dos já vistos anteriormente.

4.2.2 Ementa

- Noções Básicas de grafo: definição, grau e adjacência dos vértices
- Representação de grafos: lista de adjacências, matriz de adjacência
- Coloração de mapas e vértices
- Grafos planares
- Análise e Interpretação de Problemas

4.2.3 Desenvolvimento

Será entregue a cada aluno um mapa político do Brasil (Anexo A). Os alunos devem colorir o mapa com o menor número de cores possível de forma que os estados que fazem fronteira entre si tenham cores distintas.

Nesse exercício os alunos devem ficar à vontade para colorir com a quantidade de cores que acharem melhor, desde que sigam o enunciado do problema. Após todos terem acabado a coloração, entregar o questionário (Anexo B) e verificar se os alunos conseguiram colorir com as quatro cores, e qual foi o método utilizado para chegar no resultado. Comentar na sala que o menor número de cores possível para a coloração do mapa é 4 cores e enunciar o Teorema das 4 cores.

Por meio de multimídia, explicar as noções básicas e representação de grafos usando o Mapa do Brasil como exemplo, e em seguida sugerir o Algoritmo Guloso, como método de coloração do mapa. Entregar uma atividade em grupo (Anexo C) para colocar em prática os conceitos aprendidos.

Propor uma terceira atividade por meio de uma situação problema que pode ser resolvida pelo método de coloração de mapas (Anexo D), e ao final, comentar com os alunos que o teorema das 4 cores só é válido para grafos planares (grafos que podem ser representados de maneira que suas arestas não se cruzem).

4.2.4 Coloração do Mapa político do Brasil

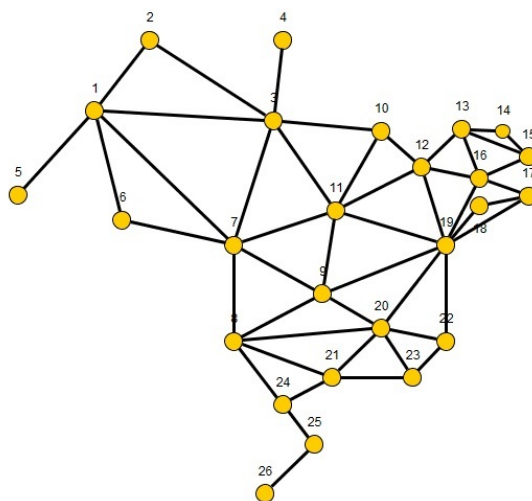
Antes de realizar o algoritmo de coloração, deve-se transformar o mapa em um grafo, explicando aos alunos que os estados serão representados pelos vértices e as arestas ligam os estados que fazem fronteiras.

Para que os alunos obtenham uma melhor percepção, é relevante indicar primeiro o mapa somente com os vértices, e depois uma imagem com apenas um vértice e suas arestas ligando os seus estados vizinhos, para então montar o grafo inteiro, como representado Figura 89. Após todo esse processo, retira-se o mapa, deixando apenas o grafo para uma melhor visualização (Figura 90).

Figura 89 – Mapa do político Brasil



Figura 90 – Grafo representando o mapa do Brasil



Para auxiliar no processo da coloração e propor o uso de matriz, que é um conteúdo base da 2ª série do Ensino Médio, faremos a matriz de adjacência do grafo explicando aos alunos a relação binária que existe na sua construção, onde é colocado o número 1 quando os vértices contém uma aresta ligando-os, e 0 quando não contém.

É válido aproveitar para retomar alguns conceitos de matriz, falando aos alunos que a matriz de adjacência é quadrada, que sua ordem é o número de vértices que a mesma possui, e que a linha e a coluna se referem ao número dos vértices do grafo. Para melhor visualização dos alunos, foi colocado na horizontal e na vertical ao lado da matriz qual vértice aquela linha ou coluna representa, como indicado na Figura 91.

Pela matriz pode-se obter o grau de cada vértice, somando a linha ou a coluna desse vértice. Por exemplo, v_1 tem grau 5 e a soma da primeira linha e coluna da matriz é igual a 5 (Figura 91).

Figura 91 – Matriz de adjacência

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9	v10	v11	v12	v13	v14	v15	v16	v17	v18	v19	v20	v21	v22	v23	v24	v25	v26	grau
v1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
v2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
v3	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
v4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
v5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
v6	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
v7	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
v8	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	5
v9	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	5
v10	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
v11	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	6
v12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	5
v13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
v14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
v15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
v16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	5
v17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3
v18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2
v19	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	8
v20	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	6
v21	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	4
v22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	3
v23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	3
v24	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	3
v25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2
v26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
grau	5	2	6	1	1	2	6	5	5	3	6	5	4	2	3	5	3	2	8	6	4	3	3	3	2	1	

Para colorir o mapa será usado o Algoritmo de Welsh-Powell, estudado no capítulo 3. Mas para o melhor entendimento dos alunos serão realizadas as etapas de forma mais simples seguindo os passos abaixo.

1. Coloque os vértices em ordem decrescente segundo o grau de cada um.
2. Comece a coloração com o vértice de maior grau.
3. Siga a sequência encontrada no primeiro passo, colorindo da mesma cor os vértices que não são adjacentes.
4. Após esgotarem os vértices com a primeira cor, passe para a segunda cor e realize o processo novamente.

Na figura 92 temos o início da coloração, onde o vértice com maior grau do grafo, no caso v_{19} , foi o primeiro a ser colorido. Pela ordem decrescente de graus, em seguida vem o v_3 e assim sucessivamente, até colorir todas as regiões possíveis com a primeira cor, formando o grafo da figura 93.

Figura 92 – Coloração 1: mapa do Brasil

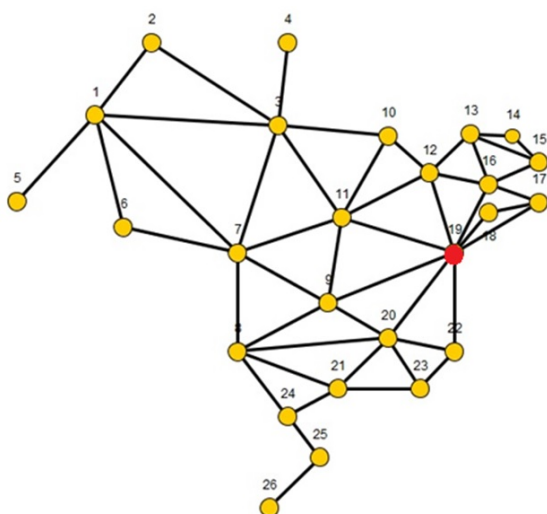
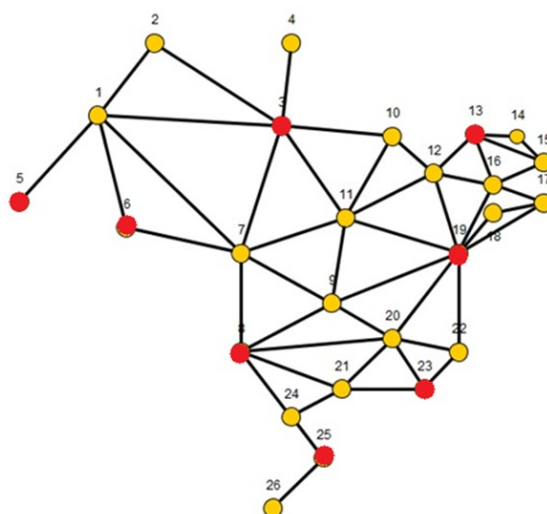


Figura 93 – Coloração 2: mapa do Brasil



O mesmo processo deve ser repetido por cada cor até obter a coloração final do mapa (Figura 94).

Figura 94 – Coloração 3: mapa do Brasil

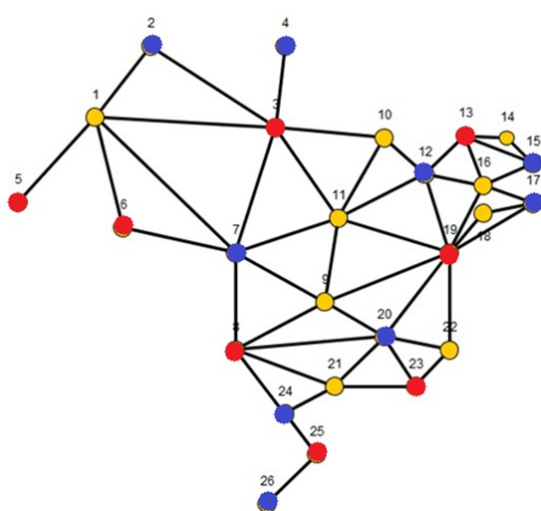
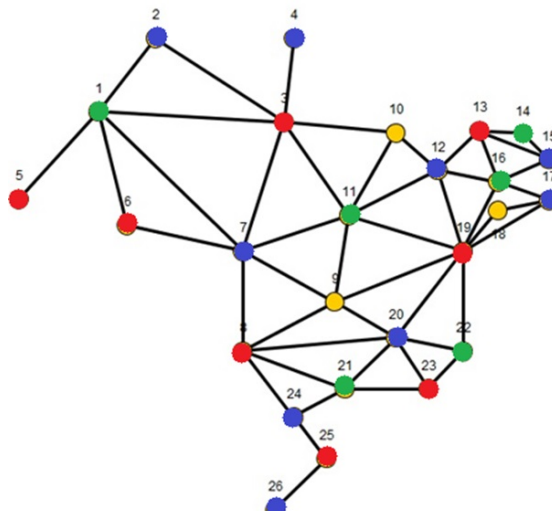


Figura 95 – Coloração 4: mapa do Brasil



Mostrar aos alunos outros mapas coloridos com 4 cores e dizer a eles que todo mapa é planar, assim todos podem ser coloridos pelo teorema das 4 cores, mas nem toda situação problema é planar (usar o exemplo 3.3).

Comentar com os alunos que existem outros algoritmos de coloração, e quanto maior a região que se pretende colorir, mais complicado se torna a resolução, por isso existem programas, que foram criados por meio desses algoritmos, e que realizam a coloração de problemas mais extensos.

4.3 Registro Reflexivo da autora

Objetivo de inserir atividades de grafos nas salas regulares, como já foi dito anteriormente, foi de apresentar uma “nova” matemática aos alunos e estimular o estudo desta ciência. Por isso, não foi aplicada uma avaliação formal do conteúdo, somente foi combinado com os alunos que faria parte da nota de participação e de entrega das atividades. Além disto, as aulas foram aplicadas em uma semana pós fechamento de bimestre e entre mudança de conteúdo para não atrasar o currículo programado nessas series.

A seguir temos os registros, resultados e fotos das aplicações dos planos de aula nas séries propostas.

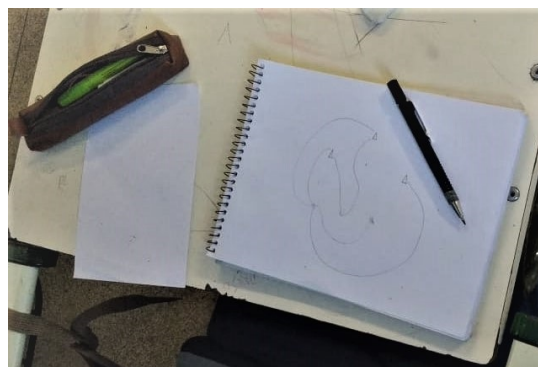
4.3.1 1ª série do Ensino Médio

A 1ª série do Ensino Médio é uma sala na qual a maioria dos alunos são participativos e realizam as atividades propostas em sala de aula, no entanto, apresentam dificuldades na compreensão dos conteúdos matemáticos e muitos deles não possuem interesse quanto à disciplina.

Na aplicação da atividade, houve um empenho dos alunos para resolver o problema das 3 casas. Eles buscaram várias alternativas para encontrar a solução, como: trocar as casas de lugar, traçar linhas mais curvas, colocar as casas alinhadas e as companhias nas extremidades, inseriram as casas e as duas companhias para depois encontrar o melhor lugar para a terceira.

As imagens a seguir são fotos dos alunos da 1ª série do Ensino Médio realizando a atividades sobre grafos.

Figura 96 – Alunos do 1º ano tentando solucionar o problema das três casas



Após um tempo de tentativas, alguns alunos desistiram e declararam que o problema não teria solução, mas não conseguiram provar a afirmação. Para alunos do Ensino Médio, encontrar uma prova matemática é algo complexo, pois estão mais habituados com exercícios práticos. Como proposto no plano de aula, foi provado que realmente o problema não tem solução, e muitos alunos ficaram frustrados com a resposta.

Foi aproveitada a oportunidade junto aos alunos para explicar que existem alguns problemas matemáticos, para os quais não foi encontrada uma resolução ou uma demonstração para afirmar que realmente o problema não possui solução, e que todos os problemas e teoremas matemáticos devem ser provados. Em seguida foi introduzido o conceito de grafos, e como exemplo no cotidiano foi falado sobre a maneira que as indicações de amizade do Facebook funcionam.

A aula foi proveitosa, os alunos se empenharam na resolução e ficaram curiosos com a forma que os grafos organizam o Facebook, mas após a retomada do conteúdo normal da série, não foi apresentada uma mudança de motivação significativa durante as aulas de matemática.

4.3.2 2ª série do Ensino Médio

A 2ª série do Ensino Médio é uma sala com boas notas e grande parte dos alunos são comprometidos, mas há alguns que apresentam dificuldades e certo desinteresse com os conteúdos de matemática. Esses fatores motivaram a aplicação das atividades de grafo nesta sala.

Primeiro foi entregue o mapa político do Brasil (Anexo A) para que fosse colorido com o menor número de cores possível, de modo que os estados vizinhos tivessem cores diferentes. O interesse dos alunos pela atividade foi visível; todos fizeram o exercício, além disso eles propuseram uma disputa entre eles de quem coloria o mapa com menos cores. Como tiveram um bom empenho, obtiveram um resultado muito bom, pois parte deles conseguiu a coloração com 4 cores.

Pela observação em sala e análise dos questionários, grande parte dos alunos começaram a coloração por uma região do canto, mais precisamente pelo estado da Amazonas, e seguiu colorindo pela ordem que as regiões apareciam. Já a maioria dos alunos que fizeram a coloração de modo aleatório coloriram o mapa com 5 cores.

Após a parte teórica, onde foi inserido o conceito de grafos e o algoritmo da coloração, foi entregue uma nova atividade (Anexo C) para que colocassem em prática a teoria, e os alunos formaram grupos para trocarem ideias sobre a resolução. Pelo desenvolvimento da atividade, as dúvidas apresentadas foram sobre a aplicação do conceito no problema proposto. Por exemplo: alguns alunos tiveram dificuldades em representar o mapa das regiões em um grafo de forma que as arestas não se cruzassem. Ao final a atividade foi recolhida e corrigida, o resultado em geral positivo, pois grande parte dos alunos compreenderam o conceito de grafos e o algoritmo de coloração proposto.

As Figuras a seguir, [97](#) e [98](#), são fotos dos alunos da 2ª série do Ensino Médio realizando a atividades sobre grafos.

Figura 97 – Alunos do 2º ano resolvendo a primeira e a segunda etapa da atividade

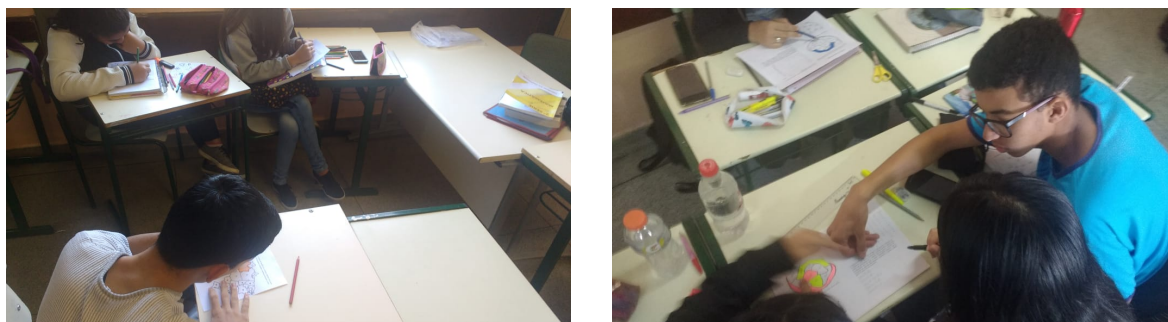


Figura 98 – Alunos do 2º ano resolvendo a terceira e quarta etapa da atividade



A terceira atividade (Anexo D) foi proposta a fim de que os alunos visualizassem que os conceitos estudados sobre grafos também são válidos para outros tipos de problemas. Para a sua resolução, além da interpretação de texto, tiveram que utilizar a matriz para formarem o grafo do problema. Nessa atividade os alunos em geral tiveram bastante dificuldade na interpretação textual e da matriz, pois perguntaram várias vezes como transformar as informações dadas em um grafo e como resolver a pergunta do exercício. Por isso, para um melhor resultado foi feito um atendimento individual.

Para finalizar a atividade, foi perguntado aos alunos se todos os problemas de coloração de grafos têm como resultado uma coloração de 4 cores, grande parte deles disseram que sim. Assim foi mostrado um problema de coloração que não é válido o teorema das 4 cores por não ser um grafo planar. Todas as atividades foram recolhidas e corrigidas, o resultado foi muito positivo, obtivemos uma participação de todos os alunos e muitos gostaram do conteúdo e da aula diversificada, pode-se perceber isto, pois durante as aulas, ao longo do ano, vários alunos perguntaram quando seria a próxima aula diversificada.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi feita uma breve introdução à Teoria de Grafos, que é uma ferramenta que auxilia na resolução de problemas do dia a dia e principalmente na área da computação. O trabalho teve como foco as definições relevantes para estudar e compreender coloração de vértices, mapas e arestas.

Vimos que a coloração de grafos em geral não é complexa, o grande desafio é encontrar o número cromático ou o índice cromático, que é como chamamos a menor quantidade de cores usadas para colorir os vértices ou as arestas do grafo. Com esse objetivo, foram estudados alguns algoritmos para coloração dos vértices, como: Coloração sequencial, Welsh-Powell e Dastur, que facilitam a coloração, mas não garantem o número cromático como resultado. Nas arestas, foi estudado o algoritmo baseado na demonstração do Teorema de Vizing, mas por ser extenso e ideal para grafos bem grandes, sua aplicação é mais proveitosa com o auxílio de computadores.

Para finalizar o trabalho foi desenvolvido, um plano de aula sobre grafos e aplicado em duas salas do Ensino Médio de uma escola pública. No 1º ano do Ensino Médio, foi trabalhado o que chamamos de O Problema das Três Casas, ou também conhecido como O Problema das Ligações de água, luz e telefone, os alunos foram desafiados a resolverem, e após um tempo de tentativas, foi demonstrado que o problema não tem solução. Posteriormente foi inserido brevemente o conceito de grafos. No 2º ano do Ensino Médio, como os alunos já possuíam uma “bagagem” maior, foi trabalhado o conceito de grafos, sua representação em forma de matriz de adjacência, o Teorema das quatro cores com a coloração do Mapa do Brasil Político e, para finalizar, uma adaptação do Algoritmo de Welsh-Powell para a resolução do Problema dos Químicos.

Tendo em vista os aspectos observados, a motivação dos alunos e as correções das atividades realizadas, vimos que é possível inserir grafos no ensino regular, e sugerimos a continuação desse estudo, e de novos problemas que possam ser trabalhados também com o Ensino Fundamental, que promova um novo olhar para o Aprender Matemática pelos alunos.

Referências

- ALVES, R. P. Coloração de grafos e aplicações. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2015.
- ASSEMBLÉIA LEGISLATIVA DO ESTADO DE SÃO PAULO. *Mapa das Regiões do Estado de São Paulo*. Disponível em: https://www.al.sp.gov.br/acervo-historico/exposicoes/interior_paulista/mapa.htm. Acesso em: 28 ago. 2018.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. et al. *Graph theory with applications*. London: 1. ed. Macmillan, 1976.
- BRASIL, S. d. E. F. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- COSTA, P. P. d. Teoria dos grafos e suas aplicações. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2011.
- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de matemática*. [S.l.: s.n.], 1991. v. 1.
- FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y. Uma introdução sucinta à teoria dos grafos. 2011. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/pf/teoriadosgrafos/>.
- FLEINER, T. *Yet another proof for Brooks' theorem*. Technical Report QP-2014-01, Egerváry Reserch Group, Budapest, 2014.
- GUIA GEOGRÁFICO. *Mapa Político da América do Sul*. Disponível em: <https://www.guiageografico.com/america-sul/mapa-politico.htm>. Acesso em: 27 jun. 2018.
- JURKIEWICZ, S. Grafos—uma introdução. *São Paulo: OBMEP*, 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf>. Acesso em: 13 fev. 2018.
- LIMA, C. L. G. d. Um estudo sobre teoria dos grafos e o teorema das quatro cores. Dissertação de Mestrado - Universidade de São Paulo (USP), São Carlos, 2016.
- LIMA, E. L. Alguns problemas clássicos sobre grafos. *Revista Professor de Matemática RPM*, São Paulo, n. 12. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/12/10.htm>. Acesso em: 27 maio. 2018.
- LOPES, F. J. A.; TÁBOAS, P. Z. Euler e as pontes de Königsberg. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 15, n. 30, p. 23–32, 2015.
- LOZANO, D. Modelagem matemática e aplicações do problema de coloração em grafos. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual Paulista (UNESP), São José do Rio, 2007.
- LUCCHESI, C. L. *Introdução à teoria dos grafos*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- MARTINS, R. *Isto é Matemática T07E03 O Problema das Três Casas*. 2014. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=dmsuPffeHvI&t=86s>. Acesso em: 16 ago. 2018.

- NETO, A. S. A.; GOMES, M. J. N. Problema e algoritmos de coloração em grafos-exatos e heurísticos. *Revista de Sistemas e Computação-RSC*, Salvador, v. 4, n. 2, p. 101–115, jul./dez. 2014.
- NETTO, P. O. B. *Grafos: teoria, modelos, algoritmos*. 3. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2003.
- NETTO, P. O. B.; JURKIEWICZ, N. S. *Grafos: introdução e prática*. 1. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2009.
- OLIVEIRA, G. P. de; PEZZETA, J. R. Teoria dos grafos no ensino médio: Uma abordagem por meio da resolução de problemas. *Ensino da Matemática em Debate*, v. 3, n. 1, 2016.
- OLIVEIRA, T. J. de. Implementação e análise de algoritmos para coloração de arestas. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.
- PITOMBEIRA, J. B. O problema das ligações de água luz e telefone. *Revista Professor de Matemática RPM*, São Paulo, n. 11. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/11/3.htm>. Acesso em: 27 maio. 2018.
- RABUSKE, M. A. *Introdução à teoria dos grafos*. Florianópolis: Editora da UFSC, 1992.
- SANTOS, L. A. d. Teorema da curva de Jordan. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR), São Carlos, 2010.
- SAUTOY, M. du. *O enigma resolvido há 300 anos pelo matemático Leonard Euler e que hoje nos permite navegar na internet*. 2018. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-44157282>. Acesso em: 5 jun. 2018.
- SILVA, P. H. da; DANTAS, S. Coloração total dos grafos snarks. *CNMAC*, v. 2, p. 515–516, 2009.
- SOUSA, L. O teorema das quatro cores. *Millenium*, Instituto Politécnico de Viseu, p. 125–151, 2001.
- WAKABAYASHI, Y. *Um curso de grafos*. 2015. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~tassio/arquivo/2012-ii/grafoes/notas-grafoes.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2019.

A Atividade 1

Pinte o mapa do Brasil com o menor número de cores possíveis, de forma que os estados vizinhos possuam cores diferentes.



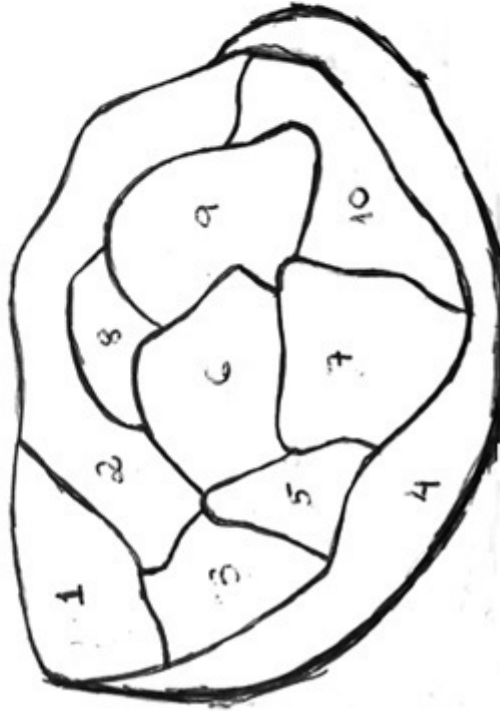
B Questionário

Questionário
1- Por qual região você começou a colorir o mapa?
2- Por que começou por essa região? a. Preferi começar por uma região do canto. b. Por que é a que tem mais fronteiras. c. Comecei por essa região pelo número que ela possui. d. Outra (explique).
3- Qual foi a sua estratégia usada? a. Seguir a coloração pela ordem que as regiões aparecem. b. Seguir a ordem numérica das regiões. c. Colorir inicialmente os estados com mais regiões vizinhas. d. Colorir de modo aleatório. e. Outra (explique).
4- Com quantas cores você conseguiu colorir o mapa?

C Atividade 2

Atividade 2 – Coloração de grafos

Um horticultor dividiu sua horta afim de cultivar seus legumes, fez um cercado para separar essas regiões, como mostra na figura abaixo.



1- Represente o mapa da horta por meio de um grafo.

2- Faça a matriz de adjacência com base no grafo do exercício 1 e encontre o grau de cada vértice.

3- Sabendo que o mesmo tipo de legume não pode ser cultivado em na divisa do outro. Ajude o horticultor a indicar quais as regiões que podem ser plantadas com o mesmo tipo de legume, levando em consideração que ele quer a menor diversidade possível. Use a coloração de vértices para resolver o problema e registre a seguir passo a passo do seu raciocínio.

D Atividade 3

Atividade 3 – Coloração de grafos

(Problema dos Químicos). Suponha que um químico deseja armazenar 5 substâncias, **a**; **b**; **c**; **d**; e **e**. Algumas dessas substâncias reagem quando entram em contato, devendo então ser armazenadas em salas diferentes. Qual é a quantidade mínima de salas necessárias para armazenar essas substâncias? Considere a matriz M de adjacência abaixo, sendo que as substâncias adjacentes (possui o número 1 na matriz) reagem quando entram em contato, ou seja, não podem ficar na mesma sala.

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} \end{matrix}$$