Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

O ensino de cônicas por meio da História da Matemática: uma proposta.

PALOMA DE LIMA AMARAL

Uberaba - Minas Gerais

Outubro de 2020

O ensino de cônicas por meio da História da Matemática: uma proposta.

PALOMA DE LIMA AMARAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat, na Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines

Uberaba - Minas Gerais

Outubro de 2020

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

A516e

Amaral, Paloma de Lima
O ensino de cônicas por meio da História da Matemática: uma proposta / Paloma de Lima Amaral. -- 2020.
99 p. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2020
Orientadora: Profa. Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines

1. Matemática - História. 2. Geometria analítica. 3. Ensino. 4. Parábola. 5. Didática I. Martines, Mônica de Cássia Siqueira. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 514.12(09)

Leila Aparecida Anastácio - CRB-6/2513

PALOMA DE LIMA AMARAL

O ENSINO DE CÔNICAS POR MEIO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, área de concentração "Matemática" da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

Uberaba,10 de novembro de 2020.

Banca Examinadora:

Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines– Orientadora
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dra. Marcela Luciano Vilela de Souza
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dra. Viviane de Oliveira Santos
Universidade Federal de Alagoas

Documento assinado eletronicamente por **Viviane de Oliveira Santos**, **Usuário Externo**, em 12/11/2020, às 11:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 e no art. 14 da Resolução nº 34, de 28 de dezembro de 2017.

Documento assinado eletronicamente por **MARCELA LUCIANO VILELA DE SOUZA**, **Professor do Magistério Superior**, em 13/11/2020, às 15:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 e no art. 14 da Resolução nº 34, de 28 de dezembro de 2017.

Documento assinado eletronicamente por **MONICA DE CASSIA SIQUEIRA MARTINES**, **Professor do Magistério Superior**, em 13/11/2020, às 15:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 e no art. 14 da Resolução nº 34, de 28 de dezembro de 2017.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.uftm.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0429693** e o código CRC **86C00C4A**.

Dedico este trabalho a todos aqueles que acreditam na educação como o melhor método para transformarmos positivamente a nós mesmos e o mundo em que vivemos.

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas participaram comigo desta caminhada, e eu agradeço a todas elas, porém algumas desempenharam papéis especiais. Primeiramente, agradeço à minha mãe que é sem dúvida a pessoa que mais torce por mim e que fez parte da maioria das minhas conquistas. Ao meu pai, que sempre deixou claro a importância dos estudos e que me incentiva a me preparar para alcançar 11 de um total de 10 nas avaliações. Ao meu irmão, que é professor de história e com quem tive várias discussões interessantes durante a escrita deste trabalho. E ao meu marido, que entendeu meus períodos de ausência e me ajudou quando percebia meu desespero com os problemas técnicos.

Agradeço ainda aos meus queridos amigos que estiveram tão presentes nessa minha jornada. À Érika, amiga que me acompanha desde a graduação e tanto me apoiou no decorrer do mestrado. A todos os meus amigos do Profmat, de maneira especial à Olívia, Carlos, Guilherme e Paula, pessoas que passaram a ocupar um lugar especial no meu coração. E aos colegas do Grupo de Pesquisa em História da Matemática, que realizaram contribuições valiosas para o meu texto.

Por fim quero agradecer à Profa. Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines, que me orientou no trabalho de conclusão de curso na graduação e novamente agora nessa dissertação, profissional que eu admiro e sem a qual eu não conseguiria chegar até aqui.

"Para entender o coração e a mente de uma pessoa, não olhe para o que ela já conseguiu, mas para o que ela aspira."

Khalil Gibran

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo principal elaborar uma atividade que utiliza a História da Matemática para o ensino de cônicas, mais especificamente, o ensino da parábola, para a terceira série do ensino médio. Para propor a atividade, foram levadas em consideração as construções de Apolônio de Perga (262 - 190 a.E.C.), matemático grego que viveu na cidade de Perga, Grécia antiga, atual Turquia, cujas obras sobreviveram ao tempo e chegou a nosso conhecimento devido a traduções feitas para o árabe. Trata-se de uma pesquisa situada na área da Educação Matemática, mais especificamente em História da Matemática e, pertencente ao campo de História no Ensino da Matemática. Realizamos uma pesquisa de natureza básica, exploratória com relação ao objetivo, bibliográfica e documental de acordo com os procedimentos. Concluímos com uma discussão sobre os motivos pelos quais o uso da História da Matemática, como recurso didático, traz vantagens não apenas para o estudante, mas também para a nossa formação como professores.

Palavras-chave: História da Matemática; ensino de cônicas; parábola; proposta didática.

ABSTRACT

The main objective of this work was to elaborate an activity that uses the History of Mathematics for the teaching of conics, more specifically, the teaching of the parable, for the third year of high school. To propose the activity, the buildings of Apollonius of Perga (262 - 190 b.C.E.), a Greek mathematician who lived in the city of Perga, ancient Greece, present-day Turkey, whose works survived time and came to our knowledge due to translations made into Arabic, were taken into consideration. It is a research in the area of Mathematics Education, more specifically in History of Mathematics and, belonging to the field of History in Mathematics Teaching. We carry out research of basic nature, exploratory in relation to the objective, bibliographical and documental according to the procedures. We conclude with a discussion on the reasons why the use of the History of Mathematics, as a didactic resource, brings advantages not only for the student, but also for our formation as teachers.

Keywords: Mathematics History; conics teaching; parable, proposal.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Reconhecer que a matemática está presente no nosso cotidiano não é difícil, a encontramos quando vamos ao mercado, ao preparar um bolo, ao medir a temperatura de um filho doente, ao ler alguns tipos de reportagens, ao tentarmos colocar dentro de vinte e quatro horas todos os nossos compromissos diários conseguindo ainda ao final do dia umas boas horas de sono. Porém, quando nós professores precisamos responder aos nossos alunos a recorrente pergunta "por que eu preciso estudar isso?" não parece mais tão fácil construir uma relação com o dia a dia.

Mostrar o motivo pelo qual os alunos aprendem certos conteúdos é uma boa maneira de conseguir com que eles se interessem pela aula, mas quando ensinamos determinados conceitos, encontrar esse motivo se torna relativamente trabalhoso, um exemplo é o conteúdo sobre cônicas.

Desde 2017, primeiro ano que lecionei [1] na terceira série do ensino médio, percebi que nos materiais didáticos a que tive acesso, o conteúdo de cônicas (elipse, hipérbole e parábola) possuía uma abordagem, majoritariamente, algébrica, concentrando os estudos em seus gráficos, elementos e equações. "O estudo que se faz tradicionalmente no ensino secundário das cônicas é essencialmente analítico, desligado da concepção histórica das mesmas como secção de um cone" (CORREIA, 2013, p. 94). Esse tipo de abordagem torna mais complicado convencer os estudantes de que a aprendizagem desse conteúdo vai além de conseguir a aprovação em matemática.

Buscando mostrar que estudar sobre as cônicas não é apenas aprender "matemática pela matemática" decidimos elaborar uma nova estratégia, a construção de uma atividade planejada para ser desenvolvida durante seis aulas, com uma proposta diferente da normalmente apresentada nos livros didáticos, utilizando a História da Matemática no ensino

[1] A descrição está em primeira pessoa do singular por se tratar de uma experiência pessoal da autora principal.

da parábola. Mais especificamente, utilizando as construções de Apolônio de Perga (262 a 190 a.E.C.) sobre essa curva e composta por quatro etapas:

- Na primeira, os alunos serão orientados a realizar uma pesquisa sobre os três problemas clássicos da antiguidade: *a quadratura do círculo*, *a trissecção do ângulo* e *a duplicação do cubo*;

- Na segunda, serão convidados a solucionar 5 questões relacionadas aos problemas pesquisados, principalmente ao da *duplicação do cubo*;

- Na terceira etapa, serão orientados a construir a parábola no *software GeoGebra*, com o auxílio de um guia composto por nove passos. Nesse momento responderão ainda a três questões;

- Por fim, serão convidados a estudar a parábola a partir das construções de Apolônio sobre essa curva. Os alunos serão orientados a refazer os estudos do matemático, por meio de 8 tópicos, e depois a relacionar os resultados com toda a atividade anterior.

Uma atividade com essa perspectiva, nos permite, por exemplo, trabalhar o contexto histórico da época em que Apolônio realizou seus estudos e também investigar a parte geométrica presente nas construções. Assim, inicialmente nossos objetivos seriam:

- Fazer um levantamento histórico sobre as cônicas.

- Verificar como esses estudos podem auxiliar no ensino de cônicas na terceira série do ensino médio.

- Elaborar, a partir dos estudos realizados, uma atividade em que se utilize a História da Matemática para ensinar cônicas.

- Aplicar a atividade elaborada para os alunos da terceira série do ensino médio do Colégio Tiradentes da Polícia Militar - Uberaba/MG.

- Relatar a experiência da aplicação.

Infelizmente, em março de 2020 fomos afastados das escolas devido à pandemia originada pelo novo coronavírus (COVID-19), o que nos impossibilitou de concretizar os dois últimos objetivos. Ainda assim, elaboramos a atividade e pretendemos, assim que possível, aplicá-la para os alunos e verificarmos sua validade, ou a necessidade de realizar alterações.

O capítulo 2 foi dedicado à metodologia. Fizemos uma rápida revisão sobre as possíveis classificações de uma pesquisa tanto de forma geral, como com relação à trabalhos específicos na área da História da Matemática, para então listar os caminhos utilizados na elaboração deste trabalho.

No capítulo 3 fizemos uma discussão sobre a importância e as vantagens de se utilizar a História da Matemática como um recurso didático. Durante os estudos realizados sobre as construções de Apolônio, foi necessário recorrer a desenhos para o entendimento de algumas passagens. Tornou-se claro que os alunos poderiam ter as mesmas dificuldades, acrescentamos então, algumas construções no *software GeoGebra* para ajudar nessa questão. Por isso no capítulo 4, falamos sobre a importância da tecnologia na educação.

No capítulo 5 realizamos uma pequena revisão histórica com relação ao estudo das cônicas e, de maneira mais detalhada, falamos sobre as contribuições de Apolônio que foram utilizadas no desenvolvimento da nossa atividade. O capítulo 6 foi totalmente dedicado às discussões referentes à construção da nossa proposta de ensino para o conteúdo de parábola, e em seguida fizemos nossas considerações finais.

2 Metodologia

As pesquisas científicas podem ser classificadas de acordo com a sua abordagem, natureza, objetivos e procedimentos. Utilizamos o livro *Métodos de Pesquisa* organizado por Gerhardt e Silveira (2009), principalmente o capítulo *A Pesquisa Científica* escrito por Silveira e Córdova (2009), para entender as características de cada uma dessas classificações e em quais delas nossa pesquisa se enquadra.

Com relação à abordagem, uma pesquisa pode ser *qualitativa* ou *quantitativa*. A pesquisa qualitativa não possui interesse na representatividade numérica, analisa dados não-métricos, busca explicar o porquê das coisas.

> A pesquisa qualitativa preocupa-se, portanto, com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais. Para Minayo (2001), a pesquisa qualitativa trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis. (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009, p. 32).

A pesquisa quantitativa, ao contrário da qualitativa, é mais objetiva, na qual os dados podem ser quantificados, dados estes recolhidos com instrumentos padronizados e neutros. "A pesquisa quantitativa recorre à linguagem matemática para descrever as causas de um fenômeno, as relações entre variáveis, etc" (FONSECA, 2002, p. 20 *apud* SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009, p. 33).

Quanto à natureza, a pesquisa pode ser *básica* ou *aplicada*. A pesquisa básica tem por objetivo gerar conhecimentos novos sem a previsão de aplicação prática, envolvendo verdades e interesses universais. Já a aplicada visa gerar conhecimentos para uma aplicação prática, buscando solucionar problemas específicos e tem relação com verdades e interesses locais.

Para falar sobre a abordagem quanto aos objetivos, Silveira e Córdova (2009) utilizaram a classificação feita por Gil (2007) que separa as pesquisas em *exploratória*, *descritiva* e *explicativa*. Na pesquisa exploratória, a intenção é realizar discussões sobre um problema, tornando explícito e discutindo hipóteses. A pesquisa descritiva, como o próprio nome nos indica, é aquela cujo objetivo é descrever fatos e fenômenos de determinada realidade (TRIVIÑOS, 1987 *apud* SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009, p. 35). A pesquisa explicativa "preocupa-se em identificar os fatores que determinam ou que contribuem para a ocorrência dos fenômenos (GIL, 2007). Ou seja, este tipo de pesquisa explica o porquê das coisas através dos resultados oferecidos" (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009, p. 35), ela pode dar continuidade a uma pesquisa descritiva.

As classificações de acordo com os procedimentos utilizados durante a pesquisa descritas por Silveira e Córdova (2009) foram baseadas nas definições de Gil (2007), Alves-Mazzotti (2006), Fonseca (2002), Santos (1999), Coulon (1995), Thiollent (1988) e Triviños (1987). É importante observarmos que em uma pesquisa pode ser necessária a utilização de mais de um tipo de procedimento:

- Experimental: através de um planejamento, problema e hipótese são formulados e observa-se os efeitos produzidos pelas variáveis que atuam sobre o objeto estudado;

- Bibliográfica: é realizado um levantamento de referências teóricas já analisadas e publicadas, através de meios físicos ou digitais, como livros, artigos, dissertações e teses;

- Documental: é bastante parecida com a bibliográfica, sendo a principal diferença as fontes estudadas. Nesse caso, o material não possui tratamento analítico, podendo ser tabelas estatísticas, relatórios, documentos oficiais, cartas, fotos, vídeos, etc.;

- De Campo: além da pesquisa bibliográfica e/ou documental, também é realizada uma coleta de dados para análise;

- Ex-post-facto: investiga possíveis relações entre uma fato identificado e um fenômeno que ocorre posteriormente;

- De Levantamento: é feito um levantamento de uma amostra ou população (censo) e, sobre os dados, são feitos estudos exploratórios e descritivos;

- Com Survey: a busca de informações é realizada diretamente com um grupo de interesse (população-alvo) a respeito dos dados que se deseja obter;

- Estudo de Caso: é o estudo de uma entidade bem definida, busca entender as particularidades de uma determinada situação;
- Participante: é caracterizada pelo envolvimento do pesquisador com as pessoas investigadas, por exemplo, para pesquisar uma tribo indígena um pesquisador vai morar na aldeia dos mesmos por algum tempo;
- Pesquisa-ação: semelhante à pesquisa participante, mas nesse caso além do envolvimento entre pesquisadores e participantes há uma intervenção, busca-se melhorar a situação ou resolver os problemas observados;
- Etnográfica: é a pesquisa de um grupo ou povo;
- Etnometodológica: visa compreender como as pessoas constroem ou reconstroem sua realidade social.

Este trabalho tem como objetivo elaborar uma atividade para ensinar o conteúdo de "parábola" na terceira série do ensino médio por meio das construções de Apolônio de Perga sobre essa curva. Inicialmente a intenção era aplicar a atividade em sala de aula, observar, ouvir e analisar as opiniões dos estudantes buscando compreender se o material realmente resultou em aprendizagem. Porém, a aplicação não foi possível, pois em março de 2020 iniciou-se a quarentena devido à pandemia do coronavírus (COVID-19) e fomos afastados das salas de aula.

Assim, quando tivermos a oportunidade de aplicar a atividade, o resultado será uma pesquisa qualitativa, pois temos interesse nos aspectos promovidos pelas relações sociais, como produzir um material diferenciado, aliando a História da Matemática com a tecnologia para ensinarmos um conteúdo.

Quanto à natureza, é uma pesquisa básica e, com relação aos objetivos é exploratória, já que resulta em um material que os professores podem utilizar em sala de aula e, estamos explorando possibilidades com relação ao ensino do conteúdo parábola.

De acordo com os procedimentos utilizados, essa é uma pesquisa bibliográfica. Buscamos principalmente em artigos publicados e repositórios de dissertações e teses, estudos já realizados sobre o uso da História da Matemática no ensino, com o intuito de justificar a importância do nosso trabalho. Quanto aos procedimentos, também se classifica como pesquisa documental, uma vez que utilizamos documentos históricos, escritos por Apolônio, para propormos a atividade.

Nossa proposta é usar a História da Matemática em sala de aula, então neste sentido, podemos dizer que a pesquisa está situada na área de Educação Matemática, mais especificamente em História da Matemática. Essa última vem sendo explorada em três campos: História e Epistemologia da Matemática, História da Educação Matemática e História no Ensino da Matemática. Mendes (2010, 2014) *apud* Barros (2016, p. 15) nos ajuda a compreender o que estudamos em cada um deles:

> 1) Os trabalhos considerados de História e Epistemologia da Matemática são aqueles que tratam das produções científicas relacionadas à vida e à obra de matemáticos e ao desenvolvimento de suas ideias matemáticas, bem como o desenvolvimento da área em pauta enquanto conteúdo científico. 2) Foram considerados como trabalhos de História da Educação Matemática aqueles que tratam de estudos relacionados à história de instituições, biografias de matemáticos e professores de matemática (antigos e atuais), bem como suas contribuições para a formação de professores de Matemática e para a melhoria do ensino dessa disciplina escolar [...]. 3) Os trabalhos agrupados na categoria de História no Ensino da Matemática foram aqueles que se caracterizam pela preocupação com fins pedagógicos, como a elaboração de materiais didáticos para ensinar Matemática, usando fragmentos da História da Matemática [...].

Conforme a descrição feita anteriormente sobre nossos objetivos e como pretendemos utilizar uma atividade que utilize a História da Matemática no ensino, essa pesquisa pertence ao campo de História no Ensino da Matemática.

Não existe uma única forma de utilizarmos a História da Matemática como uma ferramenta de ensino, existem algumas perspectivas, através das quais, podemos analisar as diversas formas que o professor pode empregá-la no processo de ensino e aprendizagem. Uma delas é a perspectiva sociocultural, que

> [...] é utilizada de acordo com o ponto de vista cultural, no qual a História da Matemática é contextualizada, pois considera os ambientes social, cultural, político, ambiental e econômico, nos quais os alunos estão inseridos, para a elaboração das propostas pedagógicas para a sala de aula (D'AMBROSIO, 1990 *apud* OLIVEIRA, 2012, p. 54).

Tendo como objetivo "estudar os fatos históricos relacionados com o ensino e a aprendizagem da Matemática por meio da utilização do contexto sociocultural no qual os envolvidos nesse processo de construção do conhecimento matemático estão ou estiveram inseridos" (OLIVEIRA; ROSA; VIANA, 2015, p. 91).

No Capítulo 3 deste trabalho discutimos sobre a importância de, ao se trabalhar com a História da Matemática, se conhecer o contexto social e cultural no qual conhecimentos foram desenvolvidos. Na perspectiva sociocultural, esses conhecimentos de alguma forma são relacionados ao contexto social e cultural dos alunos.

> [...] existe a necessidade de que os professores não ignorem a influência que o ambiente sociocultural exerce sobre o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, pois é importante que essa influência seja percebida para que a elaboração das atividades matemáticas curriculares sejam baseadas em situações-problema que são desencadeadas no ambiente sociocultural no qual os alunos estão inseridos. (OLIVEIRA; ROSA; VIANA, 2015, p. 105).

Outra abordagem a qual tivemos contato durante a revisão bibliográfica realizada para a escrita deste trabalho foi apresentada por Mendes (2008) na obra *Tendências metodológicas no ensino da matemática*. Durante a seção *A história da matemática como estratégia de ensino da matemática escolar*, Mendes (2008) nos fornece orientações referentes à elaboração de uma atividade que utilize a História da Matemática como recurso para ensinar. Segundo ele,

> [...] é adequado o uso de atividades que favoreçam a interatividade entre o sujeito e o seu objeto de conhecimento, sempre em uma perspectiva contextualizadora que evidencie três aspectos do conhecimento: o cotidiano, o escolar e o científico, principalmente quando são rearticulados ao longo do processo de manuseio de qualquer componente da atividade (o material manipulativo, as orientações orais e escritas e o diálogo estabelecido durante todo o processo ensino-aprendizagem, etc). [...] o conhecimento histórico pode estar implícito nos problemas suscitados na atividade ou explícito nos textos históricos resgatados de fontes primárias (textos originais, documentos ou outros artefatos históricos) ou secundárias (informações de livros de História da Matemática ou de livros paradidáticos). (MENDES, 2008, p. 40).

Segundo o autor, alguns aspectos devem ser observados ao se elaborar e aplicar uma atividade histórica no ensino da matemática:

- A relação entre as partes integrantes desse processo de ensino deve ser interativa, tanto entre professor e estudantes, quanto entre os próprios estudantes;
- O professor deve buscar em fontes históricas, sejam elas primárias ou secundárias, todas as informações necessárias para o desenvolvimento da atividade. Só então ele estará capacitado para orientar os estudantes na realização da mesma;

- Experiências manipulativas ou visuais contribuem na ocorrência de manifestações nos alunos referentes às primeiras impressões relacionadas ao aprendizado. É importante que essas primeiras impressões sejam discutidas entre todos os envolvidos, para que se acompanhe quais ideias já foram apreendidas ou não.

Mendes (2008, p. 41) destaca que

> Esse movimento de profunda ação-reflexão implica na necessidade de representação dessa aprendizagem através da simbolização (representação formal através de algoritmos sistematizados, fórmulas, etc.), visto que a mesma evidencia o grau de abstração no qual o aluno se encontra com relação ao conhecimento construído durante a atividade (nível de representação: intuitiva-algorítmica-formal).

Os níveis de representação citados são componentes da atividade, o nível intuitivo está relacionado à matemática humana, ao caráter imaginativo do raciocínio matemático, ao caráter biológico da aprendizagem. O algorítmico permite a adaptação do pensamento para os procedimentos problemáticos na prática, e o formal consiste na expressão dos conceitos matemáticos através de proposições adaptáveis a todas as circunstâncias, como presentes nos livros didáticos.

Analisando a construção da atividade, Mendes (2008) nos descreve a importância de elaborarmos e pensarmos com atenção: no nome de cada atividade, nos objetivos, no conteúdo histórico, no material utilizado, na operacionalização e nos desafios das mesmas.

Conforme descrito anteriormente, nosso intuito é elaborar uma atividade envolvendo a História da Matemática, portanto escolhemos a metodologia deste autor, por acreditarmos que ela seja mais adequada ao que desejamos realizar. A parte histórica da atividade foi construída principalmente através de estudos realizados utilizando uma fonte terciária, a saber, as descrições de Roque e Carvalho (2012) referentes a alguns estudos de Apolônio sobre cônicas. Roque e Carvalho (2012, p. 164) se basearam em uma tradução para o inglês dos documentos escritos por Apolônio, assim os manuscritos do matemático seriam uma fonte primária, a tradução para o inglês uma secundária e o texto ao qual tivemos acesso, já em português, é uma fonte terciária.

3 Por que História da Matemática?

Para entendermos os motivos pelos quais a História da Matemática é um recurso válido e importante para o ensino, primeiramente vamos pensar em uma das definições da palavra "história", que de acordo com Martins (2011, p. 44) é

> [...] conceito que sofre de uma plurivocidade clássica. É empregado para designar diversas realidades. O primeiro uso, e bastante óbvio, é a aplicação do termo "história" à totalidade das ações humanas no tempo e no espaço. Nesse sentido, "história" remete à concretude dos atos das pessoas (incontáveis), marcados pela racionalidade dos motivos e das intenções, imersas na cultura concreta de que cada um, de uma ou de outra forma, é necessariamente dependente (mesmo que dela não seja forçosamente prisioneiro).

A partir do momento que a história engloba as nossas ações perante a sociedade à qual pertencemos e, também os motivos pelos quais efetuamos determinados atos, ela está intrinsecamente ligada à nossa constituição como indivíduos. Santos (2013, p. 16) afirma que "uma das maneiras de se pensar a respeito da cultura humana em seus diferentes aspectos - incluída aqui a educação - é olhá-la por meio de seus registros históricos". É na escola que acontece uma porção considerável dessa formação social, conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN) (BRASIL, 2013, p. 167):

> É preciso reconhecer que a escola se constitui no principal espaço de acesso ao conhecimento sistematizado, tal como ele foi produzido pela humanidade ao longo dos anos. Assegurar essa possibilidade, garantindo a oferta de educação de qualidade para toda a população, é crucial para que a possibilidade da transformação social seja concretizada. Neste sentido, a educação escolar, embora não tenha autonomia para, por si mesma, mudar a sociedade, é importante estratégia de transformação, uma vez que a inclusão na sociedade contemporânea não se dá sem o domínio de determinados conhecimentos que devem ser assegurados a todos.

Pensando nas instituições educacionais como o principal ambiente em que as pessoas têm acesso ao "conhecimento sistematizado, tal como ele foi produzido pela humanidade ao longo dos anos" (BRASIL, 2013, p. 167), utilizar a história e consequentemente a História da Matemática para alcançar esse objetivo pode ser uma boa estratégia.

A História da Matemática tem sua relevância também na formação do professor. Ao ensinar é importante que se tenha um nível de conhecimento referente ao conteúdo trabalhado, conhecê-lo bem para que se tenha segurança e capacidade de reconhecer qual a melhor abordagem a ser utilizada. Sabemos que os conceitos matemáticos estudados nos dias atuais foram desenvolvidos e discutidos no passado, discussões essas que levaram inclusive ao desenvolvimento de conhecimentos referentes a conteúdos diferentes dos estudados originalmente. O professor, ao investigar a origem dos assuntos sobre os quais ensina, amplia seu conhecimento sobre os mesmos. Ao rever o desenvolvimento de um estudo, percebe ser possível realizar uma discussão que vai além da visão que se tem hoje sobre um conceito, dando assim, mais significado ao mesmo, ao conhecer toda a sua história e não apenas o resultado final. Discutir com os alunos o processo de criação de uma teoria, as dificuldades e erros com os quais é necessário lidar para provar a veracidade da mesma, pode ajudá-los a entender como é o processo de aprendizagem, que o mesmo nem sempre é fácil mas que inclusive resultados incorretos são válidos. Macena (2007, p. 15) afirma que:

> Numa incursão histórica, devemos buscar os fundamentos, as raízes das teorias matemáticas hoje desenvolvidas para ampliarmos a compreensão dos conceitos. Talvez não cheguemos à total clareza de tais teorias e tais conceitos, mas poderemos chegar a uma ideia da sua natureza, e até reviver conflitos e frustrações que os matemáticos passaram ao longo de um árduo caminho até construir uma estrutura considerada importante. Assim, junto com o aprendiz, conquistaremos a capacidade de enfrentar as próprias deficiências e os tropeços que surgem ao longo de uma investigação, e poderemos reconhecer que muitas dificuldades encontradas nesse percurso assemelham-se àquelas enfrentadas no início da descoberta do conhecimento estudado.

O desenvolvimento de um conhecimento matemático também está ligado a diversas questões da época a qual ele se encontra. O professor ao realizar investigações referentes ao passado de estudos matemáticos, deve buscar entender qual o contexto histórico da época em questão. Compreender as questões políticas, culturais, econômicas, religiosas, dentre outras, do período estudado, abrange a interpretação a ser feita sobre os resultados encontrados. Visto que são elementos importantes para o desenvolvimento dos alunos como cidadãos, as discussões embasadas na História da Matemática podem auxiliar os professores a tornarem suas atuações em sala de aula mais críticas, formando assim, alunos críticos, conforme reitera o professor Fumukazu Saito (2020, p. 1).

O ensino da matemática é objeto de diversas discussões nos dias atuais e, uma das mais importantes, refere-se à contextualização dos conteúdos da disciplina. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é necessário que os alunos não apenas aprendam a teoria dos conteúdos matemáticos, como também consigam aplicá-los à realidade. Essa abordagem do ensino da matemática, que foge das aulas tradicionais, expositivas em que o professor repassa a teoria conforme está descrita no livro utilizando somente os recursos básicos necessários, deu início a diversos estudos referentes a metodologias ativas de ensino em que o aluno é protagonista de sua aprendizagem e o professor tem o papel de mediador. Como esclarece Pereira (2012, p. 6), metodologia ativa é "o processo de organização da aprendizagem (estratégias didáticas) cuja centralidade do processo esteja, efetivamente, no estudante. Contrariando assim a exclusividade da ação intelectual do professor e a representação do livro didático como fontes exclusivas do saber na sala de aula".

Dentre as diversas metodologias ativas, alguns exemplos são: *aprendizagem baseada em problemas*, *aprendizagem baseada em projetos*, *instrução por pares* e *sala de aula invertida*. Conforme Lovato *et al.* (2018) podemos definir os exemplos citados da seguinte forma:

- Aprendizagem baseada em problemas (Problem-Based Learning - PBL): os alunos são apresentados a um problema e discutem, em grupos, uma possível solução utilizando de seus conhecimentos prévios. Em seguida, fazem o levantamento e discussão das dúvidas que surgiram e depois organizam uma nova abordagem para solucionar o problema, agora munidos de novas informações. Em um momento futuro todo o processo é discutido e os estudantes tem a oportunidade de avaliar todo o processo, suas atuações durante o mesmo e também a dos colegas, buscando assim uma aprendizagem autônoma.

- Aprendizagem baseada em projetos (Project-Based Learning): os alunos aprendem novas informações e competências ao buscar a resolução de problemas mais complexos. A intenção é que ele encontre novos interesses e reconheça que vale a pena aprender ao realizar pesquisas referentes ao tema do projeto. Essa metodologia é caracterizada pela atuação em grupos, prazos definidos, escolha dos temas abordados através de discussões entre aluno e professor.

- Instrução por pares (Peer-Instruction): promove a participação de todos os alunos durante o desenvolvimento da aula, ao estimulá-los a aplicar os conceitos discutidos explicando-os aos colegas. O estudante assume a responsabilidade não só de sua aprendizagem mas também a de seus pares.

- Sala de aula invertida (Flipped Classroom): os alunos estudam os conteúdos antes da aula em que serão abordados, assim no encontro com o professor eles já tem um conhecimento prévio do objeto de estudo o que pode resultar em discussões construtivas entre alunos e professores.

Ao utilizar metodologias ativas, o professor não precisa necessariamente restringir-se a apenas uma delas. Ao analisarmos as que foram apresentadas anteriormente, podemos verificar que todas têm em comum a busca por possibilitar, de alguma forma, a realização de investigações em sala de aula pelos alunos. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016),

> Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado.

Na atividade elaborada, descrita no capítulo 6, utilizamos a Aprendizagem baseada em problemas, ao colocarmos os alunos perante situações que eles deverão solucionar baseando-se em seus conhecimentos. A instrução por pares estará presente em todo processo, pois a discussão entre os alunos será incentivada a todo o momento. Ao utilizarem os aprendizados e resultados encontrados por meio de suas pesquisas, estarão participando de uma sala de aula invertida, já que nada terá sido dito sobre o assunto pesquisado. Pretendemos com este trabalho, mostrar que a História da Matemática é um recurso valioso na elaboração de materiais baseadas nessas práticas.

3.1 História da Matemática como recurso pedagógico

A busca por novas estratégias de ensino tem sido algo frequente na rotina dos educadores, que esperam conseguir a atenção e o interesse dos estudantes, que tem cada vez mais distrações ao seu redor. A disciplina de matemática é uma das quais eles mais relatam possuir dificuldades e, consequentemente, desinteresse. Relatam não compreenderem os conceitos, não conseguirem decorar tantas fórmulas e, principalmente, não entenderem o "porquê" de precisarem aprender determinado assunto.

Uma das explicações utilizadas pelos alunos para justificar suas dificuldades na disciplina de matemática é, segundo eles, o fato de ela ser "muito abstrata". Porém, conforme Roque e Carvalho (2012, p. IX) afirmam "a Matemática é vista [...] como um saber abstrato por excelência e, justamente por isso, ajudaria a desenvolver o raciocínio e o pensamento lógico". Mesmo reconhecendo que o abstrato na matemática é importante para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, é necessário admitir que ao conseguirmos relacionar determinado conceito com algo concreto, algo presente na realidade do estudante, a assimilação acontece de forma mais natural.

> Acreditamos, contudo, que, quando os alunos pedem que a Matemática se torne mais "concreta", eles podem não querer dizer, somente, que desejam ver este conhecimento aplicado às necessidades práticas. Talvez eles queiram compreender os conceitos matemáticos em relação com algo que lhes dê sentido, ou seja, conectando-os a uma rede de significados e de relações com outras ideias, que podem ser ou não matemáticas. Aqui se insere a história. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. IX).

Reconhecemos não ser fácil relacionar efetivamente todos os tópicos matemáticos a situações cotidianas, e acreditamos que com o auxílio da História da Matemática, representar conceitos abstratos de forma concreta pode ser um trabalho menos árduo e bastante efetivo no processo de ensino-aprendizagem. A História da Matemática é um importante recurso pedagógico, visto que ao utilizá-la em sala de aula estamos

> [...] estimulando o envolvimento e a participação ativa do estudante, na medida em que se faz um resgate histórico, conduzindo os alunos a resolverem e superarem os obstáculos enfrentados pelos antigos matemáticos que são os produtores dos conhecimentos que hoje aplicamos (AMORIM, 2014, p. 7).

Algo importante no desenvolvimento da matemática foi e, ainda é, a resolução de problemas. Ao apresentarmos a origem de um problema ao aluno, o seu contexto histórico, os possíveis motivos pelos quais esse problema surgiu, e a partir dessa apresentação discutirmos os resultados e conceitos advindos dos estudos promovidos durante as buscas por soluções para esses problemas, estamos construindo um ambiente de aprendizagem munido de elementos que auxiliam a dar sentido ao que se está discutindo. Mendes (2012, p. 41) afirma que:

> Para efetivarmos um ensino-aprendizagem significativo em matemática, é necessário utilizarmos as atividades históricas, buscarmos no material histórico existente todas as informações úteis à condução da nossa ação docente e somente a partir daí orientar os estudantes à realização de atividades.[...]Desse modo, você deve resgatar o processo histórico da construção dos tópicos matemáticos a serem abordados em sala de aula, para que o aluno compreenda o significado dessas ideias e sua importância para o desenvolvimento de toda a matemática, a partir do significado histórico e conceitual desses tópicos básicos levados pelo professor pelas atividades em sala.

Assim, a História da Matemática passa a ter papel efetivo na aprendizagem, e não é utilizada apenas para apresentar uma curiosidade com o intuito de alcançar o interesse dos estudantes.

Dentro dessa preocupação em tornar o processo de ensino da matemática mais efetivo para os estudantes, os professores não podem deixar de pensar nas características culturais presentes na sala de aula. Ao adentrar um local de estudo, o aluno traz uma bagagem consigo, resultante de uma relação com outros indivíduos e com o ambiente em que vivem. Essas características permeiam todo o comportamento dentro do ambiente escolar, visto que pertencem à formação desses alunos como cidadãos, por isso, valorizar essas características no meio educacional promove um retorno positivo por parte dos mesmos, pois provavelmente eles se sentem também valorizados.

D'Ambrosio (1999, p. 119) nos diz que "a Matemática tem, como qualquer outra forma de conhecimento, a sua dimensão política e não se pode negar que seu progresso tem tudo a ver com o contexto social, econômico, político e ideológico". O autor também nos esclarece como é possível evidenciar esses aspectos culturais por meio do ensino de Matemática e como a história está relacionada com todo esse processo:

> É importante mostrar a aritmética não apenas como a manipulação de números e de operações e a geometria não feita apenas de figuras e de formas perfeitas, sem cores. Pode-se dar como exemplo as decorações dos índios brasileiros, as diversas formas de se construir papagaios, comparar as dimensões das bandeiras de vários países, e conhecer e comparar medidas como as que se dão

> nas feiras: litro de arroz, bacia de legumes, maço de cebolinha. Tudo isso representa medidas usuais, praticadas e comuns no dia a dia do povo, e que respondem a uma estrutura matemática rigorosa, entendido um rigor adequado para aquelas práticas.[...] A incorporação disto tudo na história é um reflexo da conceituação de Etnomatemática. Representa uma linha historiográfica por muitos denominada "história que vem de baixo" ou "história feita pelo povo". (D'AMBROSIO, 1999, p. 124).

A título de esclarecimento, segundo D'Ambrosio (2005, p. 102), a Etnomatemática é "um estudo da evolução cultural da humanidade no seu sentido amplo, a partir da dinâmica cultural que se nota nas manifestações matemáticas". Ao associarmos evolução cultural e manifestações matemáticas, estamos falando sobre as diversas formas que a matemática se manifesta através dos tempos e povos, portanto, a Etnomatemática e a História da Matemática estão relacionadas.

Essa valorização histórica em sala de aula também colabora com a formação crítica das pessoas, ao conhecer a origem e as questões políticas e sociais que ocorriam durante o desenvolvimento de um conceito matemático e, ao conseguir relacioná-lo com sua realidade, o estudante se torna capaz de relacionar e aplicar esse novo conhecimento no meio em que vive. Oliveira e Alvim (2020, p. 12) apontam que

> [...]a abordagem histórica permite uma educação problematizadora, nos termos de Freire (1974), visando a formação de um cidadão crítico que não somente reflita sobre sua realidade, mas que possa interferir ativamente na mesma. Na perspectiva do educador, o ensino deve ser focado no universo dos próprios educandos, tendo a potencialidade de levá-los a refletir criticamente sobre sua realidade e a saber agir diante das situações impostas.

Analisando o processo de ensino e aprendizagem, sabemos que o mesmo precisa evoluir juntamente com o público alvo. As aulas tradicionais, focadas no rigor do livro didático, quadro e fala do professor, sem a participação efetiva dos alunos tem dado espaço para uma nova realidade. Buscam-se novas estratégias para aproximar educador e estudante, e também para tornar próximos esse último e seu objeto de estudo. É importante que o professor seja capaz de tornar sua aula interessante e produtiva, sem que a mesma deixe de ser efetiva, a aprendizagem ainda é o objetivo. Porém, esperamos que diversas habilidades sejam desenvolvidas, com o intuito de preparar quem ali se encontra para o mercado de trabalho, para a vida em sociedade.

> Nessa circunstância, a História da Matemática pode ser utilizada como uma "ferramenta" em sala de aula, pois permite que o professor dê acesso aos estudantes a uma visão mais ampla e contextualizada dos temas e, assim, instigue

> sua curiosidade, desmistifique narrativas distorcidas e humanize os personagens envolvidos nos episódios históricos. Desta forma, a história pode contribuir para se superar abordagens demasiado rígidas, lineares e descontextualizadas que, por vezes, são utilizadas no ensino escolar. (OLIVEIRA; ALVIM, 2020, p. 114-115).

A História da Matemática como recurso pedagógico possibilita diversas vantagens. O professor ao estudar a origem e desenvolvimento de determinado conteúdo tem um maior domínio sobre o mesmo, o que aumentam as possibilidades de trabalhá-lo em sala de aula, e ao analisar as questões políticas e culturais ocorridas durante o desenvolvimento matemático, reconhece fatos que podem ser utilizados para tornar seus alunos mais críticos. E o estudante terá uma aula diferenciada, mais dinâmica, realizando atividades que se aproximam de sua realidade, em que aprenderá não apenas matemática e perceberá que mesmo os matemáticos mais importantes tiveram dificuldades e cometeram erros, sentindo-se assim mais dispostos a estudar. Portanto, a História da Matemática bem utilizada, não apenas como curiosidade, precisa ser reconhecida como um importante recurso para o ensino da disciplina.

4 O uso de tecnologias no ensino de matemática

Ao ouvirmos a palavra tecnologia, logo nos vem a mente itens modernos como celulares de última geração, carros elétricos, robôs em Marte, computadores capazes de calcular quadrilhões de casas decimais do número Pi, dentre outros exemplos. Porém, Follador (2012, p. 9) nos lembra que “quando falamos de tecnologia, estamos nos referindo a tudo aquilo que o homem criou para facilitar a realização de atividades em todos os campos da atividade humana”.

Assim, um dos papéis da tecnologia é o de tornar as tarefas cotidianas mais rápidas e práticas. O ábaco, por exemplo, foi um avanço tecnológico relativamente importante na época em que foi inventado, pois “foi um dos instrumentos de cálculo mais usados pela humanidade até o aparecimento dos algarismos indo-arábico. Ele também foi utilizado pelos contadores do estado para realizar as contas nacionais e até mesmo por comerciantes comuns para o comércio em seu negócio” (IBIAPINA, 2014, p. 46).

Outras invenções importantes, e utilizadas até os dias atuais são o lápis e o papel, que foram criados devido à necessidade do homem de realizar registros. Hoje essas ferramentas são fundamentais no dia a dia, inclusive no ambiente escolar e, em alguns casos, devido à realidade do nosso país, são os únicos tipos de tecnologias à que os alunos têm acesso. Através desses recursos é possível explicitar um conhecimento, tornar concreto e manipular um raciocínio, possibilitando que aluno e professor trabalhem e discutam sobre o mesmo, resultando de todo esse processo um novo aprendizado. “Para o professor de Matemática, o quadro negro, giz, lápis e papel não deixam de ser importantes tecnologias, pois as utiliza na interação com a turma e o conteúdo” (ORZECHOWSKI; LOPES, 2016, p. 3).

No momento atual em que vivemos, avanços tecnológicos são anunciados de forma recorrente em diversas áreas, e se um dos principais objetivos da educação é preparar nossos alunos para viver nesse ambiente repleto de modernidades, utilizar a tecnologia como ferramenta durante as aulas torna-se interessante, se não, essencial. Dentre as oito competências específicas de matemática para o ensino fundamental apresentadas na BNCC, alguma menção à tecnologia é feita em pelo menos duas delas. No caso das cinco competências específicas de matemática e suas tecnologias para o ensino médio presentes no mesmo documento, cita-se algo relacionado à tecnologia em três. Mostrando assim a importância desse conceito estar presente na sala de aula.

Um fato que nos auxilia a justificar a necessidade de se inserir a tecnologia no dia a dia escolar é a presença cada vez maior da mesma no mercado de trabalho. O processo de globalização atrelado aos avanços tecnológicos decorrentes das revoluções industriais, levaram os trabalhadores a perceberem que para se manterem elegíveis para seus cargos é indispensável serem capazes de lidar com os avanços tecnológicos.

> Que o mundo do trabalho não é o mesmo, não há dúvidas. As transformações sofridas, desde a revolução industrial, são altamente perceptíveis e extremamente relevantes. A evolução dos meios de produção, o fim da era do pleno emprego e a ruptura do domínio industrial, registram, de forma macro, as mudanças enfrentadas pelos atores das relações de trabalho. A globalização, a abertura dos mercados e o avanço tecnológico passam a reger, com novas notas, estas relações. [...] O início do incentivo ao empreendedorismo, a migração do emprego formal para a informalidade e a falta de capacitação do trabalhador para atuar no novo mercado são amostras dos efeitos nefastos do descompasso vivido entre a era da informação e o mercado de trabalho. [...] a automação desregulamentada, por exemplo, pode aumentar o desemprego entre os que têm maior dificuldade de acesso à capacitação tecnológica.(PINTO; SOUZA, 2017, p. 101-102).

Caso seja reconhecida a importância de introduzir o uso de tecnologias na sala de aula, a próxima barreira a se transpor é identificar como utilizá-las de maneira efetiva no processo de ensino e aprendizagem. O educador também precisará se adaptar à essa nova realidade, se tornando capaz de elaborar atividades em que a tecnologia seja um instrumento que tenha participação efetiva no aprendizado dos estudantes, e não seja apenas um recurso lúdico.

4.1 Alguns exemplos do uso de tecnologia em sala de aula

Um objeto simples e de fácil acesso que pode iniciar o processo do uso de tecnologias no ambiente escolar é a calculadora. Ela não só faz parte da vida cotidiana da grande maioria das pessoas, como suas versões mais avançadas são essenciais na rotina de algumas profissões. Alguns professores ainda possuem certo receio em liberar a utilização da mesma em sala de aula, acreditando que ela pode prejudicar o desenvolvimento dos alunos relacionado ao uso de alguns algoritmos básicos, como os das quatro operações fundamentais. O que precisamos entender é que, para utilizar a calculadora na resolução de um problema por exemplo, o estudante precisa primeiro interpretar o que se pede e reconhecer qual operação deverá utilizar. A calculadora será apenas um meio de agilizar o processo para se chegar a resposta. Se o aluno não entender o problema ou não tiver algum domínio sobre o conteúdo ali trabalhado, ele não conseguirá utilizar esse recurso. Conforme Santos, Andrade e Gitirana (2004, p. 2):

> [...] com o uso da máquina de calcular, diminui-se o volume de cálculos rotineiros e vagarosos que os alunos precisam realizar, liberando desta forma mais tempo para raciocinar. Para D'Ambrosio (2002, p. 31) "com uma calculadora abrem-se inúmeras possibilidades de se fazer matemática criativa com temas clássicos.".

Outro recurso que pode ser utilizado e cujo conhecimento sobre o mesmo é exigido na descrição de diversas vagas de emprego é o *Excel*. Sabemos que o acesso a um laboratório de informática não é realidade em muitas escolas do nosso país, então nesses casos o professor pode trabalhar projetando a tela de seu computador na sala de aula por exemplo, se a escola tiver um projetor e um computador. O *Excel* é um editor de planilhas, presente no pacote pago *Microsoft Office*, que com seus vários recursos possibilita elaborar tabelas, construir gráficos e trabalhar com fórmulas matemáticas. Uma opção similar e gratuita é o programa *Calc*, que pertence ao pacote *LibreOffice*. Normalmente, quando uma escola pública possui um laboratório de informática, é esse o pacote que é instalado nos computadores.

Essas ferramentas podem ser ótimas aliadas para o ensino de estatística e matemática financeira, dentre outros conteúdos. Abaixo segue um exemplo do uso de planilhas construídas no *Excel* em sala de aula, onde no dia em questão, o assunto trabalhado era “Sistemas de Amortização”, em uma turma da terceira série do ensino médio. Os alunos deveriam construir no caderno uma tabela que representasse o financiamento descrito na situação a seguir:

- (CESPE - 2006) Os bancos oferecem algumas alternativas de financiamento e amortização de dívidas. O sistema de amortização é que define a forma de cálculo da prestação. Os sistemas atualmente praticados pelas instituições financeiras incluem: Sistema de amortização constante (SAC) e sistema francês de amortização (tabela *Price*).

  Suponha que Paulo conseguiu financiar, pelo sistema francês de amortização, um microcomputador no valor de R$ 5.000,00, em doze parcelas mensais e iguais, com taxa de juros de 5% ao mês, com o 1º pagamento feito 30 dias após a assinatura do contrato.

Após a discussão de como ficaria a tabela em questão, a mesma foi reconstruída juntamente com os alunos utilizando agora o *Excel*, mostrando como representar dentro do programa as operações realizadas no caderno. O resultado foi a tabela abaixo:

Figura 4.1: Tabela com as fórmulas exibidas.

	A	B	C	D	E
1	Sistema Francês de Amortização (Tabela Price)				
2					
3	Mês	Prestação (R$)	Juros (R$)	Amortização (R$)	Saldo Devedor (R$)
4	0				5000
5	1	564,13	=E4*0,05	=B5-C5	=E4-D5
6	2	564,13	=E5*0,05	=B6-C6	=E5-D6
7	3	564,13	=E6*0,05	=B7-C7	=E6-D7
8	4	564,13	=E7*0,05	=B8-C8	=E7-D8
9	5	564,13	=E8*0,05	=B9-C9	=E8-D9
10	6	564,13	=E9*0,05	=B10-C10	=E9-D10
11	7	564,13	=E10*0,05	=B11-C11	=E10-D11
12	8	564,13	=E11*0,05	=B12-C12	=E11-D12
13	9	564,13	=E12*0,05	=B13-C13	=E12-D13
14	10	564,13	=E13*0,05	=B14-C14	=E13-D14
15	11	564,13	=E14*0,05	=B15-C15	=E14-D15
16	12	564,13	=E15*0,05	=B16-C16	=E15-D16
17	Totais	=SOMA(B5:B16)	=SOMA(C5:C16)	=SOMA(D5:D16)	
18					
19	Prestação	=(5000*(1,05^12)*0,0			

Fonte: Autoria própria, utilizando o *Excel*.

e

Figura 4.2: Tabela com os resultados exibidos.

	A	B	C	D	E
1	Sistema Francês de Amortização (Tabela Price)				
2					
3	Mês	Prestação (R$)	Juros (R$)	Amortização (R$)	Saldo Devedor (R$)
4	0				5000,00
5	1	564,13	250,00	314,13	4685,87
6	2	564,13	234,29	329,84	4356,03
7	3	564,13	217,80	346,33	4009,71
8	4	564,13	200,49	363,64	3646,06
9	5	564,13	182,30	381,83	3264,23
10	6	564,13	163,21	400,92	2863,32
11	7	564,13	143,17	420,96	2442,35
12	8	564,13	122,12	442,01	2000,34
13	9	564,13	100,02	464,11	1536,23
14	10	564,13	76,81	487,32	1048,91
15	11	564,13	52,45	511,68	537,22
16	12	564,13	26,86	537,27	-0,05
17	Totais	6769,56	1769,51	5000,05	
18					
19	Prestação	564,13			

Fonte: Autoria própria, utilizando o *Excel*.

Sá, Silva e Machado (2018, p. 1) ressaltam que:

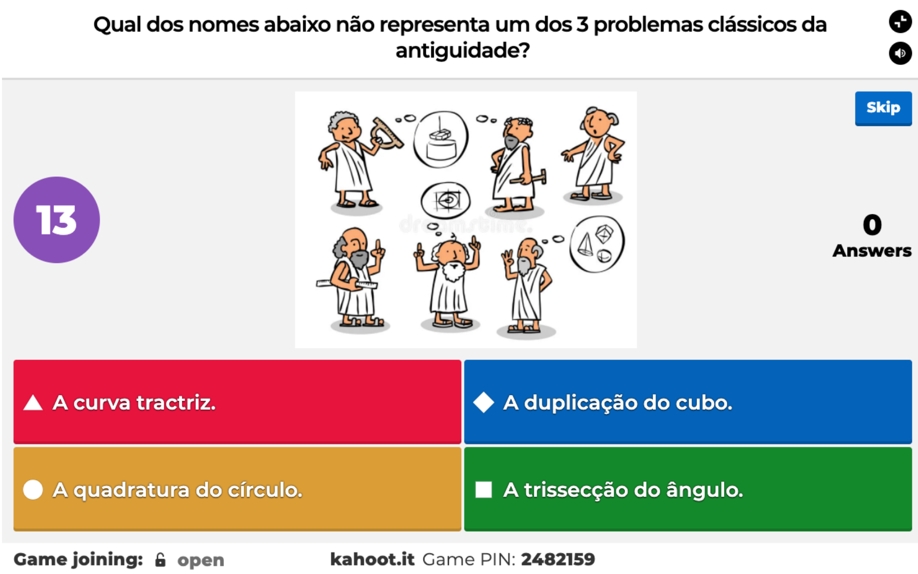
> Percebe-se o quão importante é utilizar a tecnologia a favor da educação. É uma forma de atrair os alunos desinteressados em aulas com professor, quadro e giz. Ao propor o uso do computador em sala de aula o docente consegue despertar o interesse e a vontade de aprender determinado conteúdo. É o caso do Excel no ensino da Matemática Financeira, que ao aplicar as fórmulas no software obtém-se algo atrativo e prático para os estudantes. Além de ser uma oportunidade para os discentes conhecerem novas ferramentas. Proporcionando uma aprendizagem não só do abstrato, mas também de algo útil para o mercado de trabalho que este cidadão vai se deparar no futuro.

Possibilitar aos alunos o acesso a ferramentas utilizadas para a construção e edição de tabelas e gráficos, vem ao encontro da importância de se falar sobre o tratamento da informação nas aulas de matemática. Ser capaz de ler e interpretar dados e informações, nas diversas formas em que possam ser apresentados, também faz parte da transformação dos alunos em cidadãos críticos, capazes de opinar e agir sobre questões relacionadas ao ambiente em que vivem. Em um momento em que o acesso a todo tipo de informação tornou-se mais fácil, através da internet por exemplo, tornar os estudantes capazes de se posicionar sobre algo que lhes está sendo apresentado é fundamental.

O crescente interesse dos jovens por tecnologia é outro fato que precisa ser considerado ao falarmos sobre o uso da mesma na sala de aula. Há algum tempo eles trocam as brincadeiras de rua e em grupo, por jogos nos celulares e *videogames*. Além disso, a navegação pelas redes sociais também ocupa parte do tempo dos alunos. Devido a essas questões, o conceito de "gamificação" vem ganhando espaço no ensino. "Gamificação tem como base a ação de se pensar como em um jogo, utilizando as sistemáticas e mecânicas do ato de jogar em um contexto fora de jogo" (FADEL *et al.*, 2014, p. 15).

Algumas plataformas digitais foram criadas para auxiliar a introdução deste conceito na educação, um exemplo é o *Kahoot!*[1], que possui um pacote de recursos básicos gratuito, mas para o acesso à totalidade de seus recursos é necessário fazer um pagamento. A plataforma pode ser acessada pelo computador ou celular. Essa ferramenta tem o formato de um jogo de perguntas e respostas, em que o professor elabora as questões que serão repassadas aos alunos e estipula um tempo para resposta. À medida que os estudantes respondem corretamente, e caso seja interessante para a atividade, mais rapidamente, eles acumulam pontos. Os alunos podem responder direto de seus celulares, ou, caso não seja possível, o professor pode entregar placas coloridas e projetar a pergunta no quadro para que o aluno levante a placa com a cor correspondente à resposta correta. Ao final é possível emitir relatórios com gráficos apontando o desempenho e opinião dos estudantes sobre a dinâmica. Ao desenvolver um questionário através do *Kahoot!*, o professor tem a oportunidade de inovar sua prática e possibilita aos alunos uma nova e interessante forma de aprendizagem.

Figura 4.3: Exemplo de questão elaborada no Kahoot!.



Fonte: Autoria própria, utilizando o kahoot.com.

[1]Mais informações sobre o Kahoot! podem ser encontradas em https://kahoot.com/.

Algumas vantagens de se utilizar esse tipo de recurso em sala de aula são descritas por Romio e Paiva (2017, p. 91):

> Estudos realizados com diferentes tipos de jogos mostraram que eles auxiliam positivamente no desenvolvimento de habilidades cognitivas importantes como estratégia, competição, aumento do poder de concentração em detalhes visuais, capacidade de girar mentalmente objetos, execução de multitarefas, solução de problemas com mais facilidade e uma melhora da interação social. [...] Os jogos educacionais despertam um interesse maior do aluno na sala de aula, tornando o ensino de certos conteúdos mais lúdicos. Além disso, há a possibilidade de aprender com os erros, descobrindo novas informações dentro de diferentes contextos, unindo o estímulo e a diversão.

Certos softwares voltados para a matemática também podem auxiliar os professores no ensino, possibilitando tornar visíveis alguns conceitos abstratos. Ao se ensinar geometria de posição por exemplo, pode ser complicado explicar em um quadro, que é plano, o conceito de retas reversas. O educador geralmente utiliza de outras estratégias, uma opção seria o uso de espetos e caixas para representar as retas e o espaço respectivamente. O estudo dos sólidos geométricos também pode esbarrar nessa mesma dificuldade, a visualização e compreensão de uma figura espacial através da observação de uma representação plana no livro didático.

Existem no mercado conjuntos de sólidos geométricos feitos de acrílico ou madeira que podem auxiliar no ensino desse conteúdo. A possibilidade de os alunos manipularem esses objetos, podendo observá-los de várias posições pode ajudá-los a compreender melhor seus elementos. Porém, adquirir esses materiais demandam recursos financeiros nem sempre disponíveis, então uma alternativa é a construção dos sólidos em papel. Nesse caso pode ser elaborada uma atividade que, além de disponibilizar os sólidos geométricos para os alunos manipularem também permitirá que eles estudem suas planificações.

No caso de alunos e professores possuírem acesso à computadores, o *software GeoGebra* é uma ferramenta interessante para o ensino de diversos conceitos, incluindo os da geometria espacial. Ao falar sobre *softwares* de geometria dinâmica, Orzechowski e Lopes (2016) *apud* Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 83) afirmam que:

> Este suporte tecnológico permite o desenho, a manipulação e a construção de objetos geométricos, facilita a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal. Vários estudos empíricos destacam também que, na realização de investigações, a utilização dessas ferramentas facilita a recolha de dados e o teste de conjecturas, apoiando, desse

> modo, explorações mais organizadas e completas e permitindo que os alunos se concentrem nas decisões em termos do processo.

O *GeoGebra* é um *software* de código aberto, ou seja, pode ser utilizado, distribuído e modificado sem a necessidade de autorização de seu proprietário. Possui ferramentas que permitem trabalhar com geometria, álgebra, planilhas de cálculos, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos, e pode ser instalado no próprio computador ou utilizado *online*[2].

Um dos objetivos deste trabalho é apresentar uma atividade que utiliza a História da Matemática como recurso para trabalhar a parábola. A mesma é apresentada no Capítulo 6 e o *GeoGebra* foi utilizado em parte do desenvolvimento conforme a figura 4.4. Nesse momento da atividade é solicitado aos alunos construírem um cone usando o *software* *GeoGebra*.

Figura 4.4: *GeoGebra* utilizado em atividade.

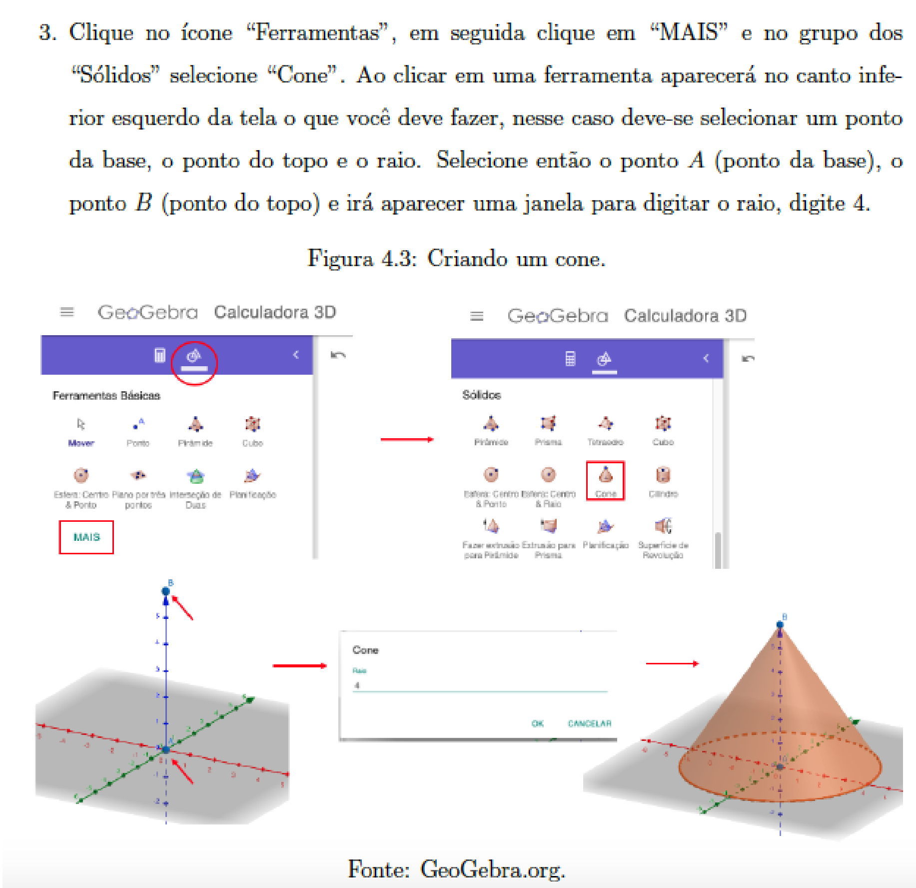

3. Clique no ícone "Ferramentas", em seguida clique em "MAIS" e no grupo dos "Sólidos" selecione "Cone". Ao clicar em uma ferramenta aparecerá no canto inferior esquerdo da tela o que você deve fazer, nesse caso deve-se selecionar um ponto da base, o ponto do topo e o raio. Selecione então o ponto A (ponto da base), o ponto B (ponto do topo) e irá aparecer uma janela para digitar o raio, digite 4.

Figura 4.3: Criando um cone.

Fonte: GeoGebra.org.

Fonte: Autoria própria, utilizando o *GeoGebra*.

[2]Através do site https://www.geogebra.org/ é possível baixar o instalador, utilizar a versão online e também conhecer um pouco mais sobre o GeoGebra.

Sabemos que existem diversos outros recursos disponíveis para realizar atividades com o uso de tecnologias, citamos apenas alguns para mostrar possibilidades de aprendizagem efetiva com vantagens, tanto para alunos, como para professores, assim como nos mostra os trabalhos de Kampff, Machado e Cavedini (2004), Fardo (2013), Orzechowski e Lopes (2016) e Romio e Paiva (2017), instigando assim os educadores a buscar outras opções.

O uso de tecnologias, juntamente com a História da Matemática em sala de aula, pode se tornar uma boa estratégia para o ensino da matemática. As pesquisas de Silva, Ribeiro e Silva (2013), Sousa (2016) e Brugnera e Dynnikov (2018) corroboram com essa afirmação. "Acredita-se que a utilização das TDIC's integrada à História da Matemática como recurso pedagógico, possibilita ao professor apresentar aos alunos o percurso histórico da formação de um conceito matemático e refletir sobre o seu desenvolvimento nos dias atuais" (BRUGNERA; DYNNIKOV, 2018, p. 1), sendo TDIC's a sigla para "tecnologias digitais de informação e comunicação".

O professor se torna capaz de elaborar uma aula diferenciada, criativa e interessante, possibilitando trabalhar questões importantes com os estudantes como a análise crítica sobre a sociedade e sobre o uso de recursos tecnológicos, além de promover uma maior integração entre aluno e conteúdo. O objetivo principal é o ensino da matemática, porém com esses recursos outras competências também são trabalhadas.

5 Uma história sobre as cônicas

Um ponto de partida válido para começarmos a discorrer a respeito da história sobre as cônicas é o século IV a.E.C., quando já se buscava soluções para os três problemas clássicos da antiguidade: *a quadratura do círculo*, *a trissecção do ângulo* e *a duplicação do cubo*. Isto porque essa busca, que originalmente era baseada apenas na utilização de régua não graduada e compasso, resultou em descobertas importantes para a matemática, principalmente para a geometria.

O problema da *quadratura do círculo* consiste em utilizando-se apenas régua não graduada e compasso determinar um quadrado que tenha a mesma área de um círculo dado; no caso da *trissecção do ângulo* busca-se, utilizando os mesmos recursos, dividir um ângulo em outros três de mesma medida; e finalmente, no caso da *duplicação do cubo* deseja-se construir um cubo cujo o volume é o dobro de outro cubo já conhecido, e novamente a construção deve ser feita apenas com régua e compasso. Após inúmeras tentativas concluiu-se que nenhum dos três problemas poderiam ser solucionados apenas com esses dois objetos.

> Os problemas clássicos permaneceram insolúveis por muito tempo, em torno de 2.200 anos, nada se podendo afirmar sobre as possibilidades de tais construções, apesar dos esforços para resolvê-los. Somente a partir dos trabalhos deixados por Évariste Galois (1811-1832), tais problemas foram finalmente resolvidos. [...] Os trabalhos de Galois respondiam à questão de resolubilidade de equações polinomiais por meio de radicais. Além disso, foi também uma ferramenta importante para dar uma resposta aos problemas clássicos gregos. A partir do conceito de extensão de corpos, foi possível obter resultados que garantiam a impossibilidade de algumas construções por meio de régua (sem marcas) e compasso. (NASCIMENTO; FEITOSA, 2007, p. 5-6).

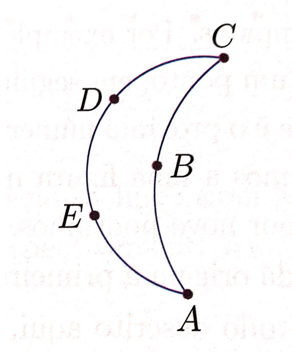
Faremos, de maneira resumida, uma breve revisão sobre os estudos de alguns matemáticos que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento dos conceitos relativos às cônicas. As informações foram retiradas do *site* Mactutor [1], mantido pela

[1] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/

University of St Andrews, sendo as referentes a Keppler e Desargues de acordo com Field (1995, 1999) e as referentes aos outros matemáticos conforme O'Connor e Robertson (1996, 1999, 2004).

- Hipócrates de Quios (470 - 410 a.E.C.) - realizou estudos sobre as lúnulas, "figura plana limitada por dois arcos circulares de raios diferentes" (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 70), mostrando ser possível "quadrá-las", o que foi um passo importante na busca pela resolução da quadratura do círculo.

Figura 5.1: Lúnula.



Fonte: Roque; Carvalho, 2012, p. 70.

Ele também teria reduzido o problema da duplicação do cubo para "dados dois segmentos, encontrar duas médias proporcionais entre eles" o que na linguagem atual seria: dados a e b, determinar x e y de maneira que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Dessas relações obtemos $\frac{a}{x} = \frac{y}{b} \Rightarrow xy = ab$, $\frac{x}{y} = \frac{y}{b} \Rightarrow y^2 = bx$ e $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 = ay$, o que hoje sabemos se referir respectivamente à equação de uma hipérbole retangular e de duas parábolas.

- Menaechmus (380 - 320 a.E.C) - teria sido o primeiro a mostrar que a elipse, a hipérbole e a parábola seriam obtidas ao seccionar por meio de um plano não paralelo à base, um cone agudo, um obtuso e um reto. Suas descobertas sobre as cônicas teriam surgido durante estudos para resolver o problema da duplicação do cubo. É importante ressaltar que acredita-se que os nomes elipse, hipérbole e parábola ainda não eram utilizados para identificar as seções determinadas por Menaechmus.

- Aristeus, o velho (370 - 300 a.E.C) - teria escrito uma obra (que se perdeu) de cinco volumes sobre seções cônicas.

- Euclides de Alexandria (325 - 265 a.E.C.) - além da organização da importantíssima obra *Os Elementos* teria escrito, dentre outros, um tratado de quatro volumes (que se perdeu) chamado *Cônicas*.

- Apolônio de Perga (262 - 190 a.E.C.) - escreveu uma obra importante chamada *Cônicas* (usando métodos parecidos aos dos *Elementos* de Euclides) onde aparecem conceitos que utilizamos ainda hoje ao estudarmos esse conteúdo. Apolônio teria sido o primeiro a mostrar ser possível obter as três cônicas a partir de um mesmo cone, alterando apenas a angulação pela qual o plano secciona o mesmo. Acredita-se que foi o primeiro a nomear as curvas como hipérbole, parábola e elipse, retirando os referidos nomes do *método de aplicação de áreas* presente também nos *Elementos* de Euclides. O estudioso buscou ainda solucionar os problemas da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo através das cônicas, a este último por exemplo, propôs uma solução utilizando a hipérbole. Temos conhecimento da obra de Apolônio pois, dos oito livros que compõem *As Cônicas*, os quatro primeiros ainda existem em grego. Além disso, um matemático árabe, Thabit ibn Qurra, traduziu para o árabe os livros quatro, cinco e seis e essas versões estão preservadas. Em 1710, Edmund Halley, produziu uma versão em latim dos sete primeiros livros. Infelizmente o oitavo e último livro está perdido [2].

- Hipátia de Alexandria (370 - 415 E.C.) - acredita-se que ela escreveu comentários sobre as *Cônicas* de Apolônio, buscando tornar mais claras as discussões presentes na obra.

- Anteminus de Trales (474 - 534 E.C.) - teria descrito a construção da elipse a partir de uma corda fixada em seus focos, construção essa utilizada nos dias atuais e presente inclusive em livros didáticos. Também estudou as propriedades focais da parábola.

- Johannes Kepler (1571 - 1630 E.C.) - credita-se a Kepler a descoberta de que as órbitas dos planetas são elipses, sendo o Sol um dos seus focos. Essa descoberta ficou conhecida como “Primeira lei de Kepler”.

[2] As informações sobre a obra As Cônicas estão disponíveis em http://ecalculo.if.usp.br/historia/apolonio_perga.htm.

- René Descartes (1596 - 1650 E.C.) - em sua obra *A Geometria* definiu conceitos importantes para o desenvolvimento da Geometria Analítica, dentro da qual atualmente estudamos as cônicas.

- Girard Desargues (1591 - 1661 E.C.) - em sua obra *Brouillon Project d'une atteinte aux évenements des rencontres du Cone avec un plan* (algo como "Esboço tosco da tentativa de tratar o resultado de um encontro entre um cone e um plano") estudou as propriedades das cônicas segundo a perspectiva da Geometria Projetiva.

- Blaise Pascal (1623 - 1662 E.C) - em um manuscrito sobre cônicas baseado na obra de Desargues, porém não concluído, produziu importantes teoremas para a Geometria Projetiva. Entre eles está o *teorema do hexagrama místico de Pascal* que fala sobre as características de um hexagrama inscrito em uma cônica.

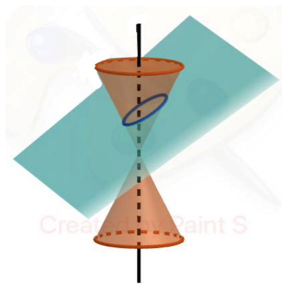
5.1 As construções de Apolônio

Conforme descrito anteriormente, Apolônio contribuiu para a história das cônicas, visto que mostrou ser possível obter a elipse, a hipérbole e a parábola por meio de interseções produzidas através de cortes feitos por planos, com diferentes inclinações, sobre uma única superfície cônica circular, reta ou não. Seus estudos são tão significativos que a abordagem utilizada hoje no ensino de cônicas é de sua autoria, e consiste em obter cada uma das curvas por meio das interseções entre um plano e um cone de duas folhas das seguintes formas[3]:

[3]Para criar as imagens dos cones, utilizamos além do *GeoGebra* o *Paint S*, que é uma ferramenta para criar desenhos e editar imagens. Mais informações podem ser encontradas em https://apps.apple.com/br/app/paint-s/id736473980?mt=12.

- Caso o plano corte todas as geratrizes do cone sobre uma mesma folha, obtêm-se a elipse;

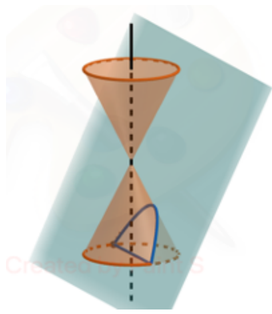
Figura 5.2: Plano cortando o cone em todas as geratrizes.



Fonte: Autoria própria, utilizando o *GeoGebra* e *Paint S*.

- Caso o plano corte o cone paralelamente a uma das geratrizes, obtêm-se a parábola;

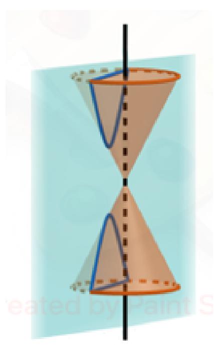
Figura 5.3: Plano cortando o cone paralelamente a uma das geratrizes.



Fonte: Autoria própria, utilizando o *GeoGebra* e *Paint S*.

- Caso o plano corte as duas folhas do cone, obtêm-se a hipérbole.

Figura 5.4: Plano cortando as duas folhas do cone.



Fonte: Autoria própria, utilizando o *GeoGebra* e *Paint S*.

Apolônio, ao abordar as cônicas, geometricamente, utiliza o *método de aplicação de áreas*, portanto, para entendermos suas construções, se torna necessário fazermos uma pequena apresentação desse método. É importante ressaltar que as construções dessa seção foram baseadas no livro da coleção PROFMAT *Tópicos de História da Matemática* de Tatiane Roque e João Bosco Pitombeira de Carvalho.

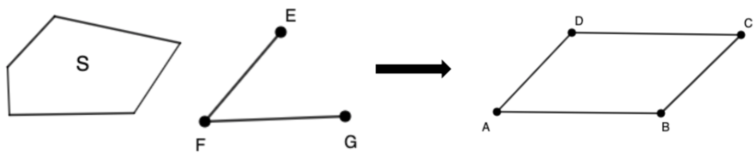
5.1.1 A aplicação de áreas

Na terminologia grega, *aplicar* uma figura (poligonal) a um segmento dado, significa construir essa figura de forma que o segmento de reta em questão seja um de seus lados. Normalmente é exigido que a aplicação seja feita de acordo com algumas condições, como por exemplo, que a nova figura construída seja um paralelogramo ou tenha um ângulo congruente a um ângulo dado.

Para alcançarmos nosso objetivo, vamos apresentar de maneira simplificada os três tipos de aplicações que os gregos utilizavam, aplicações estas que deram os nomes pelos quais identificamos as cônicas nos dias atuais. Neste trabalho nos limitaremos ao caso em que a figura aplicada é um paralelogramo, pois foi o qual tivemos acesso através do livro *Tópicos de História da Matemática.*

- Aplicações parabólicas (aplicações exatas): um polígono S e um ângulo $E\hat{F}G$ são dados e aplica-se a um segmento $\overline{AB}$ um paralelogramo $ABCD$ com área igual à de S e pelo menos um ângulo congruente a $E\hat{F}G$.

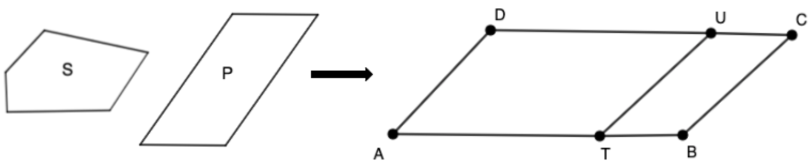
Figura 5.5: Aplicação parabólica.



Fonte: Reprodução baseada em Roque e Carvalho (2012, p. 159), utilizando o *GeoGebra.*

- Aplicações elípticas (aplicações com falta): um polígono S, um paralelogramo P e os ângulos do paralelogramo a ser aplicado são dados. Aplica-se a um segmento $\overline{AB}$ um paralelogramo $ATUD$ com área igual à de S e ângulos congruentes aos dados, de maneira que o que *falta* para cobrir todo segmento $\overline{AB}$ seja um paralelogramo semelhante a P.

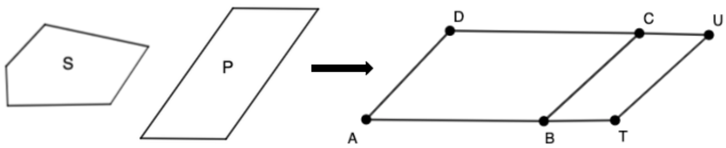
Figura 5.6: Aplicação elíptica.



Fonte: Reprodução baseada em Roque e Carvalho (2012, p. 160), utilizando o *GeoGebra*.

- Aplicações hiperbólicas (aplicações com excesso): Um polígono S, um paralelogramo P e um ângulo são dados. Aplica-se a um segmento $\overline{AB}$ um paralelogramo $ATUD$ com o ângulo dado, com área igual à de S, de maneira que ele *exceda* o segmento $\overline{AB}$, e a figura excedente seja semelhante ao paralelogramo P.

Figura 5.7: Aplicação hiperbólica.



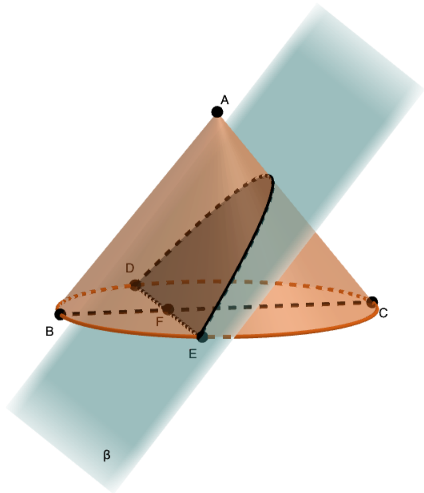
Fonte: Reprodução baseada em Roque e Carvalho (2012, p. 161), utilizando o *GeoGebra*.

Agora que tivemos uma pequena introdução sobre a aplicação de áreas, veremos como Apolônio construiu a parábola e como utilizou o conceito de aplicações.

5.1.2 Construção da parábola

Como já descrito, quando um plano intersecta um cone paralelamente a uma de suas geratrizes, a interseção formada entre os dois será uma parábola. Seja então um cone com vértice A cortado por um plano β paralelamente ao segmento $\overline{AB}$, conforme ilustrado na figura 5.8. Seja o triângulo ABC, pertencente a um plano que corta o cone passando pelo seu eixo (reta que liga o vértice A ao centro da base), perpendicularmente a $\overline{DE}$, sendo $\overline{DE}$ a interseção do plano β com a base do cone. O ponto de encontro entre os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ é o ponto F.

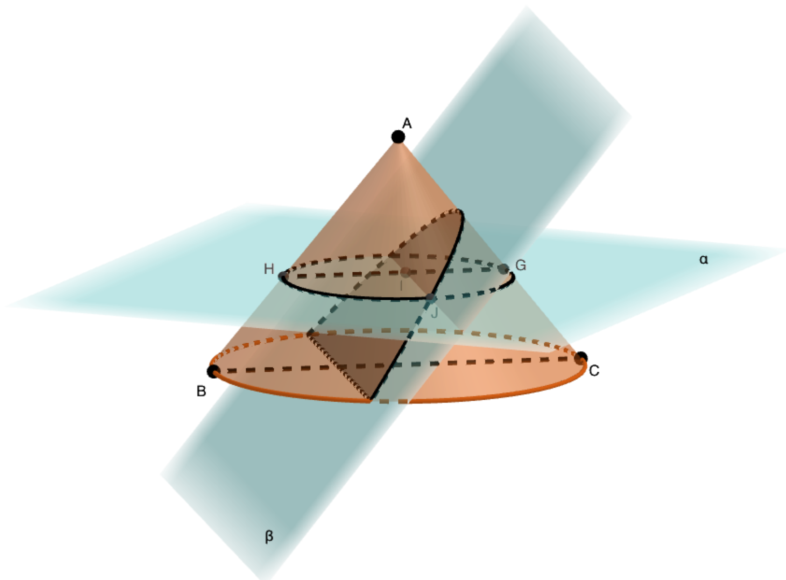
Figura 5.8: Cone de vértice A cortado pelo plano β.



Fonte: Autoria própria, utilizando o *GeoGebra*.

Considere agora um plano α paralelo à base que corta o cone em uma circunferência cujo diâmetro é $\overline{GH}$. Seja o ponto I o ponto de interseção entre β e $\overline{GH}$ ($I \in \alpha$ pois $GH \in \alpha$) e o ponto J correspondente à interseção entre o cone, o plano α e o plano β. Observe que devido ao fato de o ponto J pertencer à interseção do plano β com o cone, consequentemente J pertence à parábola formada. Além disso como os pontos I e J pertencem aos planos β e α, então o segmento $\overline{IJ}$ está na interseção dos dois planos.

Figura 5.9: Interseção entre o plano α, o plano β e o cone.

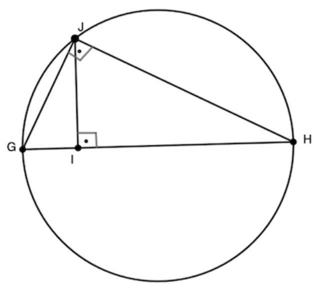


Fonte: Autoria própria, utilizando o *GeoGebra*.

O ponto J apresentado é importante devido ao fato de pertencer à parábola. De acordo com Roque e Carvalho (2012, p. 163) “um dos aspectos mais importantes do método usado por Apolônio, [...], é a caracterização da cônica por meio de um *sintoma*. Trata-se de uma relação entre grandezas que caracteriza os pontos que estão sobre a cônica”.

Ao observarmos a circunferência formada pela interseção do plano α com o cone, podemos afirmar que o ângulo $G\hat{J}H$ é reto pois é um ângulo inscrito em uma circunferência cujas extremidades formam um arco de 180°. O ângulo $J\hat{I}G$ também mede 90°, pois, o plano α é paralelo à base do cone e consequentemente $\overline{IJ}$ // $\overline{DE}$, já que $\overline{IJ}$ e $\overline{DE}$ pertencem respectivamente às interseções entre β e o plano α, e β e a base do cone. Analogamente, $\overline{GH}$ // $\overline{BC}$, pois pertencem respectivamente às interseções entre o plano que contém ABC e α, e entre o plano que contém ABC e a base do cone. Como $\overline{DE} \perp \overline{BC}$, $\overline{DE}$ // $\overline{IJ}$ e $\overline{BC}$ // $\overline{GH}$, então $\overline{IJ} \perp \overline{GH}$, conforme apresentado na figura 5.10.

Figura 5.10: Circunferência de diâmetro $\overline{GH}$.



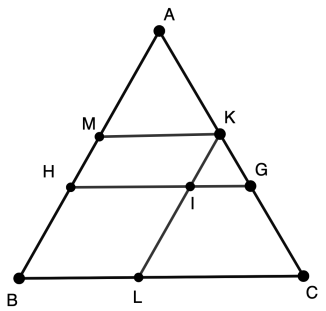
Fonte: Autoria própria, utilizando o *GeoGebra*.

Podemos então utilizar uma das relações métricas do triângulo retângulo, “o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa”, e chegar na seguinte relação:

$$\overline{IJ}^2 = \overline{HI} \times \overline{IG} \tag{5.1}$$

Vamos agora observar o triângulo ABC descrito no primeiro parágrafo desta seção sobre a construção da parábola. Seja $\overline{KL}$ o segmento pelo qual o plano β corta ABC e M um ponto sobre o lado $\overline{AB}$ de maneira que $\overline{MK}$ // $\overline{GH}$ conforme a figura 5.11.

Figura 5.11: Triângulo ABC.



Fonte: Autoria própria, utilizando o *GeoGebra*.

Os ângulos $B\hat{A}C$ e $L\hat{K}C$ são correspondentes e portanto congruentes, assim como o quarteto $A\hat{M}K$, $A\hat{B}C$, $K\hat{L}C$, $K\hat{I}G$ e o trio $A\hat{K}M$, $A\hat{G}H$, $A\hat{C}B$. Com isso, podemos afirmar que os triângulos ABC, AMK, KIG e KLC são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo) e assim, construirmos a seguinte relação

$$\frac{\overline{MK}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad e \quad \frac{\overline{IG}}{\overline{KI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}. \tag{5.2}$$

Como $\overline{MK}//\overline{HI}$ e $\overline{MB}//\overline{KL}$, podemos afirmar que $\overline{MK} = \overline{HI}$ (observe a figura 5.11), e substituindo $\overline{MK}$ por $\overline{HI}$ em (5.2) obtemos

$$\frac{\overline{HI}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\overline{HI}}{\overline{AK}} \times \frac{\overline{IG}}{\overline{KI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{IG}}{\overline{KI}}.$$

Mas $\dfrac{\overline{IG}}{\overline{KI}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, então

$$\frac{\overline{HI}}{\overline{AK}} \times \frac{\overline{IG}}{\overline{KI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{HI} \times \overline{IG}}{\overline{AK} \times \overline{KI}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC} \times \overline{AB}}. \tag{5.3}$$

Seja P um segmento da sessão cônica tal que $\frac{P}{\overline{AK}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC} \times \overline{AB}}$. De de (5.3), temos

$$\frac{P}{\overline{AK}} = \frac{\overline{HI} \times \overline{IG}}{\overline{AK} \times \overline{KI}} \Rightarrow \frac{P \times \overline{AK}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{HI} \times \overline{IG}}{\overline{KI}} \Rightarrow P = \frac{\overline{HI} \times \overline{IG}}{\overline{KI}}$$

.

E, por (5.1), obtemos

$$P = \frac{\overline{IJ}^2}{\overline{KI}} \Rightarrow \overline{IJ}^2 = P \times \overline{KI}. \tag{5.4}$$

A equação (5.4) é o *sintoma* da parábola definida pela interseção do plano β com o cone de vértice A. Ou seja, a parábola é o lugar geométrico dos pontos J tais que $\overline{IJ}^2 = P \times \overline{KI}$. Para Apolônio, $\overline{IJ}^2 = P \times \overline{KI}$, significa que o quadrado de lado $\overline{IJ}$ aplicado *parabolicamente* sobre P fornece um retângulo de lado $\overline{KI}$.

Alguns autores apresentam discussões sobre outros estudos de Apolônio, como Silva e Santos (2016) que discorrem sobre os conteúdos presentes nos volumes de *As Cônicas*, e Santos e Trevisan (2004), que contextualizam e resolvem *o problema de Apolônio* que consiste em determinar o círculo tangente a três círculos dados, ou possíveis degenerações, e envolve cônicas em sua resolução. Porém, preferimos trabalhar com a construção da parábola feita pelo matemático, devido à mesma estar descrita no livro *Tópicos de História da Matemática* ao qual tivemos acesso. Além disso, os alunos já tiveram um primeiro contato com essa curva na segunda série do ensino médio ao estudar funções do segundo grau, e esse conhecimento prévio pode ser válido durante os momentos da atividade em que são convidados a solucionar alguns problemas.

6 Uma proposta de atividade usando a História da Matemática para ensinar cônicas

Todas as discussões anteriores foram feitas com a intenção de embasar e justificar a elaboração de uma atividade pautada na História da Matemática que possa ser utilizada durante o ensino de cônicas (no nosso caso selecionamos a parábola), que geralmente acontece na terceira série do ensino médio. A necessidade de ensinar esse conteúdo aparece de forma implícita na BNCC:

> Os estudantes têm também a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico, tendo em vista as demandas para identificar a relação de dependência entre duas grandezas em contextos significativos e comunicá-la, utilizando diferentes escritas algébricas, além de resolver situações-problema por meio de equações e inequações. Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança. [...] HABILIDADE (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composição destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). [...] (EM13MAT302) Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais. [...] (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. [...] (EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital. (BRASIL, 2018, p. 527-541).

Vale lembrar que alguns livros didáticos e exercícios sobre cônicas, relacionam as curvas com antenas parabólicas e obras do arquiteto Oscar Niemeyer (1907-2012).

A elaboração de instrumentos didáticos que busquem outras abordagens que não a tradicional é importante, assim como exposto nos capítulos 3 e 4 deste trabalho. Lopes (2011, p. 25), ao fazer uma análise em livros utilizados no ensino superior, afirma que "através da análise dos diversos livros de Geometria Analítica e Cálculo, [...], observa-se que o estudo apresentado nestes textos sobre as cônicas tratam estas curvas, em sua grande maioria, apenas sob o ponto de vista de equações algébricas", e normalmente é com essa visão que nós professores ingressamos na sala de aula para trabalhar esse conteúdo.

Buscando uma nova abordagem para o estudo da parábola, elaboramos uma atividade que utiliza a História da Matemática como estratégia de ensino. Nos próximos parágrafos iremos descrever o passo-a-passo da montagem desse material, e a versão finalizada pronta para impressão e aplicação pode ser encontrada nos apêndices.

Visando construir um instrumento de ensino de boa qualidade e que alcance o objetivo, que é o aprendizado, seguimos as orientações descritas no livro "Tendências metodológicas no ensino de matemática" do professor Iran Abreu Mendes. Nele, Mendes (2008, p. 40) afirma que:

> [...]o interesse pela História como ferramenta de ensino tem crescido bastante em virtude da busca de contextualização e inserção da Matemática em um meio e em uma época bem definida.[...]acreditamos que, de acordo com o nível de complexidade do conhecimento a ser construído pelos estudantes, independente do nível escolar em que se encontrem, é adequado o uso de atividades que favoreçam a interatividade entre o sujeito e o seu objeto de conhecimento, sempre em uma perspectiva contextualizadora que evidencie três aspectos do conhecimento: o cotidiano, o escolar e o científico, principalmente quando são rearticulados ao longo do processo de manuseio de qualquer componente da atividade (o material manipulativo, as orientações orais e escritas e o diálogo estabelecido durante todo o processo ensino-aprendizagem, etc).

Com o tema da atividade já definido e depois do estudo dos assuntos a serem abordados, partimos para a confecção do material que seria utilizado pelos alunos. Primeiramente decidimos qual seria o título da mesma, título este que deveria causar curiosidade e interesse aos estudantes, por ser, provavelmente, o local por onde iniciariam a leitura. Decidimos nomeá-la como *"A parábola da peste, do Deus e do Matemático"*, fazendo um jogo de palavras com o gênero textual *parábola*, uma referência ao problema da duplicação do cubo ao citarmos *a peste e o Deus* e também uma referência ao *matemático* Apolônio, detentor das construções que serão utilizadas no decorrer da atividade.

Os próximos itens a serem definidos foram os objetivos, que deveriam ser claros para que os estudantes tenham conhecimento desde o início sobre o que será solicitado a eles. Dividimos esse tópico em "geral" e "específicos":

- Objetivo geral: Permitir que os alunos por meio da investigação, resolução de problemas e orientação determinem o "sintoma" da parábola através das construções de Apolônio de Perga (262 - 190 a.E.C).

- Objetivos específicos:

  1) Conhecer e investigar soluções para os três problemas da antiguidade, com destaque para o problema da duplicação do cubo;
  2) Construir, utilizando o *software GeoGebra*, o cone e um plano que o intersecta paralelamente a uma de suas geratrizes, resultando como interseção entre os dois a parábola.
  3) Relembrar os casos de semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo e retas paralelas cortadas por uma transversal, para utilizá-los no triângulo obtido a partir de um corte no cone conforme a construção de Apolônio;
  4) Solicitar aos alunos que determinem um sintoma da curva descrita, através do corte feito por um plano, conforme descrição feita na atividade.

A intenção do objetivo específico número 1 é instigar a curiosidade dos alunos, através da contextualização histórica, mostrando ainda que de acordo com o problema da duplicação do cubo e com a crença das pessoas da época, a matemática poderia ser utilizada para salvá-las da peste. Com relação ao número 2, deseja-se relembrar alguns conceitos, devido ao fato de os mesmos serem utilizadas nas construções de Apolônio. O objetivo de número 3 foi criado para que o estudante tenha a oportunidade de visualizar que a interseção de um cone e um plano paralelo à sua geratriz é a parábola. O fato de a parábola ser o resultado dessa interseção, geralmente aparece no início da explicação deste conteúdo nos livros didáticos, mas na nossa atividade queremos que o próprio aluno faça essa construção e observe o resultado. Já com o número 4, esperamos que com a tentativa de reproduzir as construções de Apolônio, o aluno reconheça as características (sintomas) de um ponto pertencente a parábola por meio de uma visão geométrica, e não algébrica, como trabalha-se normalmente nas salas de aula.

No decorrer de seu texto, Mendes (2008, p. 43) afirma que outra seção da atividade que deve ser elaborada com atenção é o "conteúdo histórico" que:

> É um elemento motivador e gerador da matemática escolar, por esclarecer os por quês matemáticos. É nas informações históricas que estão plantadas as raízes cotidiana, escolar e científica da matemática a ser (re)construída pelos estudantes e por isso precisam ser bem explorados pelo professor. Por provocar a curiosidade dos alunos, devemos explicitar fatos e problemas que historicamente provocaram a indagação e o empenho humano na sua organização sistemática e disseminação até hoje. Essa parte servirá de suporte para o desenvolvimento da atividade e poderá conduzir o aluno a um diálogo interativo com outros aspectos da matemática investigada.

Buscando atender a essas orientações, possibilitando ainda o ensino através da sala de aula invertida, o aluno começará a atividade sendo orientado a pesquisar sobre os três problemas clássicos da antiguidade: *a quadratura do círculo*, *a trissecção do ângulo* e *o problema da duplicação do cubo*, sendo este último o tema central da primeira parte. Uma sugestão é o professor solicitar a pesquisa como tarefa para a próxima aula, conforme abaixo:

- Para casa: faça uma pesquisa histórica sobre os três problemas clássicos da antiguidade, busque informações sobre os matemáticos que os estudaram na época em que surgiram, se conseguiram determinar as soluções, como o fizeram etc..

Se possível e caso não vá causar transtornos ao professor, solicitar que os alunos levem régua e compasso na aula seguinte. Nesta, o aluno será convidado a utilizar os conhecimentos adquiridos na pesquisa, por meio da resolução de problemas. Faremos a apresentação dos três problemas e pretendemos nesse momento instigar a curiosidade dos estudantes mostrando que acreditava-se que a resolução do *problema da duplicação do cubo* poderia salvar vidas. A busca pela resposta por estudiosos da época ilustra o "desempenho humano" que Mendes citou ser importante destacar. Na primeira parte da atividade, que deve levar duas aulas para ser desenvolvida, essa situação será apresentada da seguinte forma:

Atividade - Parte 1: *O problema da duplicação do cubo*

Na Grécia Antiga surgiram três problemas matemáticos, que devido aos estudos e a matemática desenvolvida durante as buscas por suas resoluções, se tornaram muito importantes. São eles: *A quadratura do círculo*, *A trissecção do ângulo* e *O problema da duplicação do cubo*. Os três são interessantes e por isso vamos fazer uma breve apresentação dos mesmos.

A quadratura do círculo: o problema da quadratura do círculo consiste em, utilizando apenas régua não graduada e compasso, determinar um quadrado de maneira que a sua área seja igual a área de um círculo dado.

A trissecção do ângulo: este problema consiste em, também utilizando apenas régua não graduada e compasso, dividir um ângulo dado em outros três ângulos de mesma medida.

A duplicação do cubo: dado um cubo, construir com régua não graduada e compasso, outro cubo, cujo volume seja o dobro do volume do primeiro. Sobre este problema sabemos de duas lendas, as quais são descritas abaixo:

- O rei Minos ordenou que construíssem um túmulo para seu falecido filho Glauco. Quando a construção, que tinha o formato de um cubo, foi finalizada e o rei soube que possuía 100 pés de altura, afirmou que a mesma era demasiadamente pequena para uma residência real e decidiu que deveria ter o dobro do tamanho. Para isso, exigiu que o formato fosse mantido, mas que suas arestas fossem duplicadas.
- Em 500 a.E.C. a população de Atenas sofria com uma peste que vinha causando muitas mortes. Em busca de uma solução para esse mal, habitantes foram até o oráculo do deus Apolo, em Delfos. Ao ouvir o pedido dos atenienses o oráculo afirmou que a peste seria finalizada caso o altar do deus (que possuía um formato cúbico) fosse duplicado. Assim foi feito, o altar teve suas dimensões dobradas, porém, ainda assim a peste continuou.

Perguntas:

1. Analisando os problemas da quadratura do círculo e da trissecção do ângulo, e utilizando os conhecimentos adquiridos na sua pesquisa, descreva detalhadamente como você os solucionaria.

2. Você acabou de conhecer duas versões para um mesmo problema: duplicar o cubo. O que entende por isso, por duplicar o cubo? Explique detalhadamente sua compreensão do problema.

3. Descreva sua opinião científica sobre as soluções apresentadas em cada lenda. Ou seja:

   a) Qual sua opinião científica sobre a solução "suas arestas fossem duplicadas"?

   b) Qual sua opinião científica sobre a solução "o altar teve suas dimensões dobradas, porém, ainda assim a peste continuou"?

4. Se fosse solicitado a você solucionar *o problema da duplicação do cubo*, explique cientificamente, como o solucionaria.

Apesar de em um primeiro momento as perguntas parecerem simples, algumas questões podem ser analisadas e trabalhadas a partir das respostas dos alunos. Ao perguntarmos aos estudantes suas opiniões sobre as soluções apresentadas, estamos os instigando a utilizar interpretação de texto; a reconhecer que as passagens "ter o dobro do tamanho" e "altar do deus fosse duplicado" referem-se a dobrar o volume do cubo; a investigar se existe um problema nas resoluções dadas ou se as mesmas são satisfatórias; a elaborar um texto ou esquema que justifique sua resposta. Já ao ser solicitado que o aluno apresente a sua solução para o problema, estamos dando autonomia a ele, visto que não foi sugerido nenhum caminho a ser seguido para elaborar essa resposta.

Após os estudantes responderem a parte 1 da Atividade, será feita uma socialização. Os alunos serão convidados a apresentar suas resoluções (oralmente ou no quadro) e discutiremos os resultados obtidos. Essa dinâmica será realizada três vezes, uma para cada pergunta. A intenção nesse momento é colocar o aluno para apresentar e defender o seu ponto de vista, mostrá-lo que o desenvolvimento construído não ficará apenas no papel para o professor verificar, que o seu conhecimento é importante. Discutir a matemática de uma maneira diferente da tradicional em que o professor está a frente da sala de aula, e porque não fazer uma referência às discussões que os grandes matemáticos talvez tenham realizado em outros tempos. Os resultados dessa primeira parte serão retomados ao final da atividade, quando espera-se que os alunos tenham recursos suficientes para reconhecer que a solução do problema da duplicação do cubo tem ligação com as cônicas. As perguntas respondidas pelos estudantes e as discussões realizadas compõem a "operacionalização da atividade", que tem sua relevância descrita por Mendes (2008, p. 43) da seguinte forma:

> Os procedimentos metodológicos orientarão os estudantes no sentido de desenvolverem as atividades históricas através de etapas que os conduzam a uma compreensão relacional do conteúdo matemático a ser aprendido por eles. É através dessas orientações metodológicas que os estudantes vivenciarão cada uma das fases da atividade (Manipulação / experimentação; Verbalização/ comunicação oral e Simbolização/abstração). A linguagem deve ser clara e objetiva, dando aos estudantes liberdade para explorarem as situações desafiadoras propostas e testá-las até alcançar o conhecimento previsto.

Conforme citado anteriormente, os resultados dessa primeira parte serão arquivados e retomados ao final, quando espera-se que os alunos já tenham conhecimentos suficientes que os levem a relacionar a solução do problema da *duplicação do cubo* com a parábola. A próxima etapa da atividade será centrada na construção dessa curva. Pretendemos nesse momento que o estudante construa a parábola cortando um cone paralelamente à uma de suas geratrizes com o auxílio do *software GeoGebra*. Nossa intenção aqui é que ele entenda de onde vem essa curva que estamos analisando. Como o cone é uma figura espacial, acreditamos que ao construí-lo em um *software* que o permite ter essa visão das três dimensões e também ter a oportunidade de manipular a construção (por exemplo girando a figura para observá-la de outros pontos de vista), será mais eficiente para o entendimento do aluno em relação à observação da figura em duas dimensões em um livro ou no quadro.

> Quando decidimos que a tecnologia informática vai ser incorporada em nossa prática, temos que, necessariamente, rever a relevância da utilização de tudo o mais que se encontra disponível. [...] é preciso considerar qual é o objetivo da

> atividade que queremos realizar e saber se ela não pode ser desenvolvida com maior qualidade pelo uso, por exemplo, de um software específico (BORBA; PENTADO, 2005, p. 64 *apud* ORZECHOWSKI; LOPES, 2016, p. 4).

A competência específica 5 da Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio também nos auxilia a entender a importância desse trecho da atividade, pois nela afirma-se que "os estudantes deverão ser capazes de fazer induções por meio de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais". Desse modo, a segunda parte da atividade, que pretendemos realizar em duas aulas, será apresentada aos alunos conforme abaixo.

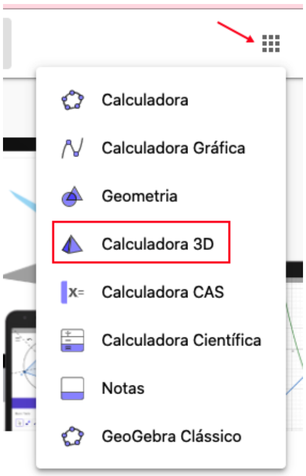
Atividade - Parte 2: *A construção da parábola*

1. Vocês já ouviram falar de parábola? Se sim, o que podem me dizer a este respeito?
2. Já usaram régua e compasso para construir uma parábola? Como devemos fazer? Descrevam o passo a passo.
3. Vamos usar um *software* dinâmico para fazermos a construção desta curva?

Você já ouviu falar do *GeoGebra*? É um *software* de matemática dinâmica que possui diversas funções, como por exemplo a construção de gráficos e de figuras geométricas. Você pode fazer o seu *download* ou utilizá-lo online no *site* www.geogebra.org e ele irá nos auxiliar a entender como a interseção de um cone e um plano resulta em uma curva chamada "parábola". Os passos abaixo vão guiá-lo na construção, mas caso tenha alguma dúvida chame o professor para auxiliá-lo.

1. Acesse o *site* www.geogebra.org, clique no quadrado que se encontra no canto superior direito e selecione "Calculadora 3D".

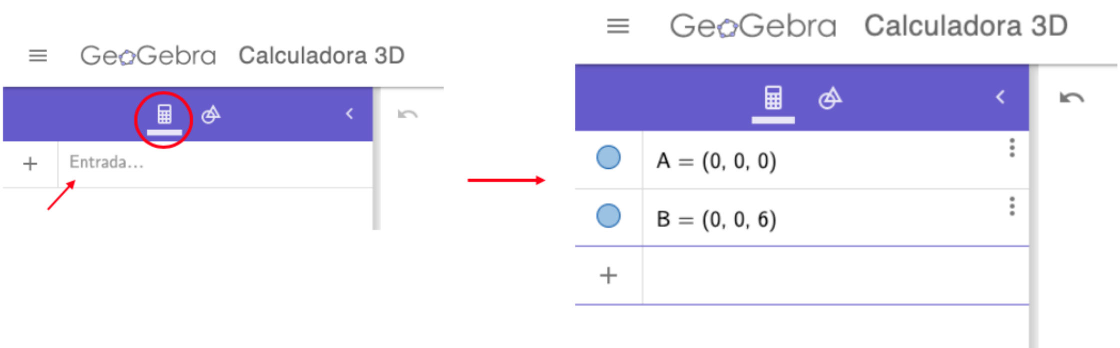
Figura 6.1: Acessando o *GeoGebra*.



Fonte: Autoria própria, utilizando o GeoGebra.org.

2. Primeiramente vamos criar os pontos A e B. Clique no ícone "Álgebra" e no campo "Entrada" digite $A = (0, 0, 0)$, aperte o *enter* e digite $B = (0, 0, 6)$.

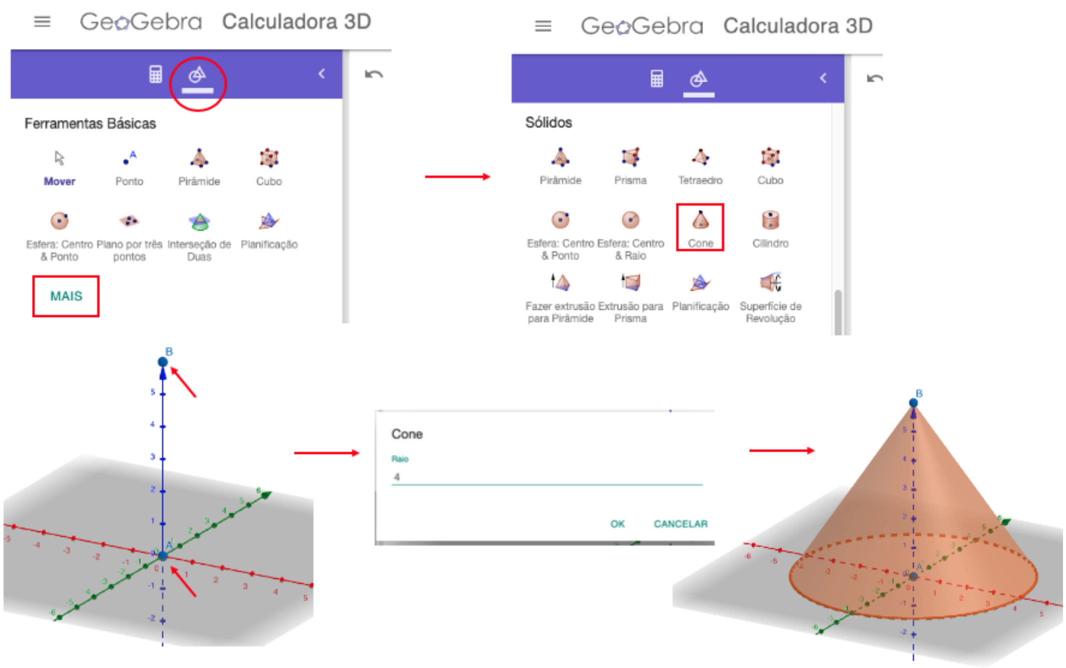
Figura 6.2: Criando os pontos A e B.



Fonte: Autoria própria, utilizando o GeoGebra.org.

3. Clique no ícone "Ferramentas", em seguida clique em "MAIS" e no grupo dos "Sólidos" selecione "Cone". Ao clicar em uma ferramenta aparecerá no canto inferior esquerdo da tela o que você deve fazer, nesse caso deve-se selecionar um ponto da base, o ponto do topo e o raio. Selecione então o ponto A (ponto da base), o ponto B (ponto do topo) e irá aparecer uma janela para digitar o raio, digite 4.

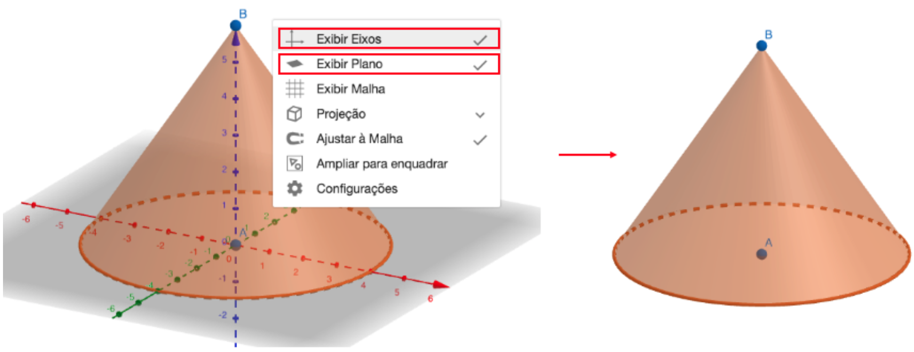
Figura 6.3: Criando um cone.



Fonte: Autoria própria, utilizando o GeoGebra.org.

4. Para que a figura fique mais limpa, vamos parar de exibir o plano e os eixos. Para isso clique com o botão direito do mouse em alguma parte em branco da tela e desmarque as opções "exibir eixos" e "exibir plano".

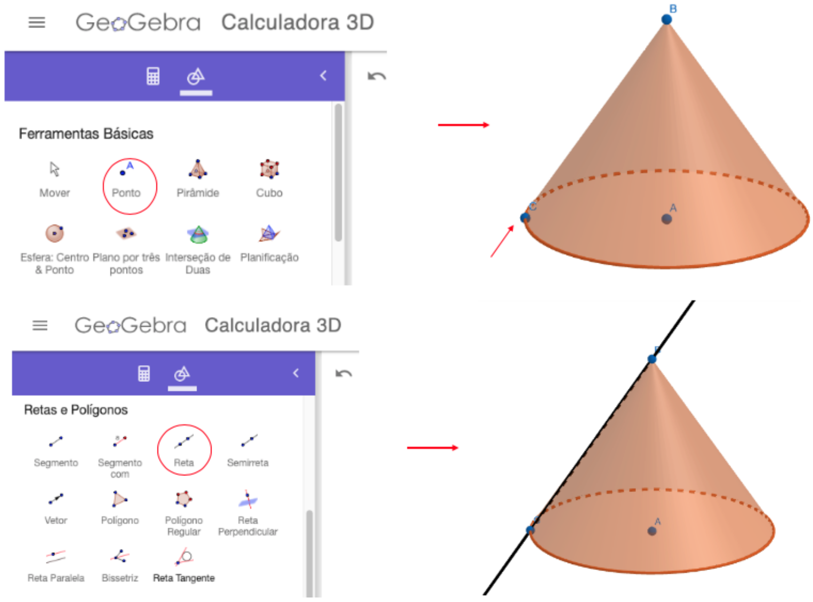
Figura 6.4: Deixando de exibir o plano e os eixos.



Fonte: Autoria própria, utilizando o GeoGebra.org.

5. Nas ferramentas selecione "Ponto" e marque um ponto que pertença à circunferência da base do cone. Depois, selecione "Reta", selecione os pontos B e C (C é o ponto sobre a circunferência da base), traçando assim a reta BC. Obs.: Lembre-se das nossas aulas sobre o Cone e observe se você consegue identificar o nome dessa reta.

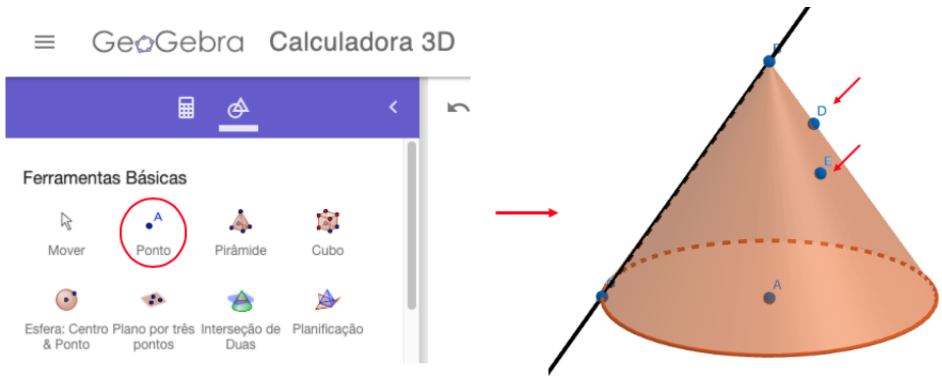
Figura 6.5: Construindo a reta BC.



Fonte: Autoria própria, utilizando o GeoGebra.org.

6. Selecione novamente a ferramenta "Ponto" e marque dois pontos sobre a superfície lateral do cone que não pertençam à reta BC.

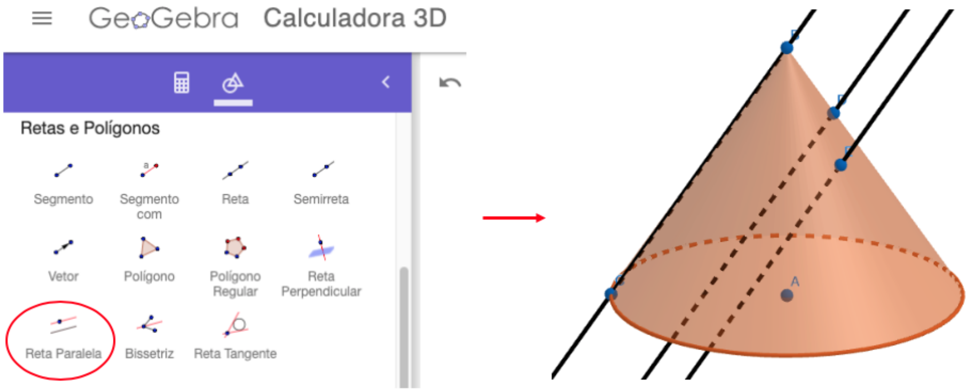
Figura 6.6: Criando dois pontos que não pertencem à BC.



Fonte: Autoria própria, utilizando o GeoGebra.org.

7. Nas ferramentas selecione "Reta Paralela", clique sobre a reta BC e em um dos pontos marcados sobre a superfície lateral do cone. Repita o procedimento para o outro ponto marcado.

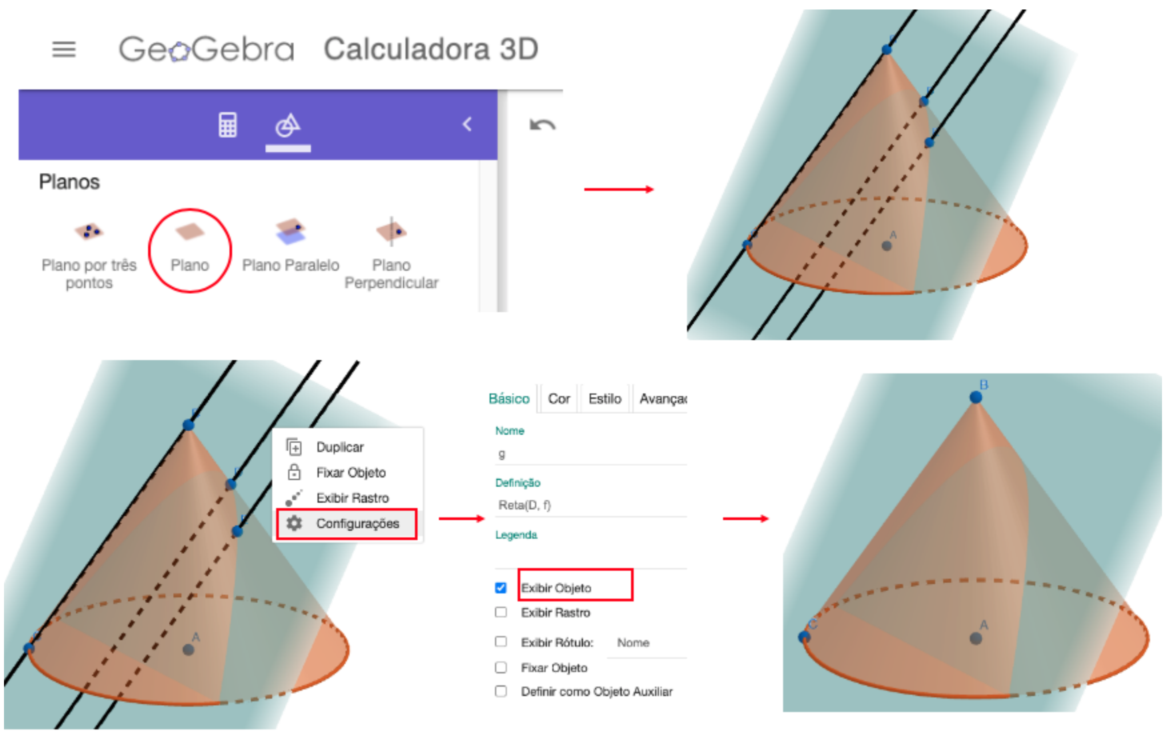
Figura 6.7: Criando retas paralelas à BC.



Fonte: Autoria própria, utilizando o GeoGebra.org.

8. Selecione a ferramenta "Plano" e clique sobre as duas retas que você acabou de traçar (as duas retas diferentes da reta BC) e irá aparecer um plano. Para que o desenho fique mais limpo, clique com o botão direito sobre uma das retas, clique em "Configurações" e desmarque a opção "Exibir Objeto". Repita esse procedimento nas outras duas retas e nos pontos sobre a superfície lateral do cone.

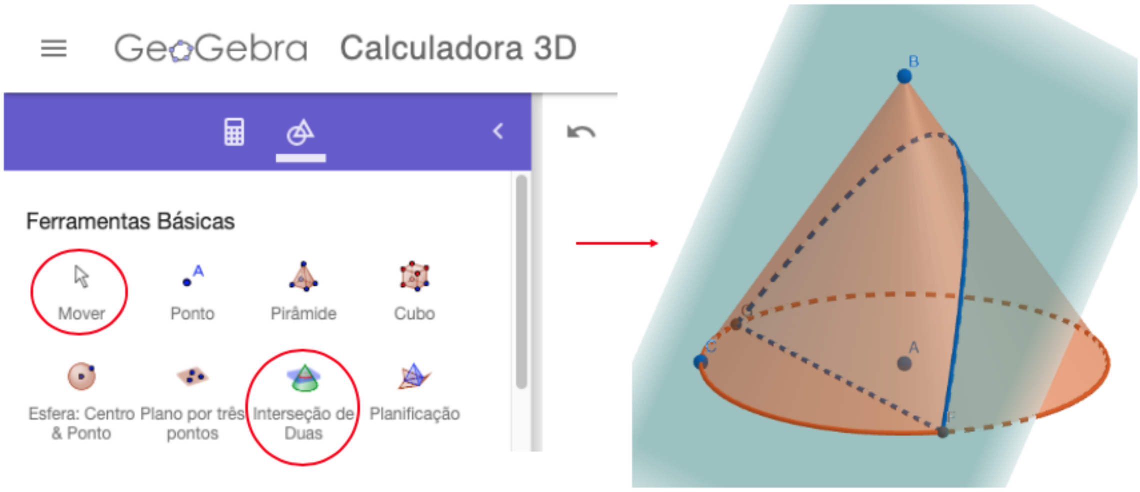
Figura 6.8: Criando um plano paralelo à BC.



Fonte: Autoria própria, utilizando o GeoGebra.org.

9. Finalmente selecione a ferramenta "Interseção de duas superfícies" e clique sobre o cone e sobre o plano, você verá aparecer a parábola. Você pode clicar na ferramenta "Mover" e ao clicar e segurar o mouse sobre a figura, movimentar e observar a construção de outros ângulos.

Figura 6.9: Criando a parábola.



Fonte: Autoria própria, utilizando o GeoGebra.org.

Agora que você fez a construção da parábola, ficou mais claro o porquê ela é classificada como uma cônica? Justifique sua resposta.

Após essa atividade seria interessante promover uma discussão com os alunos sobre o que acharam da construção e convidá-los a comparar o sólido feito no *GeoGebra* (que possibilita a manipulação do cone, e consequentemente sua observação de diversas posições), com as figuras desenhadas com régua e compasso ou do material didático, que correspondem a essa mesma composição, porém desenhadas no papel, permitindo a observação por apenas um ponto de vista. Caso os alunos não tenham conhecimento da construção com régua e compasso, o professor pode sugerir que eles pesquisem maneiras de fazê-la.

Nesse instante os estudantes terão desfrutado de um primeiro contato com o passado, com a História da Matemática (primeira parte da atividade) e com o moderno, com a tecnologia (segunda parte da atividade). A próxima ação será reunir passado e presente utilizando o software para esboçar o triângulo utilizado por Apolônio (figura 5.11) e trabalhar com os alunos a forma como o matemático chegou ao "sintoma" da parábola.

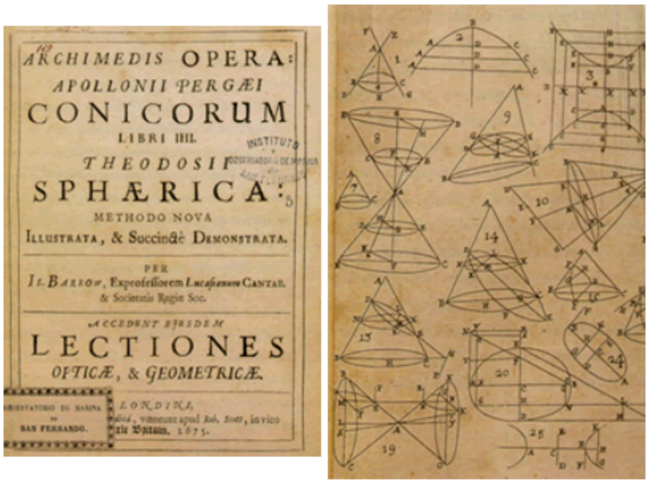
> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos (BRASIL, 2018, p. 298).

Na terceira e última parte da Atividade, iremos utilizar as discussões de Apolônio de Perga para mostrar que todos os pontos da parábola tem uma mesma característica. Nesse momento será interessante apresentar quem foi esse matemático e também o significado de "sintoma" utilizado pelo mesmo (descrito no capítulo 5), pois esse conceito aparecerá durante o desenvolvimento. A partir dessa dedução, conseguiremos relacionar os pontos que pertencem a curva com os resultados obtidos nas resoluções do *problema da duplicação do cubo*, promovendo assim a ligação entre todos os procedimentos realizados pelos alunos durante o desenvolvimento da atividade. Nesse momento seria interessante relembrar o conteúdo sobre relações métricas no triângulo retângulo, semelhança de triângulos e retas paralelas cortadas por uma transversal, pois são tópicos utilizados durante a resolução dos exercícios. Além disso, essa parte da Atividade demandará maior acompanhamento e orientação do professor, pois exigirá alguns conhecimentos matemáticos prévios dos estudantes.

Atividade - Parte 3: *A demonstração de Apolônio*

Apolônio de Perga era um matemático grego que provavelmente viveu entre 262 a.E.C. e 190 a.E.C., cujos estudos na área da Matemática foram importantes. Uma de suas obras mais célebres foi o livro *Cônicas*, em que aparecem pela primeira vez as nomenclaturas "parábola", "hipérbole" e "elipse", denominações que utilizamos nos dias de hoje.

Figura 6.10: As Cônicas de Apolônio.

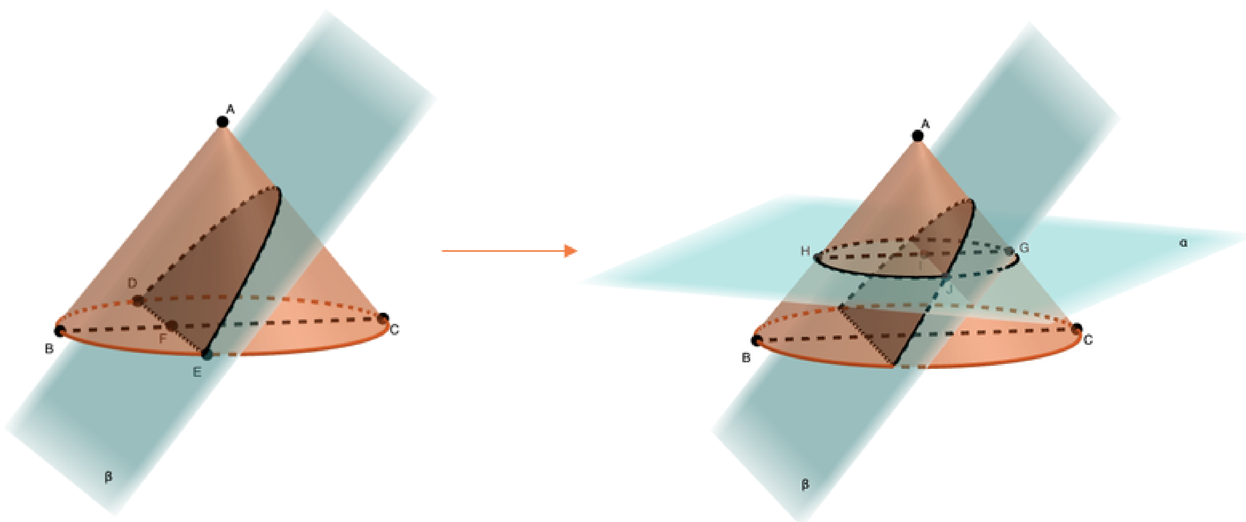


Fonte: Centro virtual de Divulgación de las Matemáticas.

Vamos então nos inspirar nas ideias de Apolônio para determinar o "sintoma" da parábola (relação entre grandezas que caracteriza os pontos da curva). Para isso siga os passos abaixo.

- Você se lembra da composição que fizemos no *GeoGebra*? A construção de Apolônio se inicia com um plano α cortando o cone paralelamente à base e formando como interseção entre α e o cone uma circunferência de diâmetro HG conforme abaixo.

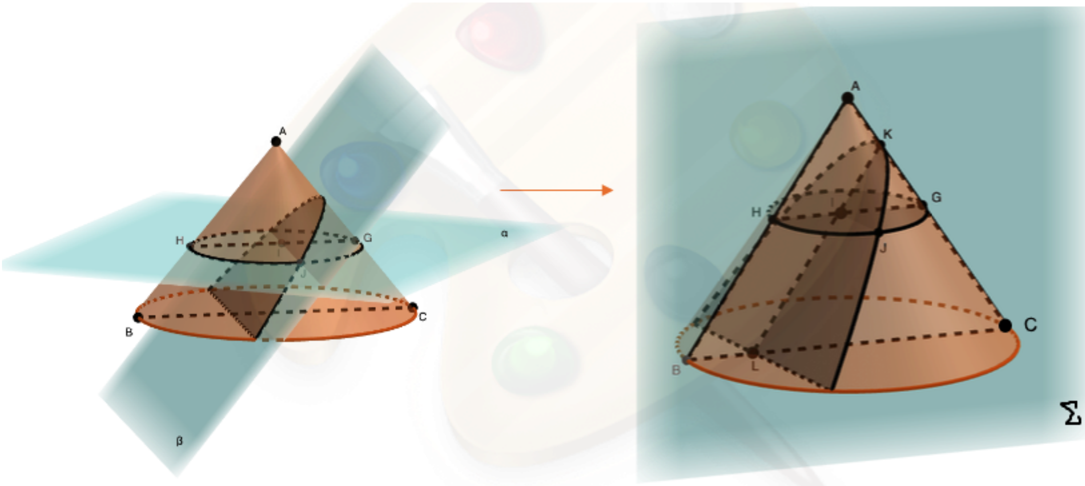
Figura 6.11: Plano α seccionando o cone paralelamente à base.



Fonte: Autoria própria, utilizando o GeoGebra.org.

- Um terceiro plano irá seccionar o cone passando pelo seu eixo, vamos denominá-lo por Σ. Temos agora o triângulo ABC (interseção entre o cone e Σ) e o segmento KL (interseção entre Σ e o plano β que gerou a parábola). Utilizaremos todos esses elementos durante a atividade.

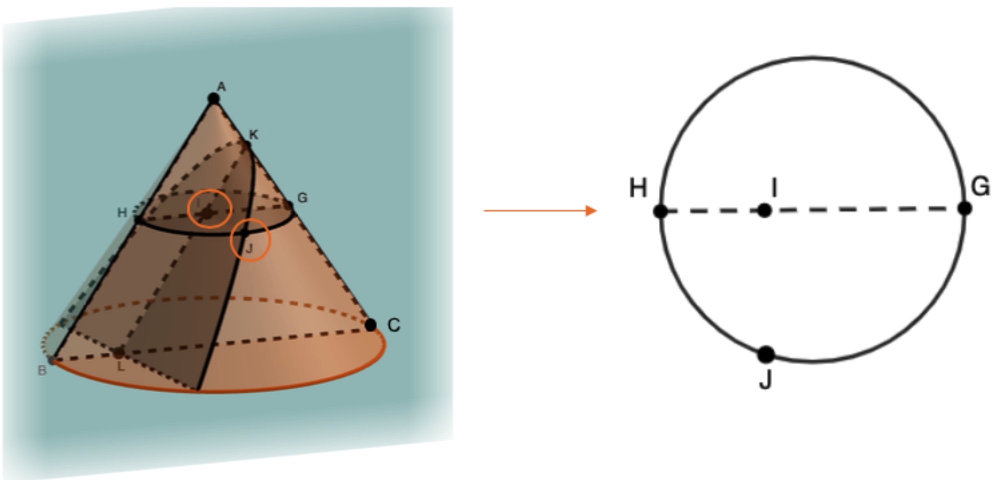
Figura 6.12: Plano Σ seccionando o cone pelo seu eixo.



Fonte: Autoria própria, utilizando o GeoGebra.org.

- Observe a circunferência de diâmetro HG como representada na figura 6.13, I é o ponto de interseção entre KL e HG, e J é o ponto de interseção entre o cone e a circunferência, consequentemente J também pertence à parábola.

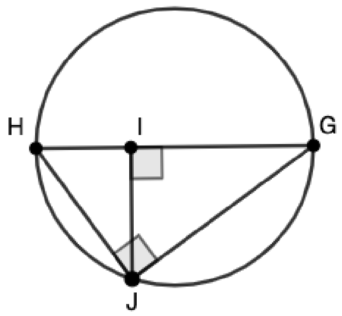
Figura 6.13: Circunferência de diâmetro HG.



Fonte: Autoria própria, utilizando o GeoGebra.org.

<u>Exercício 1</u>: Agora é a sua vez de colaborar. Utilizando as relações métricas no triângulo retângulo, quais relações você consegue construir no triângulo HGJ?

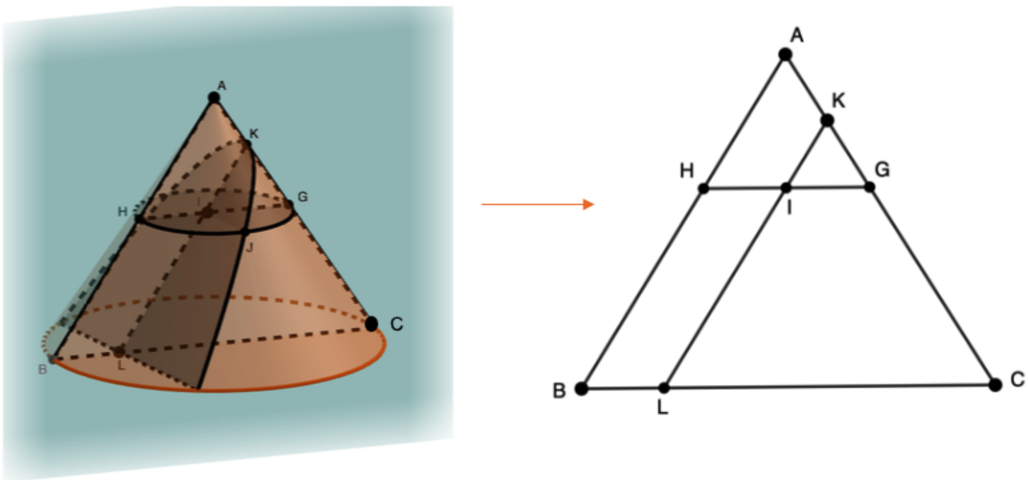
Figura 6.14: Triângulo HGJ.



Fonte: Autoria própria, utilizando o GeoGebra.org.

- Vamos agora trabalhar com o triângulo ABC. Na figura 6.15, podemos observar o triângulo separado do cone para sua maior compreensão. Ele será utilizado nos próximos exercícios.

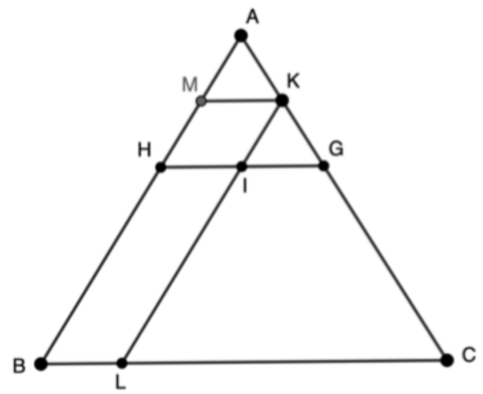
Figura 6.15: Triângulo ABC.



Fonte: Autoria própria, utilizando o GeoGebra.org.

<u>Exercício 2</u>: Seja M um ponto sobre o lado AB, de maneira que o segmento MK seja paralelo ao lado BC. Pensando nas características das retas paralelas cortadas por uma transversal e nos casos de semelhança de triângulos que recordamos, quais relações você consegue construir entre os triângulos ABC, AMK, KIG e KLC?

Figura 6.16: Triângulo ABC com segmento MK.



Fonte: Autoria própria, utilizando o GeoGebra.org.

Exercício 3: Chegou o momento de relacionarmos as três partes da nossa Atividade:

(a) Analisando as suas respostas dos Exercícios 1 e 2, procure construir uma relação entre o segmento IJ, o segmento KI e o segmento P que pertence à parábola e possui a seguinte relação $\frac{P}{AK} = \frac{BC^2}{AC \times AB}$.

(b) Você é capaz de relacionar suas ideias para responder a letra "a" com o resultado da parte 1 da nossa Atividade, em que buscamos uma solução para *o problema da duplicação do cubo*?

(c) Agora que chegamos ao final da Atividade, você é capaz de descrever qual é o "sintoma" da parábola? Em caso afirmativo, descreva-o e em caso negativo, justifique.

No Exercício 3 da última parte da Atividade, indicamos o caminho para que os alunos determinem a característica dos pontos da parábola (sintoma) assim como o fez Apolônio. Provavelmente eles terão dificuldades, pois realizar toda a construção exige bastante conhecimento. Porém, as discussões que podem surgir entre os próprios alunos ou entre alunos e professores durante o desenvolvimento dos exercícios, irão possibilitar a criação de um ambiente de aprendizagem. É importante ao final, apresentar a construção de Apolônio e mostrar aos alunos a *aplicação de áreas* (apresentada na seção 5.1.1), para ressaltar o motivo pelo qual as cônicas foram denominadas por parábola, hipérbole e elipse. O intuito é discutir o máximo possível sobre a parábola utilizando elementos relacionados à História da Matemática. Após as Atividades realizadas, também devem ser retomadas as pesquisas feitas pelos alunos no início e buscar construir uma relação entre tudo que foi desenvolvido e os resultados por eles encontrados.

Esperamos que ao final de todo o desenvolvimento da Atividade, os alunos tenham compreendido que a parábola é uma curva, originada de um cone cujos pontos tem características em comum. Posteriormente, ao falarmos desse conteúdo pela abordagem dos materiais didáticos, que normalmente apresenta as cônicas relacionando seus pontos às distâncias aos focos, no caso da elipse e da hipérbole, e ao foco e à reta diretriz no caso da parábola, acreditamos que o assunto será assimilado pelos alunos de uma forma mais efetiva.

7 Considerações finais

A escrita deste trabalho nos fez refletir sobre diversos aspectos, principalmente os relacionados a nossa própria prática escolar. Durante certo tempo vínhamos estudando a importância da História da Matemática, tanto para o processo de ensino e aprendizagem, quanto para a nossa formação como professores, mas foi ao chegarmos no final dessa pesquisa, que percebemos na prática a veracidade dessa afirmação.

Estudarmos a história, entendermos o contexto, os motivos e os caminhos que levaram ao desenvolvimento de alguns conceitos matemáticos, nos deu embasamento para pensarmos em novas estratégias de ensino que podem nos auxiliar a mostrar para os alunos que há sentido naquele aprendizado, então esperamos que outros professores também consigam perceber esse fato ao ler o trabalho. Pensando ainda de maneira mais específica, os estudos realizados sobre a história das cônicas parece nos ter tornado mais capacitados para trabalhar esse conteúdo em sala de aula, pois agora o nosso conhecimento vai além daquele disponível nos livros didáticos.

O uso da tecnologia digital em sala de aula também se mostrou válido, visto que ele nos permite ultrapassar os limites encontrados na utilização apenas do quadro e do giz. Para a elaboração da nossa atividade a tecnologia já se mostrou válida, pois durante os estudos sobre as construções de Apolônio, precisamos desenhar o cone sendo seccionado pelo plano para entender o que estava sendo falado pelo matemático. Tornou-se claro naquele momento, que o mesmo desenho deveria ser feito para auxiliar o entendimento dos alunos, foi quando optamos por incluir a construção da parábola utilizando o *GeoGebra*. Sabemos que no nosso país, muitas escolas não têm acesso a tecnologias mais avançadas, ainda assim acreditamos ser importante essa discussão. Difundir as possibilidades de utilização para esses recursos é uma pequena contribuição para mostrar a importância de se investir nos mesmos.

Quando discutimos sobre maneiras de aumentar o interesse dos alunos durante as aulas de matemática, normalmente tentamos contextualizar o que eles vão estudar, mostrar o quanto aquele conteúdo é importante para o seu dia a dia. Reconhecemos que é uma boa estratégia, porém não é a única. A atividade que elaboramos por exemplo, nos permitirá realizar discussões sobre a história, sobre a visão geométrica da parábola, sobre a utilização de recursos tecnológicos na aprendizagem e sobre a autonomia do aluno na resolução de um problema. Será uma atividade que trará elementos diferentes daqueles presentes no ensino tradicional, o que acreditamos ser uma forma de instigar a curiosidade em participar.

Gostaríamos de encerrar o trabalho com discussões referentes à aplicação da atividade, o que não foi possível devido à pandemia causada pelo novo coronavírus (COVID-19). Acreditamos que o material tem os elementos necessários para alcançar o objetivo principal que é o aprendizado do conceito de parábola, porém apenas com a participação e opinião dos estudantes será possível realizar as discussões sobre a eficácia da proposta.

Devemos ainda deixar claro que apesar de sugerirmos uma proposta de ensino diferente da que normalmente visualizamos nos livros didáticos, a nossa sugestão não substitui a necessidade de trabalharmos a perspectiva algébrica das cônicas. Queremos apenas mostrar que existem outros métodos para iniciarmos os estudos, então a formalização a partir das fórmulas e discussões gráficas deve ser realizada ao final para concretizar uma aprendizagem completa.

Finalmente, esperamos com esse trabalho engajar outros profissionais a pesquisar um pouco mais sobre a História da Matemática, em suas várias vertentes, não apenas a História no Ensino da Matemática. E também a reconhecer o uso da mesma como um recurso válido tanto para o ensino dos alunos, quanto para nosso desenvolvimento como professores mais críticos e bem preparados para exercer nossa profissão.

Referências Bibliográficas

AMORIM, F. R. R. **A utilização do recurso da história da matemática para facilitar a assimilação de alguns conteúdos**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-árido, Mossoró, RN, 2014. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\trabalho=2301040. Acesso em: 21 nov. 2019.

BARROS, R. J. A do R. **Pesquisas sobre a história e epistemologia da matemática:** contribuições para abordagem da matemática no Ensino Médio. 2016. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/21821. Acesso em: 09 set. 2020.

BRASIL, M. d. E. **Base Nacional comum curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 28 nov. 2019.

BRUGNERA, E. D., DYNNIKOV, C. M. S. da S. Tecnologia e história da matemática: uma parceria na construção do conhecimento. *In:* Congresso Internacional de Educação e Tecnologias e Encontro de Pesquisadores em Educação à Distância, 2018, São Carlos: SP. . **Anais do CIET:EnPED:2018.** São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2018, p. 1-7. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/comunicacoes-cientificas-16.html. Acesso em: 13 set. 2020.

CORREIA, M. C. L. F. **Diferentes abordagens ao estudo das cónicas**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2013. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/14339 2537.pdf. Acesso em: 27 set. 2020.

D'AMBROSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. *In:*BICUDO, M.A.V. **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções & Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 97-115. Disponível em: http://cattai.mat.br/site/files/ensino/uneb/pfreire/docs/HistoriaDaMat ematica/Ubiratan_DAmbrosio_doisTextos.pdf. Acesso em: 24 ago. 2020.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino.**Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n.1, p.99-120, jan./abr. 2005. Disponível em: https://www.scielo.br /pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf. Acesso em: 24 ago. 2020.

FADEL, L. M. et al. **Gamificação na educação.** São Paulo: Pimenta Cultural, 2014. *E-book* (300 p.). Disponível em: https://www.pimentacultural.com/gamificacao-na-educacao. Acesso em: 31 ago. 2020.

FARDO, M. L. **A gamificação como estratégia pedagógica:** estudo de elementos dos games aplicados em processos de ensino e aprendizagem. 2013. Dissertação (Mestrado em educação) – Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, RS, 2013. Disponível em: https://repositorio.ucs.br/handle/11338/457. Acesso em: 13 set. 2020.

FOLLADOR, D. **Tópicos especiais no ensino de Matemática:** tecnologias e tratamento da informação. 1. ed. Curitiba: InterSaberes, 2012. ISBN: 978-85-8212-009-5.

IBIAPINA, W. F. **Uso pedagógico do ábaco romano para o ensino do algoritmo de multiplicação.** 2014. Dissertação (Mestrado em ensino de ciências naturais e matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, 2017. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao /viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=1452423. Acesso em: 30 ago. 2020.

KAMPFF, A. J. C.; MACHADO, J. C.; CAVEDIINI, P. Novas tecnologias e educação matemática. **Novas Tecnologias na Educação**. Porto Alegre, RS, v.2, n. 2, p.1-11, nov. 2004. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/13703. Acesso em: 01 set. 2020.

LOPES, J. F. **Cônicas e aplicações**. 2011. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São Paulo, SP, 2011. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91061/lopes\jf\me\rcla.pdf?sequence=1. Acesso em: 12 fev. 2020.

LOVATO, F. L. Metodologias ativas de aprendizagem: uma breve revisão. **Acta Scientiae**, Canoas, RS, n. 2, v. 20, p. 154-171, mar./abr. 2018. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/327924688. Acesso em: 12 ago. 2020.

MACENA, M. M. M. **Contribuições da investigação em sala de aula para uma aprendizagem das secções cônicas com significado**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, 2007. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/16033/1/MartaMMM.pdf. Acesso em: 10 ago. 2020.

MARTINS, E. C. de R. História: consciência, pensamento, cultura, ensino. **Educar em Revista**, Curitiba, PR, n.42, p.43 - 58, 2011. Editora UFPR. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/er/n42/a04n42.pdf. Acesso em: 05 de agosto de 2020.

MENDES, I. A. **Tendências metodológicas no ensino de matemática**. Belém: EdUPBA, v. 41, 2008.

NASCIMENTO, M. C. do N.; FEITOSA, H. de A. F. Os três problemas clássicos da antiguidade. **Revista Ciência e Tecnologia**, Campinas, SP, n. 16, v. 10, 2007. ISSN: 2236-6733. Disponível em: http://www.revista.unisal.br/sj/index.php/123/article/view/18. Acesso em: 30 set. 2020.

OLIVEIRA, D. P. A. **Um estudo para entender as contribuições de atividades baseadas nos fundos de conhecimento e ancoradas na perspectiva sociocultural da história da matemática para a aprendizagem de funções por meio da pedagogia culturalmente relevante**. 2012. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, 2012. Disponível em: https://repositorio.ufop.br/handle/123456789/2986. Acesso em: 20 de set. 2020.

OLIVEIRA, D. P. A.; ROSA, M.; VIANA, M. da C. V. Reflexões sobre a perpspectiva sociocultural da história da matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v.17, n.1, p.91-107, jan./abr. 2015. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/956. Acesso em: 14 de set. 2020.

OLIVEIRA, Z. V.; ALVIM, M. H. **Propostas didáticas para o ensino de ciências e de matemática:** abordagens históricas. Santo André, SP: Universidade Federal do ABC, 2020. p. 269. ISBN: 978-65-5719-003-6.

ORZECHOWSKI, T. P.; LOPES, M. R. C. M. O uso do geogebra na construção de conceitos de geometria plana e espacial. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE**, Paraná, v. 1, 2016. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes\pde/2016/2016\artigo\mat\unicentro\teresinhapartika.pdf. Acesso em: 27 jul. 2020.

PEREIRA, R. Método Ativo: Técnicas de Problematização da Realidade aplicada à Educação Básica e ao Ensino Superior. *In:* COLÓQUIO INTERNACIONAL EDUCAÇÃO E CONTEMPORANEIDADE, 6., 2012, São Cristovão - SE. **Anais do eixo 17 - Currículo escolar, cultura, gestão, organização do trabalho pedagógico.** São Cristovão - SE, 2012. p. 1-15. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/10116/47/46.pdf. Acesso em: 12 ago. 2020.

PINTO, S. L. A.; SOUZA, L. C. de. Tecnologia e trabalho na era da informação. **Scientia Iuris**, Londrina, v.21, n.3, p.99-124, nov. 2017. DOI: 10.5433/2178-8189.2017v21n3p124.

ISSN: 2178-8189. Disponível em: http://www.uel.br/revistas/uel/index.php/iuris/article/view/28248/22326. Acesso em: 30 ago. 2020.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

ROMIO, T.; PAIVA, S. C. M. Kahoot e GoConqr: uso de jogos educacionais para o ensino de matemática. **Scientia cum industria**, Caxias do Sul, RS, v. 5, n. 2, p. 90-94, 2017. Disponível em: http://www.ucs.br/etc/revistas/index.php/scientiacumindustria/article/view/5234. Acesso em: 31 ago. 2020.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. d. **Tópicos de história da matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SÁ, A. L. de; SILVA, E. F. da; MACHADO, M.C. A importância do Excel no ensino de matemática financeira. *In:* ENCONTRO VIRTUAL DE DOCUMENTAÇÃO EM SOFTWARE LIVRE E CONGRESSO INTERNACIONAL DE LINGUAGEM E TECNOLOGIA ONLINE, 7., 2018, Belo Horizonte - MG. **Anais do Evidosol/Ciltec.** Belo Horizonte: Faculdade de Letras da UFMG, 2018, p. 1-6. Disponível em: http://www.periodicos.letras.ufmg.br/index.php/anais_linguagem_tecnologia/article/view/15022/1125612182. Acesso em: 31 ago. 2020.

SAITO, F. Entrevista com o Prof. Fumukazu Sato (PUC/SP). [Entrevista concedida a] Ana Paula Pereira do N. Silva. **Revista de História da Matemática para professores**, Natal (RN), v. 6, n. 1, p. 1, 2020. Disponível em: http://www.rhmp.com.br/index/index.php/rhmp/article/view/94/52. Acesso em: 30 jul. 2020.

SANTOS, M. R. dos; ANDRADE, V. L. V. X. de; GITIRANA, V. A concepção dos licenciandos de matemática sobre o uso de calculadora no ensino fundamental. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife - PE. **Anais do GT 06 - Educação matemática: novas tecnologias e ensino à distância.** Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004, p. 1-8. Disponível em: http://www.sbe m.com.br/files/viii/pdf/06/CC61508500487.pdf. Acesso em: 30 ago. 2020.

SANTOS, S. A.; TREVISAN, A. L. **O problema de Apolônio:** aspectos históricos e computacionais. Campinas, SP, 2004. Disponível em: https://www2.ime.unicamp.br/sites /default/files/rel_pesq/rp32-04.pdf. Acesso em: 30 set. 2020.

SILVA, A. A. da; SANTOS, M. A. S. As cônicas de Apolônio. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo, SP. **Pôster**. São Paulo, SP: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. p. 1-8. Disponível em:http://www.sbembrasil.org. br/enem2016/anais/pdf/5062_3970_ID.pdf. Acesso em 30 set. 2020.

SILVA, R. S. da.; RIBEIRO, A. M.; SILVA, J. L. T. da. História da matemática & tecnologias da informação e comunicação: uma experiência semipresencial cooperativa na formação de professores. **Revista da Educação, Ciência e Tecnologia**, Canoas, RS, v.2, n. 2, p.1-20, 2013. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/tear/art icle/view/1804. Acesso em: 13 set. 2020.

SILVEIRA, D. T.; CÓRDOVA, F. P. A pesquisa científica. *In*: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (org). **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. p. 31-42. ISBN 978-85-386-0071-8.

SOUSA, G. C. de. Uso da história da matemática e tenologias de informação e comunicação: alianças possíveis e potenciais para o ensino de matemática. *In:* Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., São Paulo - SP. **Comunicaçõees Científicas.** São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016, p. 1 - 13. Disponível em: http://www.sbembra sil.org.br/enem2016/anais/comunicacoes-cientificas-16.html. Acesso em: 13 set. 2020.

APÊNDICE A - Orientações para professores que desejam aplicar a Atividade

Neste apêndice encontram-se algumas orientações para aqueles que desejam aplicar a atividade porém não estão familiarizados com a História da Matemática presente na mesma ou com o uso do *software GeoGebra*.

A Atividade inicia-se com a solicitação de uma pesquisa sobre os três problemas clássicos da antiguidade, mais sobre os mesmos pode ser encontrado em:

- CARVALHO, J. P. de. **Os três problemas clássicos da matemática grega**. Disponível em: http://www.bienasbm.ufba.br/M20.pdf.
- BRITO, B. S. **O problema da duplicação do cubo**. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94201.
- MEDEIROS, F.; GUANABARA, L. **O problema da trissecção do ângulo**. Disponível em: http://www.im.ufrj.br/walcy/Bienal/textos/trisseccao.pdf.
- SANTANA, E. R. **O problema da quadratura do círculo:** uma abordagem histórica sob a perspectiva atual. Disponível em: https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/4551.

Em seguida, é realizada a construção da parábola por meio do *software GeoGebra*. Algumas orientações sobre a utilização do mesmo estão disponíveis em:

- **Manual**. Disponível em: https://wiki.geogebra.org/pt/Manual.

- NASCIMENTO, M. C. do.; SCARPIM, S. **Iniciando com o *GeoGebra***. Disponível em: http://wwwp.fc.unesp.br/ mauri/Down/Geogebra.pdf.

Ao final, utilizamos algumas construções feitas por Apolônio de Perga (262 a 190 a.E.C.). É possível encontrar mais sobre o matemático e a construção utilizada na Atividade em:

- O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Appollonius of Perga**. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Apollonius/. Tradução de parte do texto: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm15/apolonio.htm.

- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. d. **Tópicos de história da matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

- Seção 5.1.2 desta dissertação.

APÊNDICE B - Atividade para impressão (*GeoGebra online*)

- Para casa: Faça uma pesquisa histórica sobre os três problemas clássicos da antiguidade, busque informações sobre os matemáticos que os estudaram na época em que surgiram, se conseguiram determinar as soluções, como o fizeram e etc..

Atividade - Parte 1: *O problema da duplicação do cubo*

Na Grécia Antiga surgiram três problemas matemáticos, que devido aos estudos e a matemática desenvolvida durante as buscas por suas resoluções, se tornaram muito importantes. São eles: *A quadratura do círculo*, *A trissecção do ângulo* e *O problema da duplicação do cubo*. Os três são interessantes e por isso vamos fazer uma breve apresentação dos mesmos.

A quadratura do círculo: o problema da quadratura do círculo consiste em, utilizando apenas régua não graduada e compasso, determinar um quadrado de maneira que a sua área seja igual a área de um círculo dado.

A trissecção do ângulo: este problema consiste em, também utilizando apenas régua não graduada e compasso, dividir um ângulo dado em outros três ângulos de mesma medida.

A duplicação do cubo: dado um cubo, construir com régua não graduada e compasso, outro cubo, cujo volume seja o dobro do volume do primeiro. Sobre este problema sabemos de duas lendas, as quais são descritas abaixo:

- O rei Minos ordenou que construíssem um túmulo para seu falecido filho Glauco. Quando a construção, que tinha o formato de um cubo, foi finalizada e o rei soube que possuía 100 pés de altura, afirmou que a mesma era demasiadamente pequena para uma residência real e decidiu que deveria ter o dobro do tamanho. Para isso, exigiu que o formato fosse mantido, mas que suas arestas fossem duplicadas.

- Em 500 a.E.C. a população de Atenas sofria com uma peste que vinha causando muitas mortes. Em busca de uma solução para esse mal, habitantes foram até o oráculo do deus Apolo, em Delfos. Ao ouvir o pedido dos atenienses o oráculo afirmou que a peste seria finalizada caso o altar do deus (que possuía um formato cúbico) fosse duplicado. Assim foi feito, o altar teve suas dimensões dobradas, porém, ainda assim a peste continuou.

Perguntas:

1. Analisando os problemas da quadratura do círculo e da trissecção do ângulo, e utilizando os conhecimentos adquiridos na sua pesquisa, descreva detalhadamente como você os solucionaria.

2. Você acabou de conhecer duas versões para um mesmo problema: duplicar o cubo. O que entende por isso, por duplicar o cubo? Explique detalhadamente sua compreensão do problema.

3. Descreva sua opinião científica sobre as soluções apresentadas em cada lenda. Ou seja:

   a) Qual sua opinião científica sobre a solução "suas arestas fossem duplicadas"?

   b) Qual sua opinião científica sobre a solução "o altar teve suas dimensões dobradas, porém, ainda assim a peste continuou"?

4. Se fosse solicitado a você solucionar *o problema da duplicação do cubo*, explique cientificamente, como o solucionaria.

Atividade - Parte 2: *A construção da parábola*

1. Vocês já ouviram falar de parábola? Se sim, o que podem me dizer a este respeito?

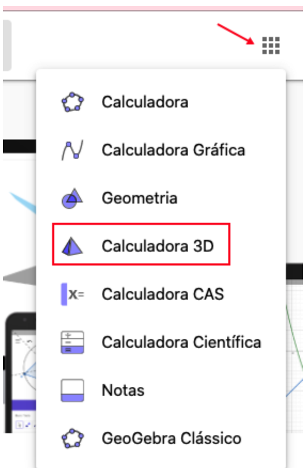
2. Já usaram régua e compasso para construir uma parábola? Como devemos fazer? Descrevam o passo a passo.

3. Vamos usar um *software* dinâmico para fazermos a construção desta curva?

Você já ouviu falar do *GeoGebra*? É um *software* de matemática dinâmica que possui diversas funções, como por exemplo a construção de gráficos e de figuras geométricas. Você pode fazer o seu *download* ou utilizá-lo *online* no site www.geogebra.org e ele irá nos auxiliar a entender como a interseção de um cone e um plano resulta em uma curva chamada "parábola". Os passos abaixo vão guiá-lo na construção, mas caso tenha alguma dúvida chame o professor para auxiliá-lo.

1. Acesse o *site* www.geogebra.org, clique no quadrado que se encontra no canto superior direito e selecione "Calculadora 3D".

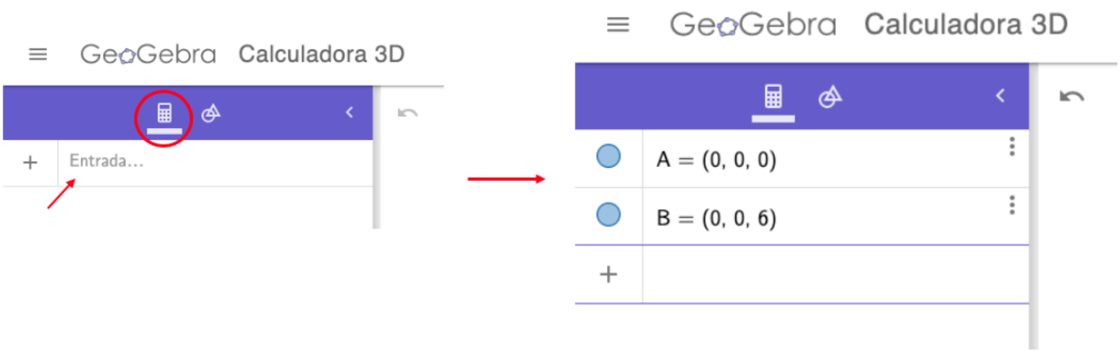
Figura 7.1: Acessando o *GeoGebra*.



Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o GeoGebra.org.

2. Primeiramente vamos criar os pontos A e B. Clique no ícone "Álgebra" e no campo "Entrada" digite $A = (0, 0, 0)$, aperte o *enter* e digite $B = (0, 0, 6)$.

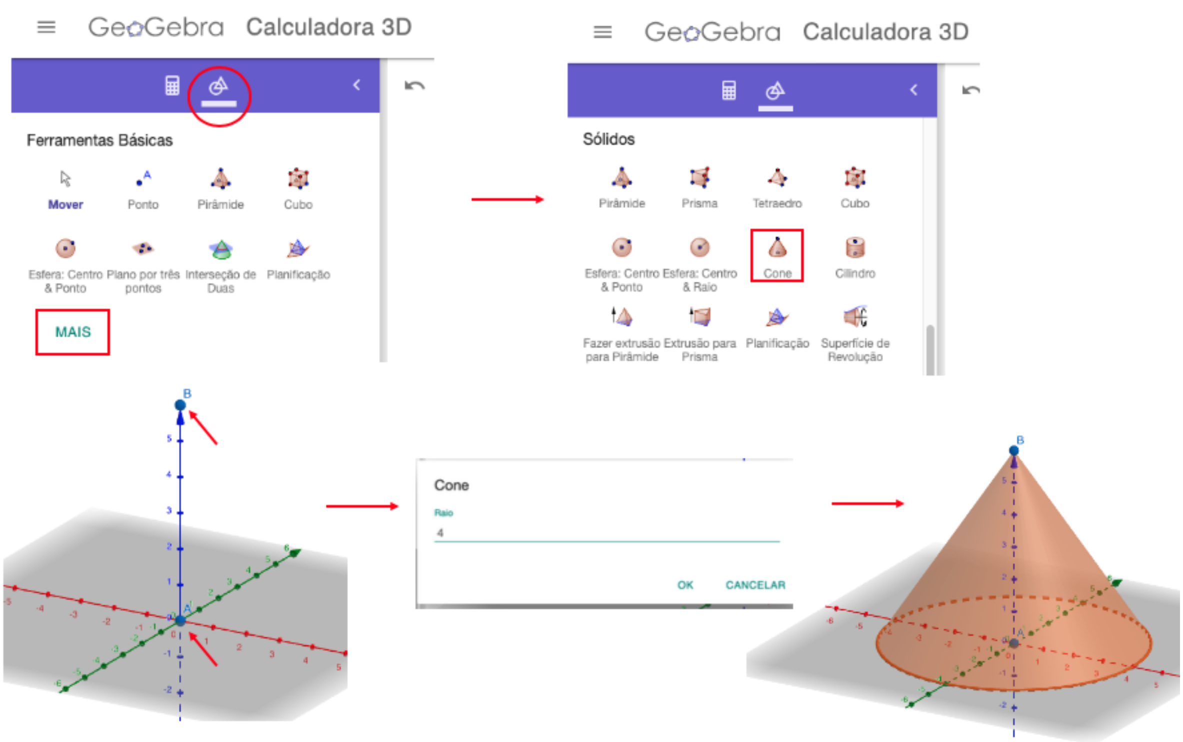
Figura 7.2: Criando os pontos A e B.



Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o GeoGebra.org.

3. Clique no ícone “Ferramentas”, em seguida clique em “MAIS” e no grupo dos “Sólidos” selecione “Cone”. Ao clicar em uma ferramenta aparecerá no canto inferior esquerdo da tela o que você deve fazer, nesse caso deve-se selecionar um ponto da base, o ponto do topo e o raio. Selecione então o ponto A (ponto da base), o ponto B (ponto do topo) e irá aparecer uma janela para digitar o raio, digite 4.

Figura 7.3: Criando um cone.

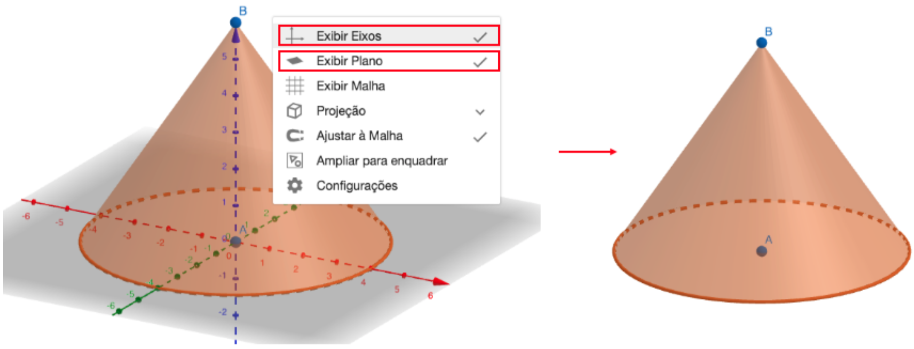


Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o GeoGebra.org.

4. Para que a figura fique mais limpa, vamos parar de exibir o plano e os eixos. Para

isso clique com o botão direito do mouse em alguma parte em branco da tela e desmarque as opções “exibir eixos” e “exibir plano”.

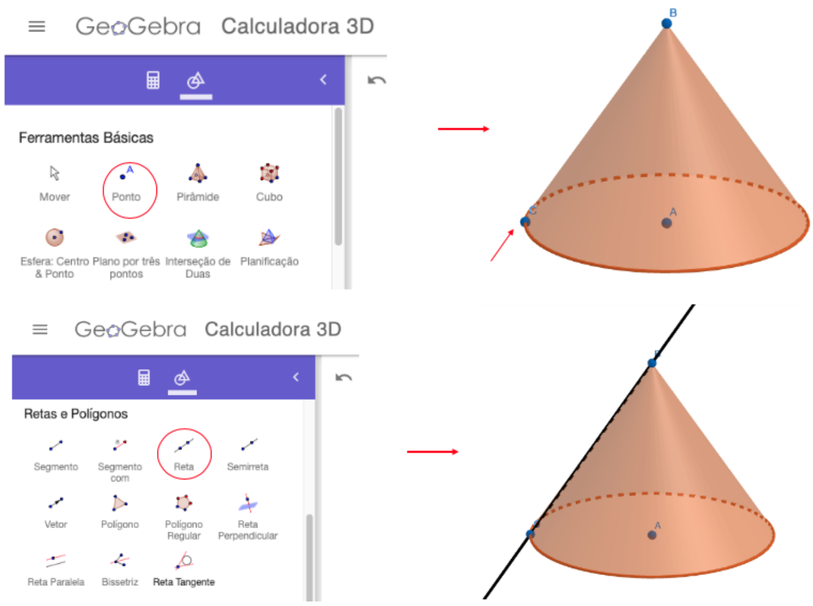
Figura 7.4: Deixando de exibir o plano e os eixos.



Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o GeoGebra.org.

5. Nas ferramentas selecione “Ponto” e marque um ponto que pertença à circunferência da base do cone. Depois, selecione “Reta”, selecione os pontos B e C (C é o ponto sobre a circunferência da base), traçando assim a reta BC. Obs.: Lembre-se das nossas aulas sobre o Cone e observe se você consegue identificar o nome dessa reta.

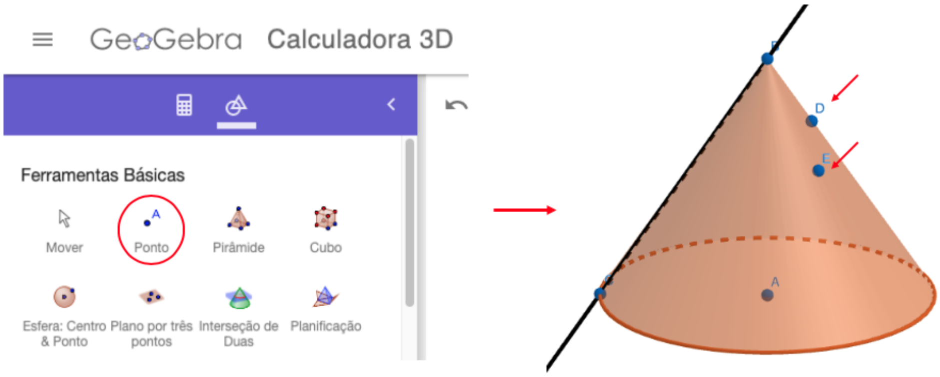
Figura 7.5: Construindo a reta BC.



Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o GeoGebra.org.

6. Selecione novamente a ferramenta “Ponto” e marque dois pontos sobre a superfície lateral do cone que não pertençam à reta BC.

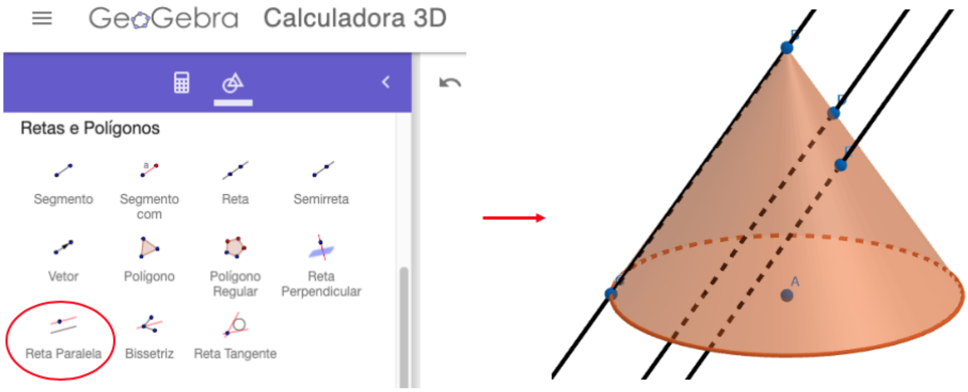
Figura 7.6: Criando dois pontos que não pertencem à BC.



Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o GeoGebra.org.

7. Nas ferramentas selecione "Reta Paralela", clique sobre a reta BC e em um dos pontos marcados sobre a superfície lateral do cone. Repita o procedimento para o outro ponto marcado.

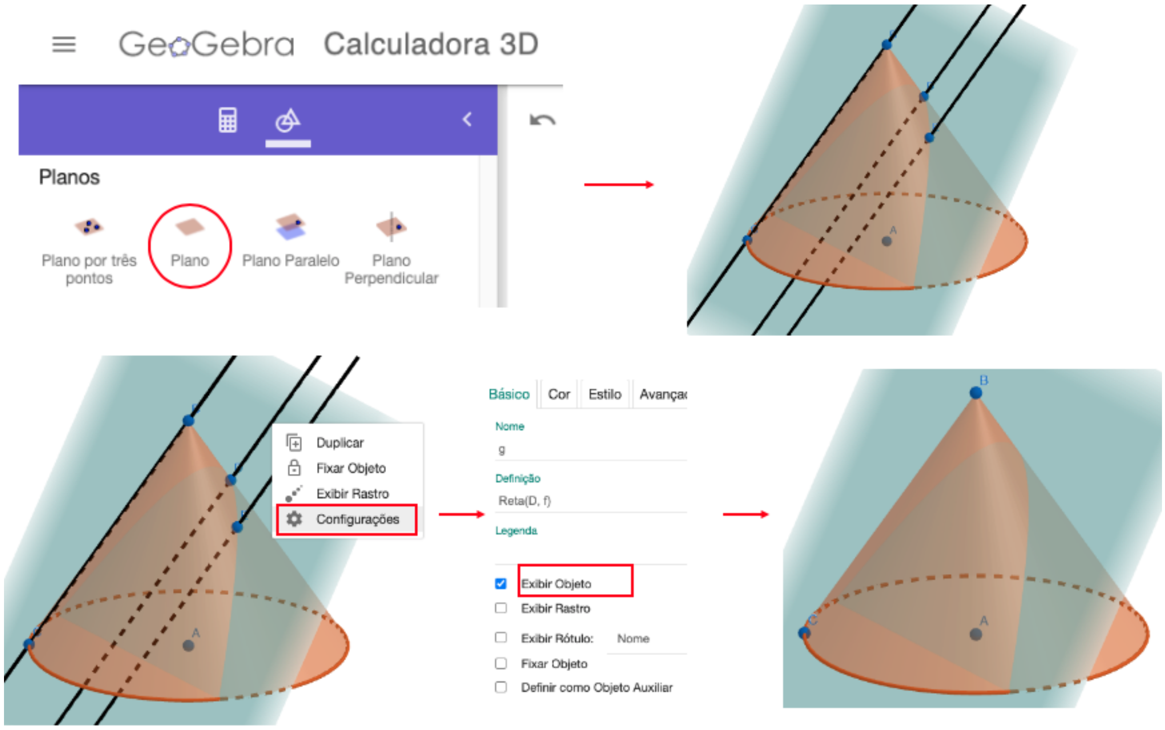
Figura 7.7: Criando retas paralelas à BC.



Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o GeoGebra.org.

8. Selecione a ferramenta "Plano" e clique sobre as duas retas que você acabou de traçar (as duas retas diferentes da reta BC) e irá aparecer um plano. Para que o desenho fique mais limpo, clique com o botão direito sobre uma das retas, clique em "Configurações" e desmarque a opção "Exibir Objeto". Repita esse procedimento nas outras duas retas e nos pontos sobre a superfície lateral do cone.

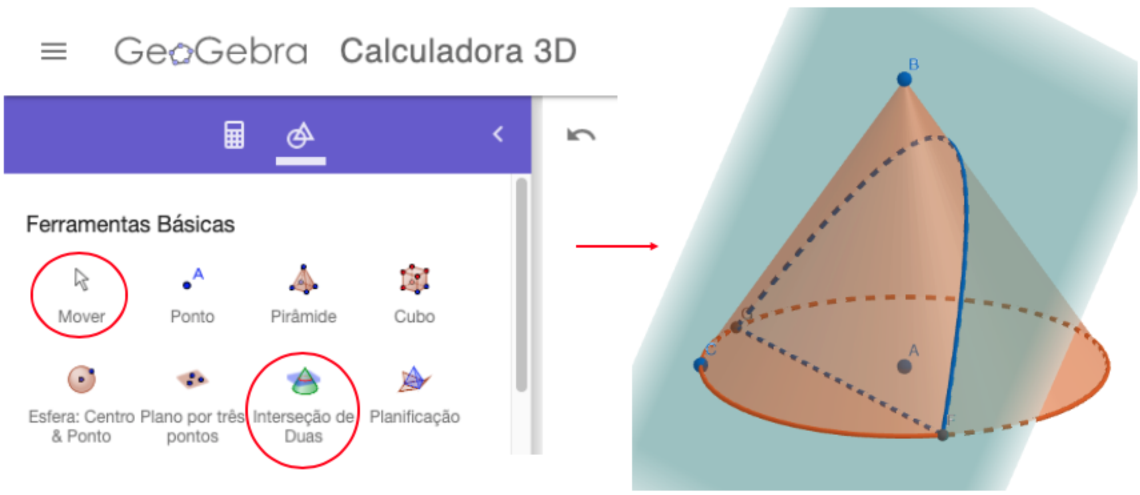
Figura 7.8: Criando um plano paralelo à BC.



Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o GeoGebra.org.

9. Finalmente selecione a ferramenta "Interseção de duas superfícies" e clique sobre o cone e sobre o plano, você verá aparecer a parábola. Você pode clicar na ferramenta "Mover" e ao clicar e segurar o mouse sobre a figura, movimentar e observar a construção de outros ângulos.

Figura 7.9: Criando a parábola.



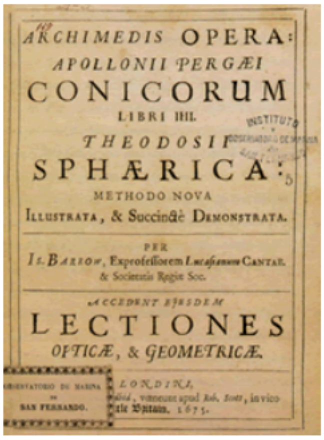
Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o GeoGebra.org.

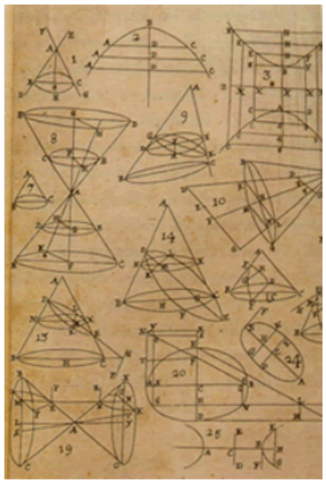
Agora que você fez a construção da parábola, ficou mais claro o porquê ela é classificada como uma cônica? Justifique sua resposta.

Atividade - Parte 3: *A demonstração de Apolônio*

Apolônio de Perga era um matemático grego que provavelmente viveu entre 262 a.E.C. e 190 a.E.C., cujos estudos na área da Matemática foram importantes. Uma de suas obras mais célebres foi o livro *Cônicas*, em que aparecem pela primeira vez as nomenclaturas "parábola", "hipérbole" e "elipse", denominações que utilizamos nos dias de hoje.

Figura 7.10: As Cônicas de Apolônio.


ARCHIMEDIS OPERA:
APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI IIII.
THEODOSII
SPHÆRICA:
METHODO NOVA
ILLUSTRATA, & Succinctè DEMONSTRATA.
PER
Is. BARROW, Ex professorem Lucasianum CANTAB. & Societatis Regiæ Soc.
ACCEDUNT EJUSDEM
LECTIONES
OPTICÆ, & GEOMETRICÆ.
LONDINI,
[illegible], veneunt apud Rob. Scott, in vico [illegible]. 1675.

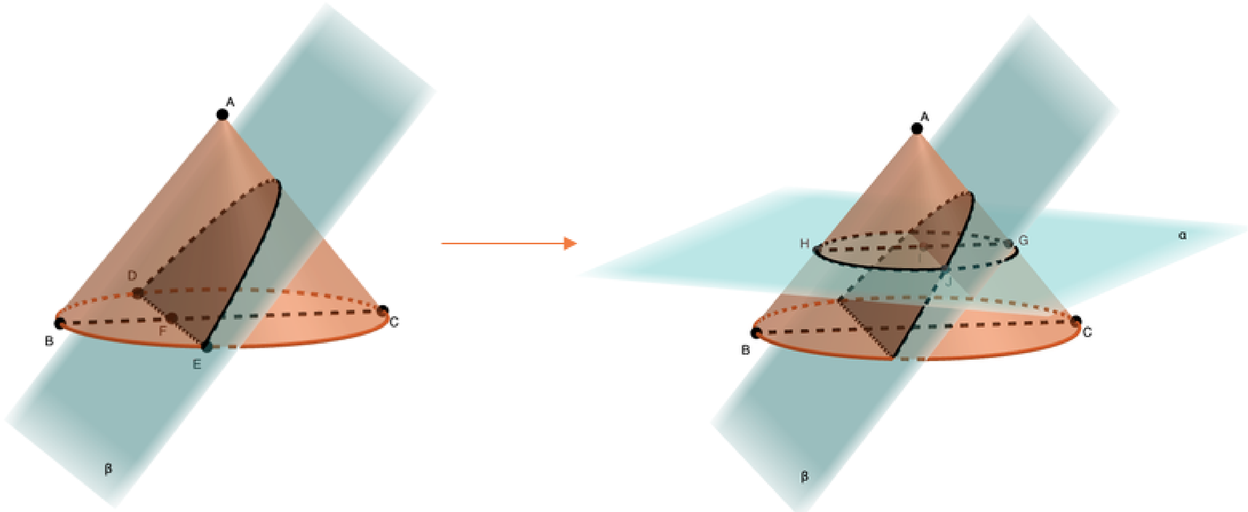


Fonte: Centro virtual de Divulgación de las Matemáticas.

Vamos então nos inspirar nas ideias de Apolônio para determinar o "sintoma" da parábola (relação entre grandezas que caracteriza os pontos da curva). Para isso siga os passos abaixo.

- Você se lembra da composição que fizemos no *GeoGebra*? A construção de Apolônio se inicia com um plano α cortando o cone paralelamente à base e formando como interseção entre α e o cone uma circunferência de diâmetro HG conforme abaixo.

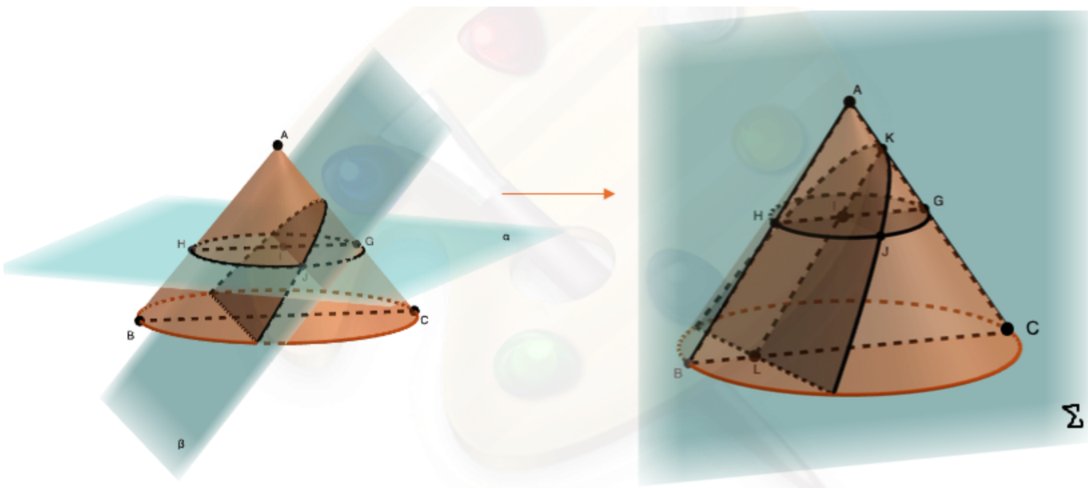
Figura 7.11: Plano α seccionando o cone paralelamente à base.



Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o GeoGebra.org.

- Um terceiro plano irá seccionar o cone passando pelo seu eixo, vamos denominá-lo por Σ. Temos agora o triângulo ABC (interseção entre o cone e Σ) e o segmento KL (interseção entre Σ e o plano β que gerou a parábola). Utilizaremos todos esses elementos durante a atividade.

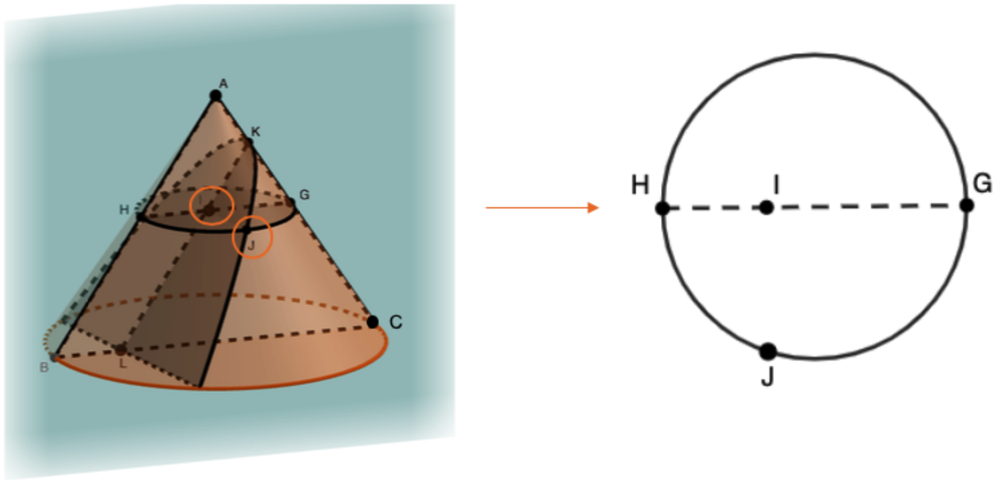
Figura 7.12: Plano Σ seccionando o cone pelo seu eixo.



Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o GeoGebra.org.

- Observe a circunferência de diâmetro HG como representada na figura 7.13, I é o ponto de interseção entre KL e HG, e J é o ponto de interseção entre o cone e a circunferência, consequentemente J também pertence à parábola.

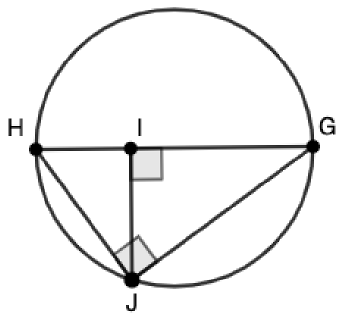
Figura 7.13: Circunferência de diâmetro HG.



Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o GeoGebra.org.

Exercício 1: Agora é a sua vez de colaborar. Utilizando as relações métricas no triângulo retângulo, quais relações você consegue construir no triângulo HGJ?

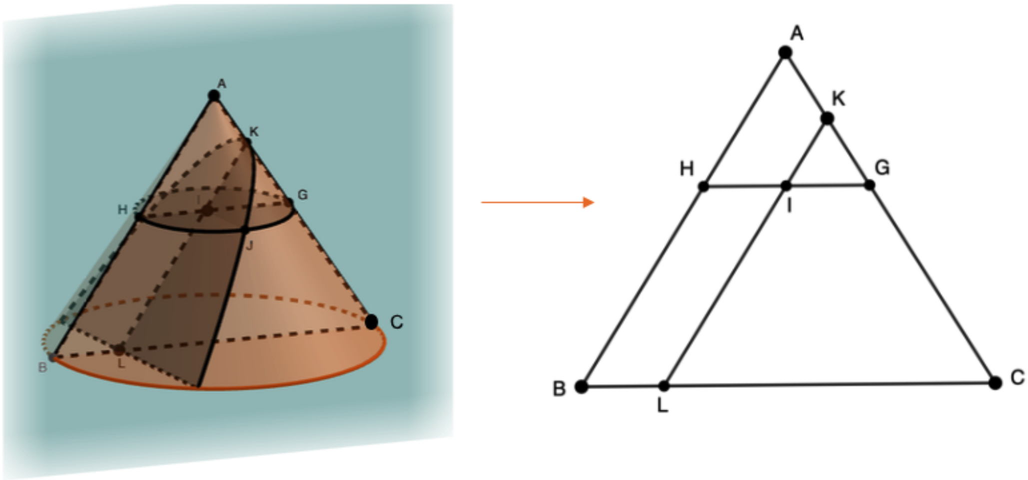
Figura 7.14: Triângulo HGJ.



Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o GeoGebra.org.

- Vamos agora trabalhar com o triângulo ABC. Na figura 7.15, podemos observar o triângulo separado do cone para sua maior compreensão. Ele será utilizado nos próximos exercícios.

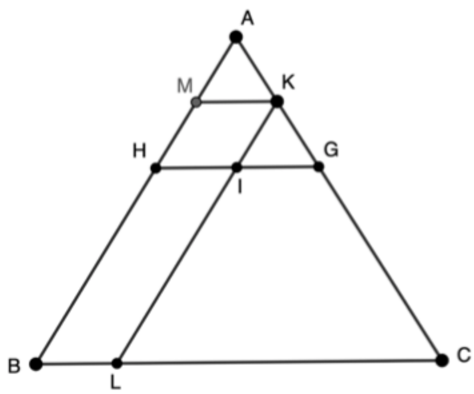
Figura 7.15: Triângulo ABC.



Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o GeoGebra.org.

Exercício 2: Seja M um ponto sobre o lado AB, de maneira que o segmento MK seja paralelo ao lado BC. Pensando nas características das retas paralelas cortadas por uma transversal e nos casos de semelhança de triângulos que recordamos, quais relações você consegue construir entre os triângulos ABC, AMK, KIG e KLC?

Figura 7.16: Triângulo ABC com segmento MK.



Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o GeoGebra.org.

Exercício 3: Chegou o momento de relacionarmos as três partes da nossa Atividade:

(a) Analisando as suas respostas dos Exercícios 1 e 2, procure construir uma relação entre o segmento IJ, o segmento KI e o segmento P que pertence à parábola e possui a seguinte relação $\frac{P}{AK} = \frac{BC^2}{AC \times AB}$.

(b) Você é capaz de relacionar suas ideias para responder a letra "a" com o resultado da parte 1 da nossa Atividade, em que buscamos uma solução para *o problema da duplicação do cubo*?

(c) Agora que chegamos ao final da Atividade, você é capaz de descrever qual é o "sintoma" da parábola? Em caso afirmativo, descreva-o e em caso negativo, justifique.

APÊNDICE C - Atividade (parte 2) para impressão (*GeoGebra* instalado no computador)

Atividade - Parte 2: *A construção da parábola*

1. Vocês já ouviram falar de parábola? Se sim, o que podem me dizer a este respeito?

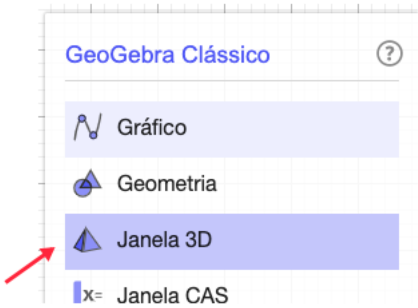
2. Já usaram régua e compasso para construir uma parábola? Como devemos fazer? Descrevam o passo a passo.

3. Vamos usar um *software* dinâmico para fazermos a construção desta curva?

Você já ouviu falar do *GeoGebra*? É um *software* de matemática dinâmica que possui diversas funções, como por exemplo a construção de gráficos e de figuras geométricas. Você pode fazer o seu *download* ou utiliza-lo *online* no *site* www.geogebra.org e ele irá nos auxiliar a entender como a interseção de um cone e um plano resulta em uma curva chamada "parábola". Os passos abaixo vão guiá-lo na construção, mas caso tenha alguma dúvida chame o(a) professor(a) para auxilia-lo.

1. Abra o programa *GeoGebra Classic 6* e na janela normalmente localizada à direita selecione "Janela 3D".

Figura 7.17: Acessando o *GeoGebra*.



Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o *GeoGebra Classic 6*.

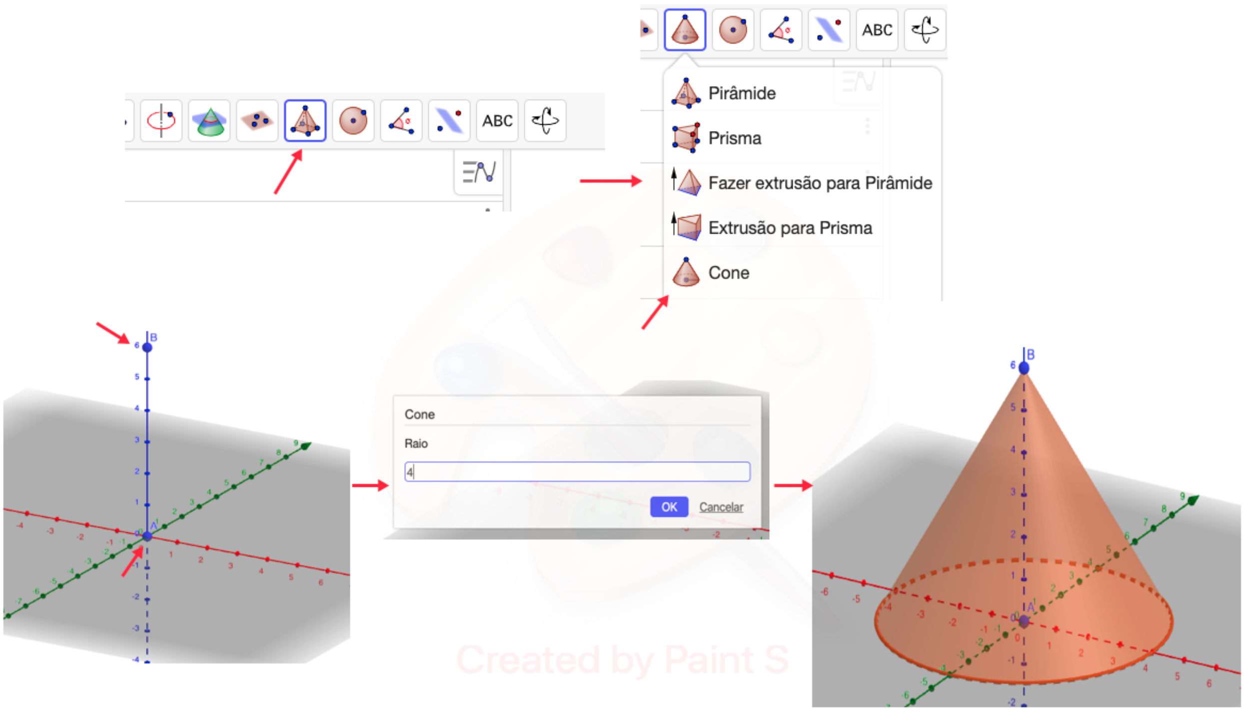
2. Primeiramente vamos criar os pontos A e B. No campo "Entrada" digite $A = (0, 0, 0)$, aperte o *enter* e digite $B = (0, 0, 6)$ (não utilize nesse momento a vírgula do teclado numérico, pois o programa pode interpretá-la como um ponto, o que resultará em erro).

Figura 7.18: Criando os pontos A e B.

Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o *GeoGebra Classic 6*.

3. Clique no ícone com o desenho de uma pirâmide, em seguida selecione "Cone". Ao clicar em uma ferramenta aparecerá centralizado no inferior da tela o que você deve fazer, nesse caso deve-se selecionar um ponto da base, o ponto do topo e o raio. Selecione então o ponto A (ponto da base), o ponto B (ponto do topo) e irá aparecer uma janela para digitar o raio, digite 4.

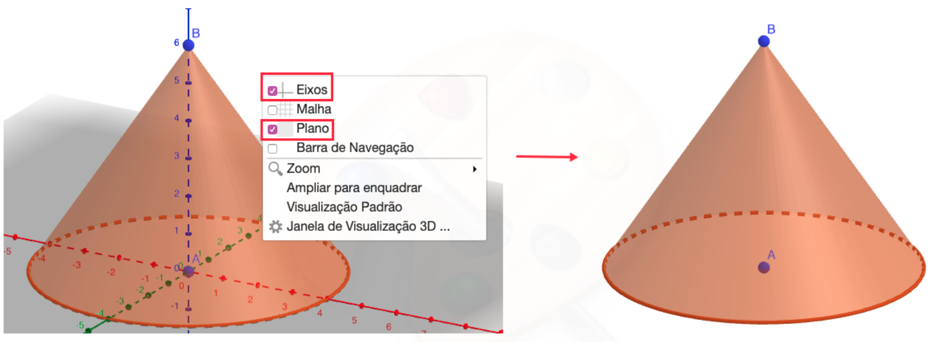
Figura 7.19: Criando um cone.



Fonte: Amaral, 2020. Utilizando o *GeoGebra Classic 6*.

4. Para que a figura fique mais limpa, vamos parar de exibir o plano e os eixos. Para isso clique com o botão direito do mouse em alguma parte em branco da tela e desmarque as opções "eixos" e "plano".

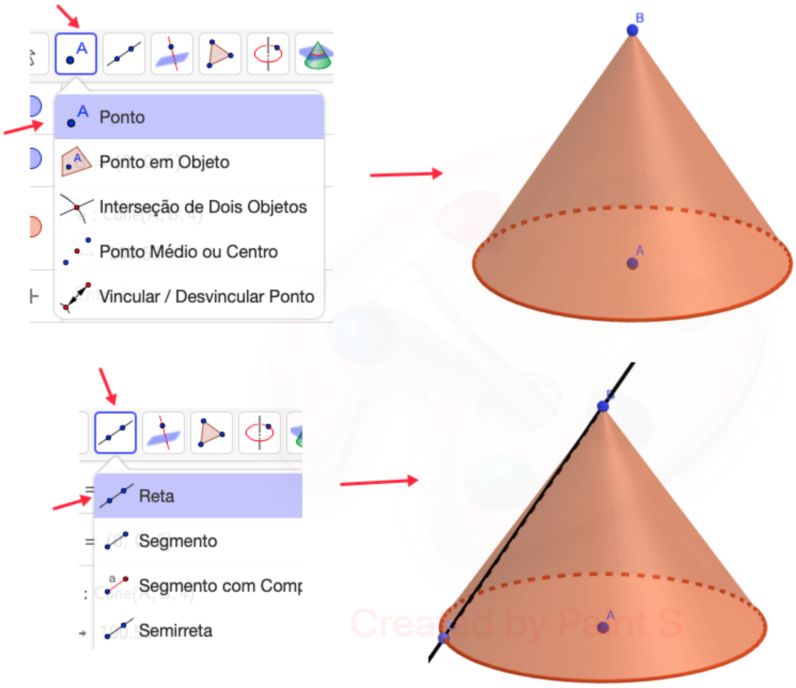
Figura 7.20: Deixando de exibir o plano e os eixos.



Fonte: Amaral, 2020, utilizando o *GeoGebra Classic 6*.

5. Nas ferramentas selecione "Ponto" e marque um ponto que pertença à circunferência da base do cone. Depois, selecione "Reta", selecione os pontos B e C (C é o ponto sobre a circunferência da base), traçando assim a reta BC. Obs.: Lembre-se das nossas aulas sobre o Cone e observe se você consegue identificar o nome dessa reta.

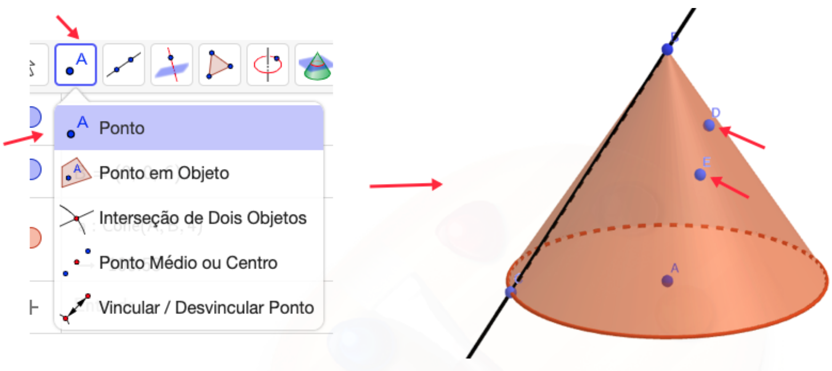
Figura 7.21: Construindo a reta BC.



Fonte: Amaral, 2020, utilizando o *GeoGebra Classic 6*.

6. Selecione novamente a ferramenta "Ponto" e marque dois pontos sobre a superfície lateral do cone que não pertençam à reta BC.

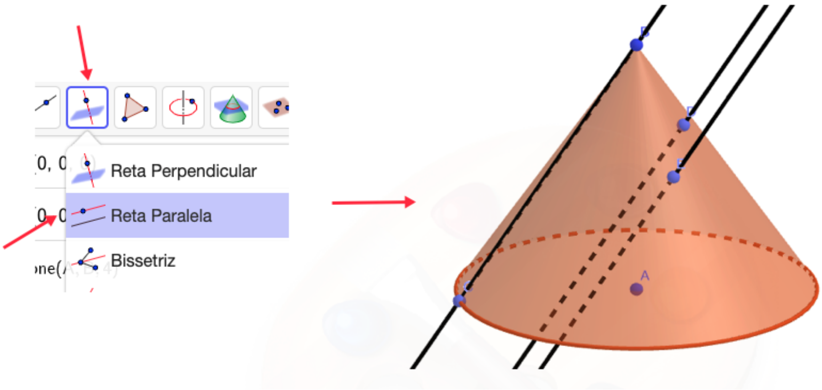
Figura 7.22: Criando dois pontos que não pertencem à BC.



Fonte: Amaral, 2020, utilizando o *GeoGebra Classic 6*.

7. Nas ferramentas selecione "Reta Paralela", clique sobre a reta BC e em um dos pontos marcados sobre a superfície lateral do cone. Repita o procedimento para o outro ponto marcado.

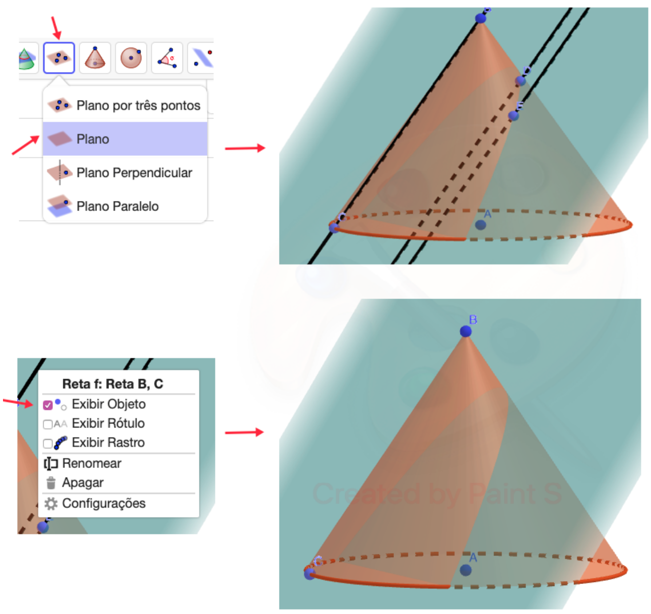
Figura 7.23: Criando retas paralelas à BC.



Fonte: Amaral, 2020, utilizando o *GeoGebra Classic 6*.

8. Selecione a ferramenta "Plano" e clique sobre as duas retas que você acabou de traçar (as duas retas diferentes da reta BC) e irá aparecer um plano. Para que o desenho fique mais limpo, clique com o botão direito sobre uma das retas e desmarque a opção "Exibir Objeto". Repita esse procedimento nas outras duas retas e nos pontos sobre a superfície lateral do cone.

Figura 7.24: Criando um plano paralelo à BC.

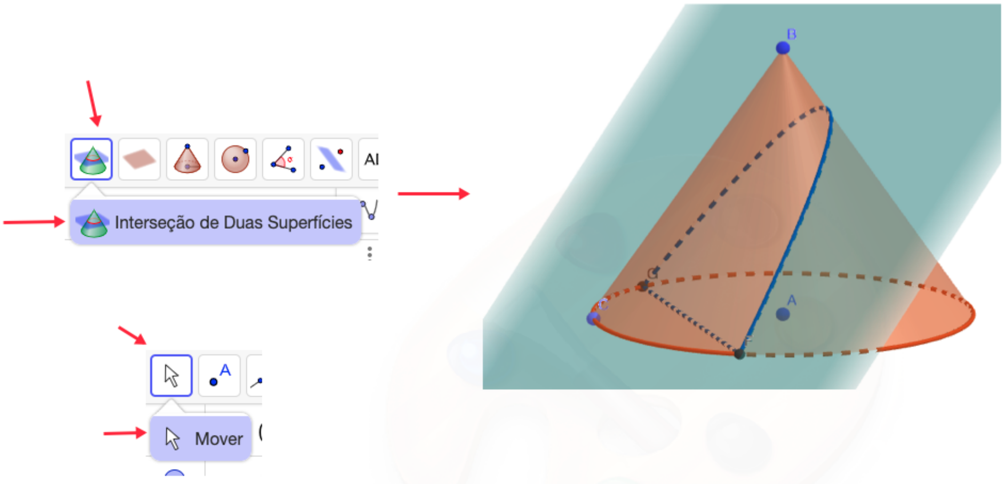


Fonte: Amaral, 2020, utilizando o *GeoGebra Classic 6*.

9. Finalmente selecione a ferramenta "Interseção de duas superfícies" e clique sobre o cone e sobre o plano, você verá aparecer a parábola. Você pode clicar na ferramenta

"Mover" e ao clicar e segurar o mouse sobre a figura, movimentar e observar a construção de outros ângulos.

Figura 7.25: Criando a parábola.



Fonte: Amaral, 2020, utilizando o *GeoGebra Classic 6*.

Agora que você fez a construção da parábola, ficou mais claro o porquê ela é classificada como uma cônica? Justifique sua resposta.

APÊNDICE D - Referências de respostas

Seguem abaixo algumas sugestões de respostas para última parte da atividade: *A demonstração de Apolônio.* Como as questões anteriores são investigativas, esperamos que o professor não trabalhe apenas com o "certo e errado", mas sim busque utilizar nas discussões todo material produzido pelo aluno. As respostas a seguir são apresentadas para auxiliar o professor, não para serem seguidas como um gabarito rígido.

Exercício 1: Agora é a sua vez de colaborar, utilizando as relações métricas no triângulo retângulo, quais relações você consegue construir no triângulo HGJ?

$HG^2 = HJ^2 + GJ^2$ $\quad$ $HG \times IJ = HJ \times GJ$

$GJ^2 = HG \times IG$ $\quad$ $GJ \times IJ = HJ \times IG$

$HJ^2 = HG \times HI$ $\quad$ $HJ \times IJ = GJ \times HI$

$IJ^2 = HI \times IG$

Exercício 2: Seja M um ponto sobre o lado AB de maneira que o segmento MK seja paralelo ao lado BC. Pensando nas características das retas paralelas cortadas por uma transversal e nos casos de semelhança de triângulos que recordamos, quais relações você consegue construir entre os triângulos ABC, AMK, KIG e KLC?

Os ângulos $B\hat{A}C$ e $L\hat{K}C$ são correspondentes e portanto congruentes, assim como o quarteto $A\hat{M}K$, $A\hat{B}C$, $K\hat{L}C$, $K\hat{I}G$ e o trio $A\hat{K}M$, $A\hat{G}H$, $A\hat{C}B$. Com isso podemos afirmar que os triângulos ABC, AMK, KIG e KLC são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo).

Exercício 3: Chegou o momento de relacionarmos as três partes da nossa Atividade:

(a) Analisando as suas respostas dos Exercícios 1 e 2, procure construir uma relação entre o segmento IJ, o segmento KI e o segmento P que pertence à parábola e possui a seguinte relação $\frac{P}{AK} = \frac{BC^2}{AC \times AB}$.

No exercício número 1 encontramos a relação $IJ^2 = HI \times IG$.

Do fato de os triângulos ABC, AMK, KIG e KLC serem semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo), construímos a seguinte relação

$$\frac{\overline{MK}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad e \quad \frac{\overline{IG}}{\overline{KI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}. \tag{7.1}$$

Como $\overline{MK}//\overline{HI}$ e $\overline{MB}//\overline{KL}$ podemos afirmar que $\overline{MK} = \overline{HI}$ (observe a figura 7.16), substituindo $\overline{MK}$ em (7.1) obtemos

$$\frac{\overline{HI}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\overline{HI}}{\overline{AK}} \times \frac{\overline{IG}}{\overline{KI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{IG}}{\overline{KI}}.$$

Mas $\dfrac{\overline{IG}}{\overline{KI}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, então

$$\frac{\overline{HI}}{\overline{AK}} \times \frac{\overline{IG}}{\overline{KI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{HI} \times \overline{IG}}{\overline{AK} \times \overline{KI}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC} \times \overline{AB}} \tag{7.2}$$

Seja P um segmento da sessão cônica tal que $\frac{P}{AK} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC} \times \overline{AB}}$. De (7.2) temos

$$\frac{P}{\overline{AK}} = \frac{\overline{HI} \times \overline{IG}}{\overline{AK} \times \overline{KI}} \Rightarrow \frac{P \times \overline{AK}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{HI} \times \overline{IG}}{\overline{KI}} \Rightarrow P = \frac{\overline{HI} \times \overline{IG}}{\overline{KI}}$$

e por $IJ^2 = HI \times IG$, obtemos

$$P = \frac{\overline{IJ}^2}{\overline{KI}} \Rightarrow \overline{IJ}^2 = P \times \overline{KI}. \tag{7.3}$$

(b) Você é capaz de relacionar suas ideias para responder a letra “a” com o resultado da parte 1 da nossa Atividade, em que buscamos uma solução para *o problema da duplicação do cubo*?

Esperamos que durante as pesquisas os alunos encontrem a solução descrita por Hipócrates de Quios (470 - 410 a.E.C.) e consigam relacionar a solução do item anterior com o fato de que o matemático teria reduzido o problema da duplicação do cubo para “dados dois segmentos, encontrar duas médias proporcionais entre eles”, o que na linguagem atual seria: dados a e b, determinar x e y de maneira que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Dessas relações obtemos $\frac{a}{x} = \frac{y}{b} \Rightarrow xy = ab$, $\frac{x}{y} = \frac{y}{b} \Rightarrow y^2 = bx$ e $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 = ay$, o que hoje sabemos se referir respectivamente à equação de uma hipérbole retangular e de duas parábolas.

(c) Agora que chegamos ao final da Atividade, você é capaz de descrever qual é o “sintoma” da parábola? Em caso afirmativo, descreva-o e em caso negativo, justifique.

A equação $\overline{IJ}^2 = P \times \overline{KI}$ é o *sintoma* da parábola. Ou seja, a parábola é o lugar geométrico dos pontos J tais que $\overline{IJ}^2 = P \times \overline{KI}$. Para Apolônio, $\overline{IJ}^2 = P \times \overline{KI}$, significa que o quadrado de lado $\overline{IJ}$ aplicado *parabolicamente* sobre P fornece um retângulo de lado $\overline{KI}$.