UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FLORISVALDO CRUZ JUNIOR

VAMOS ESTUDAR FUNÇÕES? É DIVERTIDO!

Uberaba-MG
2015

FLORISVALDO CRUZ JUNIOR

VAMOS ESTUDAR FUNÇÕES? É DIVERTIDO!

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro-UFTM, Departamento de Matemática.

Uberaba-MG
2015

FLORISVALDO CRUZ JUNIOR

VAMOS ESTUDAR FUNÇÕES? É DIVERTIDO!

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

18 de dezembro de 2015

Banca Examinadora

Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni
Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Prof^a Dr^a Marcela Luciano Vilela de Souza
Membro Interno
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Prof^a M^a Josimeire Maximiano dos Santos
Membro Externo
Instituto Federal de São Paulo - Câmpus Araraquara

Aos meus filhos, Arthur e Melissa.

À minha esposa, Pricila, pela dedicação, paciência e amor.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por colocar obstáculos em minha vida e me dar forças para vencê-los.

Agradeço ao Profmat e à UFTM (Universidade Federal do Triângulo Mineiro) por proporcionar a possibilidade de realização desse trabalho.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro durante todo o curso.

Agradeço ao meu orientador, que foi colega de graduação, Prof. Dr. Rafael Ottoboni pelas contribuições dadas para a conclusão do trabalho.

Agradeço aos meus diretores de escolas por onde passei pois cada tem a sua contribuição no trabalho.

Agradeço ao meu pai Florisvaldo Cruz e minha mãe Rosa Mara dos Santos Cruz, pessoas que me ajudaram a crescer muito, tanto no pessoal quanto no profissional.

Agradeço a todos os meus familiares e amigos que direta ou indiretamente contribuiram para a conclusão desse trabalho.

Agradeço ao meu filho Arthur, que por algumas vezes eu estressado, não lhe dei a atenção necessária, e ele me dizia: “Coitado do papai, estuda tanto!”Filho, essa etapa chegou ao fim e vamos jogar muito bola e video game.

Agradeço à minha filha Melissa, que tem apenas 2 aninhos de idade, mas que de certa forma conseguiu me levantar em momentos de desânimo apenas com um sorriso.

Agradecimento muito mais que especial à minha esposa Pricila de Oliveira Cruz que me viu chorar, passar noites em claro, entrar em desespero, achar que não iria dar conta do recado e outros tantos motivos, ela não me deixou desanimar e sempre me colocava de pé, erguia minha cabeça e dizia: “Calma, você vai conseguir!”

“No meio da dificuldade encontra-se a oportunidade.”

Albert Einstein

Resumo

A realização deste trabalho é para que o aluno possa viajar no estudo de funções de um modo dinâmico visto que o ensino de matemática tem se tornado muito monótono e como estamos numa era digital, devemos acompanhar essa evolução. Nele encontrarás atividades desenvolvida pelo autor utilizando o software Geogebra, no qual o aluno poderá se interagir com o conteúdo e vendo como se comportam determinadas funções. Espera-se que o trabalho possa alavancar novas ideias com o intuito de melhoria do processo de ensino-aprendizagem em matemática na Educação Básica.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Educação Básica, estudo de funções e Geogebra.

Abstract

This work is for the student to travel in the study of functions in a dynamic way as the teaching of mathematics has become very monotonous and as we are in a digital age, we must follow this evolution. In it you will find activities developed by the author using the Geogebra software, in which the student will be able to interact with the content and seeing how they perform certain functions. It is hoped that work can leverage new ideas in order to improve mathematics teaching-learning process in basic education.

Keywords: Mathematics Education, Basic Education, study of functions and Geogebra .

Conteúdo

Lista de Figuras

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Por que eu tenho que estudar isso? Nossa, que coisa chata? Onde vou usar isso na minha vida?

Essas são frases ditas por aprendizes quando submetidos ao estudo de funções.

Neste cenário, o estudo de funções pode ser chato e o intuito desse trabalho é deixar esse estudo mais divertido e dinâmico.

Nos dias de hoje, podemos aplicar o conceito de função em várias situações do nosso cotidiano e sendo assim, acreditamos que tal estudo possa ficar mais interessante.

No capítulo 2, será tratado o assunto ***Conjuntos*** iniciando de modo bem simples para que o aluno consiga relembrar alguns conceitos vistos nos anos anteriores ao qual ele se encontra. Serão tratado assuntos como por exemplo a linguagem matemática dos conjuntos, pertinência, diagramas, conjuntos unitário e vazio, igualdade de conjuntos, subconjuntos e operações com conjuntos. Dentre as operações com conjuntos, teremos uma atividade dinâmica que mostra ao aluno o que é a intersecção de conjuntos de modo lúdico e divertido.

Na sequência, são apresentados os ***Conjuntos Numéricos***, como são representados numa reta numérica e representação dos conjuntos por Diagrama de Venn.

No capítulo 3, introduziremos a teoria de ***Relações*** no intuito de que o aluno compreenda os conceitos de par ordenado, plano cartesiano, distribuição de pontos no plano cartesiano, produto cartesiano e relação binária. Além disso, definir o que é domínio e imagem de modo mais intuitivo.

No capítulo 4, realmente chegaremos em nossas pretenções que é ***Funções***. Nesta etapa do trabalho, introduzimos uma atividade dinâmica envolvendo uma função mais simples com o problema chamado *Táxi do Sr. Antônio*, o qual descreve uma corrida de táxi. Na sequência é abordado os conceitos de função, domínio, contradomínio, imagem, injetividade, sobrejetividade e bijetividade, função inversa, função crescente e função decrescente. Este capítulo é finalizado com outra atividade dinâmica envolvendo dois taxistas no problema chamado *Sr. Antônio x Sr. Carlos*.

No capítulo 5, apresentamos a ***Função Afim*** mostrando os procedimentos para determinarmos um valor numérico de uma dada função afim. Estudaremos o gráfico da função, as intersecções com os eixos do plano cartesiano, o crescimento e decrescimento, o coeficiente angular e o coeficiente linear. Por fim, apresentamos duas dinâmicas relacionadas aos coeficientes de uma função afim ao qual chamamos de *Coeficiente Linear* e *Coeficiente Angular*.

A ***Função Quadrática*** é um assunto que será tratado no capítulo 6 de nosso trabalho. Nele, além da definição e exemplos abordados, veremos o comportamento do gráfico da função em questão, números de raízes, zeros da função, coeficientes, máximo e mínimo da função.

Ao tratarmos da ***Função Exponencial***, capítulo 7, a priori faremos uma revisão de potenciação para que na sequência possa ser introduzido conceitos de função exponencial e seu comportamento gráfico.

Em ***Função Logarítmica***, capítulo 8, definiremos a mesma, introduziremos algumas propriedades e mostraremos o comportamento gráfico de uma função logarítmica. Teremos muitos exercícios de aplicação e alguns problemas relacionados ao nosso cotidiano.

Ao final de nosso trabalho iremos tratar das ***Funções Trigonométricas***, capítulo 9. Iniciaremos com trigonometria na circunferência e em seguida teremos uma experiência com intuito de mostrar uma maneira de calcular o comprimento de uma circunferência. Uma atividade dinâmica que introduziremos no capítulo, se trata do espaço percorrido por cada uma das torres de um pivot central. Complicado? Vá até ela! Ficou muito interessante! Trataremos também os conceitos de arcos côngruos na circunferência, estudo das funções seno, cosseno e tangente, comportamento gráfico de cada uma dessas funções, tabela trigonométrica com os respectivos valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos compreendidos entre 0^o e 90^o.

Ainda neste último capítulo, exibiremos uma atividade dinâmica com a função seno na qual iremos variar seus parâmetros. A atividade chamada *Função Seno* trata-se de uma mola que empurrará e puxará um corpo até uma determinada distância e mais ao final teremos outra atividade dinâmica chamada *Tabela de valores seno, cosseno e tangente* cuja sua finalidade é encontrar os valores do seno, cosseno e tangente de qualquer ângulo de modo bem dinâmico.

Diante de tudo que será exposto, o trabalho aqui presente, vem de certo modo, tentar facilitar o aprendizado de funções através da teoria, aplicação de exemplos, aplicação de exercícios e atividades dinâmicas. Deixo claro que, colocando nossas ideias em prática, poderemos elaborar muitas atividades dinâmicas que possam facilitar o aprendizado do conteúdo.

As atividades dinâmicas foram feitas no software de geometria dinâmica Geogebra 5.0, software de livre acesso na internet e de fácil manuseio.

Vamos estudar funções? É divertido!

Capítulo 2

NOÇÕES DE CONJUNTOS

Figura 2.1: copa
ver fonte [14]

Álbum de figurinhas

2014 foi um ano muito esperado por vários brasileiros. Mas por quê? Tem que haver um motivo, não é mesmo! E para muitos esse motivo existiu apesar da decepção que estava por vir. Copa do Mundo no Brasil! Não poderíamos repetir o fiasco de 1950. Bom, para quem gosta de futebol sabe o final de tudo isso... O legal de Copa do Mundo é que muitas pessoas ficam alvoroçadas com os álbuns de figurinhas. Senti isso na pele. Meu filho e seus amiguinhos participaram de uma atividade elaborada no colégio que consistia em completar álbum de figurinhas onde continha páginas com os próprios alunos e os maiores craques das Copas. Legal né! Eu como pai, tive que entrar na brincadeira e voltar a ser criança. Adquirir álbum, comprar pacotinhos de figurinhas, trocar figurinhas repetidas, colar figurinhas, quanta diversão. Pra mim tudo bem o fato de ter figurinhas repetidas, mas para meu filho era a morte, emburrava mesmo, e sendo assim, vai o papai e a mamãe explicar a dinâmica de tudo isso, e acreditem, deu certo, ele entendeu!

Olha que legal, o álbum contém figurinhas e as figurinhas estão divididas entre figurinhas dos alunos, craques das copas, países participantes, estádios para realização dos jogos e um mascote. Acho que isso dá uma boa brincadeira de estudos, vamos lá!

As seções deste capítulo foram baseadas nas referências [1], [3], [4], [6], [8], [11] e [13].

2.1 Noções de conjunto

Uma ideia inicial que podemos ter de conjuntos é que, uma coleção de objetos ou símbolos é um **conjunto** e os objetos ou símbolos que formam esse conjunto são chamados de **elementos do conjunto**.

Para pensar! – Que analogia se pode fazer do texto ***"álbum de figurinhas"*** com conjuntos?

NOTAÇÃO

• Geralmente representamos conjuntos por letras **maiúsculas**: A, B, C, ...

• Se os elementos de um conjunto forem letras, representamos as mesmas por letras **minúsculas**: a, b, c, ...

• Usamos duas chaves para representar um conjunto discreto sendo que entre elas escreveremos seus elementos $A = \{a, b, c, \dots\}$ ou algo que representa a característica do conjunto, $A = \{$letras do nosso alfabeto$\}$.

Observação:

1 - Em um conjunto **não** se deve repetir os elementos iguais, e é permitido substituir elementos por **reticências**, desde que sua compreensão não seja prejudicada.

2 - Um conjunto também pode ser representado colocando seus elementos dentro de uma região limitada do plano, chamada também por diagrama de Venn. Veremos mais adiante sobre tal diagrama.

2.1.1 Exemplos

a) A = {dias da semana} = {domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado}

b) B = {meses do ano} = {janeiro, fevereiro, março, ..., dezembro}

c) C = {filhos do autor} = {Arthur, Melissa}

d) D = {conjuge do autor} = {Pricila}

e) E = {vogais do alfabeto} = {a, e, i, o, u}

f) F = {estações do ano} = {primavera, verão, outono, inverno}

g) G = {números pares} = {0, 2, 4, 6, ... }

h) H = {irmãs do autor} = {}

i) I = {três estádios da copa de 2014 no Brasil} = {Maracanã, Mineirão, Arena Pernambuco}

j) J = {cinco países participantes da copa de 2014 no Brasil} = {Brasil, Alemanha, Itália, Portugal, França}

2.2 Pertinência

As componentes que formam um conjunto são seus elementos. Dado uma componente qualquer, a mesma pode ou não pertencer ao conjunto em questão e escrevemos do seguinte modo o exemplo g (ver 2.1.1).

$$\boxed{2 \in G}$$

lê-se: "2 pertence a G"

$$\boxed{3 \notin G}$$

lê-se: "3 não pertence a G"

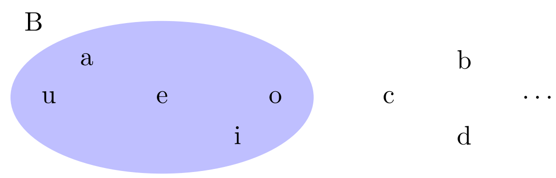
2.3 Diagrama de Venn

A representação de um conjunto através de um Diagrama de Venn consiste em colocar os elementos do conjunto dentro de uma região limitada por uma curva fechada, e os elementos que não são do conjunto estão fora dessa região limitada pela curva fechada.

2.3.1 Exemplos

Primeiro exemplo

B = {vogais do nosso alfabeto}



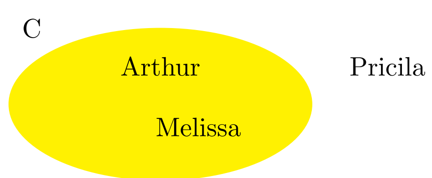
Conclusão:

$a \in B$ $e \in B$ $i \in B$ $o \in B$ $u \in B$

$b \notin B$ $c \notin B$ $d \notin B$

Segundo exemplo

C = {Arthur, Melissa}



Conclusão:

$Arthur \in C$ $Melissa \in C$ $Pricila \notin C$

2.4 Conjunto unitário

Conjunto unitário é todo conjunto formado por apenas um elemento. Temos como exemplo de conjunto unitário:

$$\boxed{\text{D} = \{\text{cônjuge do autor}\} = \{\text{Pricila}\}}$$

2.5 Conjunto vazio

Conjunto vazio é todo conjunto que não possui elemento e representamos por $\{\}$ ou $\varnothing$. Temos como exemplo de conjunto vazio:

$$\boxed{\text{H} = \{\text{irmãs do autor}\} = \{\} = \varnothing}$$

Observação: *Nunca representar conjunto vazio utilizando as duas representações dada acima.*

2.6 Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos A e B são ditos iguais quando todo elemento de A for elemento de B e vice versa.

Exemplo: O conjunto A é formado pelos meses do ano começados pela letra f e B é o conjunto dos meses do ano com menos de 30 dias.

$$\boxed{\text{A} = \text{B} = \{\text{fevereiro}\}}$$

2.7 Subconjuntos

Um dado conjunto A será subconjunto de B se todo elemento de A é também elemento de B.

Escrevemos do seguinte modo:

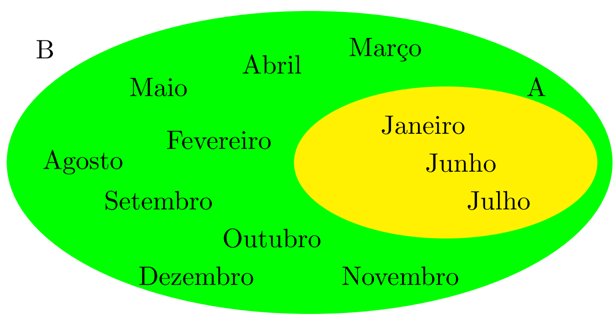
$\boxed{A \subset B}$ ou $\boxed{B \supset A}$

Lê-se:

A está contido em B ou B contém A.

Observação: *Cuidado com a confusão que pode ser feita com a relação de pertinência, $\in$, ou a relação de inclusão, $\subset$. O símbolo $\in$ é utilizado para relacionarmos elementos e conjuntos e o símbolo $\subset$ é usado para relacionarmos conjuntos.*

Exemplo: Considere o conjunto $A = \{$meses do ano começados com J$\}$ e o conjunto $B = \{$meses do ano$\}$. Temos que A é subconjunto de B, ou seja, $A \subset B$. Veja a ilustração a seguir.



Conclusão: *Janeiro, junho e julho $\in A$ e também janeiro, junho e julho $\in B$, logo $A \subset B$.*

Observação: Se B não for subconjunto de A então escrevemos:

$\boxed{B \not\subset A}$

Fevereiro $\in$ B e Fevereiro $\notin$ A então $B \not\subset A$.

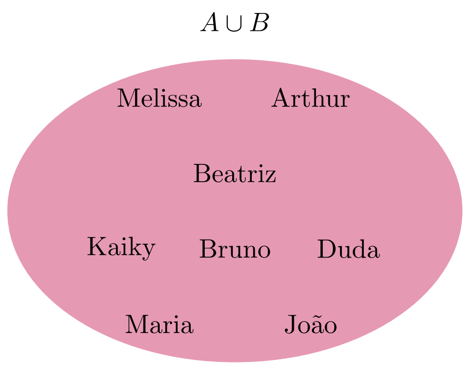
2.8 Operações com conjuntos

2.8.1 União de conjuntos

A união ou reunião dos conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B ou a ambos, e escrevemos:

$$\boxed{A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}}$$

Exemplo: Considere o conjunto A formado pelos meninos descritos no conjunto abaixo e o conjunto B formado pelas meninas descritas no outro conjunto abaixo. Ao fazermos a união dos conjuntos, ou seja, se juntarmos os meninos e as meninas num único conjunto, teremos $A \cup B$.

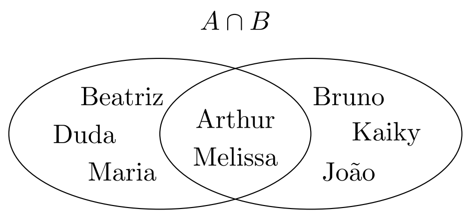


2.8.2 Intersecção de conjuntos

A intersecção dos conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e também a B, e escrevemos:

$$\boxed{A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}}$$

Exemplo: A intersecção dos conjuntos será formada pelas crianças filhos da mesma mãe. Nesta situação; Arthur e Melissa são filhos de Pricila. As outras crianças não são filhos de mesma mãe.



ATIVIDADE DINÂMICA

A atividade a seguir mostrará uma dinâmica realizada pela intersecção de conjuntos, ou seja, os elementos que estiverem nos dois conjuntos ao mesmo tempo, serão direcionados para uma determinado espaço no Diagrama de Venn.

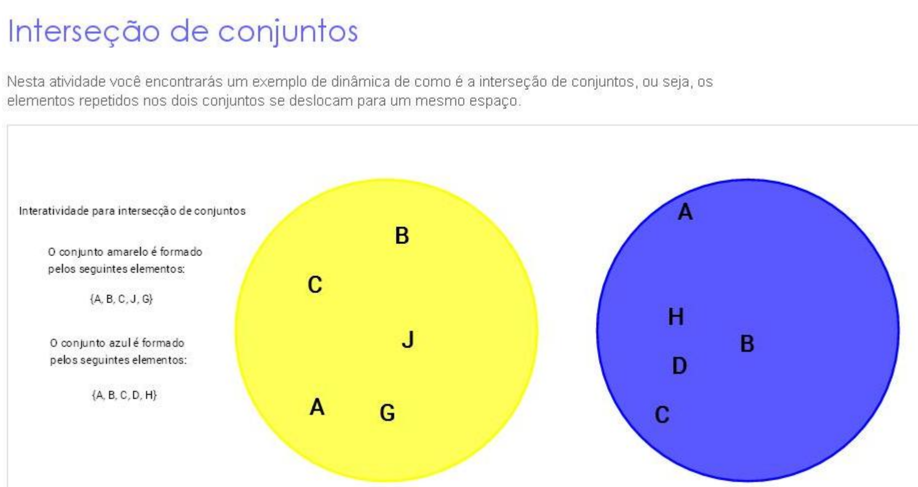


Figura 2.2: Intersecção de conjuntos

fonte – o autor

Clique em: Intersecção de conjuntos ou acesse: https://tube.geogebra.org/m/1941533

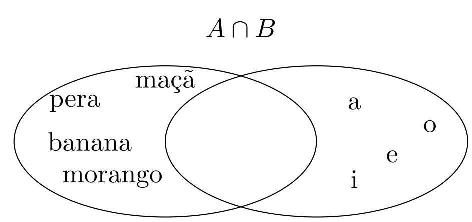
2.8.3 Conjuntos disjuntos

Quando $A \cap B = \varnothing$, isto é, quando os conjuntos A e B não possuem elementos comuns, A e B são denominados **conjuntos disjuntos**.

Exemplo: Abaixo temos dois conjuntos, um formado por frutas e outro por letras. Perceba que não existe elemento comum entre os dois.

$$A = \{frutas\} \qquad B = \{letras\}$$

$$\boxed{A \cap B = \varnothing}$$



Conclusão: *Perceba que,* $A \cap B = \varnothing$

2.8.4 Diferença de dois conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **diferença entre A e B** o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B, e representamos por $A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Exemplo: Considere o conjunto A como sendo as cinco vogais do nosso alfabeto e B formado pelas cinco primeiras letras do alfabeto. Teremos que:

$A = \{a, e, i, o, u\}$ $\qquad$ $B = \{a, b, c, d, e\}$

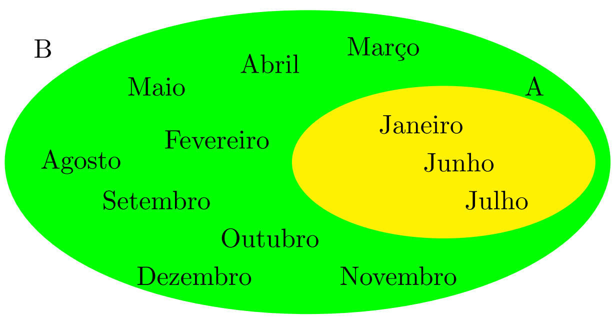
$$\boxed{A - B = \{i, o, u\}}$$

2.8.5 Conjunto complementar

Dados dois conjuntos A e B, chamaremos de **conjunto complementar** de A em relação a B a diferença $B - A$, quando $A \subset B$.

$$\boxed{A^C = B - A}$$

Exemplo: Abaixo temos um exemplo visto anteriormente onde tinhamos o conjunto B como sendo o conjunto dos meses do ano e A um subconjunto de B, ou seja, A está dentro de B.



$A^C = B - A$, ou seja, tome o conjunto B e retire o conjunto A.

2.8.6 Exercícios

1 – Represente as citações abaixo através de conjuntos:

a) Números ímpares menores que dez.

b) Letras da palavra MAIO.

c) Vogais da palavra MAIO.

d) Consoantes da palavra MAIO.

e) Meses do ano começados por vogal.

f) Números maiores que quinze.

g) Meses do ano começados por B.

Considere os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {4, 5, 6, 7, 8} e C = {6, 7, 8, 9, 10}, para responder as questões 2, 3 e 4:

2 – Determine os conjuntos abaixo:

a) $A \cup B$	c) $B \cup C$	e) $A \cap C$
b) $A \cup C$	d) $A \cap B$	f) $B \cap C$

3 – Preencher com $\in$ ou $\notin$:

a) $2 \ldots A$	c) $2 \ldots B$	e) $2 \ldots A \cup B$	g) $8 \ldots B \cap C$
b) $5 \ldots A$	d) $8 \ldots B$	f) $2 \ldots A \cap B$	h) $7 \ldots B \cup C$

4 – Represente por um diagrama de Venn os conjuntos formados por A e B; B e C, e A e C.

5 – Com relação à questão 2, qual dos conjuntos representa um conjunto vazio?

6 – Seja $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, d, e\}$ e $C = \{a, b, d, f\}$, determine:

a) $A - B$	d) $B - A$	g) $(A - B) \cup (A - C)$
b) $C - A$	e) $A - C$	h) $(B - C) \cap (B - A)$
c) $B - C$	f) $C - B$	i) $(C - A) \cup (C - B)$

2.9 Problemas

Problemas Resolvidos

1 – Numa pesquisa sobre a preferência em relação a dois jornais, foram consultadas 470 pessoas e o resultado foi o seguinte: 250 delas lêem o jornal A, 180 o jornal B e 60, os jornais A e B.

a) Quantas pessoas lêem apenas o jornal A?

b) Quantas lêem apenas o jornal B?

c) Quantos lêem jornais?

d) Quantos não lêem jornais?

Solução: Comece a resolução pela intersecção dos conjuntos, ou seja, pela quantidade de pessoas que lêem os dois jornais, 60 pessoas. Como temos que 180 pessoas lêem o jornal B (A e B ou somente o jornal B) e já temos 60 na intersecção (A e B), então teremos que 120 lêem apenas o jornal B (somente B). Como temos que 250 pessoas lêem o jornal A (A e B ou somente o jornal A) e já temos 60 na intersecção (A e B), então teremos que 190 lêem apenas o jornal A (somente A). Foram consultadas 470 pessoas e pelo diagrama temos que 370 pessoas lêem algum jornal, sendo assim podemos concluir que 100 pessoas não lêem nenhum jornal $(470 - 370)$ e portanto ficam fora do diagrama.

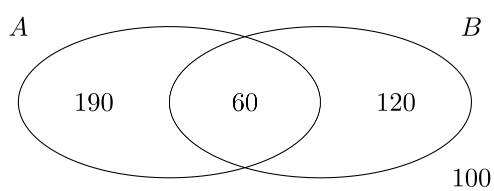


Figura 2.3: Diagrama de Venn

a) 190 pessoas lêem apenas o jornal A.

b) 120 pessoas lêem apenas o jornal B.

c) 370 pessoas lêem jornal.

d) 100 pessoas não lêem jornal.

2 – Uma editora estuda a possibilidade de lançar novamente as publicações: *Helena, Senhora e A Moreninha*. Para isto, efetuou uma pesquisa de mercado e concluiu que em cada 1000 pessoas consultadas:

600 leram *A Moreninha*

400 leram *Helena*

300 leram *Senhora*

200 leram *A Moreninha e Helena*

150 leram *A Moreninha e Senhora*

100 leram *Senhora e Helena*

20 leram as três obras.

Calcule:

a) O número de pessoas que leram apenas uma das três obras.

b) O número de pessoas que não leram nenhuma das três obras.

c) O número de pessoas que leram duas ou mais obras.

Solução: Considere M para A Moreninha, H para Helena e S para Senhora.

Comece a resolução pela intersecção dos conjuntos, ou seja, pela quantidade de pessoas que leram os três livros, 20 pessoas. Na sequência, verifique as quantidades de pessoas que leram dois livros, por exemplo, 100 leram *Senhora e Helena*, mas como já temos 20 nessa intersecção, restam 80 pessoas. Procedendo do mesmo modo verificamos as intersecções entre *A Moreninha e Helena* e *A Moreninha e Senhora*. Na sequência podemos determinar quantas pessoas leram um, e somente um, dos exemplares. Como a pesquisa foi feita com 1000 pessoas, temos portanto condições de saber também quantos não leram nenhum exemplar.

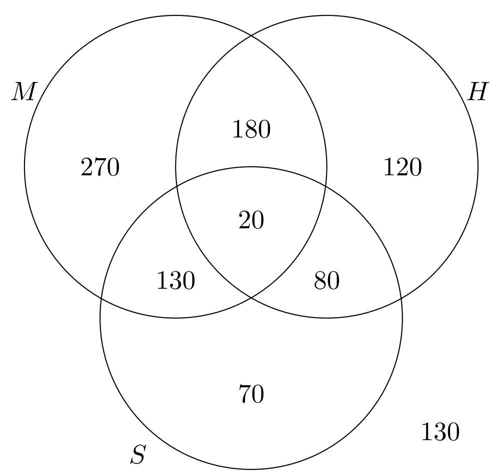


Figura 2.4: Diagrama de Venn

a) 460 pessoas leram apenas uma das três obras. (70 + 120 + 270)

b) 130 pessoas não leram nenhuma das três obras.

c) 410 pessoas leram duas ou mais obras. (20 + 80 + 130 + 180)

Problemas Propostos

1 – Uma pesquisa feita com várias pessoas constatou que 50 pessoas gostam de futebol, 30 pessoas gostam de voleibol e 10 pessoas gostam dos dois esportes. Quantas pessoas foram pesquisadas?

2 – Em certa comunidade há indivíduos de três etnias: branca, negra e amarela. Sabendo que 70 são brancos, 350 são não negros e metade são amarelos, responda:

a) Quantos indivíduos tem a comunidade?

b) Quantos são os indivíduos amarelos?

3 – Uma escola tem 20 professores, dos quais 10 ensinam Matemática, 9 ensinam Física, 7 ensinam Química e 4 ensinam Matemática e Física. Nenhum deles ensina Matemática e Química, e nem as três disciplinas. Quantos professores ensinam Química e Física e quantos ensinam somente Física?

4 – Numa pesquisa, verificou-se que, das pessoas consultadas, 100 liam o jornal A, 150 liam o jornal B, 20 liam os dois jornais e 110 não liam nenhum dos dois jornais. Quantas pessoas foram consultadas?

5 – Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 2000 pessoas usam os produtos A ou B. O produto B é usado por 800 pessoas, e 320 pessoas usam os dois produtos ao mesmo tempo. Quantas pessoas usam o produto A?

6 – Sabe-se que o sangue das pessoas pode ser classificado em quatro tipos quanto a antígenos. Em uma pesquisa efetuada num grupo de 120 pacientes de um hospital, constatou-se que 40 deles têm o antígeno A, 35 têm o antígeno B e 14 têm o antígeno AB. Nestas condições, pede-se o número de pacientes cujo sangue tem o antígeno O.

7 – Num grupo de 99 esportistas, 40 jogam vôlei, 20 jogam vôlei e xadrez, 22 jogam xadrez e tênis, 18 jogam vôlei e tênis e 11 jogam as três modalidades. O número de pessoas que jogam xadrez é igual ao número de pessoas que jogam tênis.

a) Quantos esportistas jogam tênis e não jogam vôlei?

b) Quantos jogam xadrez ou tênis e não jogam vôlei?

c) Quantos jogam vôlei e não jogam xadrez?

8 – Em uma universidade são lidos dois jornais, A e B. Exatamente 80% dos alunos lêem o jornal A e 60%, o jornal B. Sabendo que todo aluno é leitor de pelo menos um dos jornais, determine o percentual de alunos que lêem ambos.

9 – (Faap-SP) Uma prova era constituída de dois problemas. 300 alunos acertaram somente um dos problemas, 260 acertaram o segundo, 100 alunos acertaram os dois e 210 erraram o primeiro. Quantos alunos fizeram a prova?

10 – Numa sala de aula com 60 alunos, 11 jogam xadrez, 31 são homens ou jogam xadrez e 3 mulheres jogam xadrez. Calcule o número de homens que não jogam xadrez.

2.10 Conjuntos Numéricos

Brincando com os números

Certa vez, ao adentrar numa determinada sala de aula, fiquei pensando como iria fazer para chamar a atenção daqueles alunos que ali se encontravam para o assunto que iria começar. Decidi perguntar aos alunos como era seu guarda roupas, se era bagunçado com camisetas misturadas com as bermudas, shorts, meias, roupas íntimas, vestidos e outros, ou se era arrumadinho com cada vestimenta em seu lugar. Naquele momento obtive respostas variadas que me agradaram muito. O interessante foi que apareceram alunos que eram muito organizados, como por exemplo, alunos que separavam até as camisetas por cores e tudo mais, e alunos que eram totalmente desorganizados. Aos desorganizados, perguntei se era fácil encontrar uma roupa que eles tanto gostavam ou se eles eram daqueles que ficam: *"Mãe, cadê minha camiseta branca e aquela bermuda preta que ganhei da tia?"*. E a mãe exclama: *"Se você fosse mais organizado, saberia onde está!"*. Essa dinâmica foi muito legal e como tarefa naquele dia, ficou para que os alunos arrumassem seu guarda roupas. É claro que eu não iria à casa dos alunos para conferir, ficaria numa conscientização de cada um. E acreditem; no dia seguinte alguns alunos me trouxeram fotos e algumas mães vieram agradecer à tarefa que eu havia passado. Legal né! E a matemática, onde fica? Decidi então, na aula seguinte, pedir aos alunos que escrevessem em seu caderno cinco números e a partir daí fui analisando os números de cada aluno e colocando-os na lousa. No momento em que isso era feito, foram aparecendo números de todo tipo e foi com este momento que comecei a questionar os alunos. Perceberam os tipos de números que aqui estão aparecendo? Será que podemos organizar esses números para que não fiquem bagunçados, todos misturados? Organizando esses números, será que a visualização não ficaria melhor? E se alocarmos esses números e dermos um nome a eles, ficaria bom?

Olha que legal, todos os números podem estar num mesmo local e ainda subdivididos com novas propriedades para um melhor entendimento. Acho que isso dá uma boa brincadeira de estudos, vamos lá!

2.11 Introdução

Os **conjuntos numéricos** são divididos em:

Números Naturais
Números Inteiros
Números Racionais
Números Reais
Números Irracionais
Números Complexos - *não veremos neste exemplar.*

2.12 Números Naturais

O conjunto dos **números naturais**, representado pelo símbolo $\mathbb{N}$, é o conjunto formado pelos números 0, 1, 2, 3, 4, ...

$$\boxed{\mathbb{N} = \{0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots\}}$$

$$\boxed{\mathbb{N}^* = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots\}}$$

Observação informal: “Os números naturais são aqueles que conseguimos contar com os dedos. Mão fechada representa o zero.”

2.13 Números Inteiros

O conjunto dos **números inteiros**, representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$, é o conjunto formado pelos números:

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}}$$

No conjunto dos números inteiros temos três subconjuntos notáveis:

2.13.1 Conjunto dos inteiros não negativos

$$\boxed{\mathbb{Z}+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}}$$

2.13.2 Conjunto dos inteiros não positivos

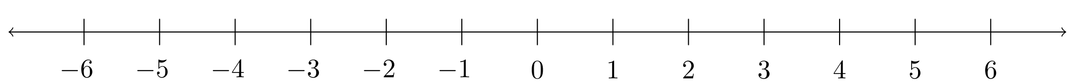
$$\boxed{\mathbb{Z}- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}}$$

2.13.3 Conjunto dos inteiros não nulos

$$\boxed{\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}}$$

2.13.4 Reta numérica

Os números inteiros podem ser representados em uma reta orientada da seguinte forma:



Perceba que, na reta numérica o número 0 (zero) separa os números positivos dos números negativos.

2.14 Números Racionais

Os números que podem ser representados na forma $\frac{m}{n}$, n diferente de zero ($n \neq 0$), m, n pertencentes aos inteiros, são chamados de frações e formam o conjunto dos **números racionais** que é representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$.

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}}$$

2.15 Números Reais

Os números reais são definidos pela união dos números racionais com os números irracionais, ou seja;

$$\boxed{\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})}$$

2.16 Números Irracionais

Existem alguns números que não podem ser representados na forma $\frac{m}{n}$, com n diferente de zero, m, n pertencentes aos inteiros, tais como o número π, $\sqrt{2}$ e outros. Esses números formam o conjunto dos **números irracionais** e denotaremos por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

2.16.1 Exemplo:

$\sqrt{2}$ é um número irracional.

Demonstração: Considere $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, com $\frac{m}{n}$ irredutível $\Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ é par $\Rightarrow$ m é par $\Rightarrow m = 2k$.

Sendo assim: $m^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow n^2$ é par $\Rightarrow$ n é par.

Como m e n são pares, concluímos $\frac{m}{n}$ não é irredutível e $\sqrt{2}$ não pode ser escrito por uma fração.

Portanto, $\sqrt{2}$ é um número irracional.

2.17 Diagrama de Venn

Perceba que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

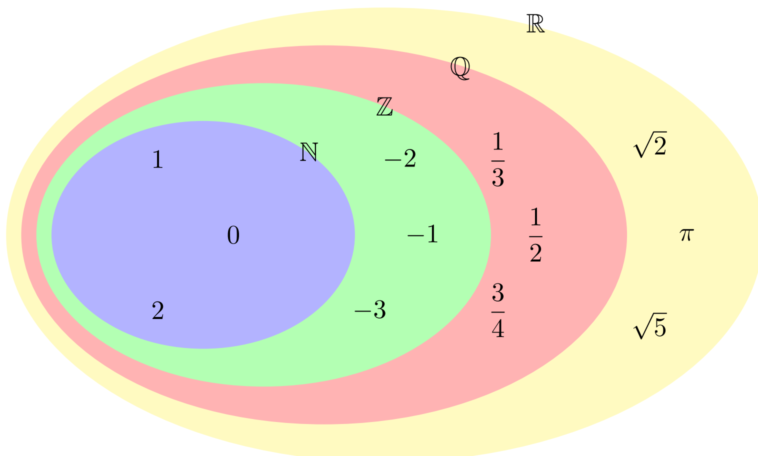


Figura 2.5: Conjuntos Numéricos

2.18 Intervalos

Dados dois números reais a e b, com a < b, definimos:

a) **Intervalo aberto** de extremos **a** e **b** é o conjunto $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ ou (a, b).

b) **Intervalo fechado** de extremos **a** e **b** é o conjunto $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$.

c) **Intervalo fechado à esquerda** de extremos **a** e **b** é o conjunto $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ ou $[a, b)$.

d) **Intervalo fechado à direita** de extremos **a** e **b** é o conjunto $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ ou $(a, b]$.

Os números reais **a** e **b** são denominados, respectivamente, **extremo inferior** e **extremo superior** do intervalo.

Também consideramos intervalos lineares os ”intervalos infinitos”assim definidos:

a) $] - \infty, a[= \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$ que também podemos indicar por $(-\infty, a[$ ou $(-\infty, a)$.

b) $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$ que também podemos indicar por $(-\infty, a]$.

c) $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ que também podemos indicar por $]a, +\infty)$ ou $(a, +\infty)$.

d) $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$ que também podemos indicar por $[a, +\infty)$.

e) $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ que também podemos indicar por $(-\infty, +\infty)$.

2.18.1 Representação Geométrica

Os intervalos têm uma representação geométrica sobre a reta real como a que segue:

$]a, b[$

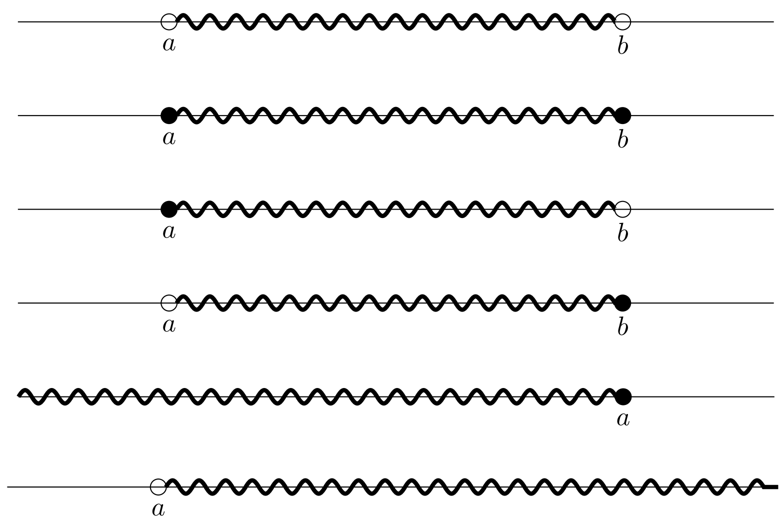
$[a, b]$

$[a, b[$

$]a, b]$

$]-\infty, a]$

$]a, +\infty[$



2.18.2 Exercícios

1 – Represente sobre a reta real os seguintes conjuntos:

Resolução:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 2\}$

$[1, 2]$

Para resolver:

b) $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq -1\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x \leq 3\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 4\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$

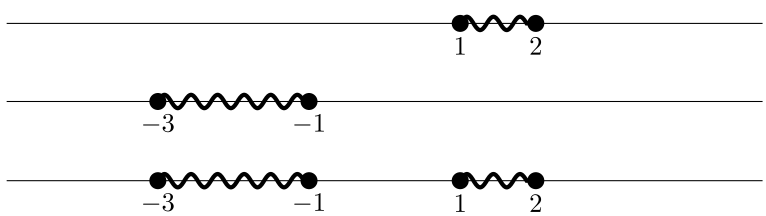
g) $G = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 2 \ ou \ x > 4\}$

h) $H = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0 \ ou \ x \leq -2\}$

2 – Considere a questão anterior e represente os seguintes casos na reta real:

Resolução:

a) $A \cup B$



Para resolver:

b) $B \cup C$ c) $B \cap C$ d) $D \cup E$

e) $D \cap E$ f) $E \cup F$ g) $E \cap F$

h) $G \cup H$ i) $G \cap H$ j) $A \cap B \cap C$

3 – Escreva, com a notação de intervalo, as soluções dos sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - 4 > 2 \\ 4x + 8 \leq 24 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 4 > 0 \\ 3x - 6 \geq 0 \end{cases}$

4 – Dados $A =]-1, 1[$, $B = [0, 2[$ e $C = [-2, 2]$, determine:

a) $A - (B \cap C)$ b) $(A \cup B) \cap C$

c) $(A - B) \cup C$ d) $A \cap B \cap C$

5 – Dados $A = \{x \in \mathbb{Q} | 1 \leq x \leq 8\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} | x \geq 3\}$, obtenha:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$

c) $A - B$ d) $B - A$

6 – Dados $A = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq 3\}$, obtenha:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$

c) $A - B$ d) $B - A$

7 – Dados $A = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 0\}$, obtenha:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$

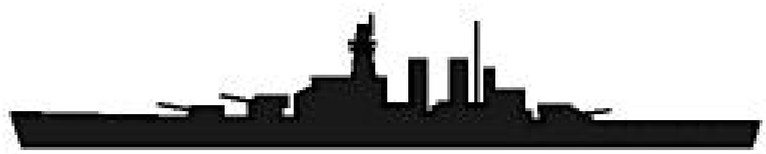
c) $A - B$ d) $B - A$

8 – Dados $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq \sqrt{5}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq \frac{7}{3}\}$, obtenha:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$

Capítulo 3

RELAÇÕES



BATALHA NAVAL

Você já jogou batalha naval? É um jogo muito interessante datado do início do século XX, antes mesmo da 1ª Guerra Mundial.

O jogo consiste em capturar os návios do adversário que estão dispostos em uma malha quadriculada com dez linhas e dez colunas, chamada de malha ou grelha de defesa. As linhas são denominadas com as letras de A a J enquanto que as colunas são enumeradas de 1 a 10. Existe também uma malha, ou grelha, de ataque que é para o jogador marcar onde foi que ele lançou os tiros. Os návios são do seguinte tipo: um porta aviões (ocupa cinco quadradinhos), um návio de quatro canos (ocupa quatro quadradinhos), dois návios de três canos (ocupa três quadradinhos), três návios de dois canos (ocupa dois quadradinhos) e quatro návios de um cano (ocupa um quadradinho). Por exemplo: Suponha dois jogadores A e B. Ambos colocarão seus návios na grelha de defesa e o jogador A começará o jogo. O jogador A dará três tiros tentando acertar onde estão os návios do jogador B. Os tiros são dados dizendo a linha e a coluna que deseja, por exemplo, C5. Ao final dos três tiros, o jogador B dirá se o jogador A acertou ou não algum návio. Se o jogador A acertar, o jogador B dirá; tiro e o nome do návio, caso contrário dirá água. Em seguida será a vez do jogador B dar seus três tiros. O jogo prossegue sempre alternando os jogadores até um conseguir afundar todos os návios do seu adversário. Um návio será afundado quando for acertado por completo.

Enfim . . .

Certa vez fui jogar com meu filho Arthur. Expliquei a ele como funcionava o jogo e assim começamos a jogar. Tiro pra lá, tiro pra cá e assim vai.

Em uma determinada rodada, me confundi na quantidade de tiros e aprontei o maior embaraço, fiquei perdido se já havia dado todos os tiros da rodada, e foi aí que veio a primeira surpresa dita pelo Arthur:

– Papai, conta quantos tiros já foi dado, mas conta de três em três!

– Porque de três em três filho?

Palavras do Arthur:

– Se der, tipo assim, três, seis, nove, doze... thânana... thânana... é que já deu os tiros!

Pensei comigo, vai pegar o jogo fácil!

Bom, algumas rodadas depois veio a segunda surpresa:

– Papai, afundei seu návio de quatro canos!

– Porque você tem essa certeza Arthur?

Palavras do Arthur:

– É que eu já acertei um pedaço dele e os quadradinhos da frente é água, então o resto é nos quadradinhos que estão atrás.

Bom, enfim ..., o jogo continuou, era a primeira vez que meu filho jogava, já havia me surpreendido duas vezes com seu raciocínio e eu teria que perder o jogo pois se eu ganhasse ele iria ficar bravo, chateado, coisa de criança. Mais fiquei muito contente pelo ocorrido.

Acho que isso dá um bom estudo de matemática! Vamos lá?

Este capítulo foi baseado nas referências [6], [8] e [13].

3.1 Par Ordenado

3.1.1 Exemplo

Numa sala de aula existem trinta carteiras, dispostas em cinco fileiras, e os alunos estão sentados conforme o esquema abaixo:

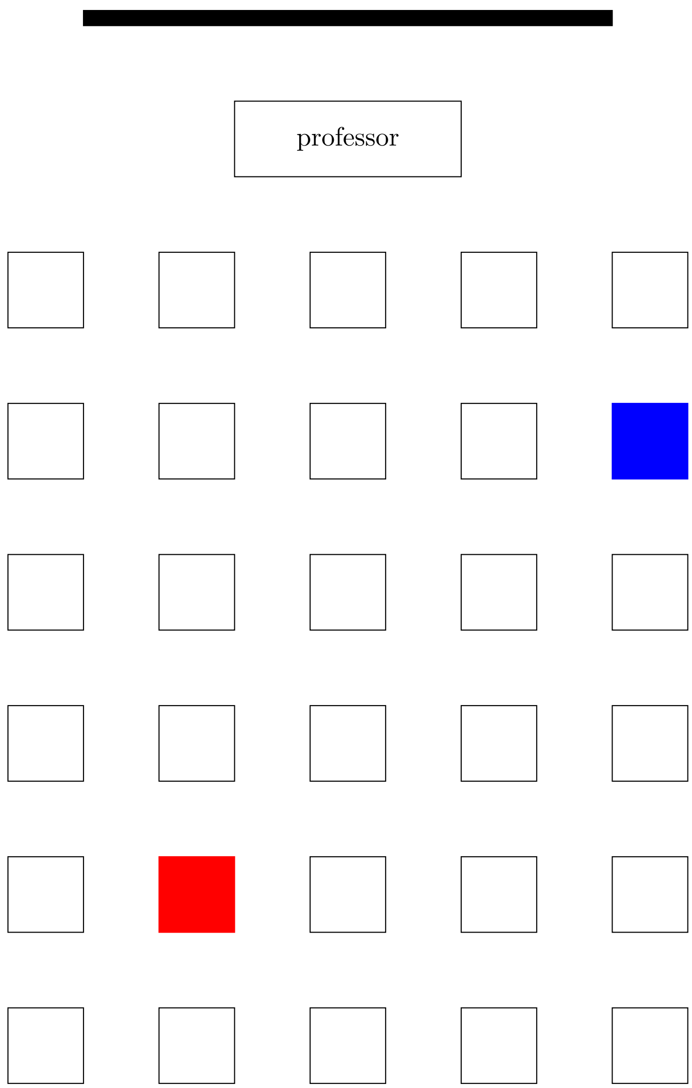


Figura 3.1: Sala de aula

Perceba que o aluno sentado na segunda linha e quinta coluna não estará no mesmo lugar sentando na quinta linha e segunda coluna.

Observamos que:

$$(2,5) \neq (5,2)$$

Analogamente, percebemos que:

$$(1,3) \neq (3,1)$$
$$(3,4) \neq (4,3)$$
$$(2,3) \neq (3,2)$$
$$(1,5) \neq (5,1)$$

Logo, a ordem é de extrema importância e assim são chamados de ***pares ordenados***. O primeiro elemento do par ordenado é chamado de ***abscissa*** e o segundo de ***ordenada***.

No ensino fundamental é trabalhado *Sistemas de equações com duas variáveis* e a solução de cada um deles é dada por par ordenado. Concentre-se e resolva os problemas abaixo.

3.1.2 Problemas para praticar

1 – O perímetro de um retângulo mede 20 metros. A diferença entre as dimensões desse retângulo é 2 metros. Calcule essas dimensões.

2 – Num estacionamento há carros e motos. No total existem 42 veículos e 138 rodas. Quantos carros e quantas motos há no estacionamento?

3 – André e Júlia foram a uma lanchonete. André comeu dois mistos, tomou um refrigerante e gastou seis reais e sessenta centavos. Júlia comeu um misto e também tomou um refrigerante, gastando quatro reais e dez centavos. Qual é o preço do misto e do refrigerante nessa lanchonete?

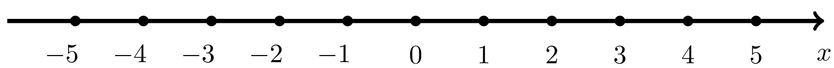
4 – A soma das idades de João e Maria é 28 anos. Qual é a idade de cada um deles, sabendo que João é 4 anos mais velho que Maria?

5 – Numa Olimpíada de Matemática, a prova é composta de 20 questões. Pelo regulamento, cada questão certa vale 5 pontos e cada questão errada vale 2 pontos. A equipe de certo colégio obteve 82 pontos. Quantas questões acertou e quantas errou?

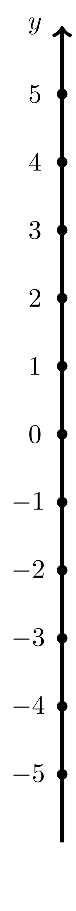
3.2 Plano Cartesiano

Consideremos duas retas numeradas obedecendo às seguintes condições:

a) os pontos da reta horizontal estão associados com os valores de x do par ordenado (x, y).



b) os pontos da reta vertical estão associados com os valores de y do par ordenado (x, y).



c) as ***duas retas numeradas*** se interceptam na origem, à qual se associa o par ordenado $(0, 0)$.

Todo plano que apresenta um ***eixo x*** e um ***eixo y*** nas condições acima é denominado **plano cartesiano**.

3.2.1 Representação de pontos no plano cartesiano

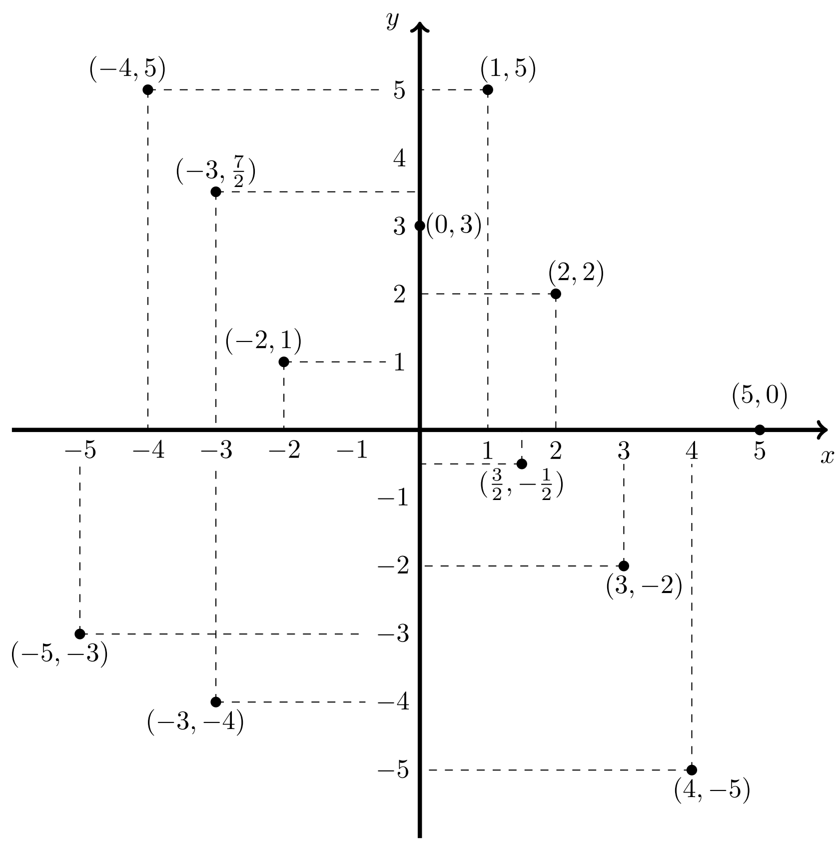


Figura 3.2: Plano cartesiano

3.3 Produto Cartesiano

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Denominamos **produto cartesiano** de A por B o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos pares ordenados (x, y), em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Leitura da notação $A \times B$: ***"A cartesiano B"*** ou ***"produto cartesiano de A por B"***.

3.3.1 Exemplos

1 – Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3\}$ então;

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

e

$$B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

e as representações no plano cartesiano são as seguintes:

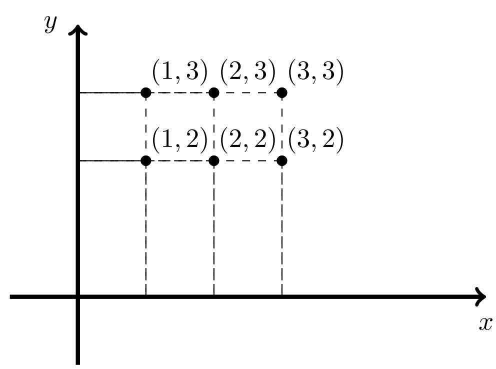


Figura 3.3: $A \times B$

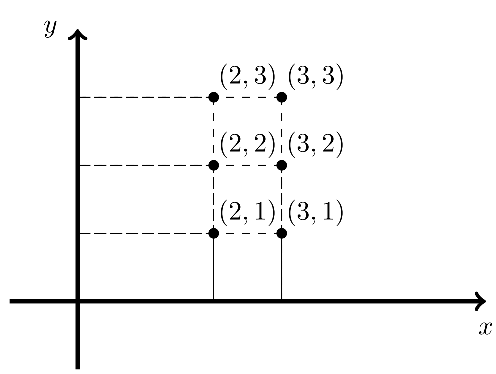


Figura 3.4: $B \times A$

2 – Tomando o conjunto B do exemplo anterior, temos:

$$B \times B = \{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

$B \times B$ também pode ser chamado por B^2 e lê-se “B dois”.

3 – Seja $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 5\}$, temos $A \times B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 3 \ e \ 1 \leq y \leq 5\}$ representado graficamente no plano cartesiano pelo conjunto de pontos de um retângulo.

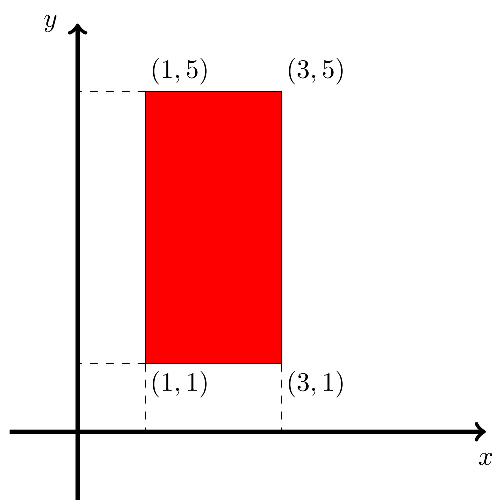


Figura 3.5: $A \times B$

3.3.2 Exercícios

1 – Dê as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano abaixo:

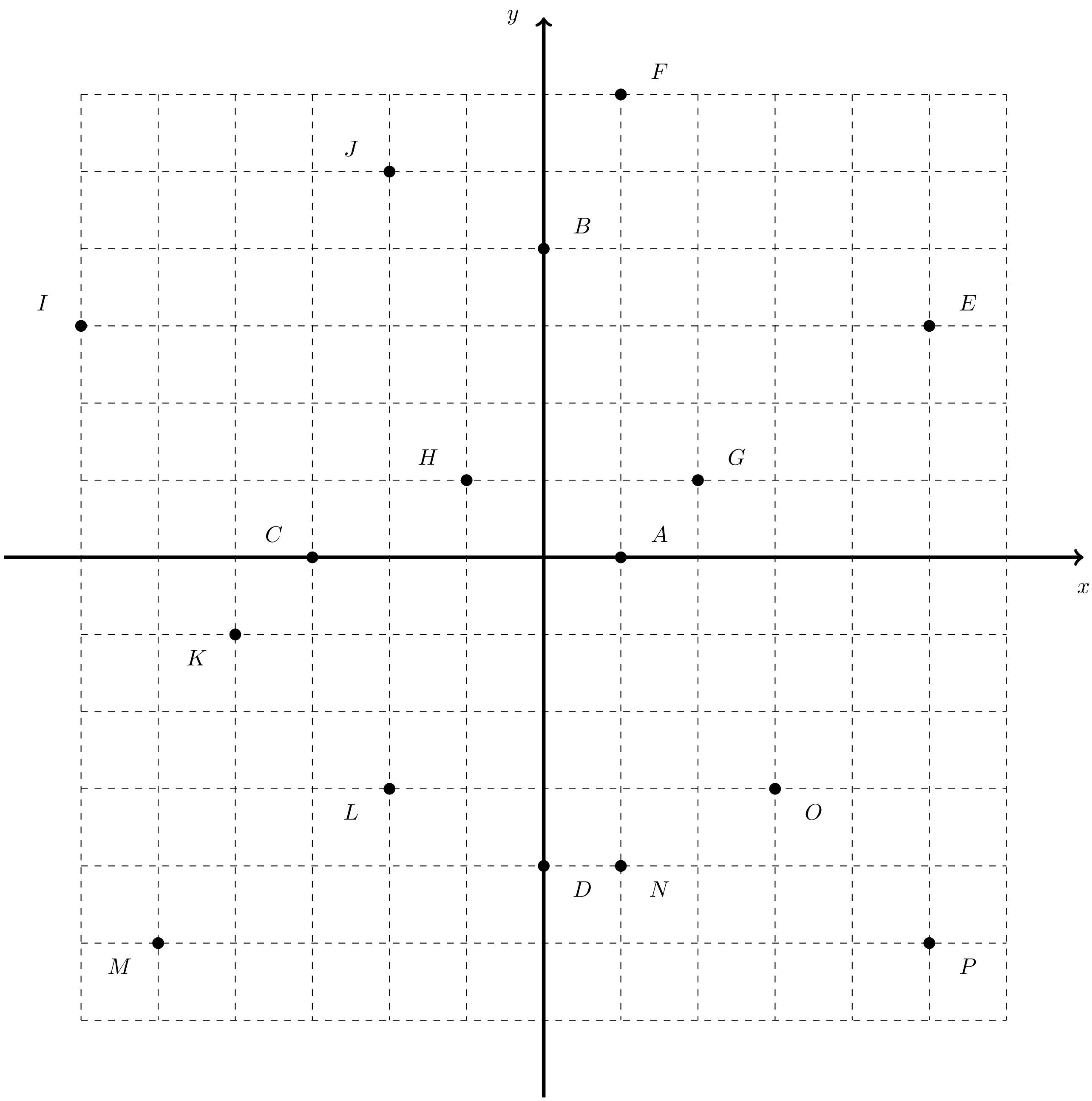


Figura 3.6: Plano cartesiano

2 – Dados os conjuntos

$A = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 2\}$

represente graficamente os seguintes produtos:

a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) $A \times A$ d) $B \times B$

3 – Dados os conjuntos

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{-2, 0\}$ $C = \{3, 4, 5\}$

represente pelos elementos e pelo gráfico cartesiano os seguintes produtos:

a) $A \times B$
b) $A \times C$
c) $B \times A$
d) $B \times C$
e) $C \times B$
f) $C \times A$
g) A^2
h) B^2
i) C^2

3.4 Relação Binária

Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7\}$. O produto cartesiano de A por B é o conjunto $A \times B = \{(x, y) | x \in A \ e \ y \in B\}$ formado por 12 elementos *(quantidade de elementos de A multiplicada pela quantidade de elementos de B)*. Se agora considerarmos o conjunto de pares ordenados $(x, y) \in A \times B$ tais que $x|y$ *(lê-se: "x divide y")*, teremos $R = \{(x, y) \in A \times B | \ x|y\} = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 6), (3, 6)\}$, que é chamado relação entre os elementos de A e de B ou, simplismente, ***relação binária de A em B***.

Se R é uma relação entre dois conjuntos, então R é subconjunto de $A \times B$.

$$\boxed{\text{R é relação binária de A em B} \iff R \subset A \times B}$$

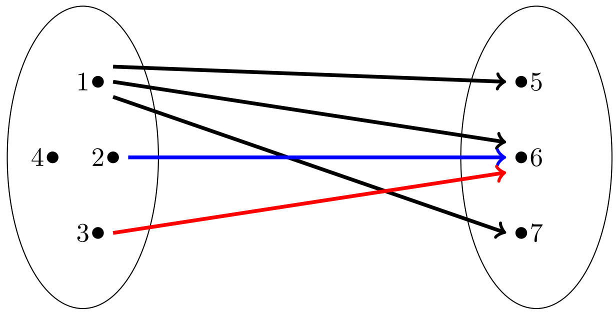


Figura 3.7: R é relação binária de A em B

3.4.1 Exercícios

1 – Sejam os conjuntos A, números pares não negativos menores que 10; B, números ímpares não negativos menores que 10 e C, números primos positivos menores que 10. Considere R como sendo uma relação entre esses conjuntos e determine:

a) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$

b) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$

c) $R = \{(x, y) \in A \times C \mid x < y\}$

d) $R = \{(x, y) \in A \times C \mid x > y\}$

e) $R = \{(x, y) \in B \times C \mid x < y\}$

f) $R = \{(x, y) \in B \times C \mid x > y\}$

g) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y\}$

h) $R = \{(x, y) \in A \times C \mid x = y\}$

i) $R = \{(x, y) \in B \times C \mid x = y\}$

j) $R = \{(x, y) \in C \times C \mid x < y\}$

2 – Considerando os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, verifique se as relações $S = \{(x, y) \in A \times B \mid y \geq x + 2\}$ e $T = \{(x, y) \in B \times A \mid y \geq x + 2\}$ são iguais.

3 – Represente os itens do exercício 1 por meio do diagrama de Venn *(diagrama das flechas)*.

3.5 Domínio e Imagem

Chama-se ***domínio*** de uma relação, o conjunto de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencente à relação.

Indicando ***domínio*** por D e R uma relação de A em B, teremos que;

$$\boxed{x \in D \Longleftrightarrow \exists\, y,\ y \in B \mid (x, y) \in R}$$

O domínio da relação R é subconjunto de A.

Chama-se ***imagem*** de uma relação, o conjunto de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencente à relação.

Indicando ***imagem*** por Im e R uma relação de A em B, teremos que;

$$\boxed{y \in Im \Longleftrightarrow \exists\, x,\ x \in A \mid (x, y) \in R}$$

A imagem da relação R é subconjunto de B.

Conclusão: *De modo simplificado para nosso entendimento e considerando o diagrama das flechas, farão parte do* ***domínio*** *os elementos dos quais partem as flechas e da* ***imagem*** *os elementos que recebem as flechas.*

3.5.1 Exemplo

Seja $A = \{0, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, qual é o domínio e a imagem da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid$ y é múltiplo de x$\}$?

$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$
$D = \{2, 3, 4\}$
$Im = \{2, 3, 4, 6\}$

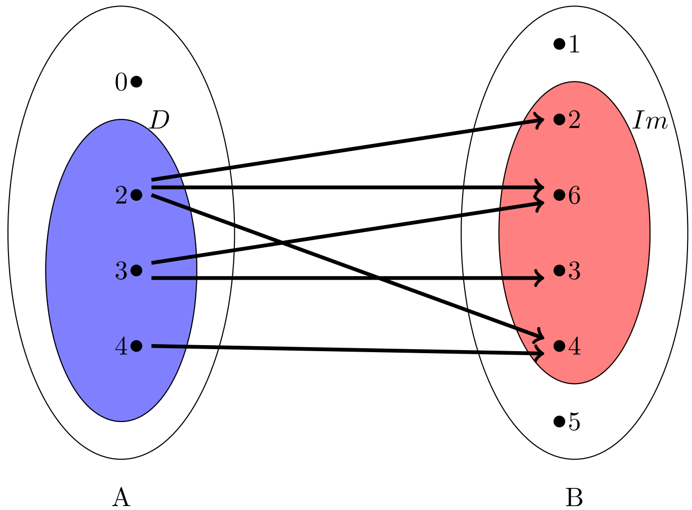


Figura 3.8: R é relação binária de A em B

Observação: Perceba que, $D \subset A$ (destaque em azul) e $Im \subset B$ (destaque em vermelho).

3.5.2 Exercícios

1 – Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e R a relação binária de A em B definida por:

$$xRy \Leftrightarrow x = y^2$$

a) Enumere os pares ordenados de R.

b) Enumere os elementos do domínio e da imagem de R.

c) Faça o diagrama de Venn dessa relação R.

2 – Se R e S são as relações binárias de $A = \{x \in \mathbb{Z} | -2 \leq x \leq 5\}$ em $B = \{y \in \mathbb{Z} | -2 \leq y \leq 3\}$ definidas por:

$$xRy \Leftrightarrow 2|(x - y)$$
$$xSy \Leftrightarrow (x - 1)^2 = (y - 2)^2$$

forneça:

a) as representações cartesianas de R e de S;

b) o domínio e a imagem de R e de S;

c) $R \cap S$.

3 – Considere as relações binárias de $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ definidas por:

$xRy \Leftrightarrow x + y = 2$

$xSy \Leftrightarrow x^2 = y$

$xTy \Leftrightarrow |x| = |y|$

$xVy \Leftrightarrow x + y > 2$

$xWy \Leftrightarrow (x - y)^2 = 1$

a) Enumere os pares ordenados de cada relação.

b) Represente por meio de flechas.

c) Faça o diagrama cartesiano das relações binárias dadas.

d) Estabeleça o domínio e a imagem das relações binárias dadas.

Capítulo 4

NOÇÕES BÁSICAS DE FUNÇÕES

Quando estamos pretendendo realizar uma atividade, dificilmente associamos a algum conhecimento matemático, ou até mesmo não fazemos a associação com nenhuma disciplina escolar. É importante observar que em todas as atividades que realizamos diariamente tem sempre um questionamento a se fazer relacionado a matemática. Uma atividade que podemos usar como exemplo é uma simples ida a padaria, e você deve estar pensando, porque padaria? Suponha que pela manhã você vai a padaria comprar pão. Em seguida você pensa em quantos pães comprar, ou seja, quantas unidades. Sabendo a quantidade que vai comprar vem o questionamento: qual o valor em dinheiro que vou gastar para fazer a compra? Evidentemente temos primeiro que saber qual é o preço da unidade, e a cada unidade que nós formos comprando temos de somar o valor. O valor total em dinheiro é a soma dos valores unitários. Na prática, se compramos 6 pães e o valor da unidade é igual a R$ 0,20, sabemos que o valor da compra é de R$ 1,20. Usamos valores numéricos para esse raciocínio, abordando conceitos matemáticos importantes como o uso de unidades, soma, quantidade.

A matemática do dia a dia apresenta outras diversas formas de interpretação que não estão relacionados exclusivamente com a forma matemática concreta ou teórica (matemática com o uso de números, teoremas).

Os atrasos e a correria do dia a dia são coisas que estamos sujeitos. Quantas vezes saímos de casa atrasados querendo em um certo intervalo de tempo chegar em algum lugar, ou desafiarmos até mesmo a capacidade de executar determinadas atividades. Nessa corrida contra o tempo utilizamos a matemática, realizamos cálculos mentais relacionados a quantidade necessária de tempo para concretizar determinadas atividades. Observe que a palavra quantidade aparece de novo em nosso estudo, enfatizando a atividade diária a matemática.

Nós mesmos conseguimos estabelecer a diferença entre o uso da matemática nas atividades, mas podemos perceber que algumas coisas não realizaríamos sem a base de um ensino matemático, noções de soma, a questão de quantidade, os princípios básicos da contagem. Às vezes, ao realizarmos uma atividade relacionada ao cálculo de tempo faríamos ligação a matemática, apenas sabemos que um intervalo de tempo pode significar muito ou pouco dependendo do conceito em que devemos relacionar o assunto.

Note que o estudo da matemática no dia a dia auxilia o ensino e a aprendizagem da matemática como prática fora da escola, nos direcionando a estudar suas aplicações dentro do local de ensino.

Este capítulo foi baseado nas referências [3], [4] e [6], [8], [11] e [13].

4.1 Definição

Dados dois conjuntos A e B ***não vazios*** *e uma relação f de A em B, dizemos que f é uma função se, e somente se,* ***para todo*** $x \in A$ *está associado um* ***único elemento*** $y \in B$*, tal que* $(x, y) \in f$.

4.1.1 Exemplos

1 – Se considerarmos o texto inicial, poderemos relacionar a função f de A em B como sendo A={quantidade de pães a comprar} e B={quantidade a pagar pelos pães comprado}. Perceba que; cada elemento do conjunto A estará relacionado a apenas um elemento do conjunto B.

2 – Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e uma relação f como abaixo:

$$1 \in A \longrightarrow 2 \in B \Rightarrow (1, 2) \in f$$
$$2 \in A \longrightarrow 4 \in B \Rightarrow (2, 4) \in f$$
$$3 \in A \longrightarrow 6 \in B \Rightarrow (3, 6) \in f$$
$$4 \in A \longrightarrow 8 \in B \Rightarrow (4, 8) \in f$$

Observe que, para todo elemento do conjunto A, f relacionará tal elemento a um outro do conjunto B. Representando via Diagramas de Venn.

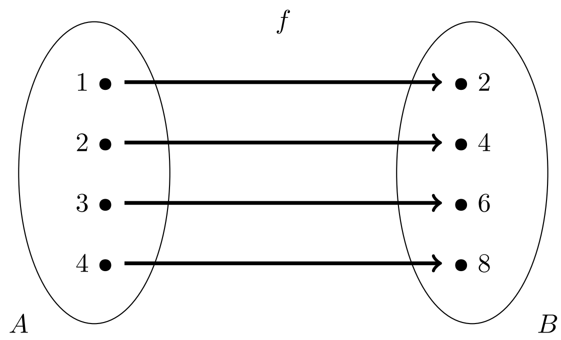


Figura 4.1: função f

Sendo assim;

$\boxed{\text{f é função de } A \text{ em } B \text{, pois para todo } x \in A \text{, está associado um único } y \in B.}$

3 – Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e uma relação g como abaixo:

$$1 \in A \longrightarrow 4 \in B \Rightarrow (1, 4) \in g$$
$$2 \in A \longrightarrow 6 \in B \Rightarrow (2, 6) \in g$$
$$3 \in A \longrightarrow 8 \in B \Rightarrow (3, 8) \in g$$
$$4 \in A \longrightarrow 10 \notin B \Rightarrow (4, 10) \notin g$$

Perceba que nem todo elemento de A está relacionado a algum elemento de B.

Representando via Diagramas de Venn

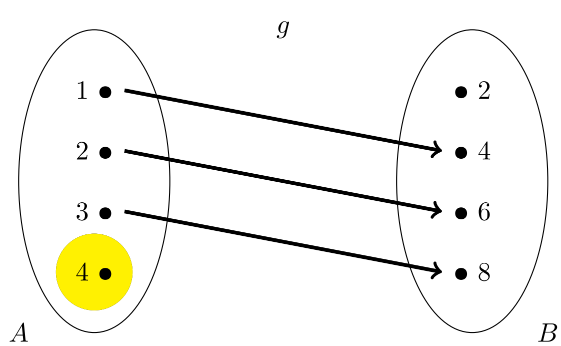


Figura 4.2: função g

Sendo assim;

g não é função de A em B, pois existe elemento em A que não se relaciona com o conjunto B.

4 – Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e uma relação h como abaixo:

$$1 \in A \longrightarrow 4 \in B \Rightarrow (1, 4) \in h$$
$$2 \in A \longrightarrow 6 \in B \Rightarrow (2, 6) \in h$$
$$3 \in A \longrightarrow 8 \in B \Rightarrow (3, 8) \in h$$
$$4 \in A \longrightarrow 10 \in B \Rightarrow (4, 10) \in h$$

Perceba que a relação h **é uma função**, pois todo elemento de A se relacionará a algum elemento de B. Representando via Diagramas de Venn

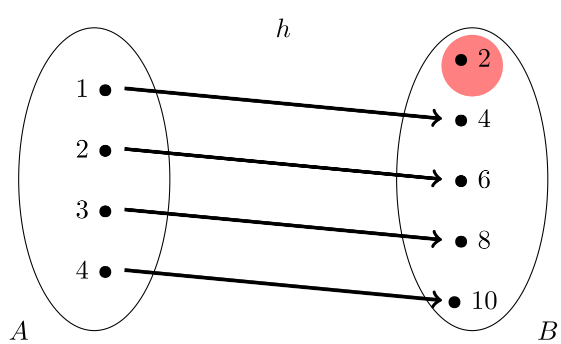


Figura 4.3: função h

Sendo assim;

h é uma função, pois para todo $x \in A$, está associado um único $y \in B$.

Note que, o fato do elemento $2 \in B$ não ter correspondente em A não faz a relação h deixar de ser função.

5 – Considere os conjuntos $A = \{-1, 1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 4, 9\}$ e uma relação t como abaixo:

$$-1 \in A \longrightarrow 1 \in B \Rightarrow (-1, 1) \in t$$
$$1 \in A \longrightarrow 1 \in B \Rightarrow (1, 1) \in t$$

$$2 \in A \longrightarrow 4 \in B \Rightarrow (2,4) \in t$$
$$3 \in A \longrightarrow 9 \in B \Rightarrow (3,9) \in t$$

Perceba que a relação t **é uma função**, pois mesmo com a existência de dois elementos de A com o mesmo correspondente em B, a definição de função é satisfeita.

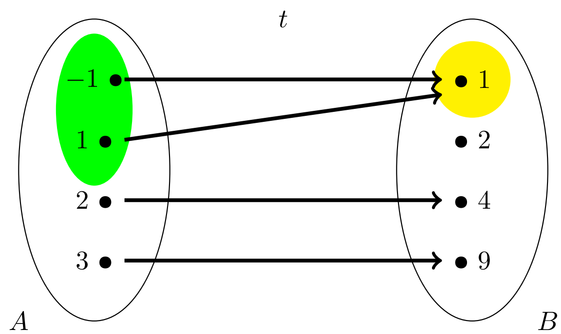


Figura 4.4: função t

Sendo assim;

t é uma função, mesmo sendo dois elementos de A (destaque em verde) com a mesma correspondência em B (destaque em amarelo).

Faremos agora um exemplo mais elaborado. Nele encontraremos uma correspondência por meio de uma equação.

6 − Considere os conjuntos $A = \{2,3,4\}$ e $B = \{2,3,4,9\}$ e uma relação $v = \{(x,y) \in A \times B \mid$ se x é primo, então $y = x^2$ e se x é não primo, então y é primo $\}$

Veja;

$$2 \in A \longrightarrow 4 \in B \Rightarrow (2,4) \in v$$
$$3 \in A \longrightarrow 9 \in B \Rightarrow (3,9) \in v$$
$$4 \in A \longrightarrow 2 \in B \Rightarrow (4,2) \in v$$
$$4 \in A \longrightarrow 3 \in B \Rightarrow (4,3) \in v$$

Perceba que a relação v **não é uma função**, pois existe um elemento em A com dois correspondentes em B, e isso não representa uma função.

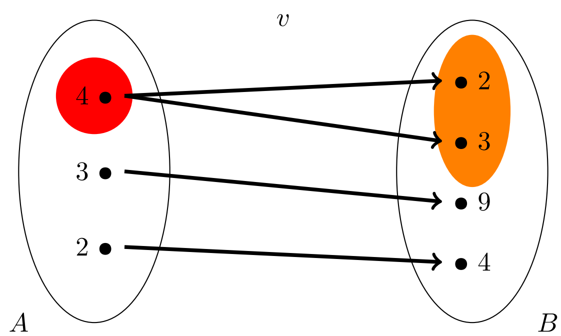


Figura 4.5: função v

Sendo assim;

v não é uma função, pois um elemento de A não pode se relacionar com mais de um elemento de B.

4.1.2 Exercícios

1 – Considere os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 9, 10\}$ e as seguintes relações:

$f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

$g = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2 + 1\}$

$h = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$

$t = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$

$u = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$

Quais das relações citadas acima é uma função? Justifique as que não forem.

2 – Se $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$ e f uma relação de A em B dada por: *y é o oposto de x.* Porque f não é uma função de A em B?

4.2 Notação de uma função

Dados dois conjuntos não vazios A e B, e uma lei que associa os elementos de A em B, de modo geral, quando o valor de y é obtido em função dos valores de x, através de uma lei f, representa-se tal fato com a seguinte notação:

$$\boxed{\text{y = f(x)}}$$

Lê-se: "y é igual a f de x".

4.2.1 Exemplo

Sejam $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$ e f uma lei, de A em B, f definida por $y = 2x + 1$.

$$\boxed{\text{f(x) = 2x + 1}}$$

Temos que f é realmente uma função, pois todos os elementos de A estão relacionados com algum elemento de B. Veja:

Para $x = 0$ teremos $y = f(0) \Longrightarrow y = 1$.
Para $x = 1$ teremos $y = f(1) \Longrightarrow y = 3$.
Para $x = 2$ teremos $y = f(2) \Longrightarrow y = 5$.

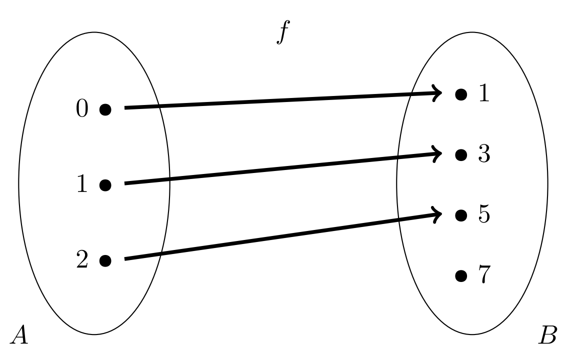


Figura 4.6: função f

Perceba que nenhum elemento de A está com uma correspondência no elemento 7 em B, e isso não faz com que f deixe de ser função como já vimos anteriormente.

4.3 Domínio, Contradomínio e Imagem

Considere f uma função de A em B.

O **domínio** de f, $D(f)$, é o conjunto de todos os elementos pertencentes a A.

O **contradomínio** de f, $CD(f)$, é o conjunto de todos os elementos pertencentes a B.

A **imagem** de f, $Im(f)$, é o conjunto de todos os elementos pertencentes a B tal que seja correspondente de algum elemento de A.

A **Im(f)** é um subconjunto do **contradomínio**.

4.3.1 Exemplo

1 – Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ e $f(x)$ uma relação de A em B, tal que, $f(x) = x + 2$. Determine $D(f)$, $CD(f)$ e $Im(f)$.

$$D(f) = \{1, 2, 3, 4\} \qquad\qquad CD(f) = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

Vamos determinar a $Im(f)$:

$$1 \in A \Longrightarrow f(1) = 3$$
$$2 \in A \Longrightarrow f(1) = 4$$
$$3 \in A \Longrightarrow f(1) = 5$$
$$4 \in A \Longrightarrow f(1) = 6$$

$$Im(f) = \{3, 4, 5, 6\}$$

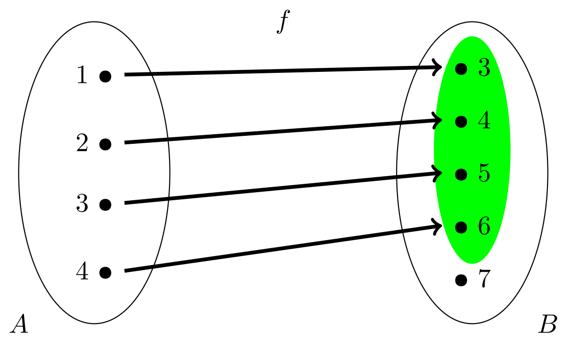


Figura 4.7: função f

No diagrama acima, a parte destacada de verde no conjunto B é $Im(f)$. Como vimos, $Im(f) \subset CD(f)$.

4.3.2 Exercícios

1 – Considere os conjuntos $A = \{-2, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{-2, -1, 2\}$.

Determine:

a) $D(f)$ e $Im(f)$ sendo $f(x) = x + 2$ uma relação entre A e B.

b) $D(g)$ e $Im(g)$ sendo $g(x) = x^2 - 2$ uma relação entre A e C.

c) $D(f)$ e $Im(f)$ sendo $f(x) = x + 2$ uma relação entre C e B.

d) $D(h)$ e $Im(h)$ sendo $h(x) = x^2$ uma relação entre A e B.

e) $D(h)$ e $Im(h)$ sendo $h(x) = x^2$ uma relação entre C e B.

f) $D(t)$ e $Im(t)$ uma relação entre A e B sendo:

$$t(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x < 0 \\ x + 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

4.4 Injeção, sobrejeção e bijeção

4.4.1 Função Injetora

Uma dada função f é dita **injetora** se cada elemento do contradomínio (que é imagem), for imagem de um **único** elemento do domínio.

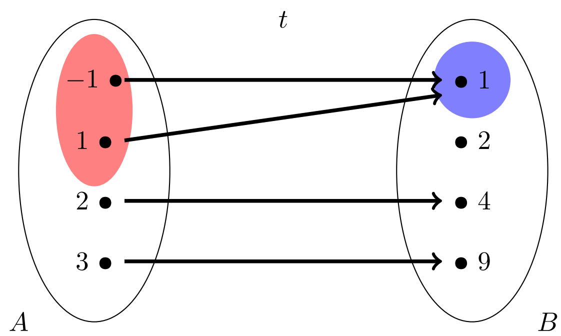


Figura 4.8: função t

Observe que a função t não é injetora, pois dois elementos distintos do domínio possuem a mesma imagem.

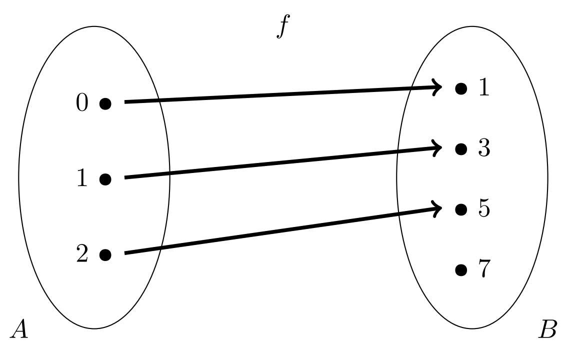


Figura 4.9: função f

A função f é injetora, pois os elementos do domínio possuem imagens distintas.

4.4.2 Função Sobrejetora

Uma dada função f é dita **sobrejetora** se todos os elementos do contradomínio for imagem de algum elemento do domínio.

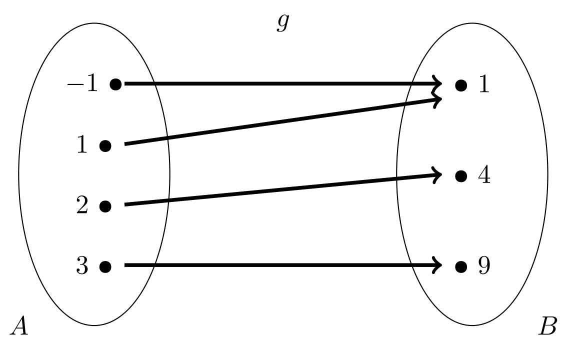


Figura 4.10: função g

A função g é sobrejetora, pois todos os elementos do contra domínio é imagem de algum elemento do domínio.

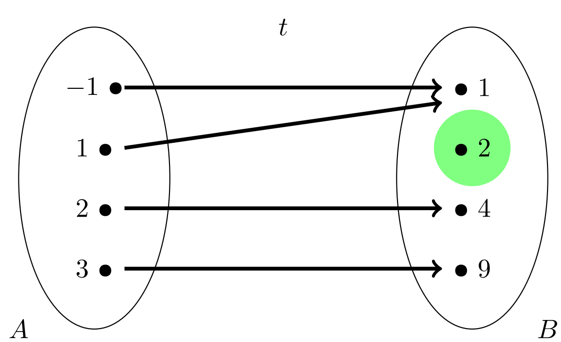


Figura 4.11: função t

A função t não é sobrejetora, pois existe elemento no contra domínio que não é imagem de nenhum elemento do domínio.

4.4.3 Função Bijetora

Uma dada função f é dita **bijetora** se for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

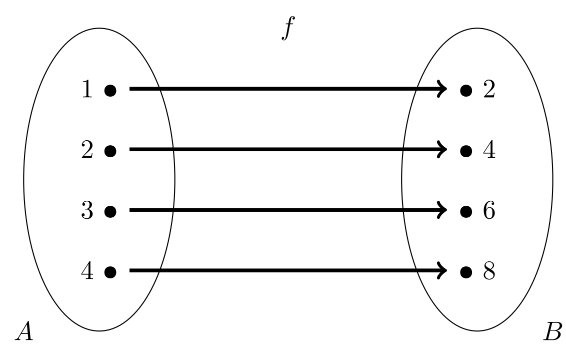


Figura 4.12: função f

No diagrama acima, f é injetora e sobrejetora, então f é bijetora.

4.4.4 Exercícios

1 – Considere os seguintes conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} | -3 \leq x \leq 3\}$, $B = \{y \in \mathbb{N} | -2 \leq y \leq 4\}$ e a função $f(x) = x + 1$ de A em B. Verifique se a função é bijetora.

2 – Dada uma função $g(x) = 2x - 1$ com domínio $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, determine o contra domínio para que a função g seja bijetora.

3 – Encontre um contra domínio para a função g da questão anterior de modo que ela não seja bijetora.

4 – Responda sem olhar na teoria:

a) Quando é que uma função é injetora?

b) Quando é que uma função é sobrejetora?

c) Quando é que uma função é bijetora?

5 – Escreva uma função que seja:

a) apenas injetora   b) apenas sobrejetora   c) bijetora

4.5 Função inversa

Seja f uma função bijetora de em A e B, com $x \in A$ e $y \in B$, sendo $(x, y) \in f$. Chamaremos de função inversa de f, e indicaremos por f^{-1}, o conjunto dos pares ordenados $(y, x) \in f^{-1}$ com $y \in B$ e $x \in A$.

Exemplo:

f é definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, sendo $y = 2x$.

Para determinarmos f^{-1} basta trocarmos x por y e y por x.

Observe:

$$y = 2x \longrightarrow x = 2y$$

Isolando y em função de x resulta:

$$\boxed{y = \frac{x}{2}}$$

isto é,

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x}{2}}$$

4.5.1 Exercícios

1 – Considere os seguintes conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} | -3 \leq x \leq 3\}$, $B = \{y \in \mathbb{N} | -2 \leq y \leq 4\}$ e a função $f(x) = x + 1$ de A em B. Determine a função inversa de f.

2 – Dada uma função $g(x) = 2x - 1$ com domínio $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, determine a função inversa de g.

4.6 Gráficos da Função

Seja f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. O gráfico de f é o subconjunto do plano cartesiano dado por:

$$Grf = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = f(x)\}$$

Considere as funções dadas e seus respectivos pontos no plano cartesiano.

a) $f(x) = x + 1$

- $(-2, -1) \in Grf$
- $(-1, 0) \in Grf$
- $(0, 1) \in Grf$
- $(1, 2) \in Grf$
- $(2, 3) \in Grf$

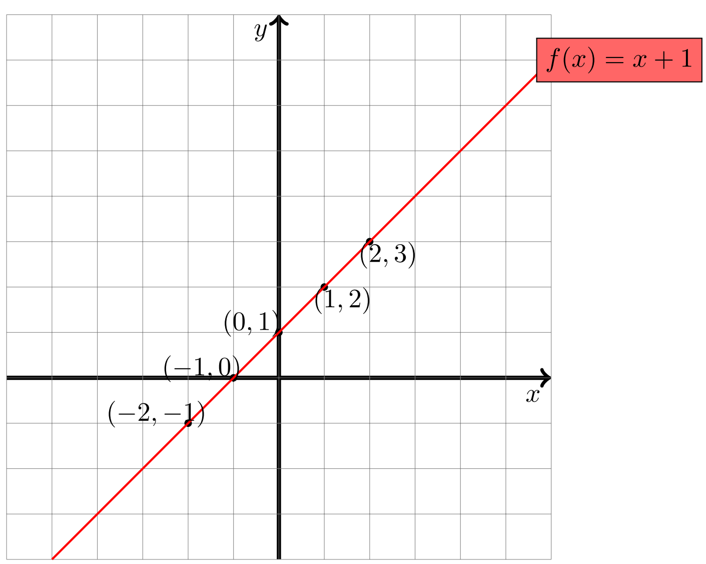


Figura 4.13: Gráfico da função afim f

Perceba que os pontos da função afim $f(x)$ estão todos alinhados e neste caso podemos traçar uma reta unindo-os.

4.7 f e f^{-1} no plano cartesiano

Sendo $f : y = 2x$, teremos que;

Se $x = -2 \Longrightarrow y = -4$

Se $x = 0 \Longrightarrow y = 0$

Se $x = 2 \Longrightarrow y = 4$

Sendo $f^{-1} : y = \dfrac{x}{2}$, teremos que;

Se $x = -2 \Longrightarrow y = -1$

Se $x = 0 \Longrightarrow y = 0$

Se $x = 2 \Longrightarrow y = 1$

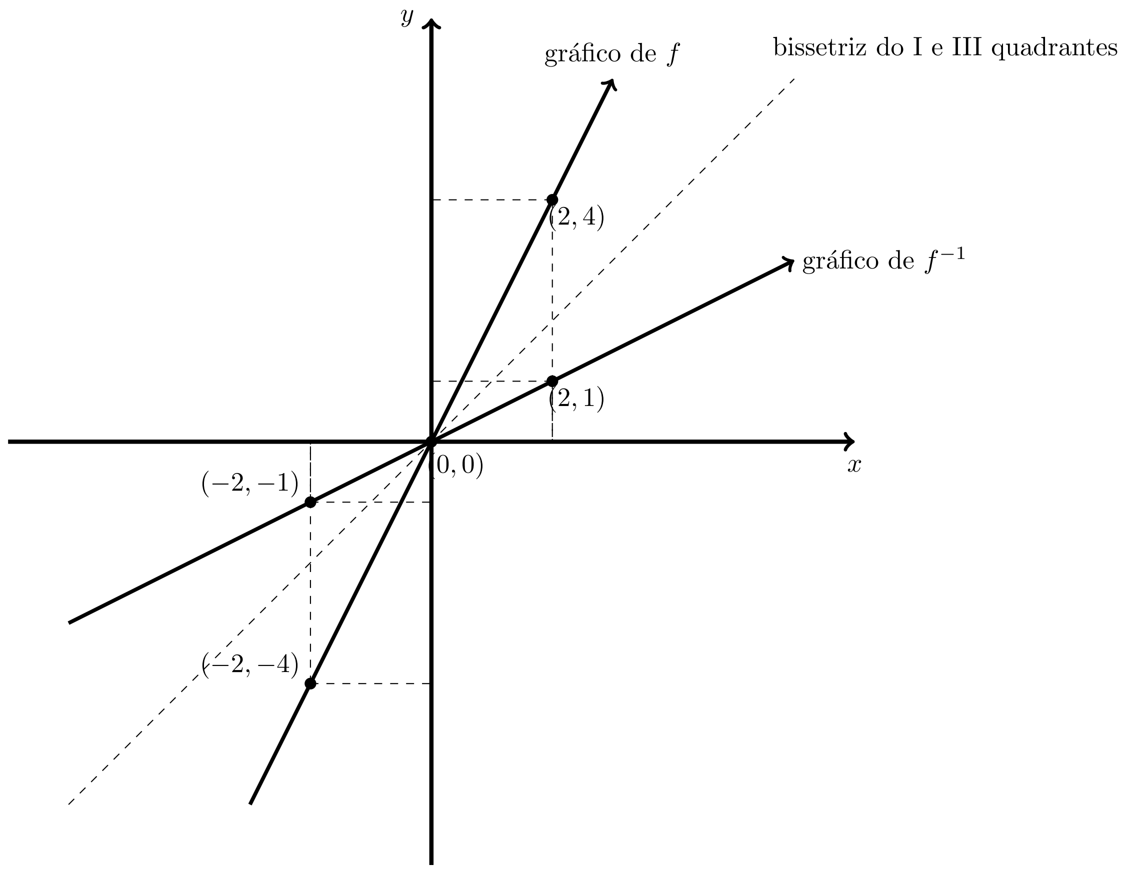


Figura 4.14: Gráfico de f e $f^{-}1$

Observe que, os gráficos que representam f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz do I e III quadrantes.

4.7.1 Exercícios

1 – Considere os seguintes conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} | -3 \leq x \leq 3\}$, $B = \{y \in \mathbb{N} | -2 \leq y \leq 4\}$ e a função $f(x) = x + 1$ de A em B. Faça a representação de f e f^{-1} no plano cartesiano.

2 – Represente os gráficos da questão anterior para o domínio e contra domínio sendo reais.

3 – Dada uma função $g(x) = 2x - 1$ com domínio $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, determine a função inversa de g e represente graficamente essa função.

4.8 Função crescente e decrescente

Considere uma função f definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Quando atribuímos valores para x, obtemos valores correspondentes para y e sendo assim podemos ter as seguintes situações:

• À medida que os valores de x aumentam, os valores de y também aumentam; neste caso dizemos que a função é **crescente**.

• À medida que os valores de x aumentam, os valores de y diminuem; neste caso dizemos que a função é **decrescente**.

Exemplos:

1 – Considere a função $f(x) = x + 1$ definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Perceba que $f(x)$ é crescente, pois à medida que aumentamos os valores de x, $f(x)$ também aumentará.

Vamos fazer um estudo da $f(x)$.

Se $x = -2$ então $f(x) = -1$.

Se $x = -1$ então $f(x) = 0$.

Se $x = 0$ então $f(x) = 1$.

Se $x = 1$ então $f(x) = 2$.

Se $x = 2$ então $f(x) = 3$.

Se $x = 3$ então $f(x) = 4$.

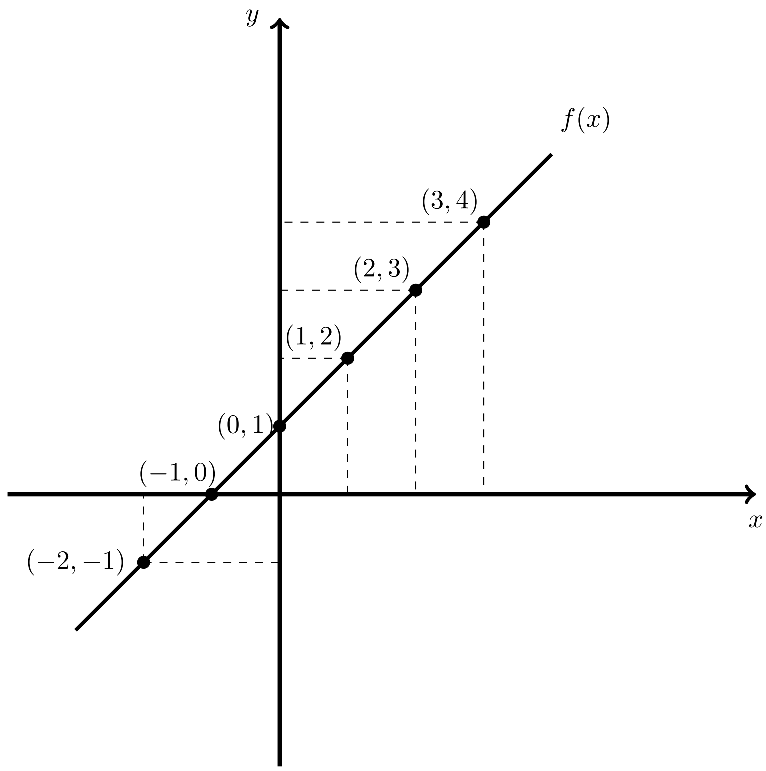


Figura 4.15: Gráfico de $f(x) = x + 1$

2 – Considere a função $f(x) = -2x$ definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Perceba que $f(x)$ é decrescente, pois à medida que aumentamos os valores de x, $f(x)$ diminuirá.

Vamos fazer um estudo da função.

Se $x = -2$ então $f(x) = 4$.
Se $x = -1$ então $f(x) = 2$.
Se $x = 0$ então $f(x) = 0$.

Se $x = 1$ então $f(x) = -2$.
Se $x = 2$ então $f(x) = -4$.
Se $x = 3$ então $f(x) = -6$.

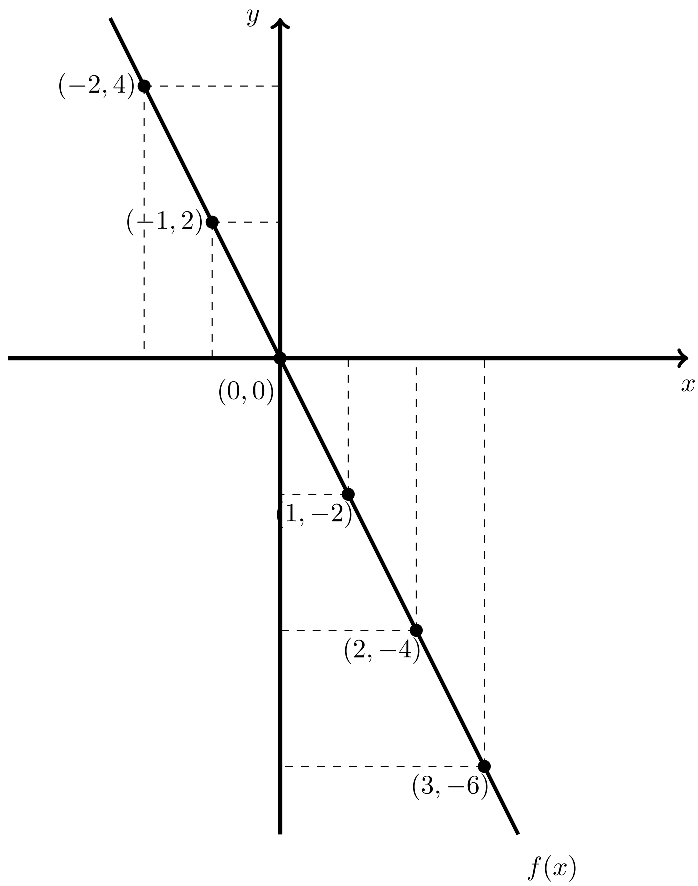


Figura 4.16: Gráfico de $f(x) = -2x$

4.8.1 Exercícios

1 – Considere os seguintes conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} | -3 \leq x \leq 3\}$, $B = \{y \in \mathbb{N} | -2 \leq y \leq 4\}$ e a função $f(x) = x + 1$ de A em B. Verifique se a função é crescente ou decrescente.

2 – Dada uma função $g(x) = 2x - 1$ com domínio $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, determine se a função é crescente ou decrescente.

3 – Esboce os gráficos das questões 1 e 2 juntamente com suas funções inversas.

4 – Responda sem olhar na teoria:

a) O que é uma função crescente?

b) O que é uma função decrescente?

Capítulo 5

FUNÇÃO AFIM OU DE 1º GRAU

Você já se deparou com alguma dessas situações? Utilização de um táxi para um determinado deslocamento, ida a um restaurante e ter que desembolsar o couver artístico e os 10% do garçon, utilizar um estacionamento pago no centro de uma cidade ou muitas outras situações parecidas. Bom, o que essas situações têm em comum é o fato da matemática estar ligadas a elas de modo que as pessoas nem percebam. Vamos analisar de início a seguinte situação:

O Senhor Antônio necessita deixar seu automóvel em um estacionamento que funciona da seguinte forma:

Entrada + 1ª hora	R$ 5,00
2ª hora	R$ 3,00
demais horas	R$ 1,00 por hora

Se o Senhor Antônio deixar o carro por uma hora ou menos no estacionamento, ele desembolsará R$ 5,00.

Se o Senhor Antônio deixar o carro por 1,5 horas, ele desembolsará R$ 8,00.

Se o Senhor Antônio deixar o carro por um tempo maior que duas horas, ele desembolsará algo que pode ser escrito por uma função afim. Vamos a essa discussão e em seguida resolver a situação do Senhor Antônio.

Este capítulo foi baseado nas referências [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [11] e [13].

5.1 Definição

Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de **função afim** ou **função de 1º grau** quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa sempre ao elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$, em que $a \neq 0$ e b são números reais dados.

$$\boxed{f(x) = ax + b} \qquad a \neq 0$$

5.1.1 Exemplos

a) $f(x) = x + 1$ em que $a = 1$ e $b = 1$

b) $f(x) = 2x + 3$ em que $a = 2$ e $b = 3$

c) $f(x) = -x - 2$ em que $a = -1$ e $b = -2$

d) $f(x) = -4x$ em que $a = -4$ e $b = 0$

e) $f(x) = -\frac{2}{3}x - 4$ em que $a = -\frac{2}{3}$ e $b = -4$

f) $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$ em que $a = 2$ e $b = \frac{1}{2}$

5.2 Valores numéricos da Função Afim

Dada uma função $y = f(x)$, definimos valor numérico dessa função, o valor que y assume quando atribuímos algum valor para x. Tal valor determinado para y pertence ao conjunto imagem da função dada em questão.

Exemplos

1 – Considere uma função afim de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por:

a) $f(x) = x + 1$

Se $x = -2$, temos $y = f(-2) = (-2) + 1 = -1$

Se $x = -1$, temos $y = f(-1) = (-1) + 1 = 0$

Se $x = 0$, temos $y = f(0) = 0 + 1 = 1$

Se $x = 1$, temos $y = f(1) = 1 + 1 = 2$

Se $x = 2$, temos $y = f(2) = 2 + 1 = 3$

b) $g(x) = -2x + 3$

Se $x = -2$, temos $y = g(-2) = -2(-2) + 3 = 7$

Se $x = -1$, temos $y = g(-1) = -2(-1) + 3 = 5$

Se $x = 0$, temos $y = g(0) = -2(0) + 3 = 3$

Se $x = 1$, temos $y = g(1) = -2(1) + 3 = 1$

Se $x = 2$, temos $y = g(2) = -2(2) + 3 = -1$

5.2.1 Exercícios

1 – Complete as tabelas :

a) $f(x) = 3x + 2$

x	$f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

b) $g(x) = -2x + 5$

x	$g(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

c) $h(x) = \dfrac{3x}{2} + 1$

x	$h(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

d) $f(x) = 3x + 2$

x	$f(x)$
$-1/3$	
$-1/2$	
$-1/4$	
$1/2$	
$2/3$	
$3/4$	

e) $g(x) = -2x + 5$

x	$g(x)$
$-1/3$	
$-1/2$	
$-1/4$	
$1/2$	
$2/3$	
$3/4$	

f) $h(x) = \dfrac{3x}{2} + 1$

x	$h(x)$
$-1/3$	
$-1/2$	
$-1/4$	
$1/2$	
$2/3$	
$3/4$	

2 – Considere a função $f(x) = x - 2$. Determine os valores numéricos da função afim para o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} | -3 < x \leq 3\}$.

3 – Quem são os termos a e b das três primeiras funções afins da questão 1?

5.3 Gráficos da Função Afim

Seja f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. O gráfico de f é o subconjunto do plano cartesiano dado por:

$$Grf = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = f(x)\}$$

Considere as funções dadas e seus respectivos pontos no plano cartesiano.

a) $f(x) = x + 1$

- $(-2, -1) \in Grf$
- $(-1, 0) \in Grf$
- $(0, 1) \in Grf$
- $(1, 2) \in Grf$
- $(2, 3) \in Grf$

b) $g(x) = -2x + 3$

- $(-2, 7) \in Grg$
- $(-1, 5) \in Grg$
- $(0, 3) \in Grg$
- $(1, 1) \in Grg$
- $(2, -1) \in Grg$

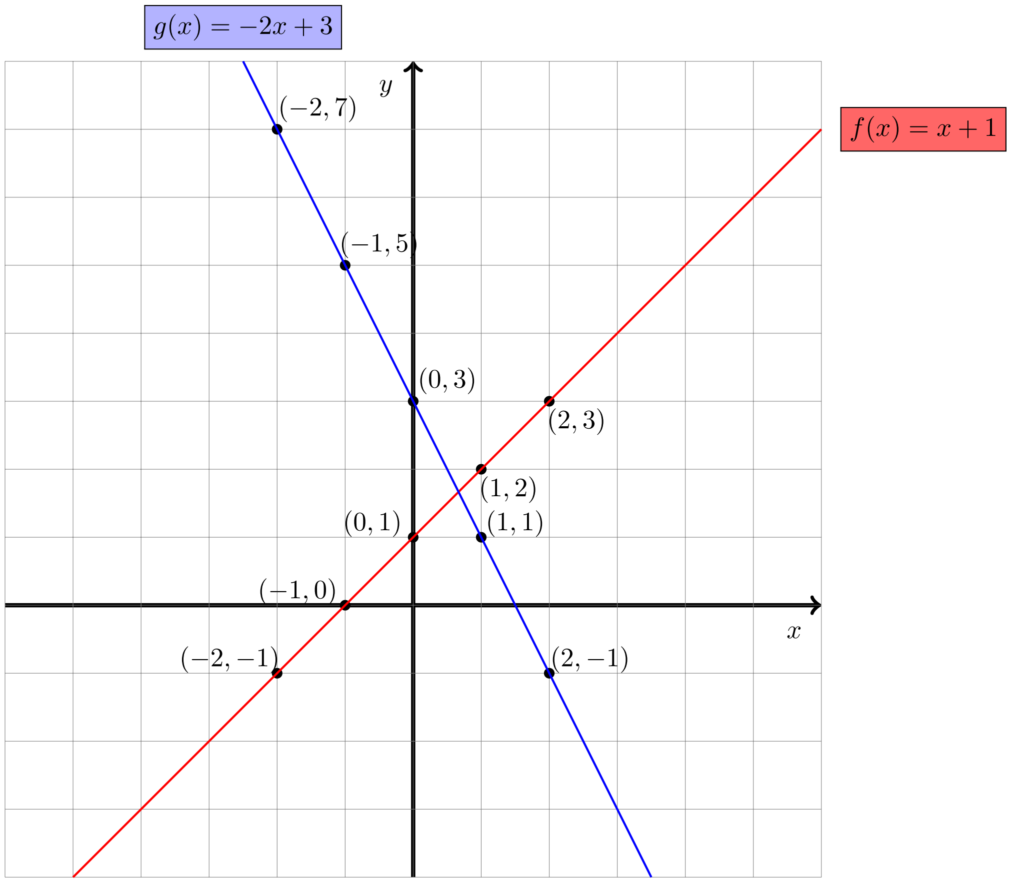


Figura 5.1: Gráficos de f e g

Perceba que os pontos da função afim $f(x)$ estão todos alinhados e neste caso podemos traçar uma reta unindo-os. Para a função afim $g(x)$ acontece o mesmo com seus respectivos pontos.

Note que; a função $f(x)$ e $g(x)$ se cruzam num determinado ponto. Tal ponto é pertencente às duas funções e sendo assim basta tomar as duas funções e resolvê-las como um sistema de equações.

Agora que você sabe dessa informação, encontre o ponto de intersecção da $f(x)$ e $g(x)$ dada no gráfico anterior.

Para pensar!

Quantos pontos são necessários para traçar o gráfico de uma função afim?

5.3.1 Exercícios

1 – Esboce o gráfico cartesiano das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

$a) f(x) = x$	$e) f(x) = -x + 3$	$i) f(x) = 2x$
$b) f(x) = x + 3$	$f) f(x) = -x - 2$	$j) f(x) = -2x$
$c) f(x) = x - 2$	$g) f(x) = 2x + \frac{1}{2}$	$k) f(x) = \frac{x}{2}$
$d) f(x) = -x$	$h) f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$	$l) f(x) = \frac{x}{3}$

2 – Considere os seguintes sistemas de equações:

$$a) \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} -x + y = 4 \\ -3x - y = 0 \end{cases} \qquad c) \begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ x + \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

Determine a solução de cada um através dos gráficos.

Observação: *A solução é a intersecção das duas retas dada pelo sistema de equações. Cada uma das equações pode ser dada por uma função. Lembre-se que,* $y = f(x)$

5.4 Zero da Função Afim

O zero de uma função afim é todo número x pertencente ao domínio cuja imagem é nula, ou seja, $f(x) = 0$. Assim, para determinarmos o zero de uma função afim, basta fazermos $ax + b = 0$.

Exemplos:

Considere a função afim dada por $f(x) = 2x + 4$. O zero da $f(x)$ é $x = -2$, pois $f(-2) = 2(-2) + 4 = 0$.

Determinar o zero de uma função afim é determinar o valor da abscissa do ponto onde o gráfico corta o eixo x.

Determinação de mais um ponto para traçarmos o gráfico da função afim dada.

$f(0) = 2(0) + 4 = 4$, então para $x = 0$ teremos $f(0) = 4$.

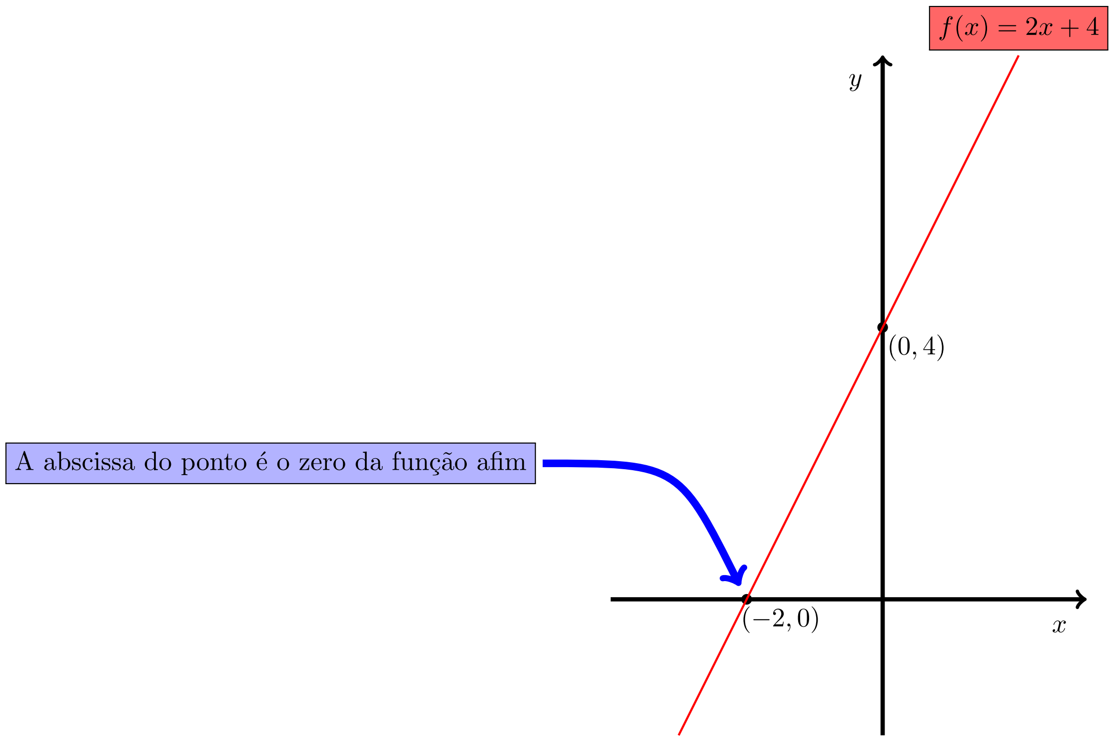


Figura 5.2: Zero da função afim

5.5 Coeficientes

Representamos uma função afim do seguinte modo: $\boxed{f(x) = ax + b}$.

O coeficiente a, que acompanha x, é chamado de ***coeficiente angular ou declividade***. O coeficiente b, que é independente, é chamado de ***coeficiente linear***.

Já sabemos que, o zero da função é o ponto no plano cartesiano onde f intersecta o eixo x. O coeficiente linear indica exatamente onde a função afim intersecta o eixo y, ou seja, intersecta o eixo y em $(0, b)$.

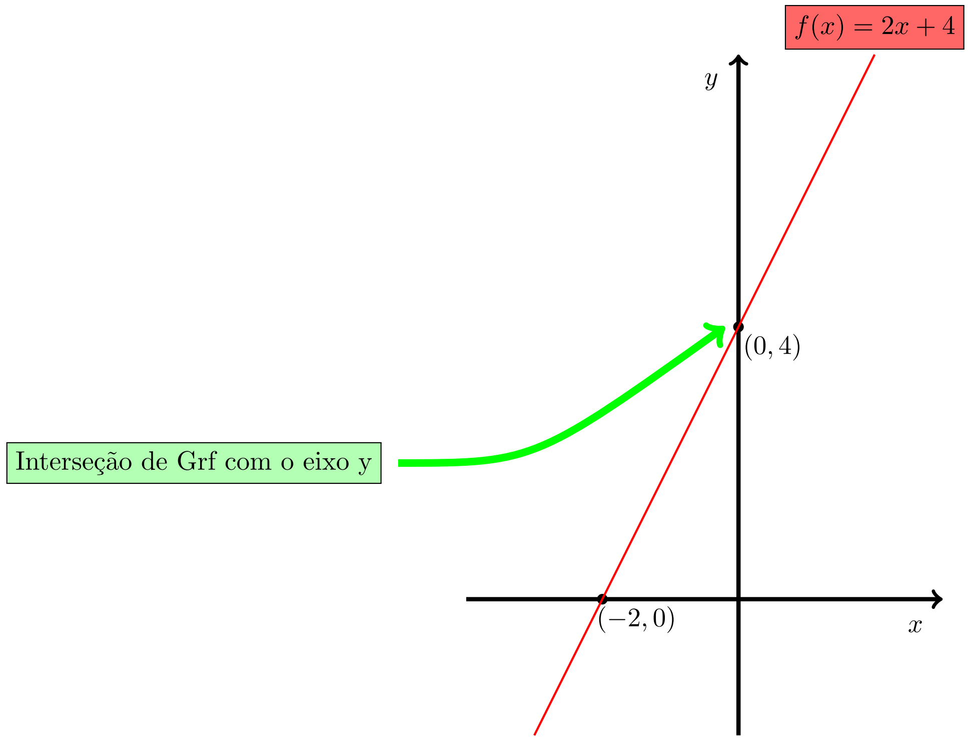


Figura 5.3: Intersecção do gráfico com o eixo y

5.5.1 Exercícios

1 – Determine o zero, o coeficiente angular e o coeficiente linear de cada uma das funções dadas a seguir.

$a) f(x) = x$	$e) f(x) = -x + 3$	$i) f(x) = 2x$
$b) f(x) = x + 3$	$f) f(x) = -x - 2$	$j) f(x) = -2x$
$c) f(x) = x - 2$	$g) f(x) = 2x + \frac{1}{2}$	$k) f(x) = \frac{x}{2}$
$d) f(x) = -x$	$h) f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$	$l) f(x) = \frac{x}{3}$

2 – Considere a função $f(x) = x - 2$. Verifique se o zero da função está no conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} | -3 < x \leq 3\}$ e escreva quais são os seus coeficientes. Esboce o gráfico da função.

5.6 Crescimento de decrescimento

Considere x_1 e x_2 pertencentes ao conjunto dos números reais, sendo $x_1 < x_2$ e f uma função afim de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Se $f(x_1) < f(x_2)$, dizemos que a função f é uma ***função crescente***.

Se $f(x_1) > f(x_2)$, dizemso que a função f é uma ***função decrescente***.

Em uma função afim, se a *(coeficiente angular)* for positivo, ou seja, $a > 0$ dizemos que a função afim será crescente. Se a *(coeficiente angular)* for negativo, ou seja, $a < 0$ dizemos que a função afim será decrescente.

No exemplo abaixo, temos que a função $fx)$ é **crescente**, pois $a = 1$ e a função $g(x)$ é **decrescente**, pois $a = -2$.

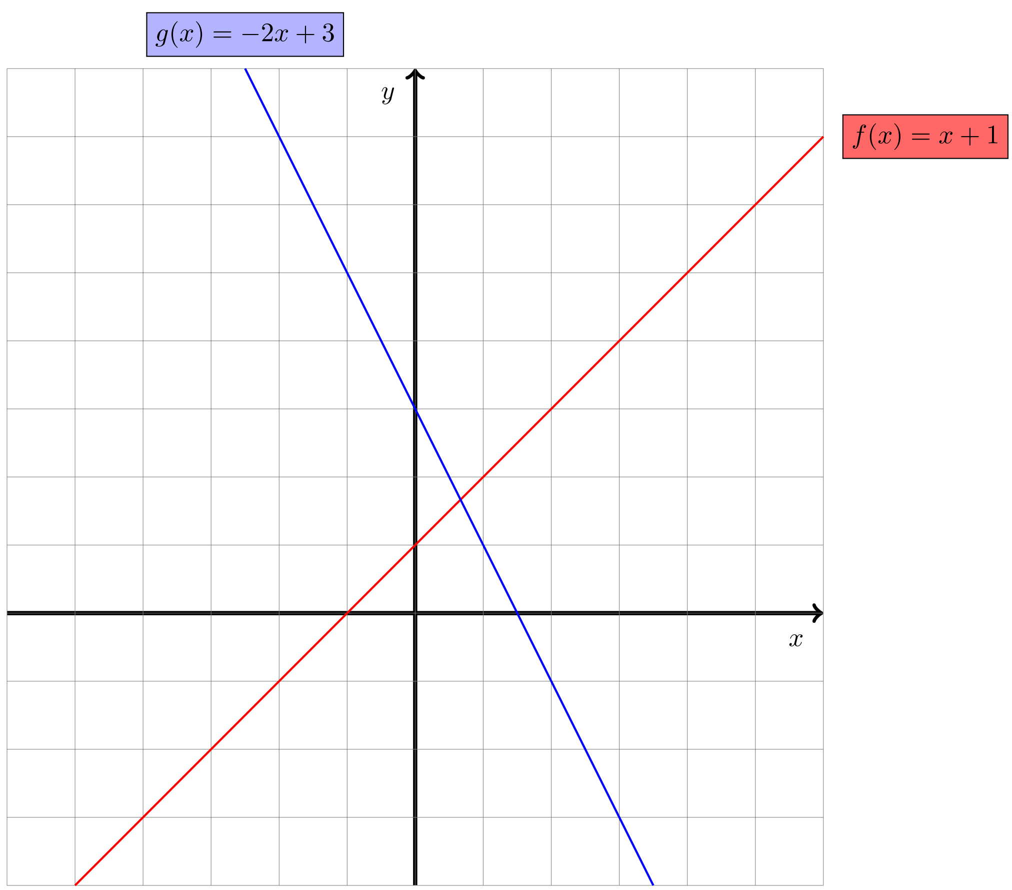


Figura 5.4: Crescimento e decrescimento

Observação 1: *Toda função onde $a = 0$ teremos $f(x) = b$ e sendo assim a função f é denominada* ***função constante.*** *O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x. Fica para o leitor a construção do gráfico de uma função constante.*

Observação 2: *O gráfico cartesiano de uma função afim $f(x) = ax + b$ sempre será uma reta.*

5.6.1 Exercício

1 – Analise o crescimento ou decrescimento de cada uma das funções e justifique sua resposta.

$a) f(x) = x$

$b) f(x) = x + 3$

$c) f(x) = x - 2$

$d) f(x) = -x$

$e) f(x) = -x + 3$

$f) f(x) = -x - 2$

$g) f(x) = 2x + \dfrac{1}{2}$

$h) f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3$

$i) f(x) = 2x$

$j) f(x) = -2x$

$k) f(x) = \dfrac{x}{2}$

$l) f(x) = \dfrac{x}{3}$

Atividades Dinâmicas

ATIVIDADE 1

Toda função afim possui dois coeficientes. A atividade dinâmica que aqui se encontra, nos mostrará o coeficiente angular e o coeficiente linear. Nela conseguiremos observar as variações que ambos sofrem e quando isso acontece podemos notar as variações de comportamento do gráfico de uma função afim.

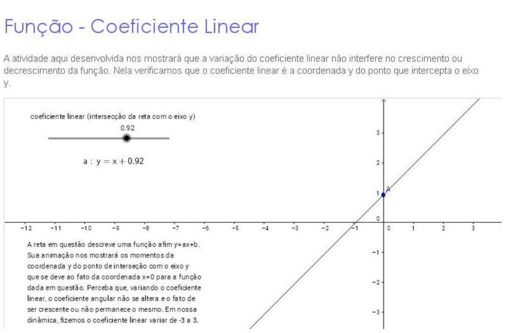


Figura 5.5: Coeficiente Linear

fonte – o autor

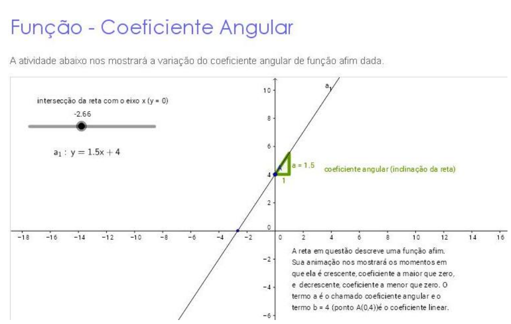


Figura 5.6: Coeficiente Angular

fonte – o autor

Coeficiente Linear Coeficiente Angular

Para *Coeficiente Linear: https://tube.geogebra.org/m/1942593*

Para *Coeficiente Angular: https://tube.geogebra.org/m/1942739*

ATIVIDADE 2

A atividade dinâmica em questão consiste em descrever o comportamento de uma função dada para realização do trabalho do Senhor Antônio o taxista. Com ela será possível identificar o valor da bandeirada e o preço do quilômetro rodado e com isso, o comportamento da função.

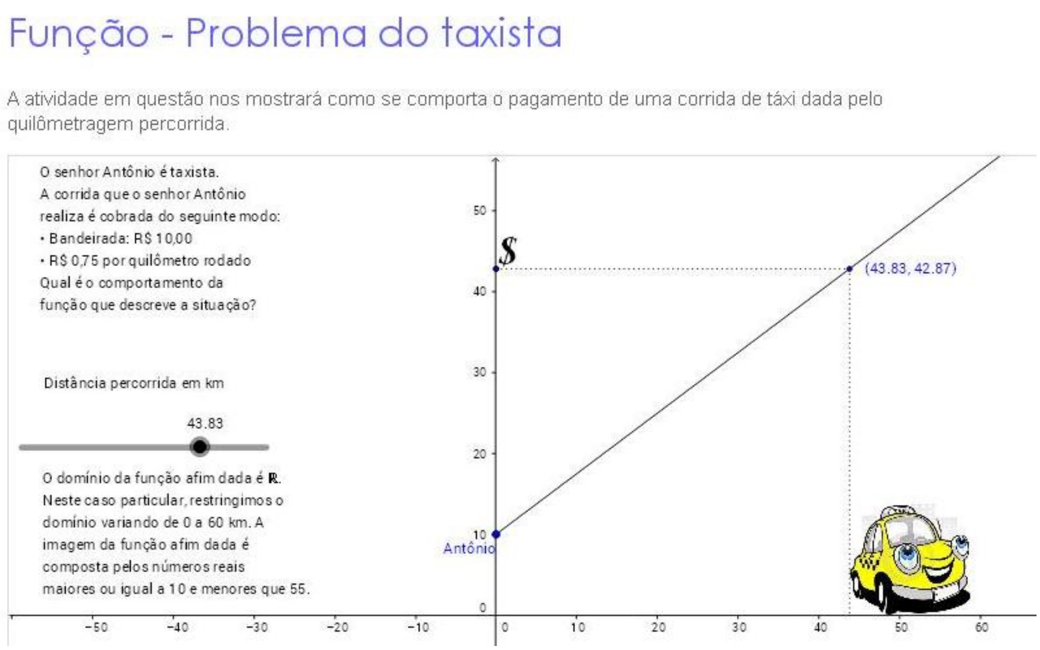


Figura 5.7: Táxi do Sr. Antônio

fonte – o autor

Clique em: Táxi do Sr. Antônio ou acesse: https://tube.geogebra.org/m/1942143

ATIVIDADE 3

Fecharemos esse capítulo com outra atividade dinâmica, mas desta vez será relacionada com dois taxistas, o Senhor Antônio e o Senhor Carlos.

Nela podemos ver o valor da bandeirada de cada um dos taxistas e os valores cobrados por quilômetro rodado. Observe que os gráficos em questão apresentarão uma interseção entre si. O que isso quer nos dizer? Está curioso? Clique abaixo ou acesse o endereço eletrônico dado.

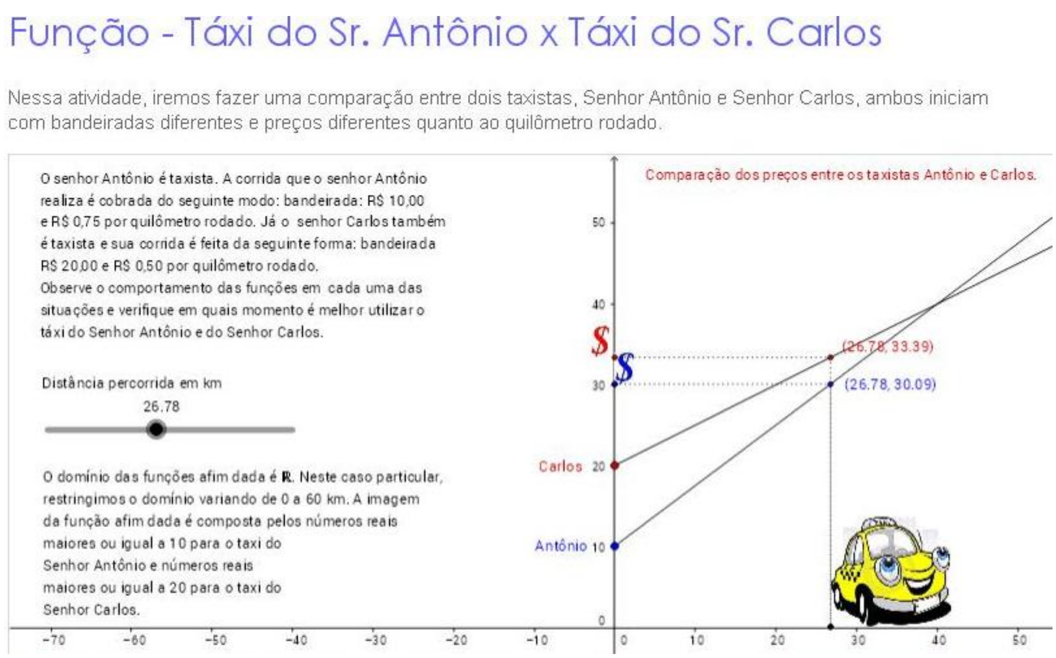


Figura 5.8: Táxi do Sr. Antônio x táxi do Sr. Carlos

fonte – o autor

Clique em: Táxi do Sr. Antônio x Táxi do Sr. Carlos ou acesse: https://tube.geogebra.org/m/1942351

5.7 Problemas

1 – Determine a função que descreve o pagamento realizado pelo Senhor Antônio para mais de duas horas no estacionamento. (Problema dado no início deste capítulo.)

2 – O preço do famoso pão francês numa determinada padaria é de R\$0,50 a unidade.

a) Qual é a função afim que descreve o preço a ser pago dependendo da quantidade de pães a comprar?

b) Qual é o coeficiente angular e o coeficiente linear da função afim encontrada no item a?

c) Essa situação descreve uma função crescente ou decrescente?

d) Qual será o valor pago por 2, 5, 25 e 150 pães?

e) Construa o gráfico da função afim encontrada.

3 – Uma fabricante de calçados cobra R\$20,00 de frete para a encomenda de calçados sendo R\$40,00 o par.

a) Qual é a função afim que descreve o valor a ser pago para até 30 calçados?

b) Para compras acima de 30 unidades, se tivermos um desconto de 5% por par comprado, qual é a função afim que descreve essa situação?

c) Para compras acima de 30 unidades, se tivermos um desconto de 5% por par acrescido, qual é a função afim que descreve essa situação?

d) Para compras acima de 30 unidades, se tivermos um acréscimo de 5% por par acrescido, qual é a função afim que descreve essa situação?

4 – (FGV-SP) Quando o preço por unidade de um produto z vale R\$ 16,00, então 42 unidades são vendidas por mês; quando o preço por unidade vale R\$ 24,00, são vendidas 38 unidades por mês. Admitindo que o gráfico da quantidade vendida y em função de x preço seja formado por pontos de uma reta:

a) Obtenha a expressão de y em função de x.

b) Se o preço por unidade for R\$ 26,00, qual a quantidade vendida?

5 – O lucro de uma indústria que vende um único produto é dado pela fórmula matemática $L(x) = 4x - 1000$, onde L representa o lucro e x a quantidade de produto vendido. Determine a quantidade mínima desse produto que deve ser vendida para que haja lucro.

6 – Um corpo se movimenta com velocidade constante obedecendo à fórmula matemática $S = 40 - 2t$, onde S é o deslocamento em metros e t é o tempo em segundos.

a) Construa o gráfico de S x t para $0 \leq t \leq 20$.

b) Qual o deslocamento observado em $t = 5s$?

7 – Qual é a lei de formação da função afim tal que $f(-1) = 2$ e $f(1) = 0$? Tal função é crescente ou decrescente? Qual é a raiz da função? Determine $f(3)$, $f(4)$ e $f(-4)$.

8 – Uma pizzaria oferece serviço de entrega e cobra por isso uma taxa fixa de R$ 1,50 mais R$ 0,60 por quilômetro rodado no trajeto entre o estabelecimento e o local da entrega.

a) Qual será o valor da taxa se o local da entrega for a 13 km da pizzaria? E se o local for a 8,5 km?

b) Escreva uma função que permita calcular o valor t da taxa de entrega em função da distância d percorrida.

9 – Um técnico em informática, que presta serviços a empresas, realizou um trabalho em 3h e cobrou R$ 185,00. Sabendo que esse técnico cobra R$ 45,00 por hora de trabalho mais um valor fixo, escreva uma função que represente o preço P que ele cobra por t horas de trabalho.

10 – (UFV-MG) Uma fábrica de chocolates, Confeitaria Abelha, gasta mensalmente um valor fixo de R$ 3900,00, mais R$ 0,50 por barra de chocolate produzida. Considerando que a fábrica vende x barras de chocolate por mês, a R$ 1,80 cada uma:

a) determine a expressão matemática $G(x)$, que representa o gasto total por mês;

b) determine a expressão matemática $L(x)$, que representa o lucro mensal obtido;

c) calcule o número de barras de chocolate que devem ser vendidas, por mês, para que a fábrica tenha um lucro mensal de R$ 2600,00;

d) Esboce os gráficos das funções $G(x)$ e $L(x)$;

e) Perceba que, os gráficos se cruzam em um determinado ponto. Qual ponto é esse e o que ele quer nos dizer?

Capítulo 6

FUNÇÃO QUADRÁTICA

Observe as figuras abaixo.

Figura 6.1: Ponte Juscelino Kubitschek

ver fonte [25]

Figura 6.2: Monumento nos EUA

ver fonte [21]

A imagem da esquerda, a Ponte Juscelino Kubitschek, também conhecida como Ponte JK, está situada em Brasília, ligando o Lago Sul, Paranoá e São Sebastião à parte central de Brasília, através do Eixo Monumental, atravessando o Lago Paranoá. Inaugurada em 15 de dezembro de 2002, a estrutura da ponte tem um comprimento de travessia total de 1200 metros, largura de 24 metros com duas pistas, cada uma com três faixas de rolamento, duas passarelas nas laterais para uso de ciclistas e pedestres com 1,5 metros de largura e comprimento total dos vãos de 720 metros.

A imagem da direita retrata um monumento nos EUA da Segunda Guerra Mundial e foi criado em homenagem aos homens e mulheres que lutaram e morreram.

Figura 6.3: Ponte da Baía de Sidney, Austrália

ver fonte [24]

Na construção de edifícios e monumentos, seja por propriedades estruturais ou por motivos estéticos, podemos observar a presença de formas que assemelham uma parábola. Localizada em Sydney, esta ponte que apresenta em sua estrutura um arco em forma de parábola, é uma das imagens mais conhecidas e fotografadas da Austrália. Sua construção teve início em 1924 e, após 8 anos de trabalho, ela foi inaugurada em 1932. Além de permitir a travessia entre a costa Norte e a costa Sul do Porto de Sydney esta ponte também é uma atração turística. Ao visitá-la, é possível conhecer uma exposiçao sobre ela e, por meio de escadas e passarelas, realizar uma escalada, conhecida como Brige Climb, é o ponto mais alto do arco formado pela ponte. Esse arco pode ser representado matematicamente por uma função quadrática $y = 0,0021x^2 + 1,0563x$, na qual y representa distância entre o nível do mar e o arco, e x representa a distância em linha reta a partir de uma das extremidades do arco no nível do mar, ambos expressos em metros.

Olha que interessante, parece que em nosso cotidiano iremos encontrar funções quadráticas.

Este capítulo foi baseado nas referências [2], [4], [5], [6], [7], [8], [10] e [12].

6.1 Definição

Uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de ***função quadrática*** ou ***função do 2º grau*** quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, em que a, b e c são números reais dados e $a \neq 0$.

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c} \qquad a \neq 0$$

6.1.1 Exemplos

A determinação dos coeficientes é feita por comparação dos elementos da função com a definição vista anteriormente. Veja:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ em que $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$
b) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ em que $a = -1$, $b = -2$, $c = 3$
c) $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ em que $a = 2$, $b = -3$, $c = -1$
d) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^2 + 2x$ em que $a = \dfrac{2}{3}$, $b = 2$, $c = 0$
e) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - 1$ em que $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 0$, $c = -1$
f) $f(x) = -5x^2$ em que $a = -5$, $b = 0$, $c = 0$

A obtenção dos valores de $f(x)$ é dada pela substituição dos valores de x na função dada em questão. Obtenha alguns valores para $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Se $x = -2$ então $f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 3$, ou seja, $f(-2) = 5$
Se $x = -1$ então $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3$, ou seja, $f(-1) = 0$
Se $x = 0$ então $f(0) = (0)^2 - 2(0) - 3$, ou seja, $f(0) = -3$
Se $x = 1$ então $f(1) = (1)^2 - 2(1) - 3$, ou seja, $f(1) = -4$
Se $x = 2$ então $f(2) = (2)^2 - 2(2) - 3$, ou seja, $f(2) = -3$
Se $x = 3$ então $f(3) = (3)^2 - 2(3) - 3$, ou seja, $f(3) = 0$
Se $x = 4$ então $f(4) = (4)^2 - 2(4) - 3$, ou seja, $f(4) = 5$

6.1.2 Exercícios

1 – Determine os coeficientes das funções quadráticas:

a) $f(x) = 3x^2 + x + 1$

b) $f(x) = -2x^2 + 2x$

c) $f(x) = 2x^2 - 1$

d) $f(x) = \frac{5}{3}x^2 - 3x$

e) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}$

f) $f(x) = -x^2 + 1$

g) $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 2x + 1$

h) $f(x) = -x^2 + \sqrt{3}x - 2$

i) $f(x) = \sqrt{5}x^2 - 3x - \sqrt{2}$

j) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}}x^2 - x$

2 – Obter os valores da função $f(x) = x^2 - 2x + 5$ para os valores de x: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

6.2 Zeros ou Raízes da Função Quadrática

Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores reais que x pode assumir tal que $f(x) = 0$.

Considere os exemplos:

Exemplo 1:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Gráfico da $f(x)$

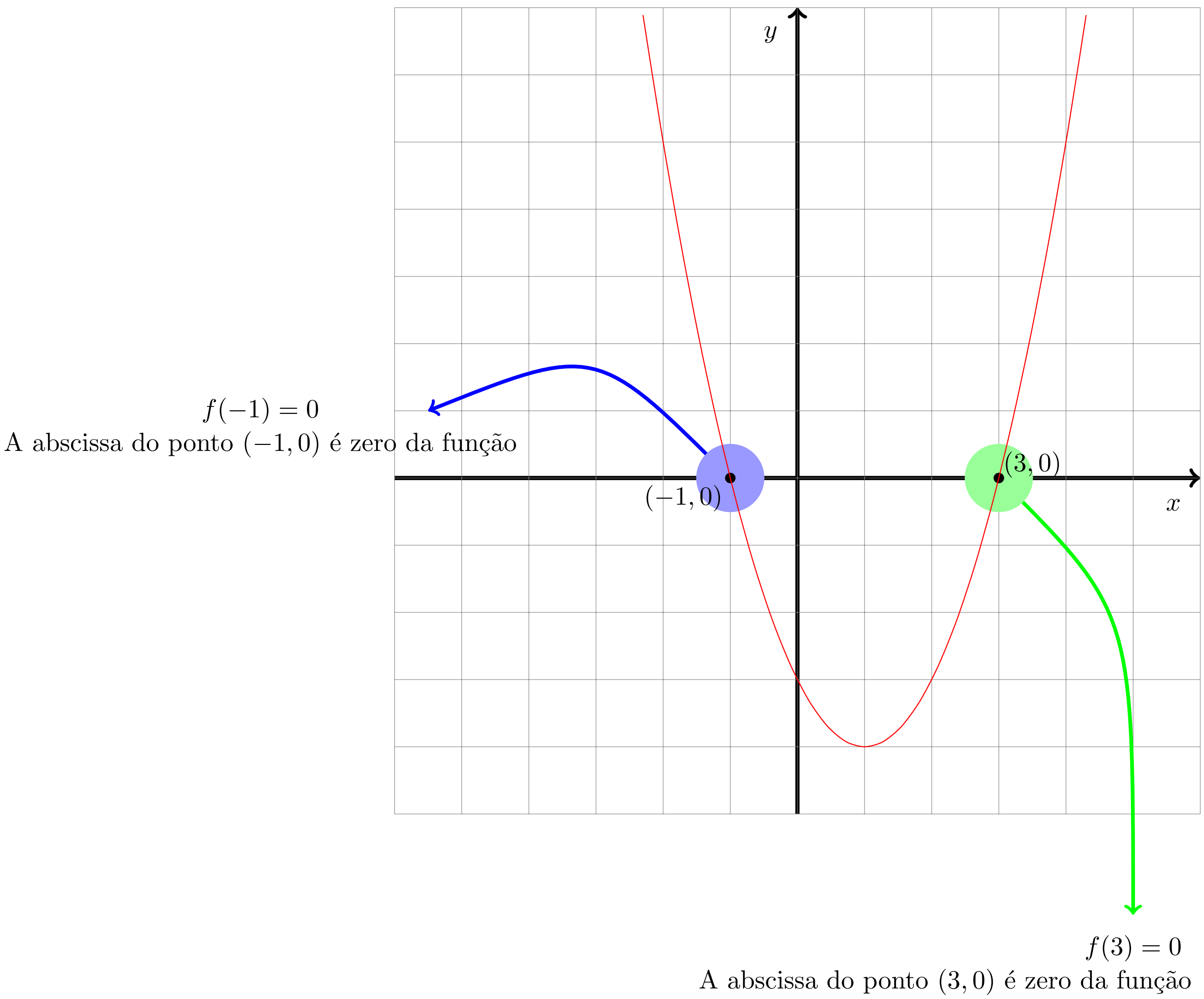


Figura 6.4: Zeros da função quadrática

Exemplo 2: Considere a função quadrática dada por:

$$\boxed{f(x) = -x^2 - 2x - 3}$$

Se $x = -3 \Longrightarrow f(-3) = -6$

Se $x = -2 \Longrightarrow f(-2) = -3$

Se $x = -1 \Longrightarrow f(-1) = -2$

Se $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -3$

Se $x = 1 \Longrightarrow f(1) = -6$

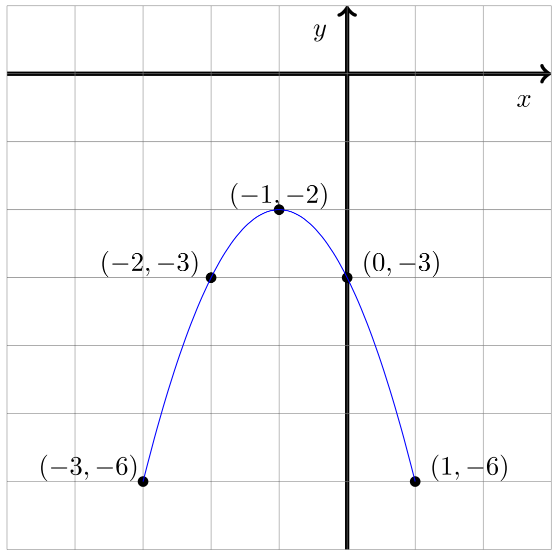


Figura 6.5: Inexistência dos zeros da função quadrática

A análise da função acima foi feita com o domínio definido no conjunto dos reais no intervalo entre -3 e 1, resultando assim em uma imagem em reais de -6 a -2.

Perceba que pelo gráfico, a função $f(x)$ não possui zeros ou raízes. O gráfico não intercepta o eixo x.

Algebricamente, bastaria fazer $f(x) = 0$ e verificar que não existe um x real que satisfaça tal equação quadrática.

Você leitor, verifique a afirmação acima!

6.3 Números de raízes da função quadrática

Dada uma função quadrática, para determinarmos quantas raízes tal função possui, basta igualar a função dada a zero e calcular o valor do discriminante (delta) da equação de 2º grau que vem a se formar. Abaixo teremos o que acontece caso a caso:

$\Delta > 0 \Longrightarrow x_1 \neq x_2$, ou seja, função com duas raízes diferentes.

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2$, ou seja, função com duas raízes iguais.

$\Delta < 0 \Longrightarrow \nexists\ x_1, x_2$, ou seja, não há raízes reais.

Figura 6.6: Variações do Delta

6.3.1 Exercícios

1 – Determine as raízes das funções dadas:

a) $f(x) = 3x^2 + x + 1$

b) $f(x) = -2x^2 + 2x$

c) $f(x) = 2x^2 - 1$

d) $f(x) = \frac{5}{3}x^2 - 3x$

e) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}$

f) $f(x) = -x^2 + 1$

g) $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 2x + 1$

h) $f(x) = -x^2 + \sqrt{3}x - 2$

i) $f(x) = \sqrt{5}x^2 - 3x - \sqrt{2}$

j) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}}x^2 - x$

6.4 Máximo e mínimo da função quadrática

Vimos que a função quadrática tem como gráfico uma parábola, sendo ela com concavidade para cima, se $a > 0$, ou para baixo, se $a < 0$.

Se a função quadrática tiver concavidade para cima, ou seja, $a > 0$, dizemos que tal função quadrática possui um ***ponto de mínimo***.

Analisando a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$, veremos o ***ponto de mínimo***.

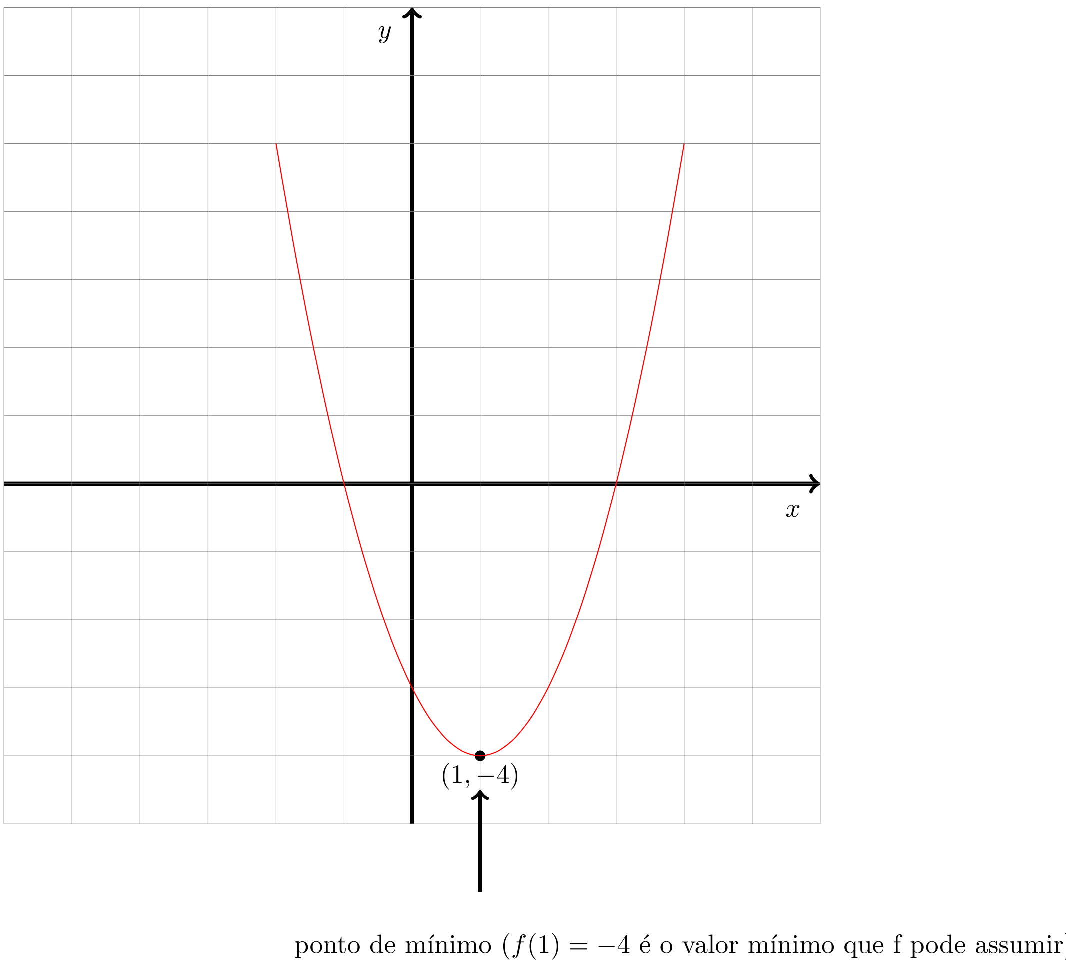


Figura 6.7: Mínimo da função quadrática

Se a função quadrática tiver concavidade para baixo, ou seja, $a < 0$, dizemos que tal função quadrática possui um ***ponto de máximo***.

Analisando a função $f(x) = -x^2 - 2x - 3$, veremos o ***ponto de máximo***.

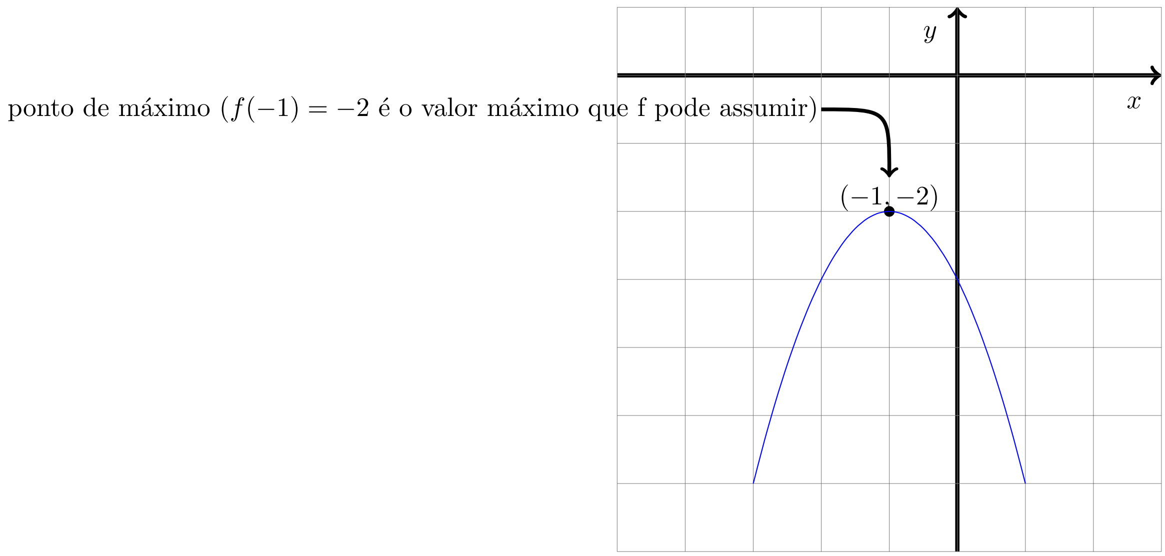


Figura 6.8: Máximo da função quadrática

O ***ponto de máximo*** e o ***ponto de mínimo*** são chamados de ***vértice da parábola*** e é justamente o ponto onde a parábola troca seu decrescimento por crescimento ou vice-versa.

O ***vértice da parábola*** da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser calculado da seguinte forma:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Demonstração: Vértice da parábola

Considere o gráfico de uma parábola como abaixo:

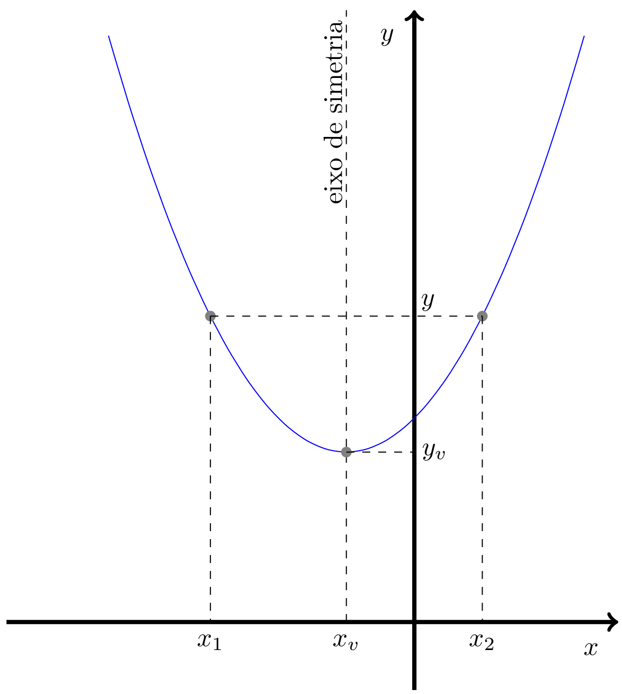


Figura 6.9: Demonstração do vértice da parábola

O gráfico da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo dos x que passa pelo vértice.

Considerando que;

$$\begin{aligned} x_v - x_1 &= x_2 - x_v \\ x_v + x_v &= x_2 + x_1 \\ 2x_v &= x_2 + x_1 \end{aligned}$$

Sabemos que x_1 e x_2 pertence ao Grf e que $f(x_1) = f(x_2)$. Sendo assim;

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) \\
ax_1^2 + bx_1 + c &= ax_2^2 + bx_2 + c \\
ax_1^2 - ax_2^2 + bx_1 - bx_2 + c - c &= 0 \\
a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) &= 0 \\
a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + b(x_1 - x_2) &= 0, \qquad (x_1 \neq x_2) \\
\frac{a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} + \frac{b(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} &= 0 \\
a(x_1 + x_2) + b &= 0, \qquad (x_1 + x_2 = 2x_v) \\
a(2x_v) &= -b \\
2ax_v &= -b \\
x_v &= \frac{-b}{2a}
\end{aligned}$$

Basta, agora, substituir x_v em $f(x)$, pois $y_v = f(x_v)$.

$$\begin{aligned}
y_v &= f(x_v) \\
y_v &= ax_v^2 + bx_v + c \\
y_v &= a(\frac{-b}{2a})^2 + b(\frac{-b}{2a}) + c \\
y_v &= \frac{-ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \\
y_v &= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\
y_v &= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\
y_v &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\
y_v &= -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} \\
y_v &= -\frac{\Delta}{4a}
\end{aligned}$$

Portanto;

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Observação: Poderíamos ter utilizado qualquer parábola que os resultados seriam os mesmos.

6.4.1 Exercícios

1 – Comente sobre o ponto de máximo ou mínimo de cada parábola e determine o seu vértice.

a) $f(x) = 3x^2 + x + 1$

b) $f(x) = -2x^2 + 2x$

c) $f(x) = 2x^2 - 1$

d) $f(x) = \frac{5}{3}x^2 - 3x$

e) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}$

f) $f(x) = -x^2 + 1$

g) $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 2x + 1$

h) $f(x) = -x^2 + \sqrt{3}x - 2$

i) $f(x) = \sqrt{5}x^2 - 3x - \sqrt{2}$

j) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}}x^2 - x$

2 – Considere cada uma das funções da questão anterior. Em quais intervalos elas crescem e em quais elas decrescem?

3 – Ainda com relação à questão 1, qual é o domínio, contra domínio e imagem de cada uma das funções dadas?

6.5 Gráfico de uma função quadrática

De maneira semelhante à função afim, podemos construir o gráfico de uma função quadrática utilizando a ideia de representar pares ordenados em um plano cartesiano. Analisaremos a função $f(x) = x^2$.

Se $x = -3 \Longrightarrow f(-3) = 9$

Se $x = -2 \Longrightarrow f(-2) = 4$

Se $x = -1 \Longrightarrow f(-1) = 1$

Se $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$

Se $x = 1 \Longrightarrow f(1) = 1$

Se $x = 2 \Longrightarrow f(2) = 4$

Se $x = 3 \Longrightarrow f3) = 9$

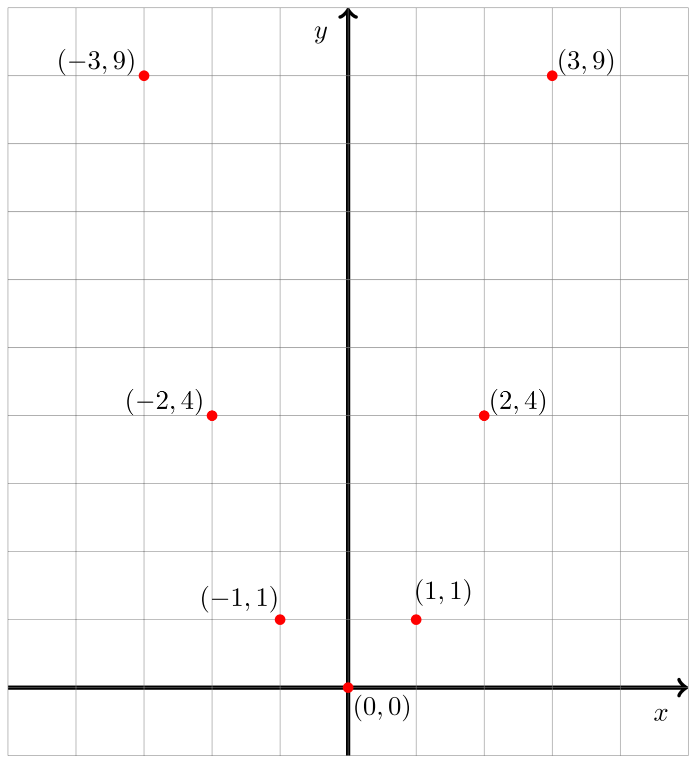


Figura 6.10: Determinação gráfica da função quadrática

Note que determinamos apenas alguns pares ordenados que satisfazem essa função. No entanto, como o domínio e o contradomínio de f é o conjunto dos números reais, podemos atribuir infinitos valores para x, obtendo valores para y e, consequentemente, infinitos pares ordenados (x, y).

O gráfico da função é dado pela representação de todos esses pontos no plano cartesiano. Porém, como é impossível calcular as coordenadas de todos eles, calculamos as coordenadas de alguns e traçamos o gráfico da função.

O gráfico de f é uma curva denominada **parábola**. Toda parábola possui um **eixo de simetria**, que a intercepta em um único ponto, denominado **vértice da parábola**. No caso da função $f(x) = x^2$, seu eixo de simetria coincide com o eixo y e seu vértice possui coordenadas $(0, 0)$.

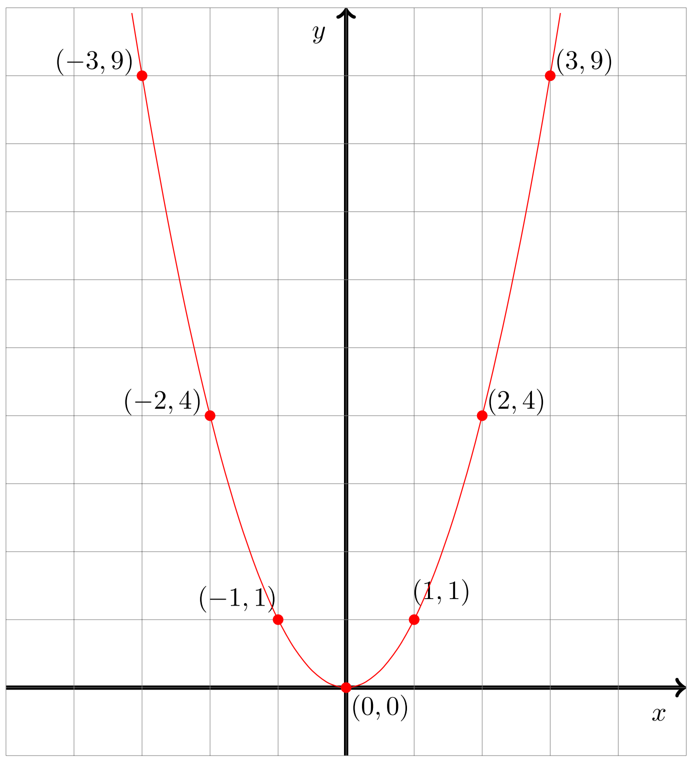


Figura 6.11: Gráfico de $f(x) = x^2$

Exemplo 1: Considere a função quadrática dada por:

$$\boxed{f(x) = x^2 - 2x - 3}$$

Se $x = -2 \Longrightarrow f(-2) = 5$

Se $x = -1 \Longrightarrow f(-1) = 0$

Se $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -3$

Se $x = 1 \Longrightarrow f(1) = -4$

Se $x = 2 \Longrightarrow f(2) = -3$

Se $x = 3 \Longrightarrow f(3) = 0$

Se $x = 4 \Longrightarrow f(4) = 5$

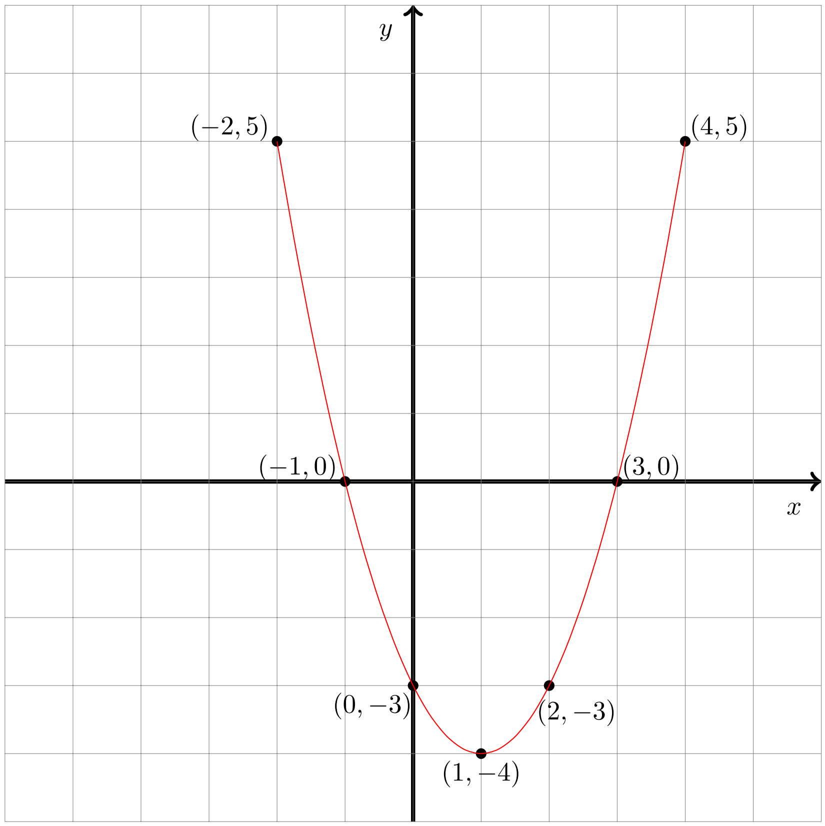


Figura 6.12: Gráfico de $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Exemplo 2: Considere a função quadrática dada por:

$$\boxed{f(x) = -x^2 - 2x - 3}$$

Se $x = -3 \Longrightarrow f(-3) = -6$

Se $x = -2 \Longrightarrow f(-2) = -3$

Se $x = -1 \Longrightarrow f(-1) = -2$

Se $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -3$

Se $x = 1 \Longrightarrow f(1) = -6$

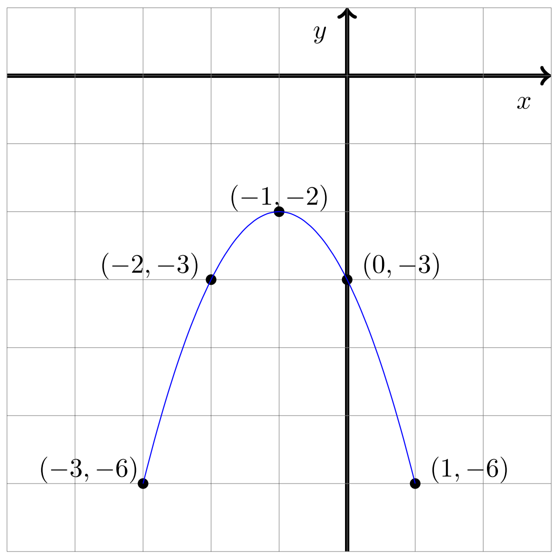


Figura 6.13: Gráfico de $f(x) = -x^2 - 2x - 3$

A análise da função acima foi feita com o domínio definido no conjunto dos reais no intervalo entre -3 e 1, resultando assim em uma imagem em reais de -6 a -2.

OBSERVAÇÃO: Não se esqueça de sempre analisar qual é o conjunto domínio e a imagem da aplicação dada.

Quando estudamos uma função linear $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, por meio do valor de a sabemos se a função dada é *crescente* ou *decrescente*.

Para função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, o estudo do coeficiente a nos mostra se a função $f(x)$ possui *concavidade voltada para cima* ou *concavidade voltada para baixo*.

Se $a > 0$, a *concavidade da parábola* será voltada para "cima". O gráfico do primeiro exemplo dado anteriormente possui concavidade para cima, pois $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e neste caso $a = 1$, $a > 0$. Podemos observar também que, o gráfico decresce até o vértice e depois cresce.

Se $a < 0$, a *concavidade da parábola* será voltada para "baixo". O gráfico do segundo exemplo dado anteriormente possui concavidade para baixo, pois $f(x) = -x^2 - 2x - 3$ e neste caso $a = -1$, $a < 0$. Podemos perceber também que, o gráfico cresce até o vértice e depois decresce.

6.5.1 Exercícios

1 – Comente sobre a concavidade de cada uma das parábolas abaixo justificando sua resposta e construa o gráfico de cada uma:

a) $f(x) = 3x^2 + x + 1$

b) $f(x) = -2x^2 + 2x$

c) $f(x) = 2x^2 - 1$

d) $f(x) = \frac{5}{3}x^2 - 3x$

e) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}$

f) $f(x) = -x^2 + 1$

g) $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 2x + 1$

h) $f(x) = -x^2 + \sqrt{3}x - 2$

i) $f(x) = \sqrt{5}x^2 - 3x - \sqrt{2}$

j) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}}x^2 - x$

6.6 Coeficientes de uma função quadrática

Se analisarmos os coeficientes de uma função quadrática, também podemos obter informações do tipo:

– quanto à sua abertura;

– quanto à intersecção com o eixo y;

– quanto ao seu deslocamento lateral.

Considere as funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ onde iremos variar apenas o coeficiente a, sendo $a > 0$. Essa variação resulta em gráficos parecidos com os que estão abaixo.

Se $0 < a < 1$, o gráfico apresenta um aspecto semelhante ao gráfico de cor preta. Em outras palavras, a função nos dá a ideia de que se "esparrama", gráfico "gordo".

Se $a > 1$, o gráfico apresenta um aspecto semelhante ao gráfico de cor verde. Em outras palavras, a função nos dá a ideia de que se "expreme", gráfico "magro".

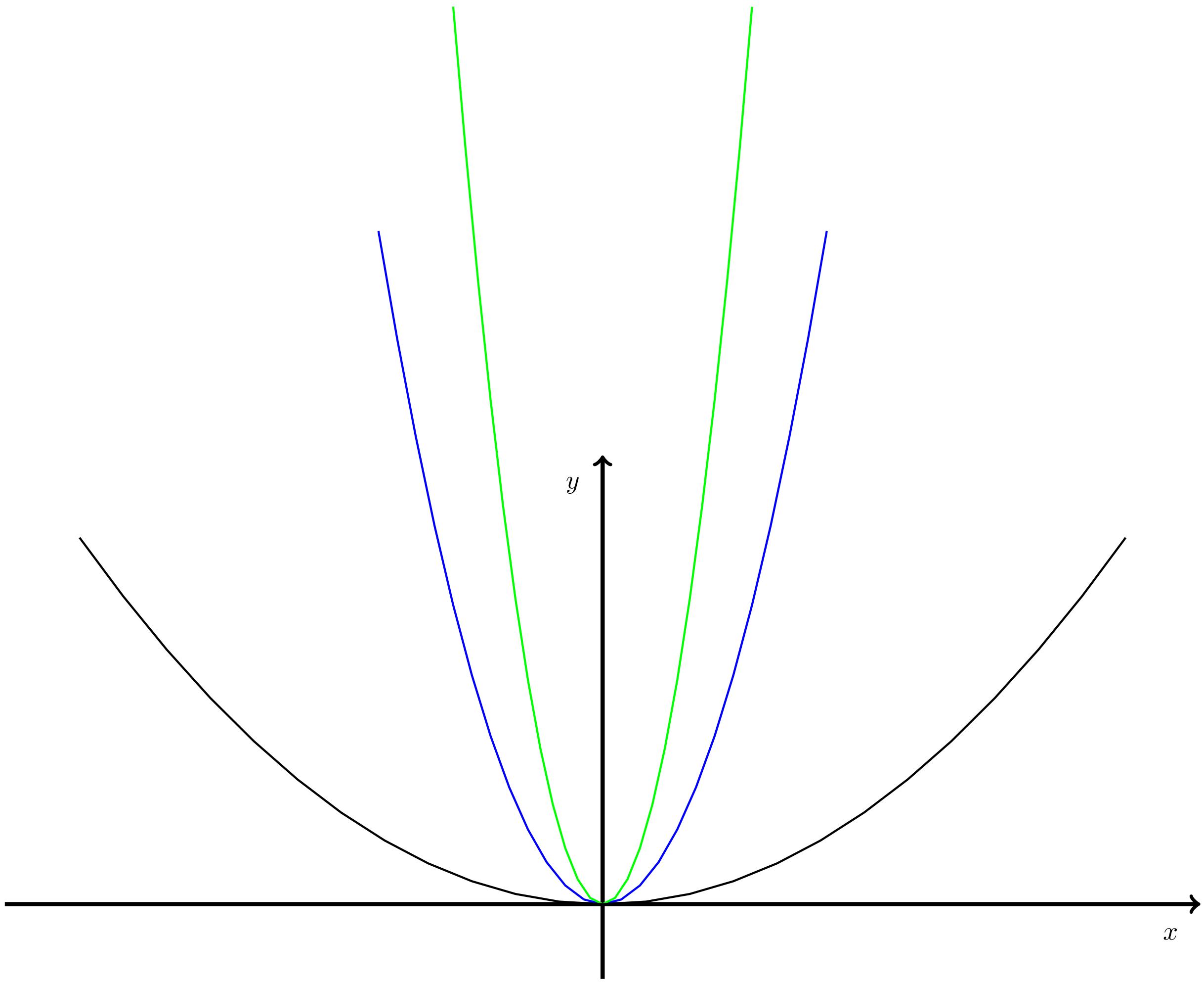


Figura 6.14: Variação do coeficiente a da função quadrática

A análise para $a < 0$ é análoga, diferindo apenas na concavidade do gráfico.

Considere as funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ onde iremos variar apenas o coeficiente b.

O coeficiente b de uma função quadrática indica se a parábola relacionada a ela intercepta o eixo y no ramo crescente ou no ramo decrescente. Observe os gráficos das funções abaixo:

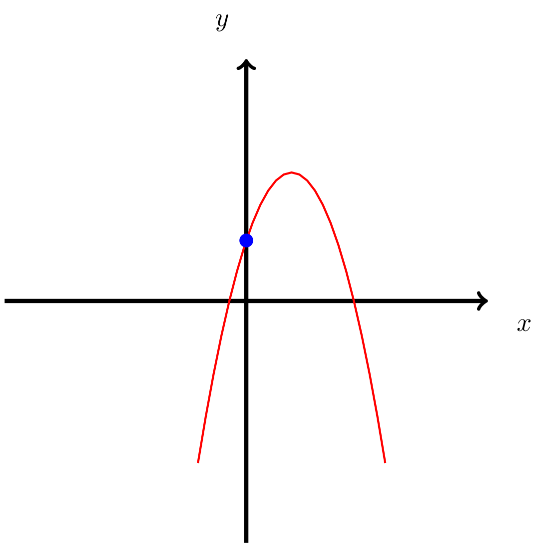


Figura 6.15: $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$

A parábola intercepta o eixo y no ramo crescente e $b > 0$.

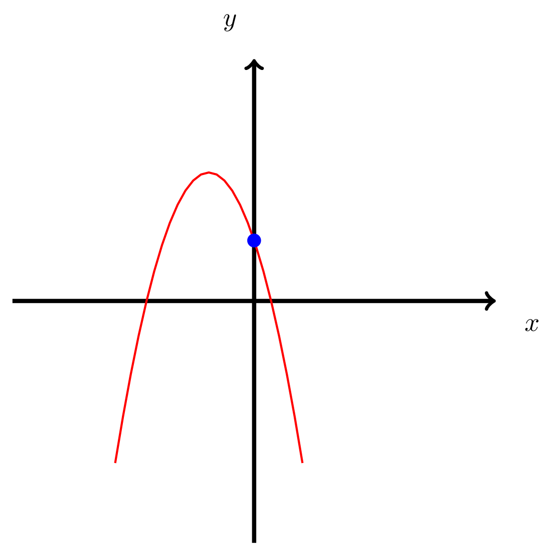


Figura 6.16: $f(x) = -2x^2 - 3x + 1$

A parábola intercepta o eixo y no ramo decrescente e $b < 0$.

Observação: Se tivermos $b = 0$, a parábola intercepta o eixo y no vértice sobre o eixo de simetria.

Considere as funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ onde iremos variar apenas o coeficiente c. Essa variação resulta em gráficos parecidos com os que estão abaixo.

Observe que, o coeficiente c nos indica onde é a intersecção do gráfico com o eixo y. Variando tal coeficiente, temos a ideia de que a função “subiu”ou “desceu”no eixo y.

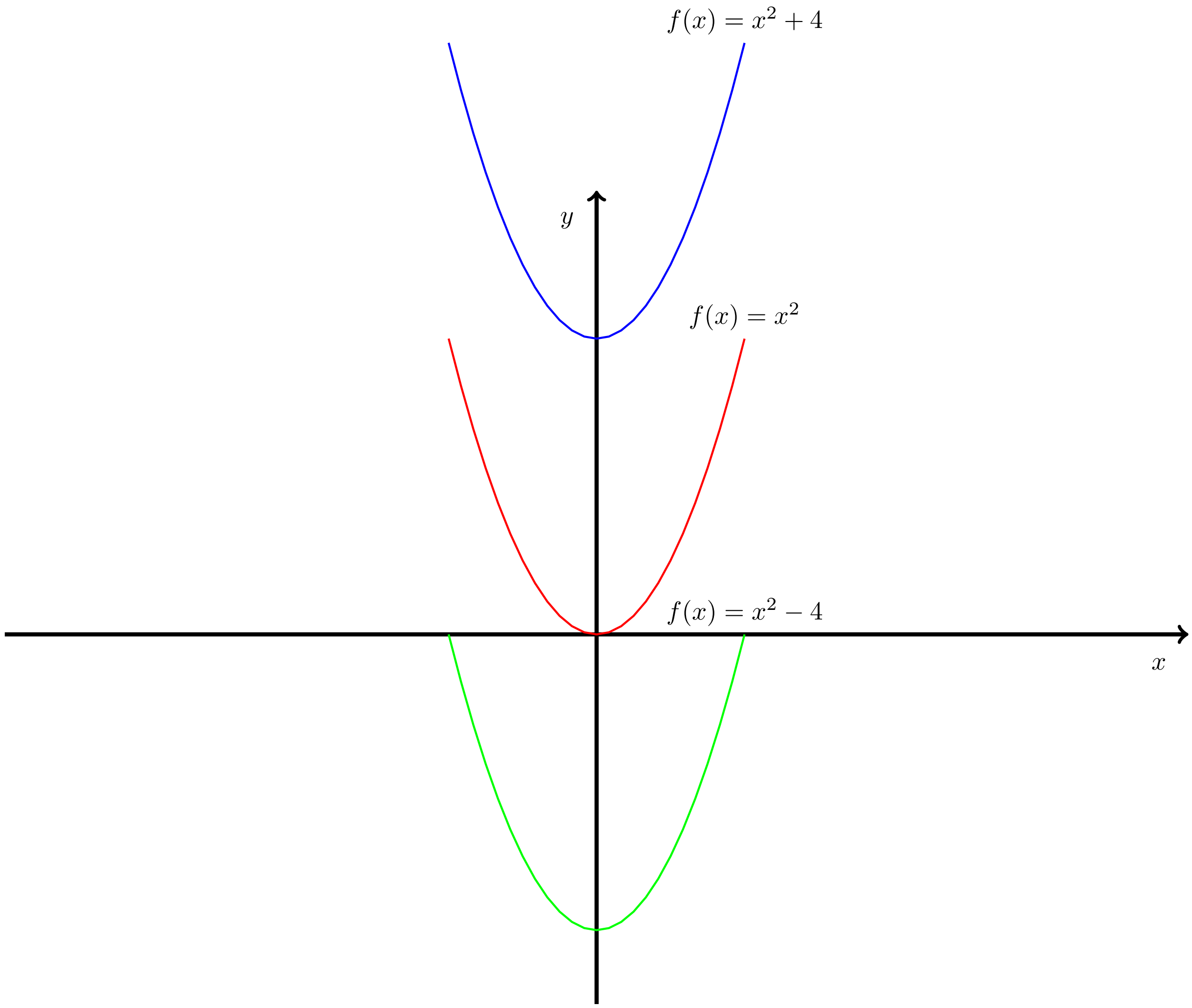


Figura 6.17: Variação do coeficiente c da função quadrática

O gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ intercepta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, c)$.

Atividade Dinâmica

Na atividade dinâmica que aqui você encontrará é para que possa ser analisado o comportamento da função quadrática quando variamos seus coeficientes.

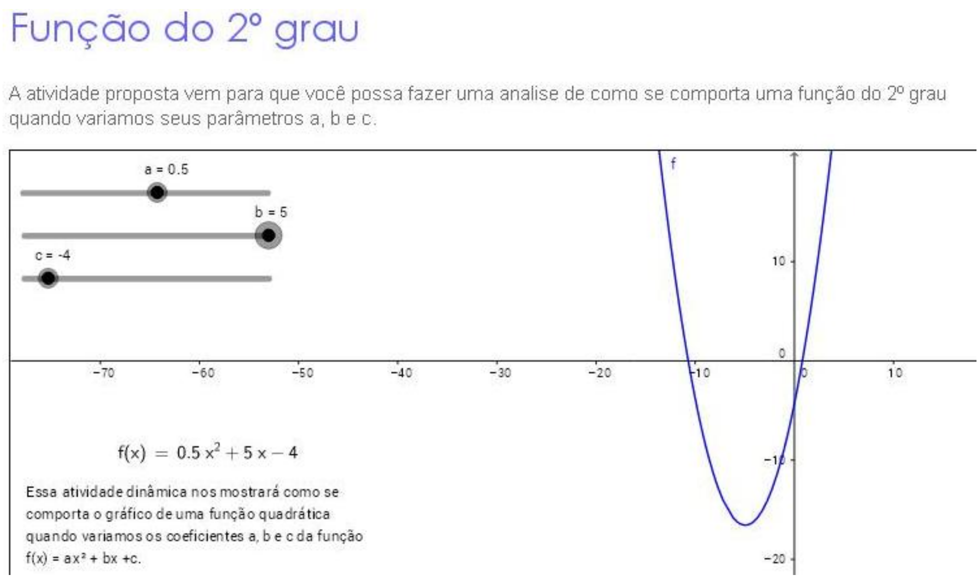


Figura 6.18: Função do 2º grau

fonte – o autor

Clique em: Função do 2º grau ou acesse: https://tube.geogebra.org/m/2068393

6.7 Problemas

1 – (Uespi – PI) Uma linha de montagem, após x horas de operação, produz $(30x - x^2)$ unidades, com $0 \leq x \leq 10$. Se o custo de produção de y unidades é de $(300 + 80y)$ reais, qual é o custo de produção nas primeiras duas horas de operação?

2 – Uma pequena empresa calcula o custo C, em reais, para produzir n unidades de determinado produto a partir da função $C(n) = -\frac{1}{5}n^2 + 8n + 100$, com $0 \leq n \leq 40$.

a) Qual será o custo para produzir:

▶ 5 unidades? E 35 unidades?

▶ 10 unidades? E 30 unidades?

▶ 15 unidades? E 25 unidades?

b) Quais regularidades podem ser observadas nos resultados obtidos do item a? Faça o gráfico unidades x custo, unidades com escala de 10 em 10 e o custo com escala de 50 em 50.

c) Nessa empresa, é possível que o custo seja igual a $R\$200,00$? Por quê?

3 – A cada quatro anos, os jogos olímpicos reúnem atletas de todos os continentes em uma competição que mobiliza populações de diversos países, emocionando-as e mostrando verdadeiros exemplos de superação. Algumas das modalidades esportivas são praticadas neste evento desde a Antiguidade. Um exemplo é o lançamento de discos. Considerando o mais antigo dos lançamentos, sua inspiração vem dos guerreiros que jogavam seus escudos antes de atravessar rios para diminuir o peso que teriam de arregar duarante a travessia. O lançamento de discos foi a modalidade esportiva que menos sofreu alterações nos Jogos Olímpicos da Era Moderna, cuja 1ª edição ocorreu em 1896, em Atenas, na Grécia.

Figura 6.19: 11/08/2013 - Brasileiro Carlos Chinin lança o disco em uma das provas do decatlo do Mundial de Moscou (ver fonte [22])

Considere que a trajetória de um disco após seu lançamento possa ser representada pela função $y = -0,01x^2 + 0,54x + 1,71$, em que $y = f(x)$ representa a altura do disco em relação ao solo durante sua trajetória e x representa a distância horizontal do disco em relação ao atleta, ambos expressos em metros.

a) A partir de que altura, em relação ao solo, o disco foi lançado?

b) Após ter percorrido horizontalmente $12m$ em relação ao atleta, qual foi a altura atingida pelo disco?

c) Qual foi a distância horizontal atingida por esse disco ao tocar o solo?

d) Qual foi a altura máxima atingida pelo disco com relação ao solo?

4 – Pedro pretende cercar uma região retangular em sua chácara para criar galinhas. Para isso, ele comprou $80m$ de tela e pretende usá-la de modo a obter a maior área possível para o galinheiro. Quais devem ser a medidas dos lados desse galinheiro? Qual será a área máxima desse galinheiro?

5 – Em uma metalúrgica, o custo c, em reais, para produzir n peças de metal pode ser calculado por $c(n) = 0,04n^2 - 4n + 110$. Para qual quantidade de peças o custo de produção é mínimo? Qual é esse custo mínimo?

6 – Voltemos ao problema sobre a Ponte da Baía de Sidney, Austrália no início do capítulo.

Figura 6.20: Ponte da Baía de Sidney, Austrália (ver fonte [24])

Esse arco pode ser representado matematicamente por uma função quadrática $y = 0,0021x^2 + 1,0563x$, na qual y representa distância entre o nível do mar e o arco, e x representa a distância em linha reta a partir de uma das extremidades do arco no nível do mar, ambos expressos em metros.

a) Qual é a distância entre as extremidades do arco formado pela ponte no nível do mar?

b) Qual é a maior altura que uma pessoa pode atingir, em relação ao nível do mar, ao escalar a ponte da Baía de Sidney?

Capítulo 7

FUNÇÃO EXPONENCIAL

O jogo de xadrez

Figura 7.1: xadrez

ver fonte [23]

O Xadrez é um jogo tão antigo que, durante todos os anos de sua existência, várias foram as histórias associadas a sua origem.

Segundo uma dessas histórias, um rei empolgado com as tramas possíveis de serem construídas com esse jogo, pede ao sábio responsável por sua invenção que escolha qualquer coisa do seu reino como forma de gratificação pelo trabalho. O sábio pede como prêmio grãos de trigo.

O rei, bastante surpreso pela simplicidade do pedido, pergunta imediatamente qual é a quantidade desejada. O sábio, deixando o rei ainda mais assustado e intrigado, pede ao soberano que coloque no tabuleiro 1 grão de trigo na primeira casa, 2 grãos na segunda, 4 grãos na terceira, 8 grãos na quarta, 16 na quinta, e assim por diante, dobrando sempre o número de grãos de trigo na passagem de cada casa.

O rei fica perplexo e não entende a limitação do pedido. O nosso ponto de partida é utilizar essa lenda como um problema para introduzir o conceito de função exponencial, mas antes vamos a uma revisão de potenciação.

Vamos lá, aposto que isso dá um bom estudo sobre matemática!

Este capítulo foi baseado nas referências [2], [4], [5], [6], [7], [8], [10], [12] e [23].

7.1 Revisão de Potenciação

O que é **potenciação**?

A multiplicação é composta de fatores e o resultado é denominado produto.

$$2.3.5.8 = 240$$

Os números 2, 3, 5 e 8 são os fatores dessa multiplicação e o resultado 240 é o produto.

Uma multiplicação onde todos os fatores são iguais é denominada **potenciação**.

$$3.3.3.3 = 81$$

Nesse caso, o número 3 é denominado base,isto é, o fator que se repete. Como essa base se repete 4 vezes, essa quantidade é denominada expoente da potenciação e o resultado é a potência.

A seguir veremos como é a escrita de uma potenciação e como ela descreve a solução do problema no início do capítulo.

7.1.1 Potência de expoente natural

Exemplos

a) 2.2.2 que pode ser indicado por $2^3 = 8$

b) 3.3 que pode ser indicado por $3^2 = 9$

c) 5.5.5.5 que pode ser indicado por $5^4 = 625$

Lembre-se que, se invertermos a base com o expoente, os resultados serão diferentes. Observe os exemplos **a** e **b** dados anteriormente.

7.1.2 Exercícios

1 – Escreva na forma de potência:

a) 2.2.2.2 b) 5.5 c) 3.3.3 d) 1.1.1.1 e) $x.x.x.x.x$

2 – Calcule as potências:

a) 2^4 c) 4^3 e) 10^2 g) 18^2 i) 50^2

b) 3^3 d) 5^2 f) 12^3 h) 30^3 j) 100^3

3 - Considere $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ e $d = 5$, determine:

a) a^a e) b^a i) c^a m) d^a

b) a^b f) b^b j) c^b n) d^b

c) a^c g) b^c k) c^c o) d^c

d) a^d h) b^d l) c^d p) d^d

7.1.3 Propriedades

1 – Multiplicação de potências de mesma base

$$a^m.a^n = \overbrace{a.a...a}^{mvezes}.\underbrace{a.a...a}_{nvezes} = a^{m+n}$$

2 – Divisão de potências de mesma base $(a \neq 0, m > n)$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a.a...a}^{mvezes}}{\underbrace{a.a...a}_{nvezes}} = a^{m-n}$$

3 – Potência de potência

$$(a^m)^n = \overbrace{a^m.a^m...a^m}^{nvezes} = a^{m.n}$$

4 – Potência de um produto

$$(a.b)^m = \overbrace{(a.b).(a.b)...(a.b)}^{mvezes} = \overbrace{a.a...a}^{mvezes}.\underbrace{b.b...b}_{mvezes} = a^m.b^m$$

5 – Potência de um quociente $(b \neq 0)$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \overbrace{\frac{a}{b}.\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}^{mvezes} = \frac{a^m}{b^m}$$

7.1.4 Expoente 0 (zero)

Dado um número $a \neq 0$ como sendo a base de uma potenciação, temos que:

$$\boxed{a^0 = 1}$$

Tal demonstração é muito simples o seu entendimento e faremos na sequência.

Demonstração:

Note que

$$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1,\ m > 0$$

7.1.5 Potência de expoente inteiro

Como os números naturais pertencem ao conjunto dos números inteiros, faremos então uma análise apenas para expoentes negativos.

Dado um número $a \neq 0$ como sendo a base de uma potenciação, temos:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Demonstração:

Note que

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

7.1.6 Potência de expoente racional

A seguir, apresentaremos algumas definições pertinentes.

Seja n par e positivo, então $\sqrt[n]{a} = b$, se $a > 0$ e $b^n = a$.

Seja n ímpar e positivo, então $\sqrt[n]{a} = b$, se $b^n = a$.

Dado um número racional $\dfrac{m}{n}$, $n \neq 0$, como sendo o expoente de uma potência de base $a > 0$, temos por definição que, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Propriedades

As propriedades abaixo valem para $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

1ª propriedade

A raiz enésima de um produto é igual ao produto das raízes enésimas dos fatores.

$$\sqrt[n]{a.b} = (a.b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}.b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

Portanto,

$$\boxed{\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}}$$

2ª propriedade

A raiz enésima de um quociente é igual ao quociente das raízes enésimas.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \qquad (b \neq 0)$$

Portanto,

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

3ª propriedade

A raiz enésima de a elevado a m é igual ao expoente m da raiz enésima de a.

$$\sqrt[n]{a^m} = (a)^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

Portanto,

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m}$$

4ª propriedade – ficará a cargo do leitor o seu desenvolvimento

$$\boxed{\sqrt[n.m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}$$

7.2 Função exponencial

Chama-se ***função exponencial*** a toda função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ do tipo $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Como $a > 0$ e $a \neq 1$, vamos analisar dois casos que são:

$\boxed{a > 1}$ e $\boxed{0 < a < 1}$

Exemplos

Estudo da função exponencial para $a > 1$

Exemplo 1: Considere a função $f(x) = 2^x$. Temos que:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Gráfico de $f(x) = 2^x$

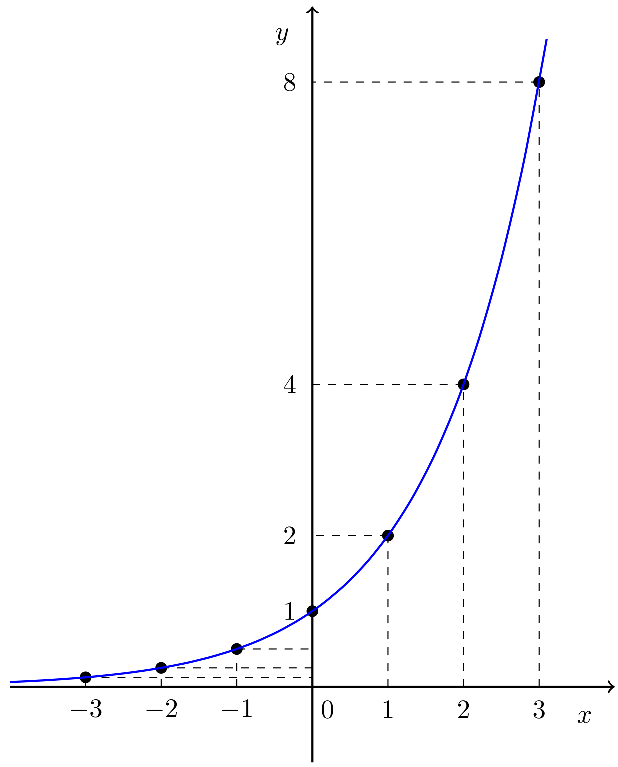


Figura 7.2: Gráfico de $f(x) = 2^x$

Essa função é crescente em $\mathbb{R}$, ou seja, quando x aumenta, o valor correspondente de y também aumenta.

Estudo da função exponencial para $0 < a < 1$

Exemplo 2: Considere a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

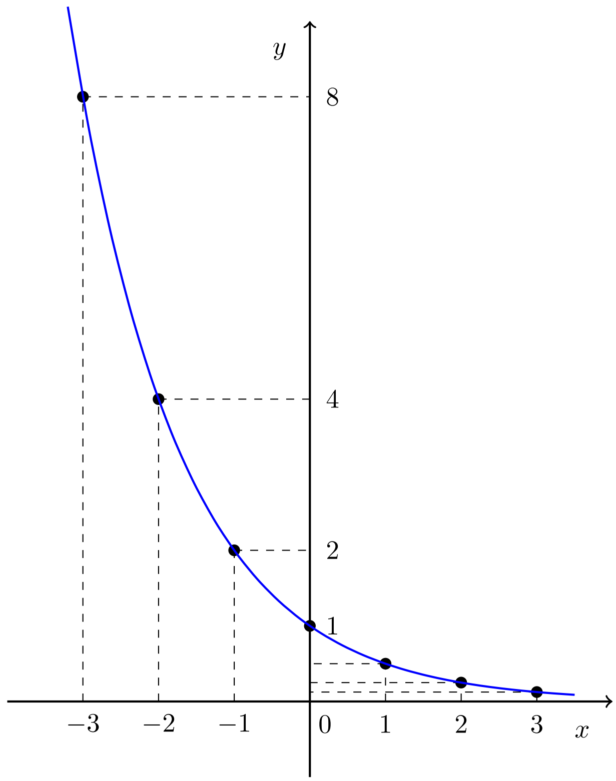


Figura 7.3: Gráfico de $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

Essa função é decrescente em $\mathbb{R}$, ou seja, quando x aumenta, o valor correspondente de y diminui.

7.3 Exercícios

1 – Das funções abaixo, quais são exponenciais? Escreve o motivo pelas quais as outras não são.

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}}$ c) $f(x) = 1^{2x}$ d) $f(x) = (-3)^{-x}$

2 – Determine, para as funções exponenciais da questão 1, as imagens para os domínios de x iguais a 1, 2, 3, 4 e 5, ou seja, $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$.

3 – Construa os gráficos das funções:

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = 3^x$

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

4 – Quais das funções abaixo são crescentes e decrescentes?

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $f(x) = (\sqrt{3})^x$

d) $f(x) = (0,01)^x$

e) $f(x) = 2^{-x}$

5 – Sendo f, g e h funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2.3^x$, $g(x) = 5^x - 2$ e $h(x) = 5^{x-2}$. Determine:

a) $f(2)$;

b) $g(2)$;

c) $h(2)$;

d) $f(-1)$;

e) $g(0)$;

f) $h(0)$;

g) x tal que $h(x) = 125$;

h) x tal que $g(x) = 3$.

6 – Construa o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^{x-1}$ e determine $Im(f)$.

7 – Considere o problema inicial deste capítulo e responda os itens dessa questão.

a) Qual função descreveria o problema do xadrez? Como seria o gráfico?

b) Quantos grãos o sábio receberia pela 11ª casa do tabuleiro? E pela 21ª? Como poderíamos indicar os grãos recebidos pelo sábio pela última casa do tabuleiro?

c) Se triplicados os grãos de trigo, em vez de dobrados, na passagem de uma casa para a outra, como seria escrita essa função? Como seria o gráfico?

d) Represente graficamente o problema do xadrez.

Atividade Dinâmica

A atividade proposta é para o estudo do comportamento da função exponencial quando variamos os seus coeficientes.

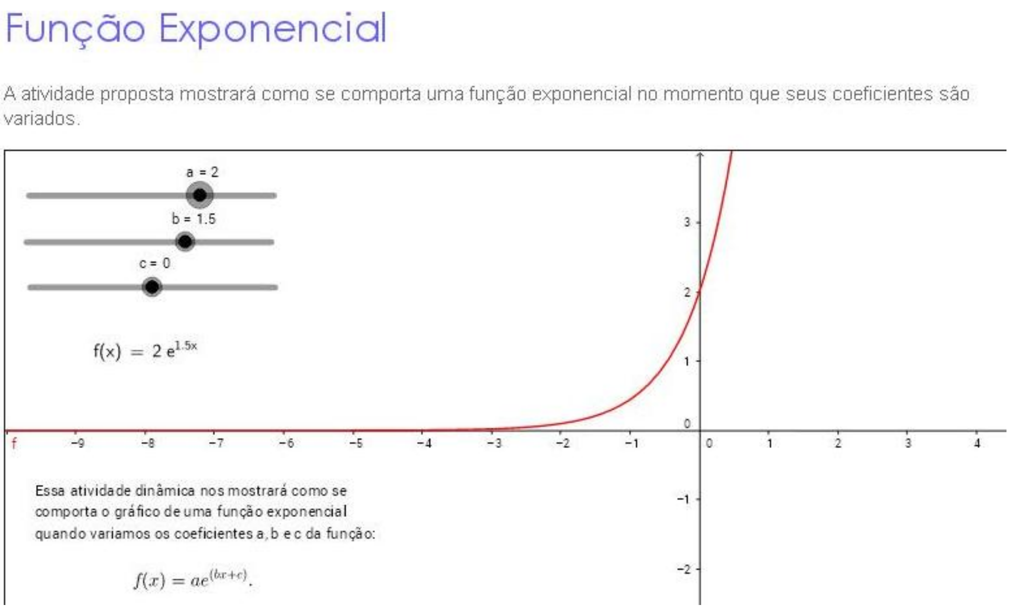


Figura 7.4: Função Exponencial

fonte – o autor

Clique em: Função Exponencial ou acesse: https://tube.geogebra.org/m/2068407

7.4 Problemas

1 – Alguns fornos elétricos contêm um dispositivo que controla a temperatura em seu interior. Assim, o aparelho desliga automaticamente quando chega à temperatura desejada e torna a ligar quando há certa perda na temperatura. Um forno elétrico que possui esse dispositivo tem sua temperatura interna T calculada em funçao do tempo t que o forno está ligado, em minutos, pela função $T(t) = 300 - 265.(0,3)^{\frac{t}{10}}$. Qual é a temperatura interna desse forno elétrico 5 minutos após ter sido ligado? E após 20 minutos?

Solução:

Para determinarmos a temperatura interna desse forno elétrico após 5 minutos, basta tomarmos a função dada e substituir $t = 5$.

$$\begin{aligned}
T(t) &= 300 - 265.(0,3)^{\frac{t}{10}} \\
T(5) &= 300 - 265.(0,3)^{\frac{5}{10}} \\
T(5) &= 300 - 265.(0,3)^{\frac{1}{2}} \\
T(5) &= 300 - 265.\sqrt[2]{0,3} \\
T(5) &= 300 - 265.0,548 \\
T(5) &= 300 - 145,15 \\
T(5) &= 154,85^{o}C
\end{aligned}$$

Portanto; após 5 minutos o forno elétrico atingirá uma temperatura interna de 154,85°C.

Vamos agora determinar a temperatura interna do forno após 20 minutos, e para isso basta substituir $t = 20$.

$$\begin{aligned}
T(t) &= 300 - 265.(0,3)^{\frac{t}{10}} \\
T(20) &= 300 - 265.(0,3)^{\frac{20}{10}} \\
T(20) &= 300 - 265.(0,3)^{2} \\
T(20) &= 300 - 265.0,09 \\
T(20) &= 300 - 23,85 \\
T(20) &= 276,15^{o}C
\end{aligned}$$

Portanto, após 20 minutos o forno elétrico atingirá uma temperatura interna de 276,15°C.

Atividade Dinâmica

Confira o exercício acima com a atividade dinâmica a seguir.

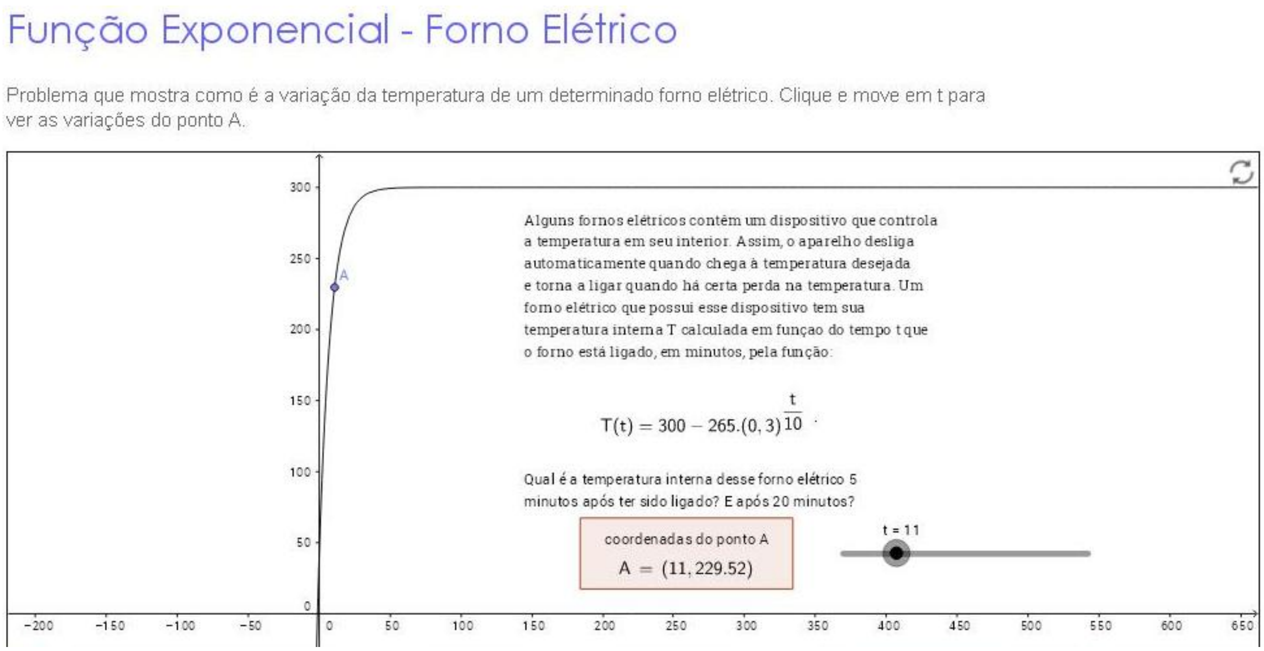


Figura 7.5: Variação da temperatura do forno elétrico

fonte – o autor

Clique em: Forno Elétrico ou acesse: https://tube.geogebra.org/m/2410461

2 – Para analisar o efeito de um remédio no extermínio de determinada bactéria, cientistas fizeram experimentos expondo uma população desse microrganismo ao remédio e verificando o tempo necessário para que fosse exterminada. Ao final, verificou-se que a população da bactéria d dias após a exposição ao remédio poderia ser estimada por meio da função $p(d) = 6000.\left(\frac{1}{4}\right)^d$. Dois dias após a exposição ao remédio, a população da bactéria reduziu-se a quantos por cento da população inicial?

3 – Certo banco oferece um investimento que rende uma taxa 6% ao ano de juros compostos. Observe a simulação de um investimento de R$ 1500,00 em um período de três anos.

Ano	Juro (J)	Montante (M)
1	$1500,00.0,06 = 90,00$	$1500,00 + 90,00 = 1590,00$
2	$1590,00.0,06 = 95,40$	$1590,00 + 95,40 = 1685,00$
3	$1685,40.0,06 = 101,12$	$1685,40 + 101,12 = 1786,52$

a) Qual é a função que descreve o montante M no final de n anos, ao se investir R$ 1500,00?

b) Qual será o montante ao final de 4 anos? E de 6 anos?

4 – Certa empresa utiliza a função $n(t) = 600 - 200.(0,6)^t$ para estimar o número n de peças produzidas mensalmente por um funcionário com t meses de experiência.

a) Quantas peças, aproximadamente, são produzidas em um mês por um funcionário com 4 meses de experiência?

b) Estima-se que a produtividade de um funcionário com 2 meses de experiência aumente quantos por cento se comparada com o mês em que foi contratado?

5 – (UFAL – AL) A população $P(t)$ de uma metrópole, em milhões de habitantes, é dada por $P(t) = 5.2^{ct}$, com t sendo o número de anos, contados a partir de 2000 (ou seja, $t = 0$ corresponde ao ano 2000), e c é uma constante real. Se a população da metrópole em 2008 é de 10 milhões de habitantes, qual o valor de c? Construa um gráfico representativo.

6 – (UFMG – MG) A população de uma colônia de bactéria *E. coli* dobra a cada 20 minutos. Em um experimento, colocou-se, inicialmente, em um tubo de ensaio, uma amostra com 1000 bactérias por mililitro. No final do experimento, obteve-se um total de $4,096.10^6$ bactérias por mililitro. Sendo assim, qual foi o tempo do experimento?

7 – Determinado imóvel foi avaliado em R$350.000,00 e, a partir daí, valoriza-se exponencialmente de acordo com a função $v(t) = 350.(1,1)^t$, em que t representa o tempo em anos e v é o valor do imóvel em milhares de reais. Qual será o valor desse imóvel após 3 anos da avaliação?

Capítulo 8

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

TERREMOTO

Terremotos, também chamados de abalos sísmicos, são tremores passageiros que ocorrem na superfície terrestre. Esse fenômeno natural pode ser desencadeado por fatores como atividade vulcânica, falhas geológicas e, principalmente, pelo encontro de diferentes placas tectônicas.

Conforme a teoria da Deriva Continental, a crosta terrestre é uma camada rochosa fragmentada, ou seja, ela é formada por vários blocos, denominados placas litosféricas ou placas tectônicas. Esses gigantescos blocos estão em constante movimento, podendo se afastar (zona de divergência) ou se aproximar (originando uma zona de convergência).

Nas zonas de convergência pode ocorrer o encontro (colisão) entre diferentes placas tectônicas ou a subducção (uma placa mais densa "mergulha" sob uma menos densa). Esses fatos produzem acúmulo de pressão e descarga de energia, que se propaga em forma de ondas sísmicas, caracterizando o terremoto.

O local onde há o encontro entre as placas tectônicas é chamado de hipocentro (no interior da Terra) e o epicentro é o ponto da superfície acima do hipocentro. As consequências podem ser sentidas a quilômetros de distância, dependendo da proximidade da superfície que ocorreu a colisão (hipocentro) e da magnitude do terremoto.

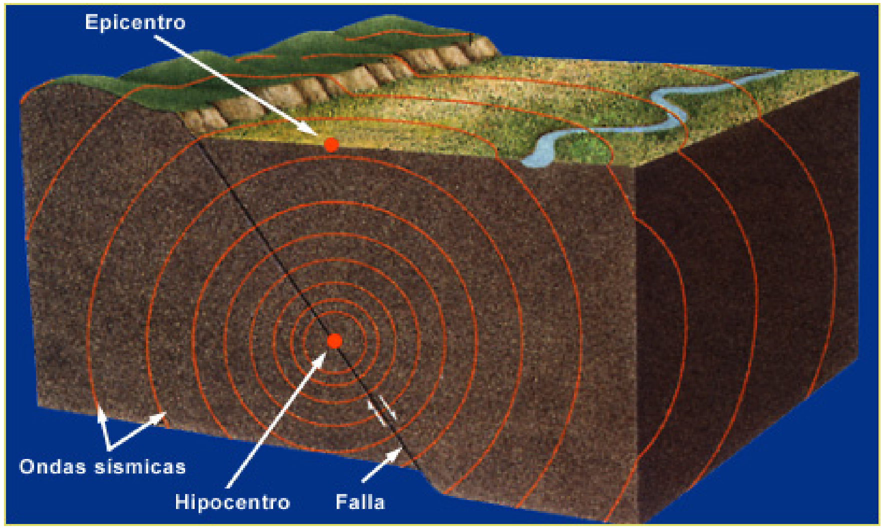


Figura 8.1: Ilustração do acontecimento de um terremoto
ver fontes [15] [18]

A magnitude é a quantidade de energia liberada no foco do terremoto, sendo medida a partir de uma escala denominada Escala Richter. A intensidade é a consequência causada pela ação do sismo, a destruição provocada por esse fenômeno. A escala mais utilizada para se classificar a intensidade é a de Mercalli.

Entre os efeitos de um terremoto de grande magnitude em áreas povoadas estão a destruição da infraestrutura (ruas, estradas, pontes, casas, etc.), além de mortes. Os sismos nos oceanos provocam a formação de ondas gigantes (tsunamis). Essas ondas podem atingir as áreas continentais, gerando grande destruição.

Milhares de terremotos ocorrem diariamente no mundo. No entanto, a maioria apresenta baixa intensidade e tem hipocentro muito profundo, sendo assim, os terremotos são pouco percebidos na superfície terrestre. O Japão, localizado em uma zona muito sísmica, é atingido por centenas de terremotos por dia.

Os lugares mais atingidos por terremotos são os territórios localizados em zonas de convergência de placas, em especial os países situados nos limites das placas tectônicas. Entre as nações que estão nessa situação podemos destacar o Japão, Indonésia, Índia, Filipinas, Papua Nova Guiné, Turquia, Estados Unidos da América, Haiti, Chile, entre outras.

Mas qual a relação entre terremotos e o estudo sobre logarítmos? A resposta é, para medir a intensidade de um terremoto usa-se a escala logarítmica.

Vamos mergulhar nas profundezas desse conteúdo e descobrir como tudo isso funciona!

Este capítulo foi baseado nas referências [2], [4], [5], [6], [7], [8], [10] e [12].

8.1 Logaritmo

Se fosse dado um prêmio a quem conseguir resolver a equação $2^x = 8$, você ganharia o prêmio? E se fosse $2^x = 9$, ainda ganharia o prêmio? Conseguiria, ao menos, verificar entre quais números inteiros se encontra a solução da equação?

Pense um pouquinho, tenho certeza de que você é capaz!

Bom, para solucionar problemas como este, iremos recorrer aos **logaritmos**.

8.1.1 Definição de logaritmo

Considere dois números reais a e b, sendo $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, chamaremos de **logaritmo** de b na base a a um certo número x se, e somente se, a elevado a x é igual a b.

$$log_a b = x \Longleftrightarrow a^x = b$$

Onde:

$b \longrightarrow logaritmando$

$a \longrightarrow base$

$x \longrightarrow logaritmo$

Observação: *Quando um logaritmo não apresentar base é porque o mesmo será de base 10.*

8.1.2 Exemplos:

1 – Determine o valor da incógnita em cada item:

a) $log_2 8 = x \Longleftrightarrow 2^x = 8 \Longleftrightarrow 2^x = 2^3 \Longleftrightarrow x = 3$

b) $log_4 \dfrac{1}{16} = x \Longleftrightarrow 4^x = \dfrac{1}{16} \Longleftrightarrow 4^x = \dfrac{1}{4^2} \Longleftrightarrow 4^x = 4^{-2} \Longleftrightarrow x = -2$

c)$log_a 81 = 4 \Longleftrightarrow a^4 = 81 \Longleftrightarrow a^4 = 3^4 \Longleftrightarrow a = 3$

2 – Dados $x = log_{0,25}\left(\frac{1}{16}\right)$ e $y = log_{\sqrt{3}}81$, calcule $x + y$.

Solução:

Vamos calcular x e y separadamente e no final faremos a adição dos resultados.

Determinação de x:

$$x = log_{0,25}\left(\frac{1}{16}\right) \Longrightarrow (0,25)^x = \frac{1}{16} \Longrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Longrightarrow x = 2$$

Determinação de y:

$$y = log_{\sqrt{3}}81 \Longrightarrow \left(\sqrt{3}\right)^y = 81 \Longrightarrow (3^{\frac{1}{2}})^y = 3^4 \Longrightarrow 3^{\frac{y}{2}} = 3^4 \Longrightarrow \frac{y}{2} = 4 \Longrightarrow y = 8$$

Portanto $x + y = 2 + 8 = 10$.

8.2 Exercícios

1 – Determine o valor de y.

a) $log_4 y = 3$

b) $log_y 36 = 2$

c) $log_9 y = 1$

d) $log_y 125 = 3$

e) $log_2 y = 5$

f) $log_y \frac{1}{256} = -4$

2 – Considerando que $10^{0,301} = 2$ e $10^{0,477} = 3$, calcule:

a) $log12$

b) $log18$

c) $log30$

d) $log54$

CONSEQUÊNCIAS DA DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

$$\boxed{log_a 1 = 0}$$

$$\boxed{log_a a = 1}$$

$$\boxed{log_a a^n = n}$$

$$\boxed{a^{log_a N} = N}$$

$$\boxed{log_a x = log_a y \Rightarrow x = y}$$

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS LOGARITMOS

1ª Propriedade: Em uma mesma base, o logaritmo do produto de dois números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números.

$$log_a(M.N) = log_a M + log_a N$$

2ª Propriedade: Em uma mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à diferença entre os logaritmos desses números.

$$log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_a N$$

3ª Propriedade: Em uma mesma base, o logaritmo de uma potência de base positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base do potência.

$$log_a M^N = N.log_a M$$

8.3 Mudança de base

Lembra da questão dada no começo desse capítulo? Retornemos a ela.

Se fosse dado um prêmio a quem conseguir resolver a equação $2^x = 8$, você ganharia o prêmio? Acredito que sim, pois basta perceber que $2^3 = 8$, ou seja, $x = 3$.

E se fosse $2^x = 9$, ainda ganharia o prêmio?

Perceba que $2^3 = 8$ e que $2^4 = 16$ e para tanto, $2^x = 9$, x deve ser maior que 3 e menor que 4.

Podemos escrever $2^x = 9$ como $x = log_2 9$ utilizando a definição de logaritmo.

$$\begin{aligned} x &= log_2 9 \\ x &= log_2 3^2 \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade 3 de logaritmo, podemos escrever:

$$x = 2.log_2 3$$

Utilizando uma tábua de logarítmos base 10 que se encontra no final dessa seção e realizando uma mudança de base para facilitar a solução, teremos que:

$$\begin{aligned} x &= 2.\frac{log3}{log2} \\ x &= 2.\frac{0,48}{0,30} \\ x &= 2.1,6 \\ x &= 3,2 \end{aligned}$$

A mudança de base em um logaritmo as vezes se faz necessária para facilitar a resolução e, neste caso, resolvemos como foi visto anteriormente. Para isso utilizamos a definição dada a seguir.

$$log_c N = \frac{log_a N}{log_a c} \text{ para } N > 0,\ c > 0,\ a > 0,\ c \neq 1 \text{ e } a \neq 1$$

Desafio: Qual o valor da expressão $log_a b.log_b a$?

Sugestão: Faça uma mudança para base c qualquer.

A seguir teremos a Tábua de Logaritmos na base 10.

x	log x	x	log x	x	log x	x	log x
1	0,0000	26	1,4150	51	1,7076	76	1,8808
2	0,3010	27	1,4314	52	1,7160	77	1,8865
3	0,4771	28	1,4472	53	1,7243	78	1,8921
4	0,6021	29	1,4624	54	1,7324	79	1,8976
5	0,6990	30	1,4771	55	1,7404	80	1,9031
6	0,7782	31	1,4914	56	1,7482	81	1,9085
7	0,8451	32	1,5051	57	1,7559	82	1,9138
8	0,9031	33	1,5185	58	1,7634	83	1,9191
9	0,9542	34	1,5315	59	1,7709	84	1,9243
10	1,0000	35	1,5441	60	1,7782	85	1,9294
11	1,0414	36	1,5563	61	1,7853	86	1,9345
12	1,0792	37	1,5682	62	1,7924	87	1,9395
13	1,1139	38	1,5798	63	1,7993	88	1,9445
14	1,1461	39	1,5911	64	1,8062	89	1,9494
15	1,1761	40	1,6021	65	1,8129	90	1,9542
16	1,2041	41	1,6128	66	1,8195	91	1,9590
17	1,2304	42	1,6232	67	1,8261	92	1,9638
18	1,2553	43	1,6335	68	1,8325	93	1,9685
19	1,2788	44	1,6435	69	1,8388	94	1,9731
20	1,3010	45	1,6532	70	1,8451	95	1,9777
21	1,3222	46	1,6628	71	1,8513	96	1,9823
22	1,3424	47	1,6721	72	1,8573	97	1,9868
23	1,3617	48	1,6812	73	1,8633	98	1,9912
24	1,3802	49	1,6902	74	1,8692	99	1,9956
25	1,3979	50	1,6990	75	1,8751	100	2,0000

Figura 8.2: Tábua de Logaritmos

8.4 Exercícios

1 – Considerando $log2 = 0,3010$, $log3 = 0,4771$ e $log5 = 0,6990$, determine o valor de:

a) $log15$

b) $log30$

c) $log45$

d) $log1,2$

e) $(log1,5)^2$

f) $log\sqrt{0,3}$

2 – Escreva na forma de um único logaritmo.

a) $log_4 5 + log_4 9$

b) $\frac{1}{3}log_3 8 - log_3 10 + 4log_3 2$

3 – Determine x.

a) $log_5[log_4(log_3 x)] = 0$

b) $log_1 log_3[log_4(x+2)] = 0$

Questão resolvida:

4 – Cientistas observaram que determinada colônia de bactérias aumenta sua população em 20% a cada hora. Considerando a taxa de crescimento constante e $log_{1,2}2 = 3,81$, calcule aproximadamente quantas horas serão necessárias para que essa população dobre.

Solução:

Se tivermos k bactérias de início, dentro de x horas teremos $k(1+0,2)^x$ bactérias.

Para sabermos quanto vale x para termos 2k bactérias, basta proceder da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 2k &= k(1+0,2)^x \\ 2 &= 1,2^x \\ x &= \log_{1,2} 2 \\ x &= 3,81 \end{aligned}$$

Sendo assim, precisaremos de 3,81 horas para dobrarmos o número de bactérias, ou seja, 3 horas e 49 minutos. (0,81 hora é igual 49 minutos)

5 – Uma pessoa deposita uma quantia em caderneta de poupança à taxa de 2% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada triplica?

6 – Um cartão de crédito cobra juros de 9% a.m. sobre o saldo devedor. Um usuário desse cartão tem um saldo devedor de R$ 505,00. Em quanto tempo essa dívida chegará a R$ 600,00 se não for paga? (Dados; $log2 = 0,3$; $log3 = 0,48$; $log1,01 = 0,004$; $log1,09 = 0,038$.)

7 – Uma substância radioativa se desintegra a uma taxa de 8% ao ano. Em quantos anos 50 gramas dessa substância se reduzirão a 5 gramas?

8.5 Função Logarítmica

Chama-se função logarítmica a toda função $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = log_a x$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Observação: *O domínio é o conjunto dos números reais positivo pois todo número positivo, $a > 0$, elevado a qualquer expoente resultará em um número positivo.*

8.5.1 Gráfico da função logarítmica

Como $a \neq 1$, vamos analisar os seguintes casos: logaritmos de base $a > 1$ e logaritmos de base $0 < a < 1$.

Observe que o domínio da função logarítmica é $\mathbb{R}_+^*$ e a imagem é $\mathbb{R}$.

1º caso: $a > 1$

Exemplos

a) $f(x) = log_2 x$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2

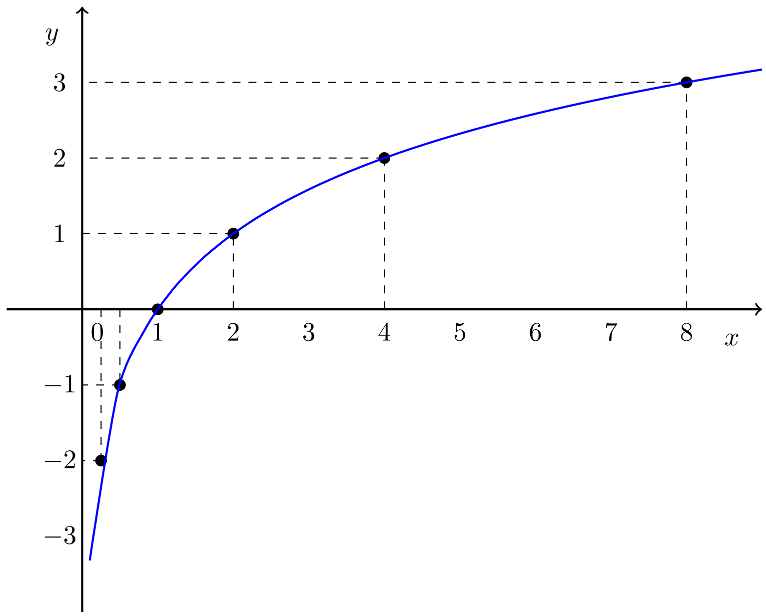


Figura 8.3: Gráfico de $f(x) = log_2 x$

2º caso: $0 < a < 1$

Exemplos

a) $f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	2	1	0	-1	-2	-3

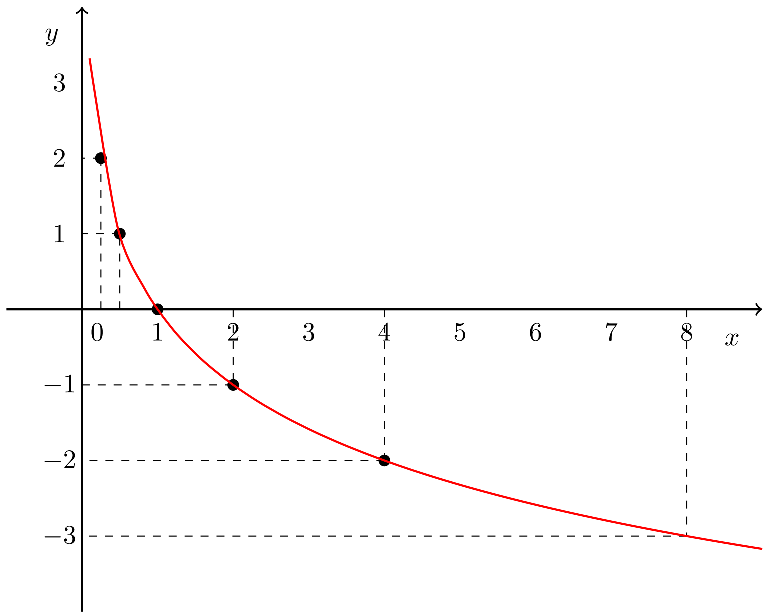


Figura 8.4: Gráfico de $f(x) = log_{\frac{1}{2}}x$

8.6 Exercícios

1 – Construa os gráficos das funções:

a) $f(x) = log_3 x$

b) $f(x) = log_2(x - 1)$

2 – Esboce, num mesmo sistema de eixos, os gráficos das funções $y = log_4 x$ e $y = log_{\frac{1}{4}}x$.

3 – Determine o domínio e o conjunto imagem das funções e esboce os gráficos:

a) $f(x) = log(x - 4)$;

b) $f(x) = log_3(x + 5)$;

c) $f(x) = log_2(1 - x^2)$;

d) $f(x) = log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x)$;

e) $f(x) = log_{\frac{3}{5}}\sqrt{2x - 1}$;

f) $f(x) = log_{\frac{1}{7}}(x - 3) + log_{\frac{1}{7}}(x - 8)$;

Atividade Dinâmica

A atividade proposta nos mostrará como é o comportamento de uma função logarítmica ao variarmos seus coeficientes.

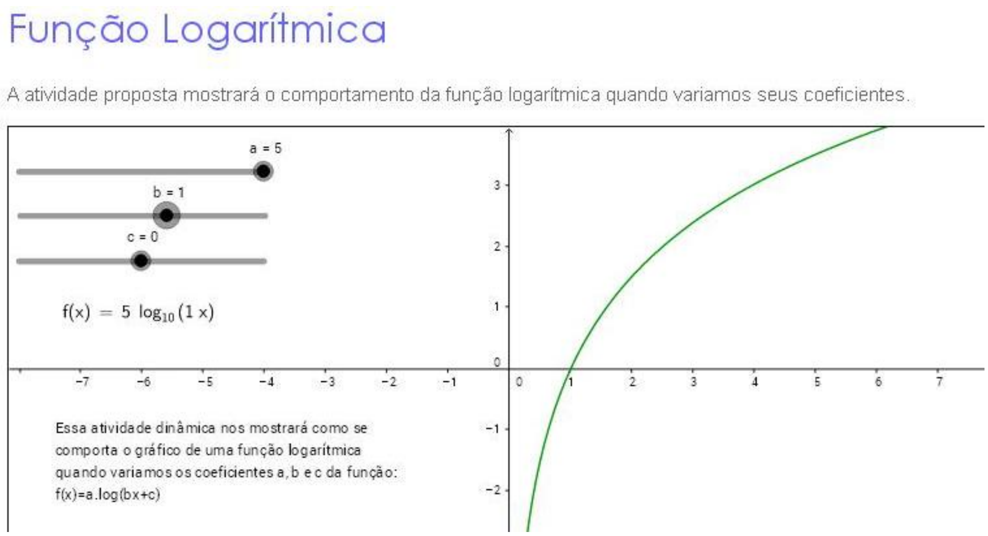


Figura 8.5: Função Logarítmica

fonte – o autor

Clique em: Função Logarítmica ou acesse: https://tube.geogebra.org/m/2068439

Capítulo 9

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A história que vou contar agora ocorreu neste ano. Leciono em minha cidade e tenho turmas que estão no sexto ano do ensino fundamental. Dentre os conteúdos abordados, está o de como calcular o comprimento de uma circunferência. Fiquei pensando... "preciso fazer algo diferente, preciso chamar a atenção desses alunos."Foi aí que pensei, vou sair correndo da sala de aula, vou até à vice diretora e direi que necessito do step do carro dela com extrema urgência e também uma fita métrica. Tinha plena certeza de que ela me arrumaria tudo isso. E assim fui correndo na sala dela, expliquei o que desejava e no mesmo instante ela me jogou a chave do carro e disse: "vai lá e pega o step e a fita métrica está na coordenação. "Ufa, primeira parte concluída."

Bom, peguei a fita métrica, peguei o step do carro da vice diretora e saí correndo no corredor da escola rolando um step igual um louco e entrei na sala de aula correndo, todos os alunos me olharam e vários disseram:

– O que é isso?

Para não perder o bom humor e recuperar o fôlego, eu disse:

– É um step de carro.

Toda a sala num silêncio absoluto e eu disse:

– É da vice diretora e vou sujá-lo todo de giz.

Os alunos não estavam entendendo nada e foi aí que exclamei aos alunos:

– A vice diretora, quer saber quantas voltas o pneu do carro dela, que é idêntico a esse, dá ao ir da escola até sua casa!

Os alunos ficaram olhando, e subitamente um deles começou a me explicar um procedimento que poderia ser utilizado.

O intuito de tudo isso era mostrar aos alunos que o step lembrava uma circunferênica, que existia ali um lugar que estaria à mesma distância de qualquer parte da borda do pneu, mostrar o que definiríamos como raio, diâmetro e como calcular o comprimento do step.

Quando perguntei aos alunos como poderia calcular o comprimento do pneu, alguns disseram para utilizar uma fita métrica, e foi nesse momento que tirei uma do bolso e pedi para um aluno medir para mim. O mesmo não conseguiu pois a fita métrica que eu tinha comigo não dava para dar uma volta completa no pneu mas disse como poderia ser feito.

Com esta abordagem, o conteúdo destinado naquele momento fluiu muito bem e os alunos daquele ano começaram a entender um pouquinho sobre circunferência que é algo que também veremos aqui. Veremos também as razões trigonômetricas seno, cosseno e tangente na circunferência e seus respectivos comportamentos gráficos.

Bom, acho que tudo isso dará um ótimo estudo de matemática! Vamos aprender juntos?

Este capítulo foi baseado nas referências [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [12] e [13].

9.1 Trigonometria na circunferência

O início dos estudos da trigonometria está relacionado às razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Neste capítulo veremos o estudo da trigonometria e suas razões seno, cosseno e tangente representados em uma circunferência.

9.1.1 Circunferência

Dado um ponto O de um plano, vamos marcar nesse plano os pontos que estão em uma mesma distância r de O.

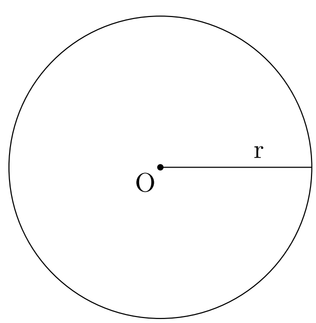


Figura 9.1: Circunferência

9.1.2 Arcos e ângulos de circunferência

Definimos arcos de circunferência como sendo partes de uma circunferência. Dado dois pontos A e B contidos na circunferência, é possível definirmos dois arcos de circunferência com o mesmo nome. Veja:

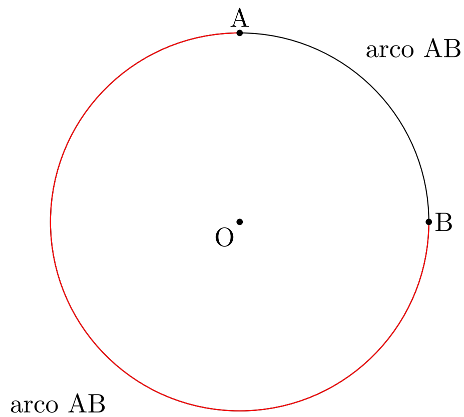


Figura 9.2: Arcos da Circunferência

Os pontos A e B contidos na circunferência dão origem a dois arcos de circunferência. Para distinguirmos qual dos arcos estamos nos referindo, podemos inserir um ponto entre as extremidades do arco para tal distinção e assim escrever:

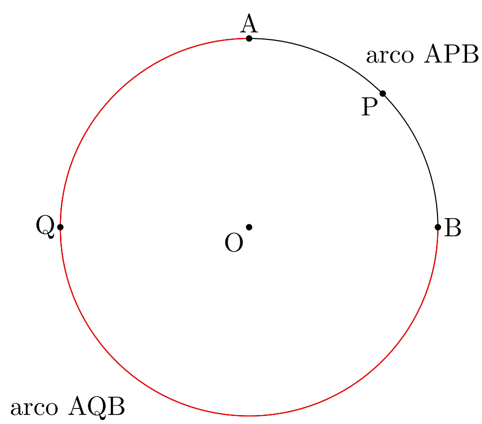


Figura 9.3: Arcos da Circunferência

Medidas de arcos e ângulos

Medir um arco (ou um ângulo) é compará-lo com outro, sendo este unitário.

O grau, unidade padrão mais utilizada (símbolo ^{o}), é o arco unitário que corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência na qual se encontra o arco a ser medido.

O radiano (símbolo rad) é o arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência na qual se encontra o arco a ser medido.

Para ilustrar a noção de radiano, propomos uma experiência que poderá contribuir no entendimento da definição do termo e na compreensão dos conceitos.

9.2 Experiência

Tome um objeto circular qualquer, um pedaço de barbante, uma tesoura e uma canetinha preta. Primeiro, contorne o objeto com o barbante e em seguida corte-o de modo que o seu comprimento corresponda a uma volta completa no objeto circular e chame as extremidades de A e H.

Pela extremidade A, estenda o barbante como um diâmetro sobre o objeto circular, obtendo o ponto C.

Dobre ao meio o pedaço utilizado como diâmetro e você obterá o raio do objeto circular, localizando o ponto B. Teremos então; dois raios marcados ($\overline{AB}$ e $\overline{BC}$) no barbante. Se continuarmos a fazer marcas sucessivas com cada uma distando da anterior a medida do raio, encontraremos os pontos D, E, F e G.

Sendo assim; até o ponto G, inclusive, teremos feito seis marcas e sobrará um pedaço do barbante ($\overline{GH}$), que corresponderá a aproximadamente 28% do raio. ***Observação:*** *Comprove esses 28%.*

Esse fato significa que o raio "cabe"aproximadamente 6,28 vezes na respectiva circunferência.

De volta ao objeto circular, contorne-o novamente com o barbante para obter a marcação dos pontos sob o mesmo.

Considerando agora, um par qualquer de pontos consecutivos (exceto A e G) e unindo-os ao centro, teremos um arco formado por estes pontos de medida igual a 1 rad, bem como um ângulo central de medida também igual a 1 rad.

Qualquer um dos arcos AB, BC, CD, DE, EF ou FG que seja "retificado"fornecerá o raio da circunferência, uma vez que cada um deles mede 1 rad.

Com uma pequena aproximação, podemos ver que o raio "cabe"6,283184... vezes na circunferência, esse número irracional é conhecido como 2π.

Assim, para se determinar o comprimento de uma circunferência, basta que seu raio seja conhecido:

$$C = 2\pi.r$$

Fica evidente e claro que numa volta completa há 2π rad.

9.2.1 Exemplos

1 – O comprimento de uma circunferência de raio 10 cm é, aproximadamente, $C = 2\pi.10 = 2.3,14.10 = 62,80$ cm.

2 – O comprimento de uma circunferência de diâmetro 20 cm é, aproximadamente, $C = 2\pi.10 = 2.3,14.10 = 62,80$ cm. ***Observação:*** *A questão forneceu o diâmetro, e na solução utilizamos o raio.*

9.2.2 Relação entre grau e radiano

360^o equivale a 2π rad e sendo assim, para a transformação de graus em radianos ou radianos para graus, basta utilizarmos de uma regra de três simples.

Exemplo:

Qual é a correspondênca de 30^o em radianos?

Faremos uma relação entre as grandezas grau e radianos.

grau	radiano
180	π
30	x

Efetuando uma regra de três, teremos que:

$$\begin{aligned} 180x &= 30\pi \\ x &= \frac{30\pi}{180} \\ x &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Portanto, 30^o corresponde a $\frac{\pi}{6}$ rad.

Proponho ao leitor fazer as transformações de graus para radianos dos ângulos: 45^o, 60^o, 90^o, 135^o, 150^o, 210^o, 240^o, 270^o, 300^o e 330^o.

9.2.3 Comprimento de um arco

Para determinarmos o comprimento de um arco, podemos pensar do seguinte modo:

comprimento do arco	medida do arco
r	1 rad
l	α rad

Efetuando uma regra de três, teremos que:

$$l = \alpha . r$$

Observação: *Lembre-se que, o ângulo α é sempre em radiano*

Exemplos

1 – Um arco de $\frac{\pi}{3}$ rad, tomado sobre uma circunferência de 15 cm de raio, mede $l = \frac{\pi}{3}.15 = 5\pi = 15,7$ cm.

2 – Se uma circunferência de 3 m de raio contém um arco de 4,5 m de comprimento, tanto o ângulo central correspondente como o arco medem: $\alpha = \frac{4,5}{3} = 1,5$ rad.

9.3 Exercícios

1 – Seja 20 cm o raio de uma circunferência. Calcule seu comprimento.

2 – Transcreva a medida em graus:

a) 60^o

b) 15^o

c) 225^o

d) 240^o

3 – Calcule o comprimento de um arco AB definido em uma circunferência de diâmetro 10 cm por um ângulo central AÔB de 2 rad.

Atividade Dinâmica

A atividade dinâmica a seguir nos mostrará uma situação bem interessante.

Você já viu o funcionamento de um pivot central? O funcionamento de tal máquina é feito com todas as torres em questão com a mesma velocidade, quanto mais próximo as torres do pivot estiver do centro do pivot, mais vezes ela irá parar para não desalinhar o pivot. Sugiro que pesquise sobre o funcionamento do pivot central para você ver o quanto é interessante, pois aqui foi deixado apenas uma pequena ideia do que ele é. Por fim, faremos uma demonstração como se fosse um pivot central onde as torres não irão parar de modo algum e sendo assim as velocidades serão menores quanto mais próximo estiver do centro do pivot. O intuito desta atividade dinâmica é a tentativa de esclarecer o conceito de comprimento de uma circunferência. Vamos lá! É divertido!

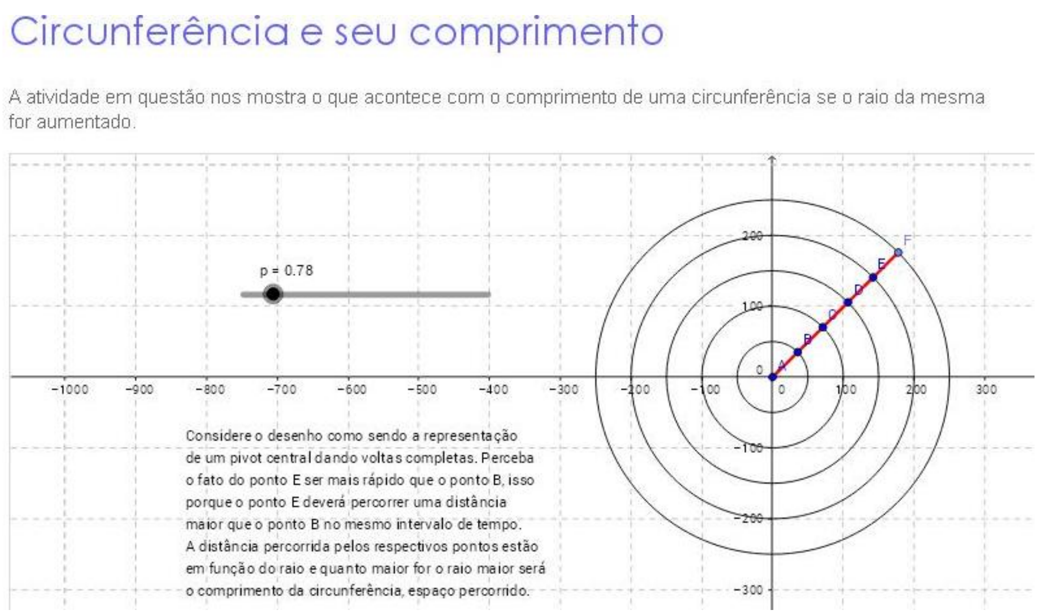


Figura 9.4: Comprimento de uma circunferência

fonte – o autor

Clique em: Comprimento de uma circunferência ou acesse: https://tube.geogebra.org/m/1951037

9.4 Problemas

1 – Em uma competição de ciclismo, cada atleta deve percorrer, em 2 horas e 30 minutos, 78,5 km em uma pista circular de raio igual a 500 m.

a) Quantas voltas na pista serão necessárias para que um ciclista percorra os 78,5 km?

b) Qual é o tempo médio máximo em que um atleta deve realizar cada volta para cumprir a prova?

2 – Um relógio de ponteiros ficou parado por 2 horas e 45 minutos. Em relação ao ponteiro que indica as horas, de quantos graus é a diferença entre sua posição no momento em que o relógio parou e no horário correto?

3 – A extremidade de um pêndulo de 24 cm de comprimento descreve um arco de 18,84 cm. Qual é o ângulo formado pelas posições extremas alcançadas por esse pêndulo durante o movimento?

4 – Um dos sistemas de irrigação por aspersão mais usados é o pivô central, que consiste em uma tubulação suspensa acima da área agrícola por algumas torres metálicas que possuem rodas. A base do sistema lembra uma pirâmide metálica e, em torno dela, a tubulação, sustentada pelas torres, realiza um movimento de rotação. A distância entre as torres varia entre 24 metros e 76 metros, e o raio do pivô, entre 200 metros e 800 metros. Suponha um sistema de pivô central com 800 metros de raio, no qual a distância entre as torres que sustentam a tubulação é 40 metros.

Figura 9.5: Pivô Central

ver fonte [19]

a) Quantas torres sutentam a tubulação desse pivô central?

b) Qual é a distância percorrida pela torre que fica na extremidade da tubulação ao realizar uma volta completa?

c) Qual é a diferença entre a distância percorrida pela torre que fica na extremidade da tubulação e a distância percorrida pela torre imediatamente anterior a ela, ao realizarem uma volta completa?

9.5 Circunferência trigonométrica

A circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico é definido considerando uma circunferência de centro O e raio unitário $r = 1$, fixa num sistema de eixos cartesiano de modo que O coincida com a origem do sistema de eixos coordenados.

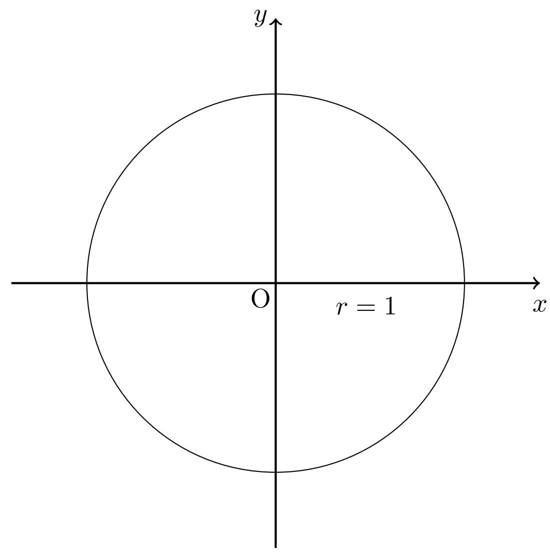


Figura 9.6: Circunferência trigonométrica

Na circunferência trigonométrica, os arcos possuem origem no ponto $A = (1, 0)$ onde estabelecemos o sentido positivo como sendo o anti-horário e sentido negativo para horário. O ciclo trigonométrico é dividido em quatro quadrantes. Veja:

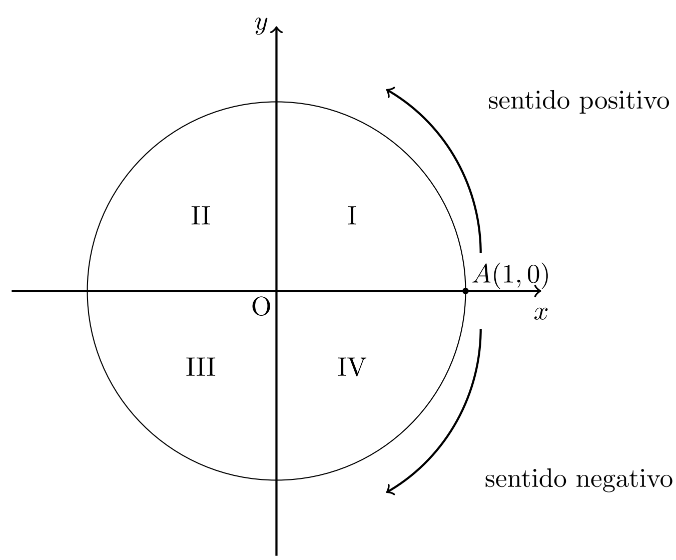


Figura 9.7: Circunferência trigonométrica

Iniciando na origem, alguns dos principais arcos trigonométricos estão denotados abaixo por A, B, C e D e seus respectivos valores em graus ou radianos.

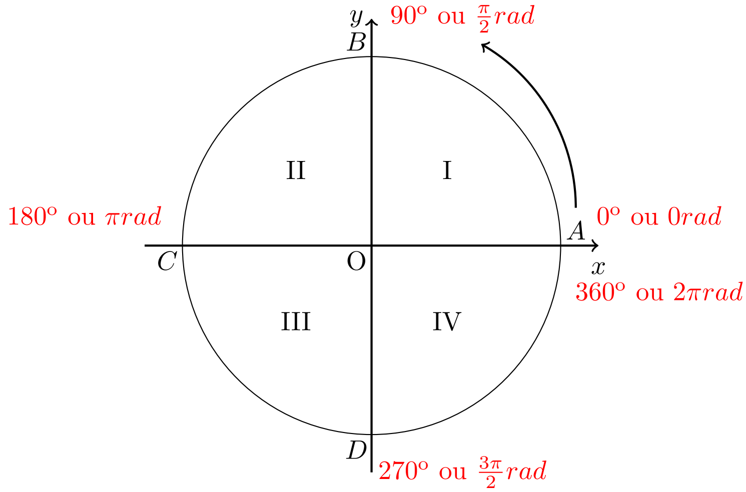


Figura 9.8: Ciclo trigonométrico

Arcos côngruos

Possuem a mesma extremidade e se diferem apenas pelo número de voltas inteiras.

Numa circunferência trigonométrica podemos representar arcos com medidas maiores que uma volta e assim sendo, podemos fazer uma correspondência com algum arco na primeira volta.

Exemplos:

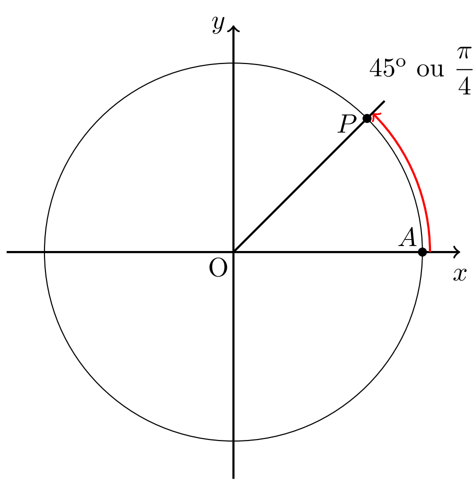


Figura 9.9: 45º ou $\frac{\pi}{4}$ rad

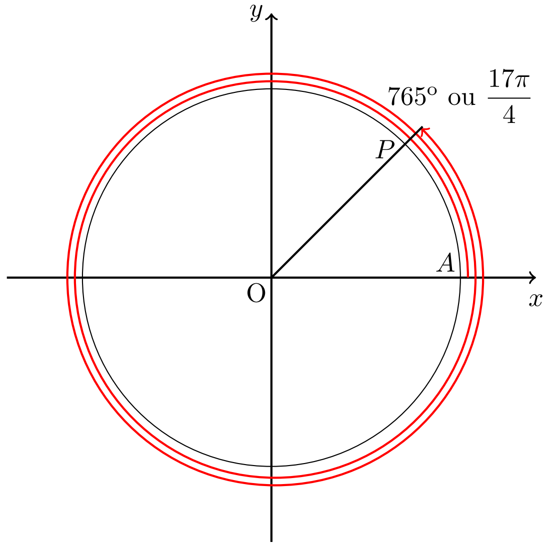


Figura 9.10: Duas voltas completas mais 45^o ou $\dfrac{\pi}{4}$ rad

Observe que; nas circunferências trigonométricas acima, os arcos de 45^o ou $\dfrac{\pi}{4}$ e 765^o ou $\dfrac{17\pi}{4}$ possuem as mesmas extremidades P e sendo assim dizemos que são arcos côngruos. Quando a medida α for denominado por **1ª determinação positiva**, isso se deve ao fato de que $0^o \leq \alpha < 360^o$ ($0rad \leq \alpha < 2\pi rad$), ou seja, ainda na primeira volta.

9.6 Seno, cosseno e tangente

Mas... como representaremos o seno e cosseno na circunferência trigonométrica?

Vamos descobrir com as ilustrações abaixo!

Perceba que,

PQ é paralelo ao eixo dos senos

$$sen\alpha = \frac{cat.op.}{hip.} = \frac{PQ}{PO} = \frac{PQ}{1} = PQ$$

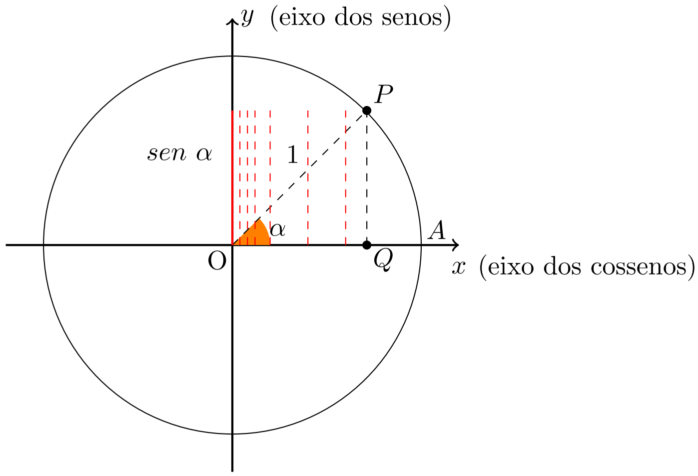


Figura 9.11: Representação do seno

As retas vermelhas pontilhadas representam o deslocamento do segmento PQ em direção ao **eixo dos senos**. Logo, o *sen* α é o comprimento do segmento de reta vermelha sobre o eixo dos senos.

Representaremos agora o cosseno.

Perceba que,

PR é paralelo ao eixo dos cossenos

$$cos\alpha = \frac{cat.adj.}{hip.} = \frac{PR}{PO} = \frac{PR}{1} = PR$$

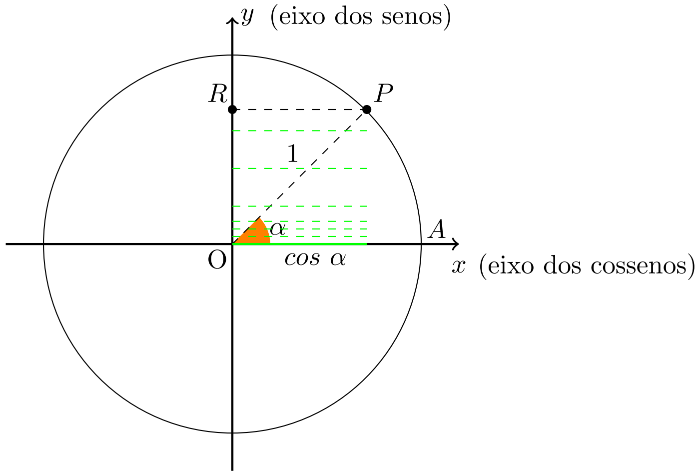


Figura 9.12: Representação do cosseno

As retas verdes pontilhadas representam o deslocamento do segmento PR em direção ao **eixo dos cossenos**. Logo, o $cos\ \alpha$ é o comprimento do segmento de reta verde sobre o eixo dos cossenos.

A determinação do seno e cosseno de ângulo que não esteja no primeiro quadrante é feita de modo semelhante.

Vejamos agora onde se localiza a tangente de um ângulo α.

AT é paralelo ao eixo dos senos

$$tg\alpha = \frac{cat.op.}{cat.adj.} = \frac{AT}{AO} = \frac{AT}{1} = AT$$

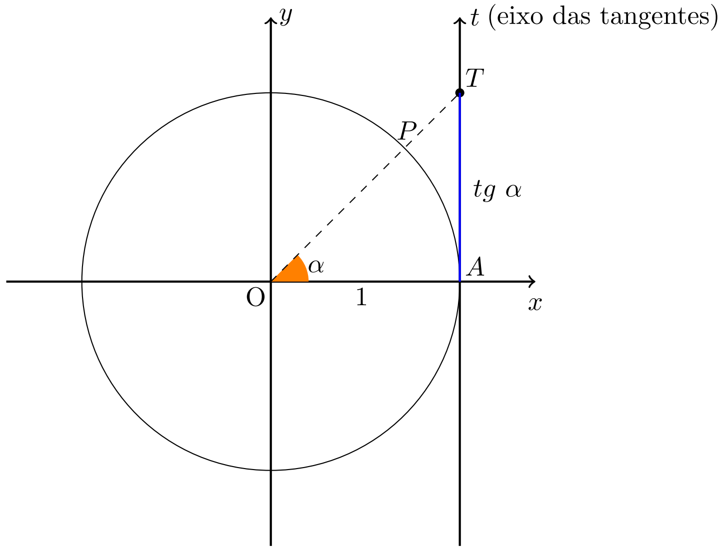


Figura 9.13: Representação da tangente

9.7 Estudo da função seno

Tomemos um número real x, com imagem P no ciclo trigonométrico.

Denominamos função seno a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número real $OP_1 = senx$, isto é, $f(x) = senx$.

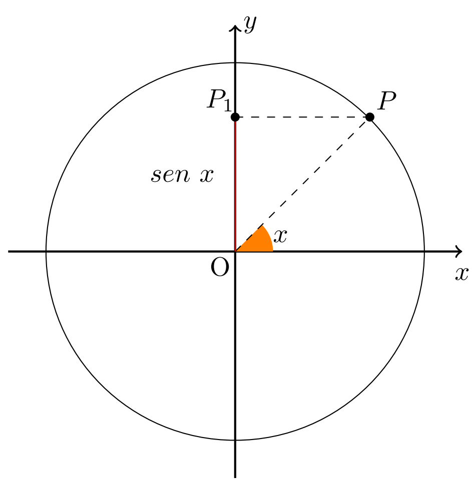


Figura 9.14: $senx$

O domínio e o contradomínio de $y = senx$ são iguais a $\mathbb{R}$, mas o conjunto imagem é dado por $Im = \{y \in \mathbb{R} | -1 \leq y \leq 1\}$, pois o raio do ciclo é unitário: $-1 \leq senx \leq 1$.

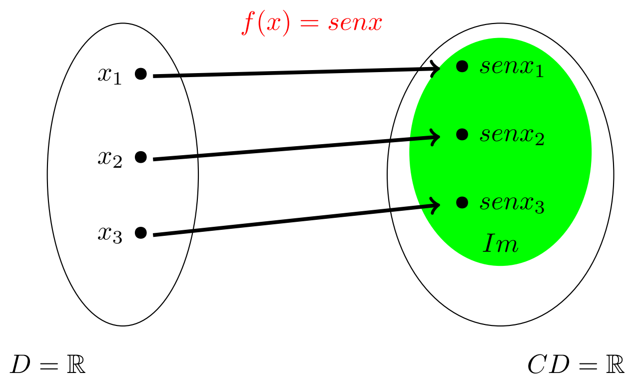


Figura 9.15: $f(x) = senx$

9.7.1 Sinais e crescimento da função seno

O sinal da função $y = senx$ é positivo quando x percorre o 1º e 2º quadrante, e é negativo quando x percorre o 3º e 4º quadrante. A função se anula para $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Quanto ao crescimento da função $y = senx$, devemos observar que, no 1º quadrante, os valores de $senx$ aumentam de 0 a 1, então dizemos que neste quadrante a função é crescente. No 2º e 3º quadrantes, os valores de $senx$ diminuem de 1 a -1, então dizemos que nestes quadrantes a função é decrescente e no 4º quadrante, os valores de $senx$ aumentam de -1 a 0, então dizemos que neste quadrante a função é crescente.

Se tivermos um x maior que 2π, teremos mais de uma volta no ciclo trigonométrico e sendo assim basta analisar em qual quadrante está esse x para saber seu sinal e crescimento.

9.7.2 Gráfico do seno

Fazendo um diagrama com abscissas sendo o x e ordenadas sendo o $senx$, podemos esboçar o seguinte gráfico, denominado ***senóide***, que nos indica como varia a função $f(x) = senx$.

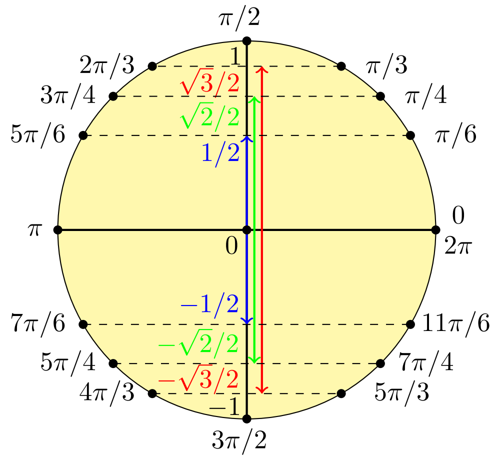


Figura 9.16: Alguns valores de seno no ciclo

x	$f(x) = senx$	x	$f(x) = senx$
0	0	π	0
$\pi/6$	$1/2$	$7\pi/6$	$-1/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	1	$3\pi/2$	-1
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
$5\pi/6$	$1/2$	$11\pi/6$	$-1/2$

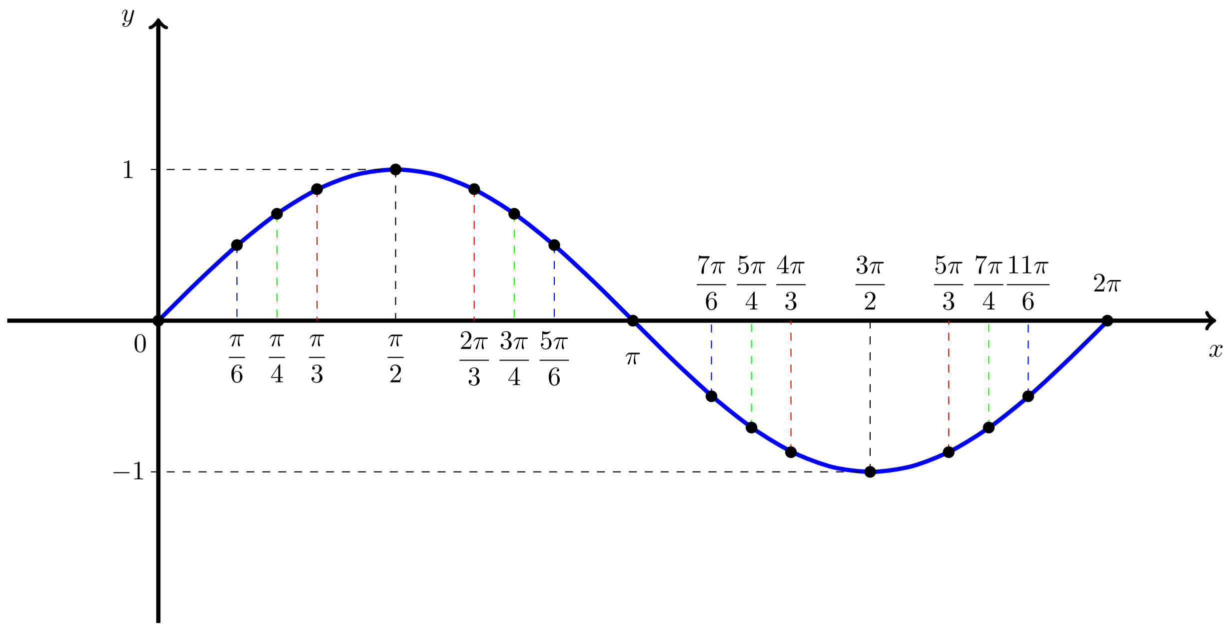


Figura 9.17: senóide

O domínio da função acima é: $D(f) = \mathbb{R}$.

A imagem da função acima é: $Im(f) = [-1, 1]$

Atividade Dinâmica

Você com certeza já deve ter visto uma mola em ação!

A atividade dinâmica a seguir mostrará o comportamento de uma função seno onde serão variados os seus coeficientes. Dessa forma, a mola poderá ser comprimida, esticada, deslocada para cima ou para baixo, o corpo poderá acompanhar a mola e tudo mais. Para entender melhor o que quero dizer, clique abaixo ou acesse o endereço eletrônico dado.

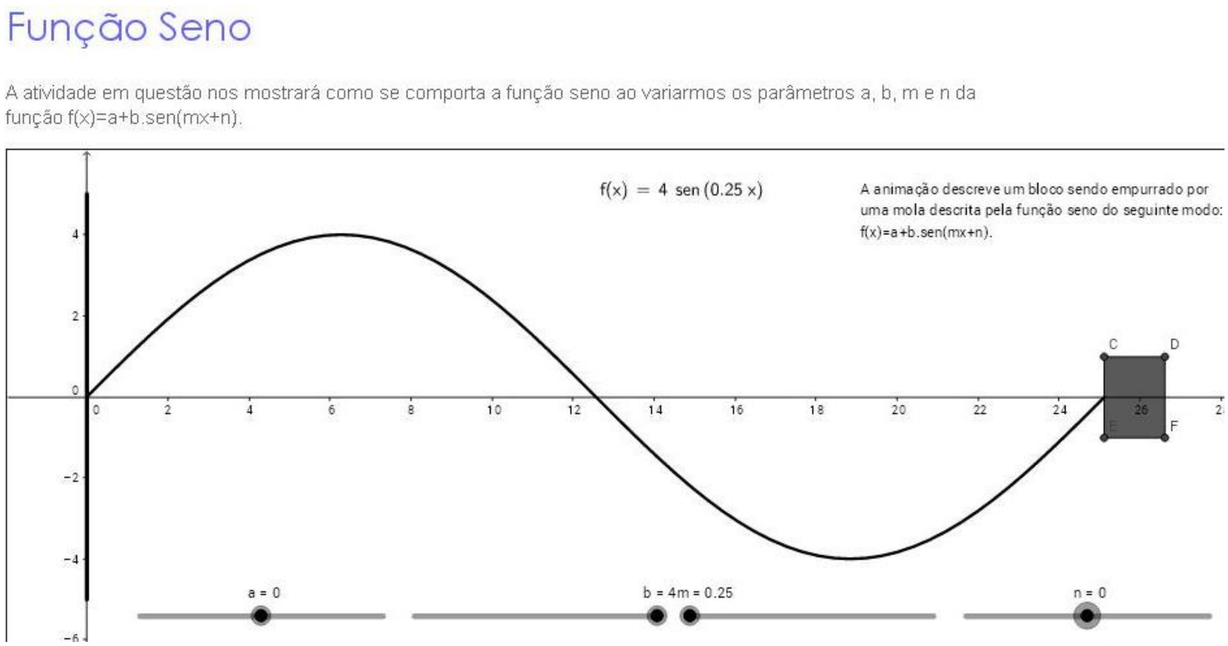


Figura 9.18: Função Seno

fonte – o autor

Clique em: Função Seno ou acesse: https://tube.geogebra.org/m/1961079

9.8 Exercícios

Observação: Informe o domínio e a imagem de todas as funções das questões abaixo.

1 – Antes dessa seção foi feito o gráfico de $f(x) = senx$, refaça-o novamente. Faça o estudo gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = sen(x)$

b) $f(x) = sen(2x)$

c) $f(x) = sen(3x)$

2 – Faça o estudo do gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = sen(-x)$

b) $f(x) = sen(-2x)$

c) $f(x) = sen(-3x)$

3 – Faça o estudo do gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = sen(\frac{x}{2})$

b) $f(x) = sen(\frac{x}{3})$

c) $f(x) = sen(\frac{x}{4})$

4 – Faça o estudo do gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = 2sen(x)$

b) $f(x) = 3sen(x)$

c) $f(x) = 4sen(x)$

5 – Faça o estudo do gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = sen(x + \pi)$

b) $f(x) = sen(2x + \frac{\pi}{2})$

c) $f(x) = sen(3x + \pi)$

6 – Faça o estudo do gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = 1 + sen(x)$

b) $f(x) = 1 + 2sen(x)$

c) $f(x) = 1 + 2sen(3x)$

7 – Esboce o gráfico da função dada abaixo:

$$f(x) = 2 + 3\left(sen\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

9.9 Estudo da função cosseno

Tomemos um número real x, com imagem P no ciclo trigonométrico.

Denominamos função cosseno a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número real $OP_2 = cosx$, isto é, $f(x) = cosx$.

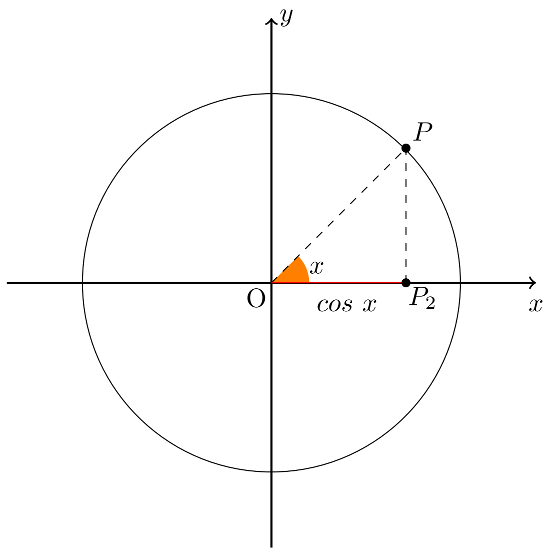


Figura 9.19: $cosx$

O domínio e o contradomínio de $y = cosx$ são iguais a $\mathbb{R}$, mas o conjunto imagem é dado por $Im = \{y \in \mathbb{R} | -1 \leq y \leq 1\}$, pois o raio do ciclo é unitário: $-1 \leq cosx \leq 1$.

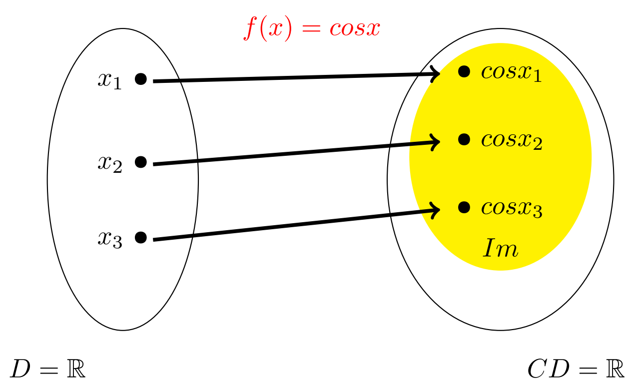


Figura 9.20: $f(x) = cosx$

9.9.1 Sinais e crescimento da função cosseno

O sinal da função $y = cosx$ é positivo quando x percorre o 1º e 4º quadrantes, e é negativo quando x percorre o 2º e 3º quadrantes. A função se anula para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Quanto ao crescimento da função $y = cosx$, devemos observar que, no 1º e 2º quadrantes, os valores de $cosx$ diminuem de 1 a -1, então dizemos que nestes quadrantes a função é decrescente. No 3º e 4º quadrantes, os valores de $cosx$ aumentam de -1 a 1, então dizemos que nestes quadrantes a função é crescente.

Se tivermos um x maior que 2π, teremos mais de uma volta no ciclo trigonométrico e sendo assim basta analisar em qual quadrante está esse x para saber seu sinal e crescimento.

9.9.2 Gráfico do cosseno

Fazendo um diagrama com x em abscissas e $cosx$ em ordenadas podemos construir o seguinte gráfico, denominado ***cossenóide***, que nos indica como varia a função $f(x) = cosx$.

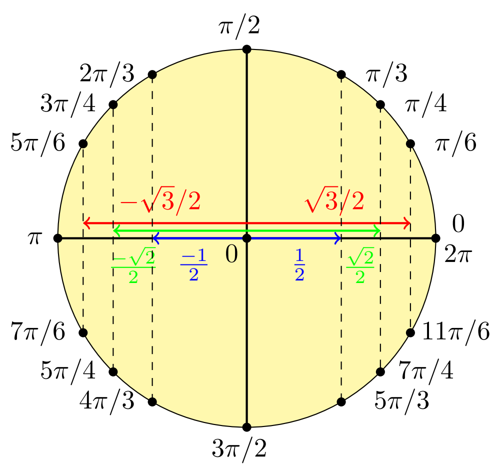


Figura 9.21: Alguns valores do cosseno no ciclo

x	$f(x) = cosx$	x	$f(x) = cosx$
0	1	π	-1
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$7\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$1/2$	$4\pi/3$	$-1/2$
$\pi/2$	0	$3\pi/2$	0
$2\pi/3$	$-1/2$	$5\pi/3$	$1/2$
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$7\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$11\pi/6$	$\sqrt{3}/2$

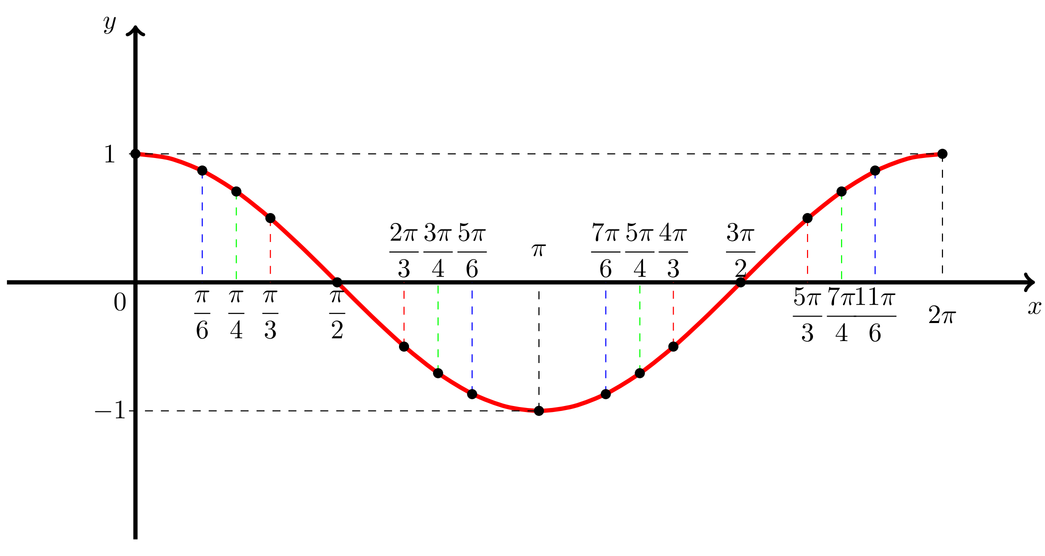


Figura 9.22: cossenóide

O domínio da função acima é: $D(f) = \mathbb{R}$.

A imagem da função acima é: $Im(f) = [-1, 1]$

9.10 Exercícios

Observação: Informe o domínio e a imagem de todas as funções das questões abaixo.

1 – Antes dessa seção foi feito o gráfico de $f(x) = cosx$, refaça-o novamente. Faça o estudo gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = cos(x)$

b) $f(x) = cos(2x)$

c) $f(x) = cos(3x)$

2 – Faça o estudo do gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = cos(-x)$

b) $f(x) = cos(-2x)$

c) $f(x) = cos(-3x)$

3 – Faça o estudo do gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = cos(\frac{x}{2})$

b) $f(x) = cos(\frac{x}{3})$

c) $f(x) = cos(\frac{x}{4})$

4 – Faça o estudo do gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = 2cos(x)$

b) $f(x) = 3cos(x)$

c) $f(x) = 4cos(x)$

5 – Faça o estudo do gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = cos(x + \pi)$

b) $f(x) = cos(2x + \frac{\pi}{2})$

c) $f(x) = cos(3x + \pi)$

6 – Faça o estudo do gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = 1 + cos(x)$

b) $f(x) = 1 + 2cos(x)$

c) $f(x) = 1 + 2cos(3x)$

7 – Esboce o gráfico da função dada abaixo:

$$f(x) = 2 + 3\left(cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

9.11 Estudo da função tangente

Dado um número real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua intersecção como eixo das tangentes. Denominamos tangente de x (e indicamos tgx) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.

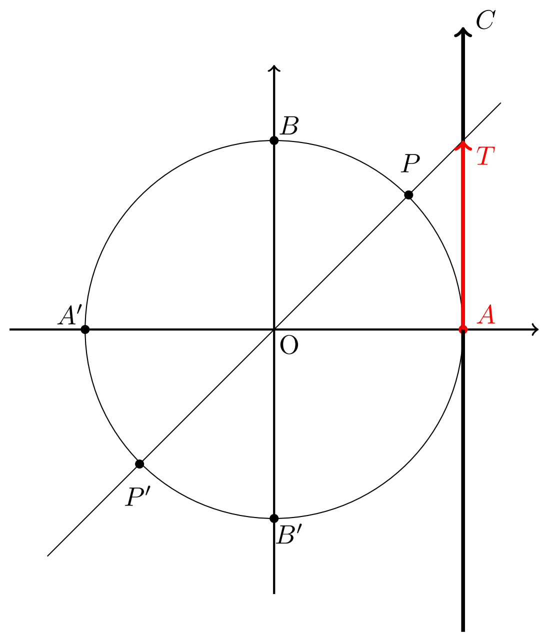


Figura 9.23: tgx

Denominamos *função tangente* a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real $AT = tgx$, isto é, $f(x) = tgx$.

Note que, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, P está em B ou B' e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto T, a tgx não é definida.

9.11.1 Sinais e crescimento da função tangente

Na função tangente temos que:

▶ $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

▶ $Im = \mathbb{R}$

Quanto aos sinais e ao crescimento da função tangente, podemos escrever:

- ▶ $f(x) = tgx$ assume valores positivos nos quadrantes ímpares;
- ▶ $f(x) = tgx$ assume valores negativos nos quadrantes pares;
- ▶ $f(x) = tgx$ se anula para $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- ▶ $f(x) = tgx$ é sempre crescente.

9.11.2 Gráfico da tangente

Fazendo um diagrama com x em abscissas e tgx em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado ***tangentóide***, que nos indica a variação da função $f(x) = tgx$.

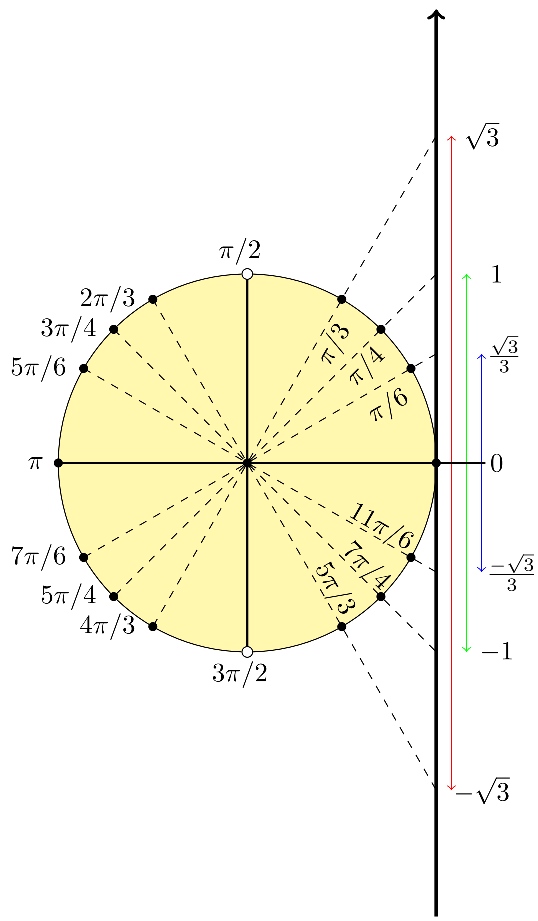


Figura 9.24: Alguns valores da tangente no ciclo

Tabela com alguns valores da tangente

x	$f(x) = tgx$	x	$f(x) = tgx$
0	0	π	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/3$	$7\pi/6$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	1	$5\pi/4$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}$	$4\pi/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	$\nexists$	$3\pi/2$	$\nexists$
$2\pi/3$	$-\sqrt{3}$	$5\pi/3$	$-\sqrt{3}$
$3\pi/4$	-1	$7\pi/4$	-1
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/3$	$11\pi/6$	$-\sqrt{3}/3$

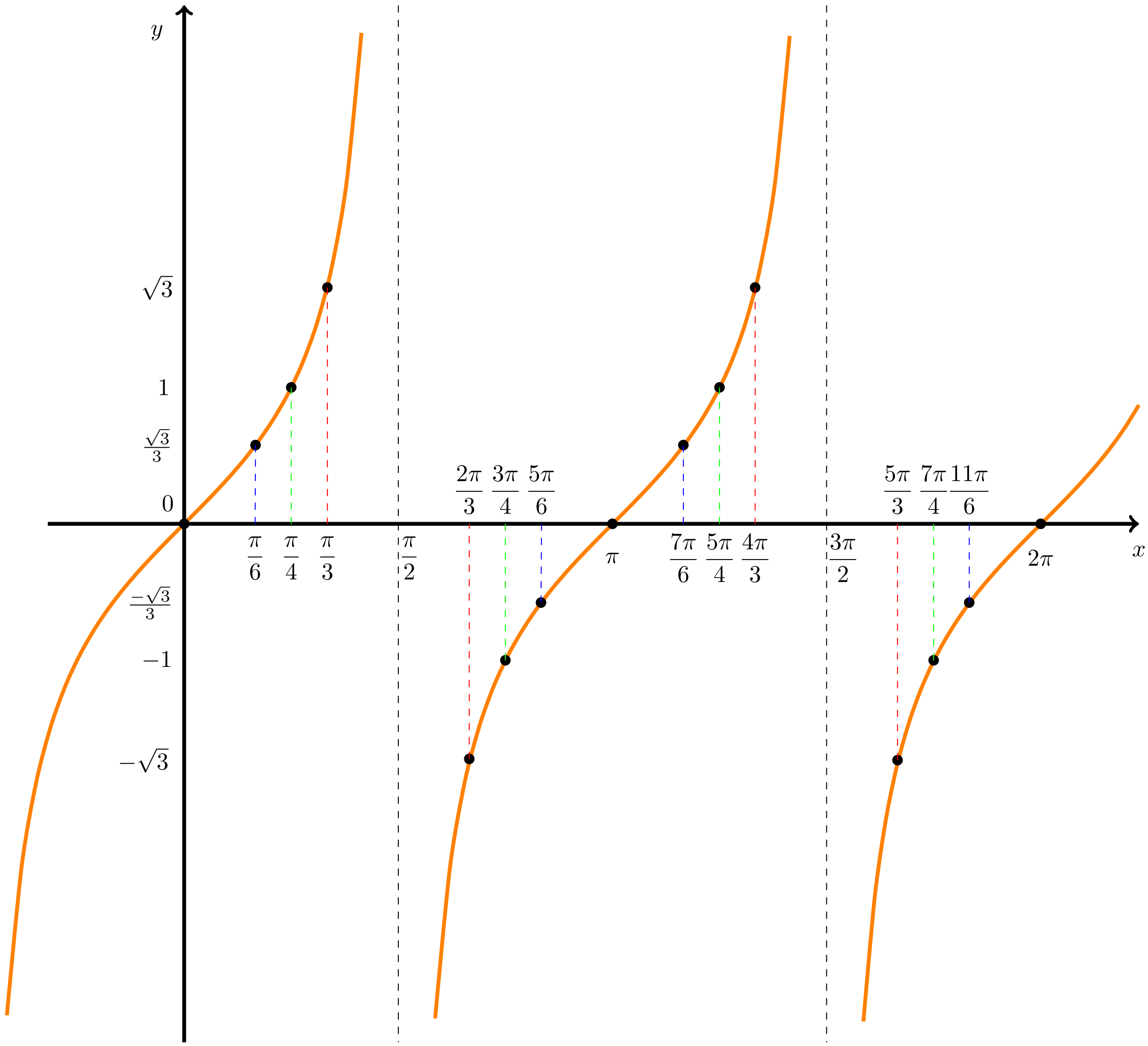


Figura 9.25: tangentóide

O domínio da função acima é: $D(f) = \{x \in \mathbb{R}/x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

A imagem da função acima é: $Im(f) = \mathbb{R}$

9.12 Atividade Dinâmica

Mais a frente, você encontra uma tabela com os respctivos valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos entre 0º e 360º. Nesse ponto do trabalho você encontrará uma atividade dinâmica que mostrará os valores de seno, cosseno e tangente desses valores de um modo interativo. É muito divertido!

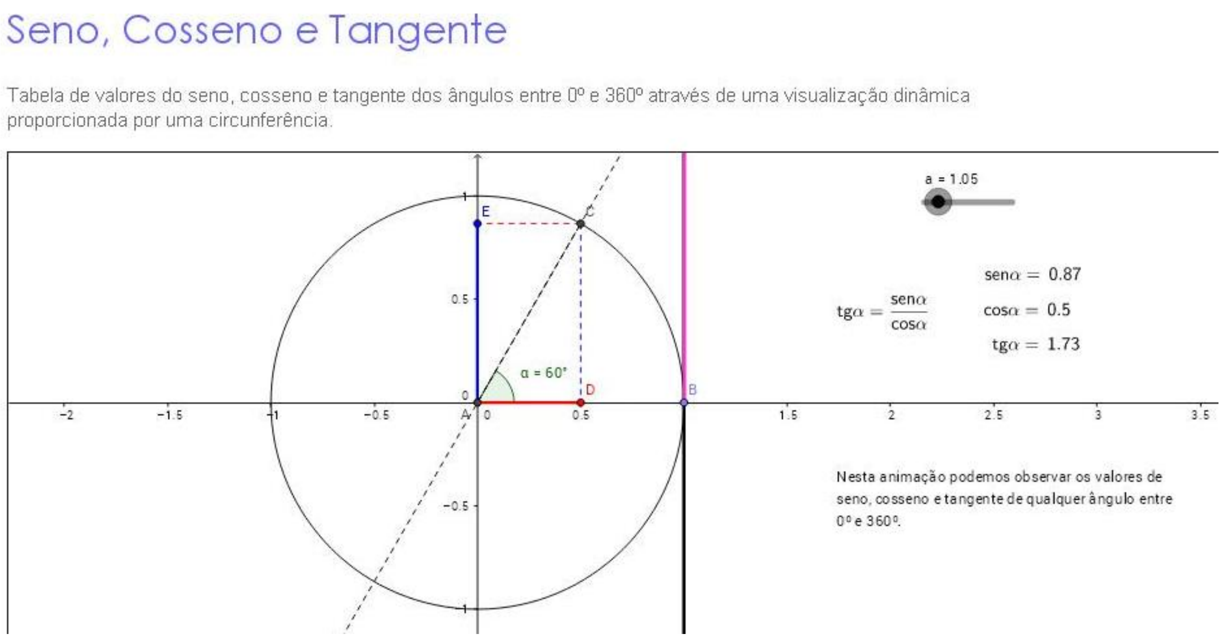


Figura 9.26: Valores de seno, cosseno e tangente

fonte – o autor

Clique em: Valores de seno, cosseno e tangente ou acesse:https://www.geogebra.org/m/1951137

9.13 Tabela Trigonométrica

ângulo	seno	cosseno	tangente	ângulo	seno	cosseno	tangente
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2709
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	0,1908	5,1446
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,0698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000	90	1,0000	0,0000	-

9.14 Exercícios

Observação: Informe o domínio e a imagem de todas as funções das questões abaixo.

1 – Antes dessa seção foi feito o gráfico de $f(x) = tgx$, refaça-o novamente. Faça o estudo gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = tg(x)$

b) $f(x) = tg(2x)$

c) $f(x) = tg(3x)$

2 – Faça o estudo do gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = tg(-x)$

b) $f(x) = tg(-2x)$

c) $f(x) = tg(-3x)$

3 – Faça o estudo do gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = tg(\frac{x}{2})$

b) $f(x) = tg(\frac{x}{3})$

c) $f(x) = tg(\frac{x}{4})$

4 – Faça o estudo do gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = 2tg(x)$

b) $f(x) = 3tg(x)$

c) $f(x) = 4tg(x)$

5 – Faça o estudo do gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = tg(x + \pi)$

b) $f(x) = tg(2x + \frac{\pi}{2})$

c) $f(x) = tg(3x + \pi)$

6 – Faça o estudo do gráfico das funções dadas abaixo e observe as mudanças de comportamento.

a) $f(x) = 1 + tg(x)$

b) $f(x) = 1 + 2tg(x)$

c) $f(x) = 1 + 2tg(3x)$

7 – Esboce o gráfico da função dada abaixo:

$$f(x) = 2 + 3\left(tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Capítulo 10

CONCLUSÃO

Antes de começar a escrever esse trabalho, fiquei me perguntando o que é que eu poderia mudar no processo de ensino-aprendizagem para obter uma melhora no ensino da educação básica em matemática.

Sempre gostei de tecnologia e pude perceber que ela poderia ajudar os alunos em várias situações.

Quando fui apresentado ao software Geogebra, fiquei encantado por existir algo que pudesse fazer muita coisa relacionada à matemática e foi aí que percebi que o que eu realmente queria era trabalhar com funções podendo desenvolver atividades dinâmicas com esse software.

O trabalho foi realizado desenvolvendo uma ampla parte teórica, exemplos, exercícios e algumas atividades dinâmicas. No início de cada capítulo foi introduzido uma história já conhecida ou fato passado por mim mesmo, histórias essas que servem de estímulos ou até mesmo de conhecimento para sabermos onde um determinado assunto matemático pode ser aplicado.

Algumas das situações dinâmicas foram aplicadas em sala de aula e teve um aproveitamento satisfatório, como por exemplo, a atividade dinâmica dos dois taxistas onde o aluno pode perceber que existe uma distância que tanto faz ir com um ou com outro táxi e da mesma forma o aluno pode perceber que, a partir de uma determinada distância também seria mais vantajoso utilizar um dos táxis.

Atividades deste tipo só vem para nos ajudar no processo de ensino-aprendizagem, pois os alunos de hoje estão totalmente conectados com esse novo mundo e sendo assim devemos caminhar no mesmo ritmo, ou seja, caminhar com esses avanços para que nossas vidas no modo de ser, entender e agir possa superar as expectativas do conhecimento, do entretenimento e da capacidade de cada um.

Espero que esse trabalho passe pelas mãos dos profissionais da área de exatas, e até mesmo outras áreas, e também por alunos que tenham sede de conhecimento para que em ambos possam ser acrescentados algo de novo e que desperte o desejo para a construção de novos conhecimentos.

Bibliografia

[1] ANDRINI, A., **Praticando Matemática, 5ª série**. São Paulo: Editora do Brasil S/A, 1989.

[2] ÁVILA, G.; ARAÚJO, L. C. L. **Cálculo - Ilustrado, Prático e Descomplicado**. São Paulo: Editora LTC, 2012.

[3] DANTE, L. R. **Matemática, Contexto e Aplicações, volume 1**. São Paulo: Editora Ática, 2014.

[4] FILHO, B. B.; SILVA, C. X. **Matemática - Aula por aula, volume único**. São Paulo: Editora FTD, 2000.

[5] FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A - Funções, limites, derivação e integração**. 6. ed. São Paulo: Editora Pearson Prentice Hall, 2006.

[6] GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; JUNIOR, J. R. G. **Matemática Completa, volume único**. São Paulo; Editora FTD, 2002.

[7] HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. **Cálculo - Um curso moderno e suas aplicações**. São Paulo: Editora LTC, 2011.

[8] IEZZI, G; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar, Conjuntos e Funções**. 8. ed. São Paulo: Editora Atual, 2013.

[9] IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar, Trigonometria**. 8. ed. São Paulo: Editora Atual, 2004.

[10] IEZZI, G. **Matemática, Ciência e Aplicações, volume 2**. São Paulo: Editora Atual, 2004.

[11] SOUZA, J. **Novo Olhar Matemática, volume 1**. São Paulo: Editora FTD, 2013.

[12] SOUZA, J. **Novo Olhar Matemática, volume 2**. São Paulo: Editora FTD, 2013.

[13] TEIXEIRA, J. C. et al. **Aulas práticas de Matemática, volume 2**. São Paulo: Editora Ática, 1988.

[14] ÁLBUM DE FIGURINHAS. Disponível em: **http://vejasp.abril.com.br/blogs/pop/2014/04/25/ jogadores-do-album-de-figurinhas-da-copa-parecidos-com-celebridades/**. Acesso em: 14 de jul. 2015.

[15] BRASIL ESCOLA. Disponível em: **http://www.brasilescola.com/geografia/terremotos.htm**. Acesso em: 20 de mai. 2015.

[16] INFOESCOLA. Disponível em: **http://www.infoescola.com/matematica/usando-a-matematica-no-cotidiano/**. Acesso em: 20 de jul. 2015.

[17] MATEMATICANDO. Disponível em: **http://sildapinis.blogspot.com.br/2012/06/planejamento-com-uso-de-blogs.html**. Acesso em: 20 de jul. 2015.

[18] NOWATZKI, A. Disponível em: **http://professoralexeinowatzki.webnode.com.br/geologia/ terremotos-e-maremotos/**. Acesso em: 20 de mai. 2015.

[19] PRODUTIVIDADE IRRIGAÇÃO. Disponível em: **http://produtividademt.com.br/blog-pagina5**. Acesso em: 23 de set. 2015.

[20] SÓ XADREZ. Disponível em: **http://www.soxadrez.com.br/conteudos/historia_xadrez/**. Acesso em: 10 de mai. 2015.

[21] UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO. Disponível em: **http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/rived/**. Acesso em: 10 de dez. 2015.

[22] UOL, Mundial de Moscou. Disponível em: **http://noticias.bol.uol.com.br/fotos/esporte/ 2013/08/11/mundial-de-atletismo-de-moscou—2-dia.htm#fotoNav=7**. Acesso em: 23 de set. 2015. Acesso em: 2 de set. 2015.

[23] UOL EDUCAÇÃO. Disponível em: **http://educacao.uol.com.br/planos-de-aula/medio/matematica-xadrez-e-funcao-exponencial.htm**. Acesso em: 10 de mai. 2015.

[24] WHITEY.NET, Ponte da Baía de Sydney, Sydney, Austrália. Disponível em: **http://whitey.net/pt/australia-sydney-fotos-2.htm**. Acesso em: 26 de ago. 2015.

[25] WIKIPEDIA, Imagem ponte. Disponível em: **https://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte _Juscelino_Kubitschek**. Acesso em: 26 de ago. 2015.