UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

Raphael da Costa Silva

UMA PROPOSTA DE ESTUDO DA GEOMETRIA ANALÍTICA COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

UBERABA-MG
2021

Raphael da Costa Silva

UMA PROPOSTA DE ESTUDO DA GEOMETRIA ANALÍTICA COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Danilo Adrian Marques

UBERABA-MG

2021

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

S583p

Silva, Raphael da Costa
Uma proposta de estudo da geometria analítica com o uso do software GeoGebra / Raphael da Costa Silva. -- 2021.
143 p. : il., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2021
Orientador: Prof. Me. Danilo Adrian Marques

1. GeoGebra (Software). 2. Geometria Analítica. 3. Resolução de Problemas. I. Marques, Danilo Adrian. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 514.12:004.4

Leila Aparecida Anastácio - CRB-6/2513

RAPHAEL DA COSTA SILVA

Uma proposta de estudo da Geometria Analítica com o uso do software GeoGebra

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, área de concentração Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

Uberaba, 09 de abril de 2021.

Banca Examinadora:

Me. Danilo Adrian Marques – Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dr. Leandro Cruvinel Lemes
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dr. Silvia Regina Viel
Centro Universitário Municipal de Franca

Documento assinado eletronicamente por **DANILO ADRIAN MARQUES**, **Professor do Magistério Superior**, em 13/04/2021, às 13:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 e no art. 14 da Resolução nº 34, de 28 de dezembro de 2017.

Documento assinado eletronicamente por **LEANDRO CRUVINEL LEMES**, **Professor do Magistério Superior**, em 14/04/2021, às 15:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 e no art. 14 da Resolução nº 34, de 28 de dezembro de 2017.

Documento assinado eletronicamente por **Silvia Regina Viel**, **Usuário Externo**, em 16/04/2021, às 19:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 e no art. 14 da Resolução nº 34, de 28 de dezembro de 2017.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.uftm.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0511221** e o código CRC **961F32CD**.

A Deus e minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por me dar a oportunidade de viver todos os momentos de aprendizagem, enfrentar as dificuldades com perseverança adquirindo paciência, experiência e esperança.

À minha esposa, por compartilhar comigo todos os desafios e lutas enfrentadas ao longo desta jornada, sempre me apoiando e me incentivando a não desistir, ao contrário, me induzindo a permanecer firme até o fim.

A minha família, filhos, mãe, pai, irmãos e amigos por compreenderem todos os momentos de ausência, necessários para se dedicar aos estudos.

A toda turma do PROFMAT - 2018 do campus UFTM, que muito me ensinou em relação ao estudo da Matemática, a parceria, a amizade, ao auxílio nos momentos difíceis com as matérias que muitas vezes me atemorizavam e por sempre estar unida apoiando e ajudando uns aos outros de maneira extremamente atenciosa e coletiva.

Ao professor Me. Danilo Adrian Marques por muito me ensinar em relação a Geometria Analítica e a postura de um verdadeiro professor, cobrando sempre na medida certa, incentivando ao estudo e a pesquisa e me orientando para todo o desenvolvimento deste trabalho. Sou grato a Deus por ter tido a oportunidade de conhecê-lo e ter partilhado bons momentos de minha vida com ele.

A todos os professores do mestrado que contribuíram das mais diversas maneiras para enriquecer minha formação acadêmica e pessoal.

Aos meus amigos de trabalho, que sempre me incentivaram a continuar estudando.

A professora Ma. Priscila Leal, por contribuir com conteúdos e trocas de experiências voltadas ao ensino da Geometria Analítica no Ensino Médio.

"Quando se é demasiado curioso de coisas praticadas nos séculos passados, é comum ficar-se ignorante das que se praticam no presente."

René Descartes

RESUMO

O presente trabalho propõe o uso do software educativo GeoGebra como ferramenta para o estudo da Geometria Analítica (G.A.). O GeoGebra é um software de Matemática dinâmica gratuito e multiplataforma, possui ferramentas que combinam Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, Estatística e Cálculo Diferencial. Um dos desafios no estudo da Geometria Analítica é na resolução de problemas desenvolver uma visão plana e espacial e conseguir abstraí-la para a Álgebra (ou vice-versa), uma vez que a Álgebra na resolução de problemas não é uma tarefa fácil devido a abstração do desenvolvimento dos exercícios e do seu resultado. Mediante tal desafio, veremos exercícios tanto da Educação Básica - Ensino Médio - quanto do Ensino Superior envolvendo o estudo de retas, circunferências, vetores, planos, cônicas entre outros, analisando a abordagem tradicional - com base nas propriedades matemáticas - e a resolução através do uso do software, que será utilizado como ferramenta de estudo, análise e investigação dos exercícios propostos, visando apresentar o software como uma ferramenta complementar e facilitadora tanto no momento do estudo, quanto no ensino da Geometria Analítica. Separamos esses exercícios em relação ao seu nível de aplicação - Ensino Médio e Ensino Superior - e, em grupos nos quais veremos como o software nos permite de forma clara conferir os resultados obtidos algebricamente, investigar resultados classificando-os em verdadeiro ou falso, visualizar equações e até mesmo construir raciocínios que nos levam a resolução de problemas.

Palavras-chave: GeoGebra. Geometria Analítica. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This work proposes the use of the educational software GeoGebra as a tool for the study of Analytical Geometry (G.A). The GeoGebra, is a free and dynamic math multiplatform software provides tools that combines geometry, Algebra, tables, graphs, statistics and differential calculus. One of the challenges in the study of Analytical Geometry is to develop a flat and spatial vision and to be able to abstract it into Algebra (or vice versa), while solving problem situations, since this is not an easy task to do in Algebra due to its abstraction of the development of the exercises and their results. Facing this challenge, we will see exercises in Basic Education, High School and Higher Education involving the study of lines, circles, vectors, plans, conics, among others, analyzing the traditional approach – based on mathematic properties, done through the use of the software, which will be used as a study tool, analysis and investigation of the proposed exercises, aiming to present the software as a tool complementary and facilitating both at the time of study, as well as in the teaching of Analytical Geometry. The exercises were divided in groups concerning their application level – High School and Higher Education – which we will realize how the software allows us to clearly check the results obtained algebraically, to investigate the results by ranking them as true or false, to view equations and even to build reasoning that leads to the problem solution.

Keywords: GeoGebra. Analytical Geometry. Problems Solving.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Relatórios nacionais como o INAF (Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional) disponibilizado pelo Instituto Paulo Montenegro, relatórios de programas internacionais como o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), permitem visualizar como a real compreensão e domínio da Matemática, não faz parte da realidade de uma parcela significativa da população brasileira, situação que reflete no desempenho de estudantes de todo o Brasil.

> [...] os resultados do INAF 2004 indicam que apenas 23% da população jovem e adulta brasileira é capaz de adotar e controlar uma estratégia na resolução de um problema que envolva a execução de uma série de operações. Só essa parcela é também capaz de resolver problemas que envolvam cálculo proporcional. É ainda mais preocupante a revelação de que apenas nesse grupo encontram-se os sujeitos que demonstram certa familiaridade com representações gráficas como mapas, tabelas e gráficos. (MONTENEGRO *et al.*, 2004, p. 8)

O trecho acima foi retirado de um relatório do INAF, específico em habilidades matemáticas. Existem relatórios mais recentes, porém com uma análise mais geral em termos de alfabetismo funcional, não exclusivo apenas para Matemática. Através do Relatório Brasil no PISA (INEP, 2019), páginas 104 a 110, é possível observar na seção de resultados dos estudantes brasileiros em Matemática sob a perspectiva internacional, que o Brasil tem uma posição no ranking entre o intervalo 69 – 72 dos 79 países participantes da avaliação.

Vários fatores influenciam nos problemas relacionados ao ensino e aprendizagem da Matemática, dentre eles podemos mencionar o fato de ser uma área de estudo claramente cumulativa como dito por Pacheco e Andreis (2018, p. 114). Com isso, os déficits de aprendizado não corrigidos ao longo dos estudos propiciam uma enorme dificuldade em aprender e desenvolver novos conhecimentos. Outro fator de extrema importância é a abstração contida em muitas áreas da Matemática, este fator é um dos pilares para o desenvolvimento do nosso trabalho apresentado a seguir.

Segundo Boulos e Camargo (1987, p. xiii), a Geometria Analítica é a área da Matemática que estuda as geometrias plana e espacial com uma abordagem algébrica. Logo, a Geometria e a Álgebra se relacionam de forma imprescindível, uma vez que as relações algébricas são interpretadas geometricamente, e os problemas geométricos são solucionados com auxílio da

Álgebra. Tal relação é de extrema importância para a construção e desenvolvimento dos estudos relacionados a esta disciplina.

Durante o estudo da Geometria Analítica, surgem dificuldades relacionadas ao desenvolvimento da visão geométrica plana e espacial, o que não é uma tarefa fácil para todos e quando abordada com o uso da Álgebra torna o assunto ainda mais complexo, visto o seu elevado grau de abstração.

Mediante esse cenário os recursos tecnológicos podem ser usados como forte aliado na tarefa de estudar, ensinar e compreender a Matemática. Segundo o Instituto São Paulo GeoGebra (2020), o GeoGebra é um software de Matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, Estatística e Cálculo Diferencial numa única aplicação. Foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter, desde então vem sendo utilizado por professores e matemáticos do mundo todo. Dentro do GeoGebra podemos estudar conceitos geométricos abordados com base algébrica em uma visão plana e espacial – "Janela de Visualização" e "Janela de Visualização 3D", respectivamente – que permite tanto ao professor quanto ao estudante uma apresentação visual e totalmente significativa no momento do estudo de vários elementos geométricos como: ponto, reta, planos, parábolas, elipses, hipérboles, interseções, lugares geométricos, entre outros diversos conceitos estudados na Geometria Analítica, sendo encontradas versões disponíveis para uso com computadores, tablets ou celulares.

Frota e Borges (2004), em seu trabalho intitulado "Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologias na educação matemática" mostram a importância do uso de recursos tecnológicos em sala de aula, com o propósito de desenvolver e pensar em novas formas de se resolver problemas.

> [. . .] Entendemos que também essa concepção *incorporar tecnologia* admite dois níveis de entendimento. Num primeiro destes, o professor entende que em virtude do acúmulo de experiências pessoais com o uso de tecnologias, a incorporação da tecnologia pelo educando se acentua e as formas de fazer matemática se modificam: o uso de calculadoras gráficas, o uso de calculadoras simbólicas, o uso de simulações, a construção de modelos, o teste de hipóteses numéricas dentre outras, passam a constituir o arsenal de estratégias que se usa para fazer matemática [...]. Num segundo nível, o professor entende que a incorporação de novas formas de fazer matemática leva os educandos a desenvolverem novas formas de pensar e resolver problemas.[. . .] (FROTA; BORGES, 2004, p. 6)

Diversos pesquisadores dos mais variados países, se dedicam em pesquisa relacionadas ao uso de novas tecnologias voltadas para o ensino de Matemática (FROTA; BORGES, 2004,

p. 6), o que nos mostra a importância de utilizarmos as ferramentas tecnológicas a nosso favor. Ao longo deste trabalho faremos uma apresentação teórica da importância do uso do software GeoGebra e de suas vantagens por meio de um levantamento bibliográfico, visto que nos últimos anos diversos pesquisadores têm se dedicado a criação de atividades voltadas para a aplicação e uso desse software no contexto pedagógico na Educação Básica. De maneira breve e bastante objetiva apresentaremos no terceiro capítulo a metodologia utilizada para o desenvolvimento do trabalho. Veremos em seguida no Capítulo 4 a resolução de alguns exercícios de tópicos elementares da Geometria Analítica, desenvolvidos da maneira tradicional - usando os conhecimentos matemáticos - e posteriormente resolvidos ou até mesmo verificados com o uso do software GeoGebra. Dividimos tais exercícios em duas seções, sendo uma dedicada a abordagem de questões trabalhadas no Ensino Médio, onde fazemos algumas sugestões de abordagens voltadas para o processo de ensino-aprendizagem dos alunos e outra voltada para exercícios de Geometria Analítica extraídos de listas que são aplicadas em cursos de nível superior da UFTM (Universidade Federal do Triângulo Mineiro), como: engenharias Ambiental, Civil, de Alimentos, de Produção, Elétrica, Mecânica, Química, além de Física Aplicada e Licenciatura, Matemática Aplicada e Licenciatura.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 GEOMETRIA ANALÍTICA: DEFASAGENS EM SEU ENSINO

Pensando na Geometria Analítica, vista na graduação, percebe-se que os alunos chegam nos cursos superiores com uma defasagem relativa dos conhecimentos prévios da disciplina desenvolvidos no Ensino Médio, uma vez que, de acordo com Patrício (2011, p. 17), fora do âmbito acadêmico a disciplina é estudada de uma maneira mais simples, explorando apenas alguns conceitos do espaço de dimensão dois, ou seja, o $\mathbb{R}^2$.

A Geometria Analítica vista no Ensino Médio apresenta vários problemas a serem resolvidos. Em 2001 a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), lançou o livro intitulado "Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio", onde o autor "Elon Lages Lima" fez uma análise de 36 volumes de 12 coleções de livros voltados para o Ensino Médio em todo o Brasil, o objetivo da obra foi fazer uma levantamento de aspectos positivos e negativos sobre o material didático utilizado nas escolas brasileiras. No que diz respeito ao ensino da Geometria Analítica, o livro "Análise de Textos" apresenta algumas falhas em comum nos materiais didáticos na abordagem dessa disciplina. Uma das falhas é a apresentação da disciplina apenas como um emaranhado de fórmulas prontas, muitas vezes, sem conceituações bem definidas. Outro fator problema relativo a disciplina, comentado pelo autor, diz respeito a abordagem de exercícios que praticamente em sua totalidade são sempre de manipulação de fórmulas, deixando de lado exercícios que exijam interpretação de resultados e exercícios de aplicação que são raramente apresentados.

Lima (2001) defende que para se obter um bom ensino de Matemática é necessário levar em conta três componentes indissociáveis: a conceituação, a manipulação e a aplicação. Além dos problemas relativos ao conteúdo dos livros didáticos, não podemos deixar de mencionar outros fatores como: a falta de capacitação por parte de professores, falta de uma sequência de aprendizado efetivo gerada pelo acúmulo de conteúdos trabalhados ao longo dos anos anteriores, falhas na organização de modo geral do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

No Ensino Superior um fator que dificulta o estudo da Geometria Analítica é relativo ao desenvolvimento algébrico dos exercícios, bem como a interpretação dos resultados obtidos algebricamente, visto que a Álgebra é uma área da Matemática que possui um considerável nível de abstração, principalmente no tocante ao ambiente acadêmico.

2.2 AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E A COMPUTAÇÃO À LUZ DA BNCC: COMPETÊNCIAS E HABILIDADES QUE NORTEIAM NOSSO TRABALHO

A computação e as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), estão cada vez mais presentes no cotidiano de nossa sociedade, fato que é diariamente percebido pelo modo que nós nos comunicamos, interagimos com outras pessoas, trabalhamos e desenvolvemos atividades básicas como fazer compras, cozinhar e se entreter. Tal situação nos leva a pensar cada vez mais sobre nosso futuro e o da sociedade como um todo.

Com isso a BNCC - Base Nacional Comum Curricular - BRASIL (2018) apresenta sua preocupação com os impactos dessas transformações na sociedade e evidencia competências gerais voltadas para o uso da tecnologia na Educação Básica, as quais estão presentes em diferentes dimensões que caracterizam a computação e as tecnologias digitais, tematizando-as tanto no que diz respeito a conhecimentos e habilidades, quanto a atitudes e valores. Como:

- Pensamento computacional:

> [...] envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos. (BRASIL, 2018, p. 474)

- Mundo digital:

> [...] envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, tablets etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) – compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação. (BRASIL, 2018, p. 474)

- Cultura digital:

> [...] envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica. (BRASIL, 2018, p. 474)

Ao término do período de Educação Básica, esperasse que os estudantes tenham desenvolvido com o apoio da escola competências e habilidades, nas diferentes áreas, que permitam que eles possam:

> [...] buscar dados e informações de forma crítica nas diferentes mídias, inclusive as sociais, analisando as vantagens do uso e da evolução da tecnologia na sociedade atual, como também seus riscos potenciais; [...] apropriar-se das linguagens da cultura digital, dos novos letramentos e dos multiletramentos para explorar e produzir conteúdos em diversas mídias, ampliando as possibilidades de acesso à ciência, à tecnologia, à cultura e ao trabalho; [...] usar diversas ferramentas de software e aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática e;[...] utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade. (BRASIL, 2018, p. 474)

Dentro da BNCC ainda temos nas "Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio" as competências de números 4 e 5, que orientam os professores no desenvolvimento de capacidades dos estudantes, tais como:

> [...] Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas; [...] Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 531)

Logo, seja por meio das diretrizes estabelecidas pela BNCC ou por consequências decorrentes da evolução tecnológica da nossa sociedade que nos impulsionam cada vez mais a repensar nossos hábitos de vida e postura como indivíduo, temos como educadores a importante responsabilidade e necessidade de buscar novas tecnologias voltadas para o processo de ensino e aprendizagem.

2.3 GEOGEBRA: BENEFÍCIOS E VIABILIDADES

O software GeoGebra tem sido proposto em diversas pesquisas nos últimos anos como ferramenta no processo de ensino-aprendizagem, sendo mais encontrado, no âmbito da Educação Básica. Ao se fazer uma busca rápida de dissertações na plataforma do PROFMAT encontramos cerca de 330 dissertações envolvendo o uso deste software em aplicações e atividades voltadas, na grande maioria, para a Educação Básica. Nosso intuito é fazer então uma abordagem do uso deste software para o estudo da Geometria Analítica, tanto para o Ensino Médio quanto para Ensino Superior, mostrando o quão valiosa é esta ferramenta para o processo de ensino-aprendizagem no âmbito da Educação Básica e também para o estudo no momento de aprofundamento da matéria no Ensino Superior.

Pereira e Cordeiro (2016, p. 89), reconhecem o GeoGebra como uma ferramenta atrativa para os discentes, por possibilitar a criação de uma imagem virtual de seu objeto de pesquisa. A visualização gráfica dos exercícios trabalhados no GeoGebra possibilita ao aluno uma melhor compreensão do assunto abordado e para o professor é um recurso extremamente valioso, uma vez que de maneira convencional o mesmo precisa ter bastante habilidade com desenhos feitos em lousa, que não é uma tarefa fácil. Além de complexa, tal situação torna a compreensão por parte do aluno mais difícil, visto que o desenho muitas vezes têm um significado maior para quem o faz do que para quem o visualiza.

Este software nos oferece recursos que podem ser utilizados para o estudo de conteúdos, desde a Educação Básica (como o estudo de polígonos, sólidos geométricos, gráficos de funções polinomiais e trigonométricas, dentre outros) até conteúdos do Ensino Superior (como funções polinomiais e logarítmicas, cônicas, derivadas, vetores, equações da reta e do plano, elipses, hipérboles, parábolas, distâncias, ângulos no espaço e outros) proporcionando análises mais minuciosas, com melhor compreensão e interpretação, de forma prática e eficaz. “O GeoGebra desperta nos alunos uma grande capacidade de investigação, através do uso de suas ferramentas, tornando o estudo de Matemática mais acessível, tangível e até divertido”. (SILVA, 2020, p. 75)

2.4 O SOFTWARE GEOGEBRA: UM BREVE TUTORIAL

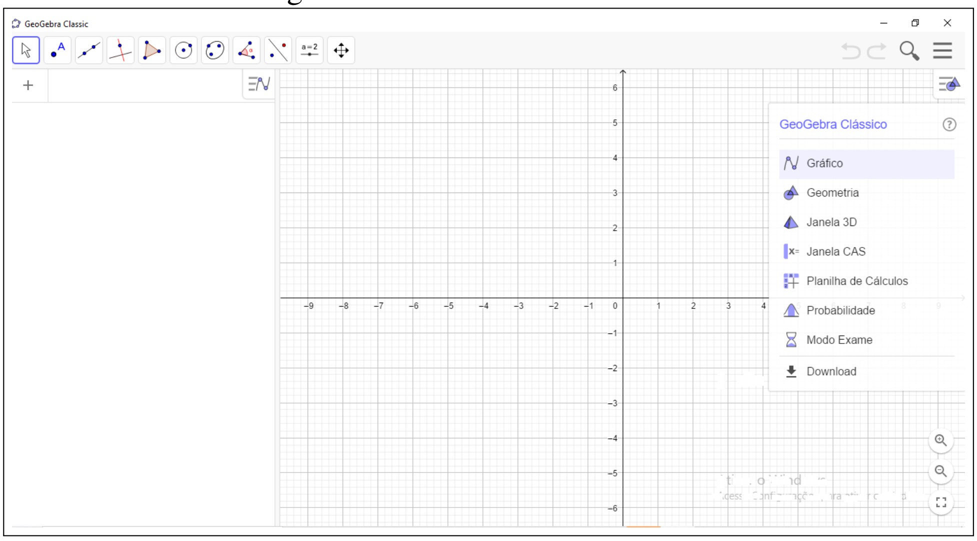
O GeoGebra é um software de Matemática dinâmica extremamente valioso para o estudo e para o processo de ensino e aprendizagem. Ele é gratuito e multiplataforma, combina

Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, Estatística e Cálculo Diferencial numa única aplicação. Por se tratar de um aplicativo com muitas ferramentas, faremos nessa seção uma pequena apresentação, de quais, são utilizadas para o estudo da Geometria Analítica, sendo elas a Janela de Visualização e Janela de Visualização 3D.

Utilizamos em nosso trabalho a versão mais recente do software - GeoGebra Clássico 6 - disponível para download no site (www.geogebra.org). Neste site temos a opção de fazer uso de todas os aplicativos da plataforma como: Calculadora, Calculadora Gráfica, Geometria, Calculadora 3D, Calculadora CAS, Calculadora Científica, Notas e o Geogebra Clássico e para fazer uso da plataforma basta ter acesso a internet. Na página inicial do site, encontramos no menu a opção “Baixar Aplicativos”, ao acessar esse ícone somos direcionados a uma página com todas as aplicações disponíveis para download, basta escolher o aplicativo e clicar em download.

Com o software instalado em seu computador temos ao abri-lo a visão da seguinte tela inicial, Figura 2.1.

Figura 2.1: Tela Inicial do Software



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Olhando para o canto direito da tela temos a opção de escolher qual o “perfil” de trabalho que queremos desenvolver, sendo as opções: “Gráficos”, “Geometria”, “Janela 3D”, “Janela CAS”, “Planilha de Cálculos”, “Probabilidade” ou “Modo Exame”, ao final desta janela existe a opção “Download” que ao ser selecionada nos direciona para a plataforma do geogebra.org nos permitindo fazer downloads de outros softwares. A tela Inicial já começa com o perfil “Gráficos” selecionado.

No canto superior esquerdo temos uma barra de ferramentas com 11 ícones, que ao serem selecionados nos oferecem outras novas opções, como apresentado a seguir, repeitando a ordem da esquerda para a direita, assim como aparecem os ícones:

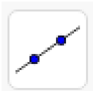
1) Figura 2.2: Seleção

Ferramentas de Seleção: Ao clicar neste ícone temos acesso a quatro ferramentas: “Mover ou selecionar objetos”, “Rotação em torno de um ponto”, “Função a mão livre” e “Caneta”.

2) Figura 2.3: Ponto

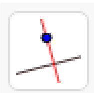
Ferramentas de Ponto: Clicando neste ícone temos acesso a oito ferramentas: “Ponto”, “Ponto em Objeto”, “Vincular/Desvincular Objeto”, “Interseção de Dois objetos”, “Ponto Médio ou Centro”, “Número Complexo”, “Otimização” e “Raízes”.

3) Figura 2.4: Reta



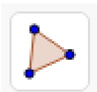
Ferramentas de Reta: Através deste ícone temos acesso a sete ferramentas, sendo estas: “Reta”, “Segmento”, “Segmento com Comprimento Fixo”, “Semirreta”, “Caminho Poligonal”, “Vetor” e “Vetor a Partir de um Ponto”.

4) Figura 2.5: Retas



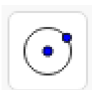
Ferramentas de Retas: Ao clicar nesse ícone temos acesso a oito ferramentas: “Reta Perpendicular”, “Reta Paralela”, “Mediatriz”, “Bissetriz”, “Reta Tangente”, “Reta Polar ou Diametral”, “Reta de Regressão Linear” e “Lugar Geométrico”.

5) Figura 2.6: Polígonos



Ferramentas de Polígonos: Neste ícone temos acesso a quatro ferramentas: “Polígono”, “Polígono Regular”, “Polígono Rígido” e “Polígono Semi-deformável”.

6) Figura 2.7: Círculos



Ferramentas de Círculos: Aqui temos acesso a nove ferramentas: “Círculo: dados Centro e Um de seus Pontos”, “Círculo: Centro & Raio”, “Compasso”, “Círculo: definido por Três Pontos”, “Semicírculo”, “Arco Circular”, “Arco Circuncircular”, “Setor Circular” e “Setor Circuncircular”.

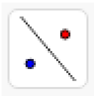
7) Figura 2.8: Cônicas

Ferramentas de Cônicas: Neste ícone temos acesso a quatro ferramentas: “Elipse”, “Hipérbole”, “Parábola” e “Cônica por Cinco Pontos”.

8) Figura 2.9: Ângulos

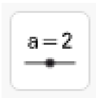
Ferramentas de Ângulos: Ao clicar neste ícone temos acesso a oito ferramentas: "Ângulo", "Ângulo com Amplitude Fixa", "Distância, Comprimento ou Perímetro", "Área", "Inclinação", "Lista", "Relação" e "Inspetor de Funções".

9) Figura 2.10: Reflexão



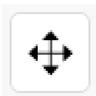
Ferramentas de Reflexão: Aqui obtemos acesso a outras seis ferramentas: "Reflexão em Relação a uma Reta", "Reflexão em Relação a um Ponto", "Inversão", "Rotação em Torno de um Ponto", "Translação por um Vetor" e "Homotetia".

10) Figura 2.11: Visualização



Ferramentas de Visualização: Clicando neste ícone temos acesso a seis ferramentas: "Controle Deslizante", "Texto", "Inserir Imagem", "Botão", "Caixa para Exibir/Esconder Objetos" e "Campo de Entrada".

11) Figura 2.12: Exibição



Ferramentas de Exibição: Neste ícone temos acesso a sete ferramentas: "Mover Janela de Visualização", "Ampliar", "Reduzir", "Exibir/Esconder Objeto", "Exibir/Esconder Rótulo", "Copiar Estilo Visual" e "Apagar".

Abaixo da barra de ferramentas temos um campo de "Entrada" destacado na Figura 2.13.

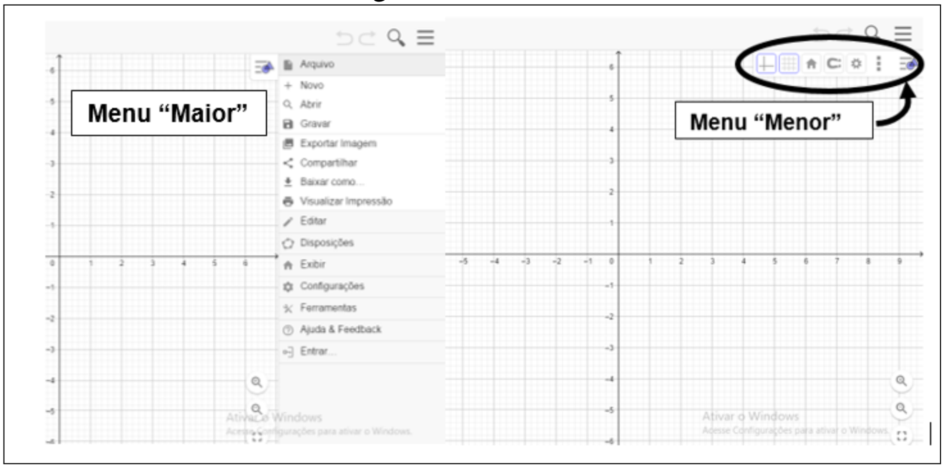
Figura 2.13: Campo de Entrada, Menus e Zoom

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Neste campo digitamos as expressões e comandos que desejamos trabalhar e visualizar. Temos também na tela inicial no canto inferior direito a opção de aumentar ou diminuir o "zoom" da Janela de Visualização.

A direita da tela, na parte superior (veja Figura 2.13), temos dois "Menus". No primeiro e o "maior" entre eles, temos opções padrões de aplicativos, tais como: "Novo-arquivo", "Abrir", "Impressão", "Editar", "Disposições", "Exibir", entre outras opções. Já no segundo, o "menor", temos ao clicar nele alguns ícones que nos permitem: "Exibir ou Ocultar Eixos", "Exibir, Ocultar ou trocar o tipo da Malha", "Alterar o perfil de trabalho", entre outras opções. Na Figura 2.14 temos a imagem dos menus.

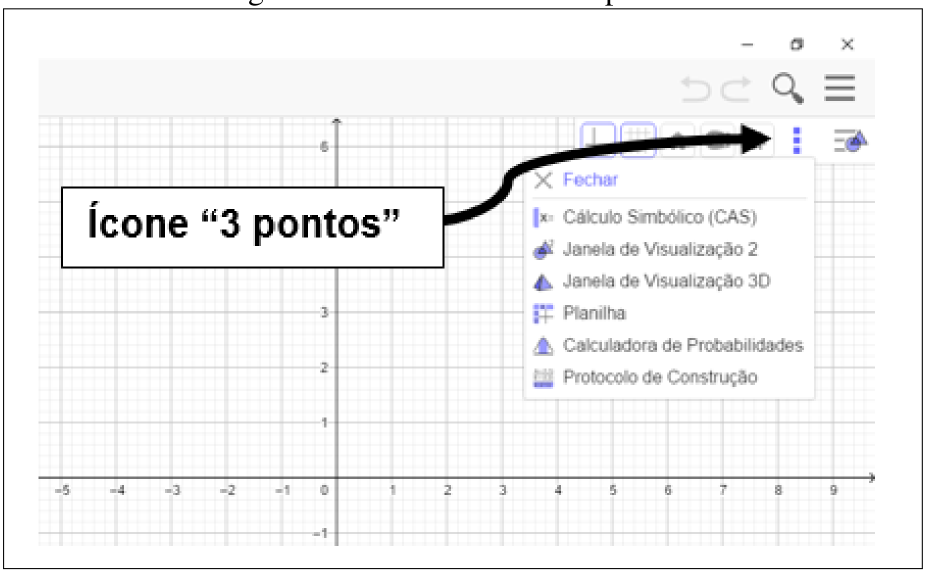
Figura 2.14: Menus



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Dentro do menu "menor", temos um ícone com "Três pontos", ao clicar nele encontramos mais opções como mostra a Figura 2.15.

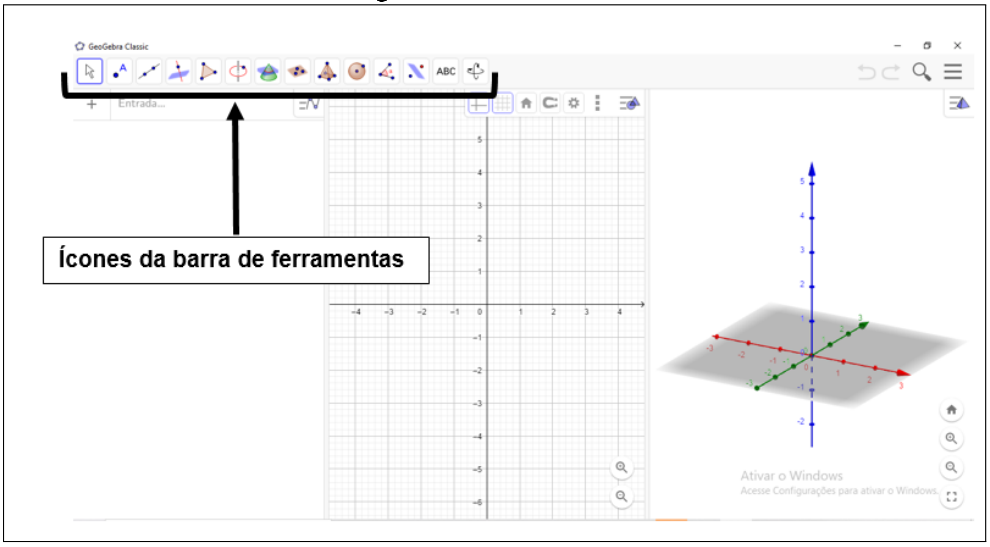
Figura 2.15: Menu - Ícone "3 pontos"



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Ao abrirmos a Janela de Visualização 3D, temos algumas alterações na barra de ferramentas, sendo que algumas ferramentas disponibilizadas em cada ícone somem e outras novas surgem, bem como surgem também novos ícones. Na Figura 2.16 temos a visualização da tela inicial na opção 3D e em destaque sua respectiva barra de ferramentas.

Figura 2.16: Janela 3D

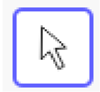


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

A princípio na tela, permanece aberta a Janela 2D (no centro da Figura 2.16) e a Janela 3D fica a direita. Para se obter uma melhor visualização, devemos fechar a Janela 2D, clicando no ícone "3 pontos" da respectiva janela e utilizando a opção "fechar".

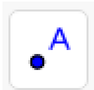
Perceba que agora temos 14 ícones, alguns semelhantes e outros novos. Por essa razão faremos a descrição de cada item:

1) Figura 2.17: Mover



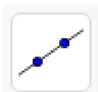
Ferramentas Mover: Ao clicar neste ícone temos agora apenas a opção "Mover", utilizada para movimentar a imagem ou algum objeto.

2) Figura 2.18: Ponto



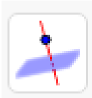
Ferramentas de Ponto: Clicando neste ícone temos agora acesso a cinco ferramentas: "Ponto", "Ponto em Objeto", "Interseção de Dois Objetos", "Ponto Médio ou Centro" e "Vincular/Desvincular Ponto".

3) Figura 2.19: Reta



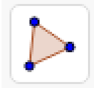
Ferramentas de Reta: Agora neste ícone temos acesso a seis ferramentas, sendo estas: "Reta", "Segmento", "Segmento com Comprimento Fixo", "Semirreta", "Vetor" e "Vetor a Partir de um Ponto".

4) Figura 2.20: Retas



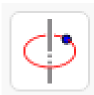
Ferramentas de Retas: Temos nesse ícone acesso a seis ferramentas: “Reta Perpendicular”, “Reta Paralela”, “Bissetriz”, “Reta Tangente”, “Reta Polar ou Diametral” e “Lugar Geométrico”.

5) Figura 2.21: Polígonos



Ferramentas de Polígonos: Encontramos nesse ícone apenas duas ferramentas: “Polígono” e “Polígono Regular”.

6) Figura 2.22: Círculos e Cônicas

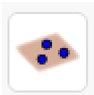


Ferramentas de Círculos e Cônicas: Agora nesse ícone temos acesso a onze ferramentas: “Círculo dados Eixo e Um de seus Pontos”, “Círculo (Centro-Raio+Direção)”, “Círculo definido por Três Pontos”, “Arco Circular”, “Arco Circuncircular”, “Setor Circular”, “Setor Circuncircular”, “Elipse”, “Hipérbole”, “Parábola” e “Cônica por Cinco Pontos”.

7) Figura 2.23: Interseção de Duas Superfícies

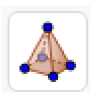
Ferramentas de Interseção de Duas Superfícies: Neste ícone, temos apenas a ferramenta “Interseção de Duas Superfícies”.

8) Figura 2.24: Planos



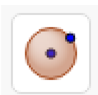
Ferramentas de Planos: Ao clicar neste ícone temos acesso a quatro ferramentas: “Plano por três pontos”, “Plano”, “Plano Perpendicular”, “Plano Paralelo”.

9) Figura 2.25: Sólidos Geométricos



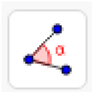
Ferramentas de Sólidos Geométricos: Obtemos nesse ícone acesso a outras dez ferramentas: “Pirâmide”, “Prisma”, “Fazer extrusão para Pirâmide”, “Extrusão para Prisma”, “Cone”, “Cilindro”, “Tetraedro”, “Cubo”, “Planificação” e “Superfície de Revolução”.

10) Figura 2.26: Esferas



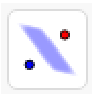
Ferramentas de Esferas: Clicando neste ícone temos acesso a duas ferramentas: “Esfera: Centro & Ponto”, “Esfera: Centro & Raio”.

11) Figura 2.27: Ângulos



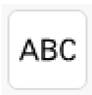
Ferramentas de Ângulos: Ao clicar neste ícone temos acesso a cinco ferramentas: “Ângulo”, “Distância”, “Comprimento ou Perímetro”, “Área” e “Volume”.

12) Figura 2.28: Reflexão



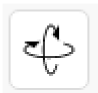
Ferramentas de Reflexão: Aqui obtemos acesso a outras seis ferramentas: “Reflexão em Relação a um Plano”, “Reflexão em Relação a uma Reta”, “Reflexão em Relação a um Ponto”, “Girar em torno de Uma Reta”, “Translação por um Vetor” e “Homotetia”.

13) Figura 2.29: Texto



Ferramenta de Texto: Neste ícone, temos apenas a ferramenta “Texto”.

14) Figura 2.30: Mover



Ferramentas de Exibição: Neste ícone temos acesso a nove ferramentas: “Girar Janela de Visualização 3D”, “Mover Janela de Visualização”, “Ampliar”, “Reduzir”, “Exibir/Esconder Objeto”, “Exibir/Esconder Rótulo”, “Copiar Estilo Visual”, “Apagar” e “Vista para frente de”.

Uma grande vantagem do GeoGebra Clássico 6, é que ao deixar o cursor parado sobre o ícone que se pretende selecionar, o software exibe uma mensagem na parte inferior da tela, explicando como se utiliza tal ferramenta. Por esse motivo, deixamos de explicar a função exata de cada um dos ícones mencionados acima, visando objetivar o nosso texto.

Veremos então, como o GeoGebra pode auxiliar no processo ensino-aprendizagem e estudo da Geometria Analítica, mesmo mediante as defasagens mencionadas anteriormente. Ao compararmos a resolução formal dos exercícios e também a abordagem através do software exploraremos os benefícios viabilizados ao utilizá-lo para conferir resultados, explorar conceitos, definições e analisar aplicações da Geometria Analítica.

3 METODOLOGIA

Segundo Borba e Araújo (2019, p. 25) pesquisas realizadas sob uma abordagem qualitativa nos fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações.

Pode-se dizer então, que a metodologia utilizada no presente trabalho é qualitativa e descritiva, visto que o intuito dos exercícios apresentados é extrair o quão facilitador é o GeoGebra, não somente no processo de resolução do exercício, mas também o quanto facilita para o discente a compreensão do mesmo, visto que a apresentação gráfica propiciada pelo software traz clareza e concretude ao assunto trabalhado algebricamente e para o docente propicia uma melhor apresentação do conteúdo abordado.

Sendo também bibliográfica e exploratória levando-se em consideração todo o levantamento teórico de pesquisas relacionadas ao uso do GeoGebra e suas aplicações voltadas para o aperfeiçoamento da Educação Básica, bem como o estudos relacionados ao ensino da Geometria Analítica.

A escolha dos exercícios do Ensino Médio se deu em parceria com a professora Ma. Priscila Leal, que trabalha com turmas dos anos finais da Educação Básica - 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio - na cidade de Franca-SP. Em minha carreira docente, por poucas vezes tive a oportunidade de trabalhar com turmas de tal período escolar, com isso, houve a necessidade de se procurar a parceria com a professora Priscila, afim de se entender melhor a abordagem da Geometria Analítica trabalhada nestes anos da Educação Básica e o nível de aprofundamento da matéria. Para a seleção dos exercícios, levamos em consideração a grande quantidade de conteúdos explorados no momento da resolução dos mesmos, pensando-se em abordar o maior número possível de ferramentas no desenvolvimento com o software.

3.1 LIMITAÇÃO DO MÉTODO

A situação de calamidade pública vivenciada no ano de 2020, fez com que as atividades presenciais fossem suspensas tanto na Educação Básica quanto na Educação Superior, como visto no decreto nº 64.864, de 16 de março de 2020 (SÃO PAULO, 2020) publicado no diário oficial do Estado de São Paulo, e na resolução nº 14, de 17 de março de 2020, do reitor da UFTM (UFTM, 2020).

Diante da suspensão das aulas presenciais e total mudança no formato da educação vivenciada neste ano, a aplicação direta da presente proposta tornou-se inviável, devido a situação pandêmica e de calamidade pública gerada pelo COVID 19.

Este cenário fez com que as escolas de todo o Brasil se adaptassem há uma nova realidade educacional, migrando quase que de maneira forçada do ensino presencial para o ensino online e até mesmo a distância (EAD). Tal mudança gerou diversas polêmicas e enormes desafios para as escolas e para as famílias.

Encontrar abertura para a aplicação de um novo formato de abordagem de conteúdo e desenvolvimento de matéria dentro das escolas de Educação Básica tornou-se uma tarefa praticamente impossível, mediante o enfrentamento desafiador e complexo vivenciado nas escolas como um todo, quanto a cumprir todo cronograma letivo adequando-se a prazos e ferramentas alternativas.

Desta forma, este trabalho foi limitado a apenas uma proposta devido à falta de oportunidade de aplicação direta.

4 RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS

4.1 ENSINO MÉDIO

A seguir temos cinco exercícios relativos a Geometria Analítica desenvolvidos pela professora Ma. Priscila Cordero Leal que leciona a disciplina Matemática, para turmas do Ensino Médio de colégios na cidade de Franca - SP e, na sequência, um exercício extraído da Exame Nacional do Ensino Médio 2019 - ENEM PPL 2019. Os primeiros cinco exercícios, foram selecionados devido a grande quantidade de conteúdos explorados durante a resolução, porém, faz se necessário que antes da aplicação de tais exercícios os alunos já tenham conhecimento da matéria. O sexto exercício se trata de uma situação problema, onde o intuito é apresentar como os conhecimentos matemáticos conciliado com o uso do software nos permite até mesmo resolver problemas ligados a vida real.

Veremos cada um dos exercícios sendo primeiramente resolvidos de forma algébrica. Em seguida, traremos uma proposta de abordagem com o uso do software GeoGebra, afim de se investigar os benefícios propiciados pelo software bem como repensar práticas pedagógicas que viabilizem e estimulem o estudo da Geometria Analítica por parte dos alunos.

Exercício 1

Considere o octógono regular representado no plano cartesiano na Figura 4.1.

Sabe-se que $A = (4, -2)$ e $d(A, B) = 4$. Além disso, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{FE}$ são paralelos ao eixo das ordenadas, os lados $\overline{CD}$ e $\overline{HG}$ são paralelos ao eixo das abscissas e a soma dos ângulos internos do octógono regular é igual a 1080º.

Determine o que se pede nos itens abaixo, apresentando o raciocínio utilizado.

a) As coordenadas do vértice B.

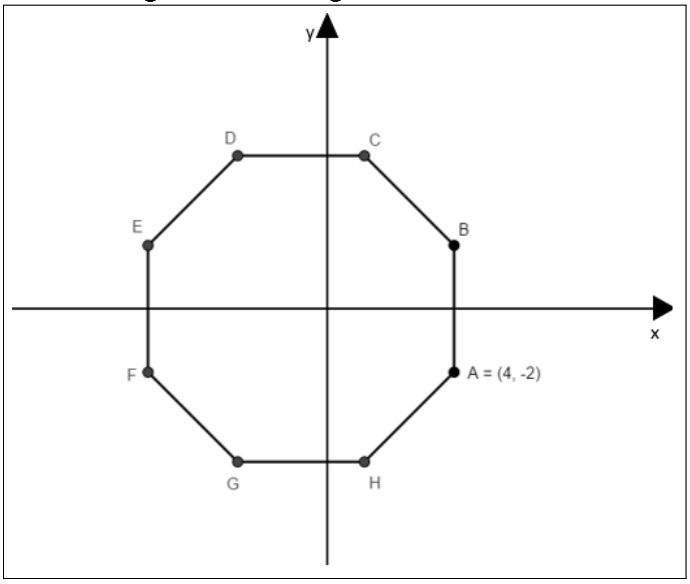
b) A equação reduzida da reta que contém o lado $\overline{BC}$ e as coordenadas do vértice C.

c) As coordenadas do vértice D e a equação geral da reta que contém o lado $\overline{DE}$.

d) O ponto de interseção das diagonais $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$.

e) O comprimento da diagonal $\overline{FH}$.

Figura 4.1: Octógono ABCDEFGH

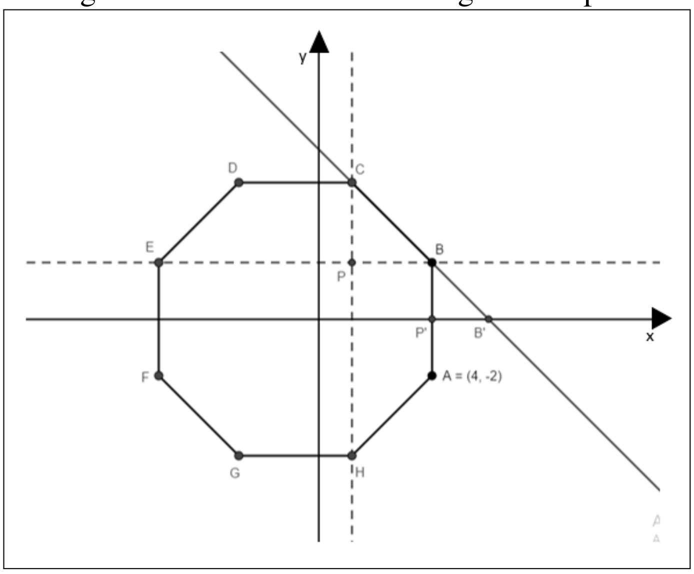


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Resolução Algébrica:

Para a resolução deste exercício, necessitaremos da Figura 4.2 como apoio para visualização da análise feita em alguns itens.

Figura 4.2: Exercício 1 EM - Figura de Apoio



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

a) O primeiro item requer dos alunos algumas análises básicas de informações extraídas do próprio enunciado. O fato dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{FE}$ serem paralelos ao eixo das ordenadas nos garante que o ponto B possui a mesma abscissa que o ponto A, ou seja, o ponto B = $(4, y)$. Como $d(A, B) = 4$ temos pelo cálculo de distância entre dois pontos que

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{(4-4)^2 + (-2-y)^2} = 4 \\
\Rightarrow\ & \sqrt{4 + 4y + y^2} = 4 \\
\Rightarrow\ & 4 + 4y + y^2 = 16 \\
\Rightarrow\ & y^2 + 4y - 12 = 0 \\
\Rightarrow\ & y = -6 \text{ ou } y = 2.
\end{aligned}
$$

Pela Figura 4.1 é possível perceber que a ordenada do ponto B possui um valor positivo então $B = (4, 2)$.

b) Neste item procuramos uma equação do tipo $y = mx + n$, onde m é o coeficiente angular e n é o coeficiente linear da reta procurada.

Como a Figura 4.1 se trata de um octógono regular, temos que cada um dos ângulos internos mede 135º. Ao traçarmos uma reta paralela ao eixo OX passando pelo ponto B, dividimos o $\angle CBA$ interno ao octógono em duas partes, uma de 90º e outra de 45º, veja Figura 4.2. Por semelhança de triângulos temos pelo critério AA (Ângulo, Ângulo), que $\triangle CPB$ é semelhante ao $\triangle BP'B'$. Logo, o ângulo agudo $\widehat{B'} = 45$º, por consequência, o seu suplemento é 135º. Isso nos garante que a inclinação da reta que passa pelos pontos B e C é 135º, ou seja, sendo $m = \operatorname{tg}\theta$, onde θ é a inclinação da reta, temos que $m = \operatorname{tg} 135$º, assim concluímos que $m = -1$. Tendo que o ponto $B = (4, 2)$ pertence a reta então, segue que

$$
\begin{aligned}
& y = mx + n \\
\Rightarrow\ & 2 = -1(4) + n \\
\Rightarrow\ & 2 = -4 + n \\
\Rightarrow\ & n = 6.
\end{aligned}
$$

Logo, a equação reduzida da reta que contém o lado $\overline{BC}$ é $y = -x + 6$.

Logo, sendo $\operatorname{sen} 45 = \dfrac{y-2}{4}$ então

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{y-2}{4} \\ \Rightarrow\ &4\sqrt{2} = 2y - 4 \\ \Rightarrow\ &y = 2\sqrt{2} + 2. \end{aligned}$$

Temos também que $\cos 45 = \dfrac{4-x}{4}$. Assim,

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4-x}{4} \\ \Rightarrow\ &4\sqrt{2} = 8 - 2x \\ \Rightarrow\ &x = 4 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $C = \left(4 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}\right)$.

c) Para se obter as coordenadas do ponto D basta fazer a seguinte análise: Por se tratar de um octógono regular com lado medindo 4 e do fato que $C = \left(4 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}\right)$, basta subtrair 4 unidades do valor da abscissa do ponto C, visto que os pontos D e C pertencem a uma mesma reta paralela ao eixo das abscissas, logo $D = \left(4 - 2\sqrt{2} - 4, 2 + 2\sqrt{2}\right)$ e, portanto, $D = \left(-2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}\right)$.

Por meio de uma análise análoga ao item b) a inclinação da reta DE é de 45 então $m = 1$. Logo, substituindo o valor de m e as coordenadas do ponto $D = \left(-2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}\right)$ na equação $y = mx + n$, obtemos

$$n = 2 + 4\sqrt{2}.$$

Assim, a equação reduzida da reta DE é $y = x + 2 + 4\sqrt{2}$.

Como solicitado no enunciado, a equação geral da reta DE é

$$x - y + 2 + 4\sqrt{2} = 0.$$

d) O ponto E possui a mesma ordenada que o ponto B (como visto na Figura 4.2), logo

$E = (x, 2)$. Como a distância entre D e E é 4 então

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + (2-2-2\sqrt{2})^2} = 4 \\ \Rightarrow \quad & \sqrt{x^2 + 4x\sqrt{2} + 16} = 4 \\ \Rightarrow \quad & x^2 + 4x\sqrt{2} + 16 = 16 \\ \Rightarrow \quad & x^2 + 4x\sqrt{2} = 0 \\ \Rightarrow \quad & x = 0 \text{ ou } x = -4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Logo, $E = (-4\sqrt{2}, 2)$.

As coordenadas de F são $(-4\sqrt{2}, -2)$, visto que o ponto F possui a mesma ordenada que o ponto A e a mesma abscissa que o ponto E. Assim, temos que as retas que contém $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$ são:

1º) **Reta que contém $\overline{AE}$:**

Sendo m o coeficiente angular da reta, temos que $m = \dfrac{y_E - y_A}{x_E - x_A}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} m = & \frac{2+2}{-4\sqrt{2}-4} \\ = & \frac{4}{-4(1+\sqrt{2})} \\ = & 1 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Com isso temos que a reta AE é do tipo

$$y = (1-\sqrt{2})x + n.$$

Utilizando as coordenadas do ponto $A = (4, -2)$, obtemos $-2 = (1-\sqrt{2})4 + n$, ou seja, $n = -6 + 4\sqrt{2}$.

Assim, $y = (1-\sqrt{2})x - 6 + 4\sqrt{2}$ é a equação da reta AE.

2º) **Reta que contém $\overline{BF}$:**

Para a reta BF temos de maneira análoga que, $m = \sqrt{2} - 1$.

Fazendo uso do ponto $B = (4, 2)$, obtemos a equação da reta BF, que é $y = (\sqrt{2}-1)x + 6 - 4\sqrt{2}$.

Agora fazendo a interseção das duas retas encontramos

$$\begin{cases} y = (1-\sqrt{2})x - 6 + 4\sqrt{2} \\ y = (\sqrt{2}-1)x + 6 - 4\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Substituindo $y = 0$ na primeira equação temos

$$\begin{aligned} 0 &= x(1-\sqrt{2}) - 6 + 4\sqrt{2} \\ \Rightarrow &\quad x(1-\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} \\ \Rightarrow &\quad x = \frac{6-4\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \\ \Rightarrow &\quad x = 2 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Logo, a interseção entre os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$ é o ponto $(2-\sqrt{2}, 0)$.

e) Para se calcular o comprimento da diagonal $\overline{FH}$ basta calcular a distância entre os pontos F e H. Pelo item anterior temos as coordenadas de F que é $(-4\sqrt{2}, -2)$, como o ponto H é simétrico ao ponto C em relação ao eixo das abscissas, temos $H = (4-2\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2})$. Logo, o comprimento da diagonal é dado por

$$\begin{aligned} d = &\quad \sqrt{(4-2\sqrt{2}+4\sqrt{2})^2 + (-2-2\sqrt{2}+2)^2} \\ = &\quad \sqrt{(4+2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2} \\ = &\quad \sqrt{16\sqrt{2}+32} \\ = &\quad 4\sqrt{\sqrt{2}+2} \end{aligned}$$

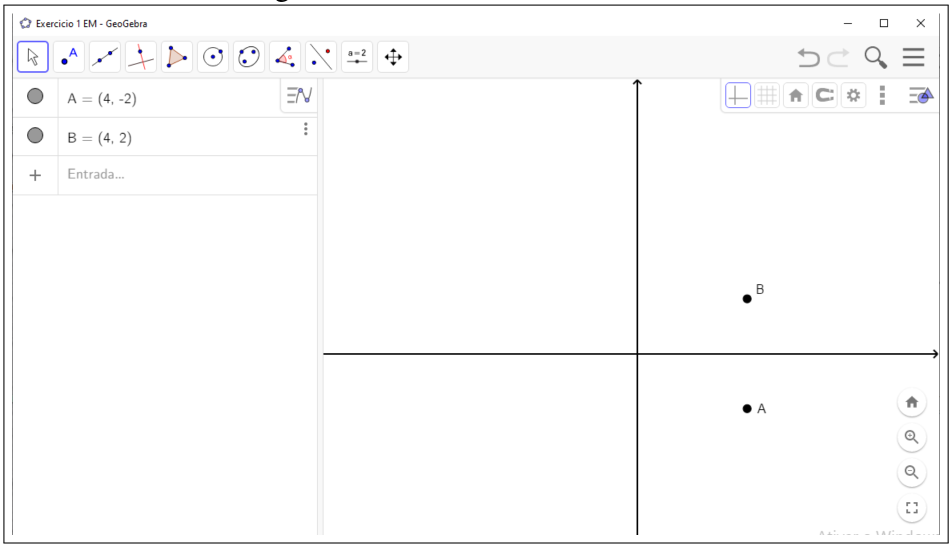
que é a distância procurada.

Sugestão de atividade com o GeoGebra:

Podemos utilizar o mesmo exercício como uma atividade de investigação dos recursos disponíveis do software, pedindo aos mesmos que após solucionarem as questões algebricamente utilizem o GeoGebra para conferirem seus resultados respeitando os seguintes passos:

1º) Com o software aberto, crie os pontos A e B digitando suas coordenadas no campo de entrada. (Figura 4.3)

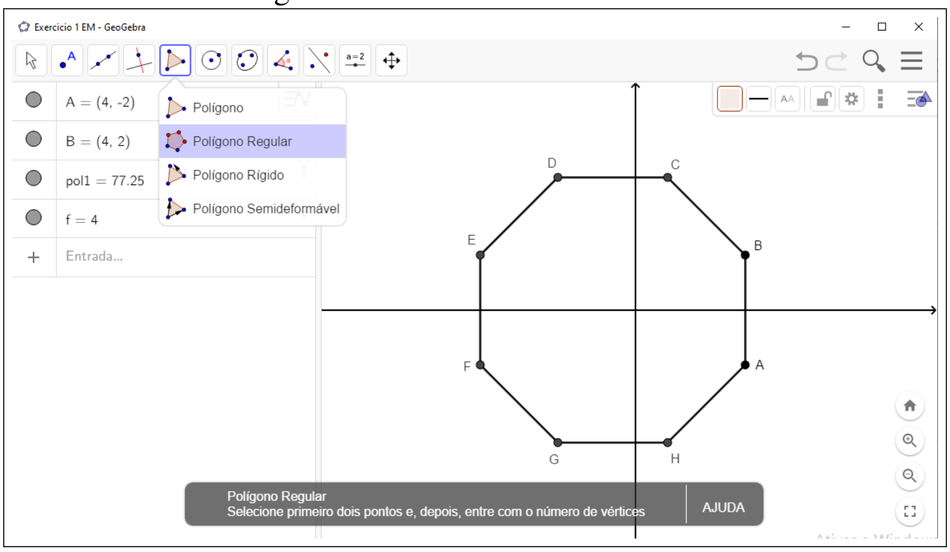
Figura 4.3: Exercício 1 EM Passo 1



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

2º) Utilizando a ferramenta "Polígono Regular", selecionamos os pontos A e B, em seguida preenchemos o campo "vértices" com o número 8, afim de se obter um octógono. (Veja a Figura 4.4)

Figura 4.4: Exercício 1 EM Passo 2

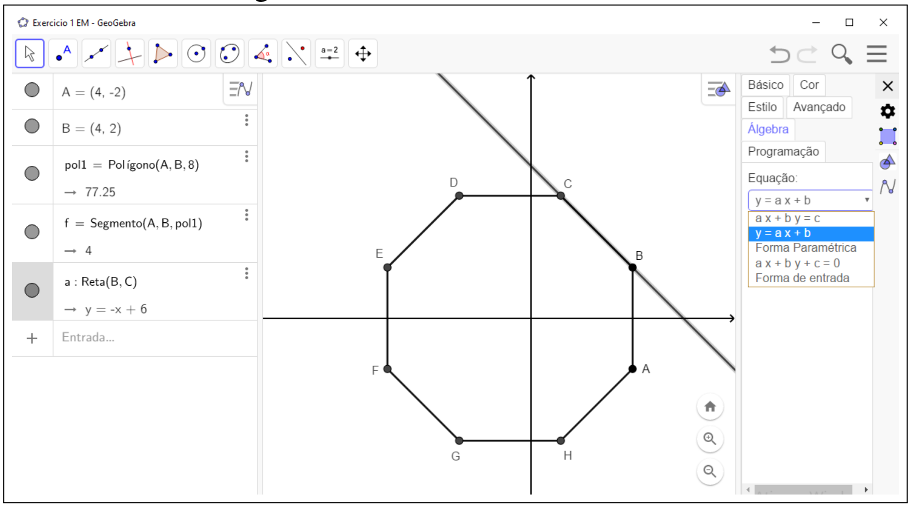


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

3º) Com a ferramenta "Reta" selecione os pontos B e C para se obter a equação da reta que contém o lado $\overline{BC}$.

Observação: O software gera automaticamente a equação "geral" da reta. Para se obter a equação "reduzida", basta entrar nas configurações da reta (clicando sobre os 3 pontos do seu campo de entrada) e no ícone "Álgebra" alterar o formato da equação, como apresentado na Figura 4.5.

Figura 4.5: Exercício 1 EM Passo 3

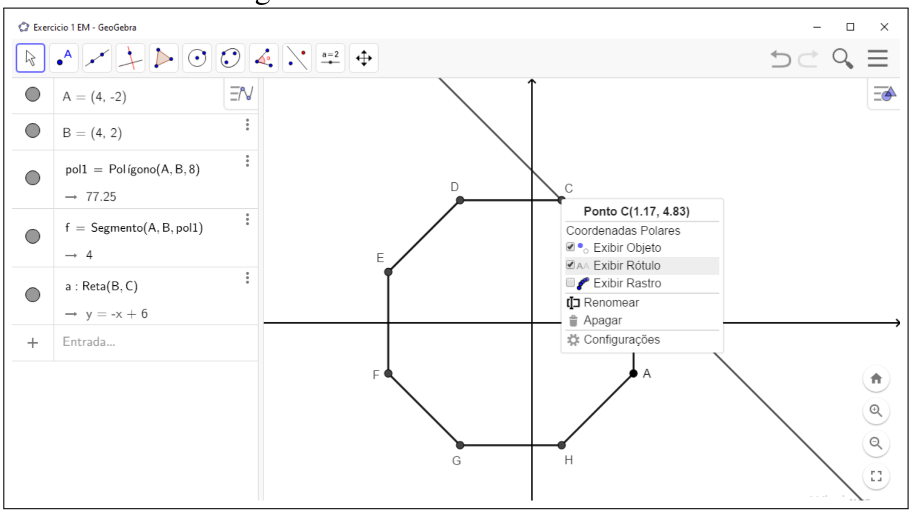


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020

4º) Com a ferramenta "Mover" selecionada, clique com o botão direito do mouse sobre o ponto C, afim de se verificar as coordenadas do mesmo. (Figura 4.6)

Observação: Peça para os alunos conferirem através de uma calculadora científica, se os valores das coordenadas são os mesmos indicados pelo software.

Figura 4.6: Exercício 1 EM Passo 4



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

5º) Novamente com a ferramenta "Mover" selecionada, clique sobre o ponto D para conferir se as coordenadas do ponto são as mesmas que as obtidas algebricamente.

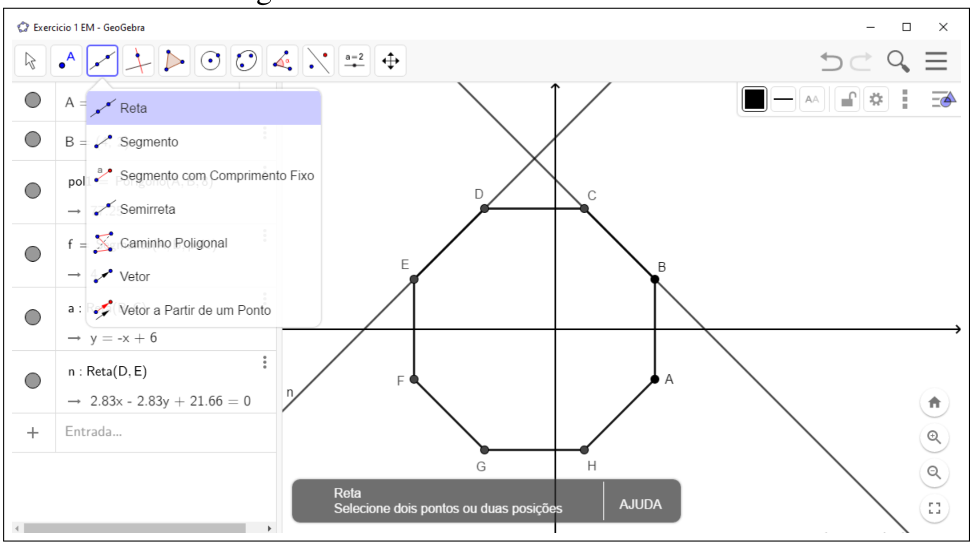
6º) Utilizando a ferramenta "Reta", selecione os pontos D e E (nesta ordem), para se obter a reta que contém o lado $\overline{DE}$ do octógono. (Figura 4.7)

Observações:

i) Novamente peça para os alunos conferirem se os valores da equação geral apresentada pelo software são os mesmos que os obtidos algebricamente.

ii) O fato de se respeitar a ordem de seleção dos pontos D e E, nos abre a uma discussão com os alunos sobre o porquê da mudança de sinal da equação ao se inverter a ordem de seleção.

Figura 4.7: Exercício 1 EM Passos 5 e 6

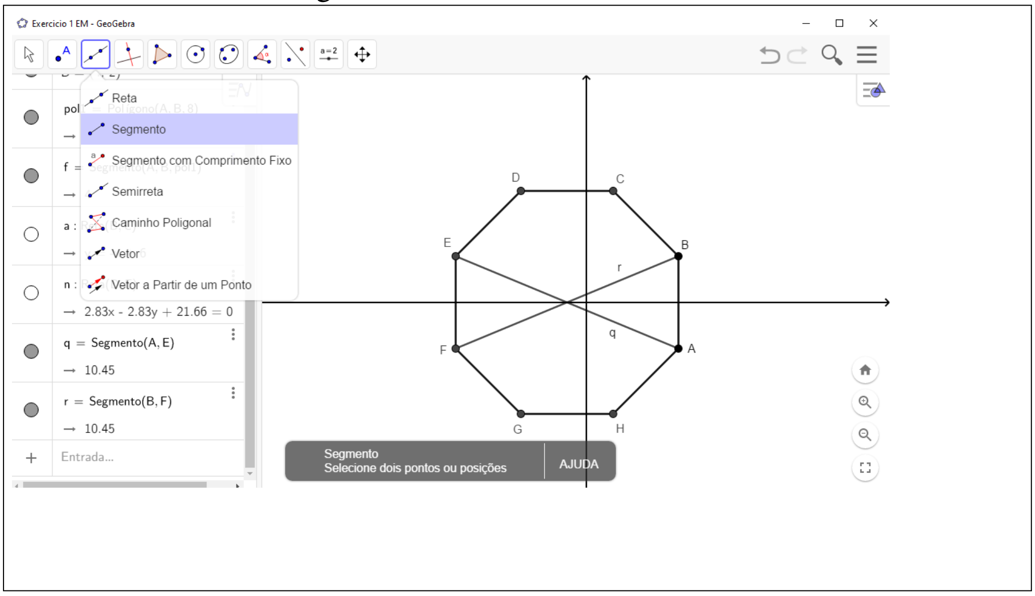


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

7º) Com a ferramenta “Segmento” selecionada, clicamos sobre os pontos A, E, B e F (nessa ordem), para se obter os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$. (Figura 4.8)

Observação: Para se obter uma melhor visualização da construção, desabilitamos as retas BC e DE criadas anteriormente, para isso basta clicar sobre o “botão circular” que fica a direita do campo de entrada de cada uma das retas.

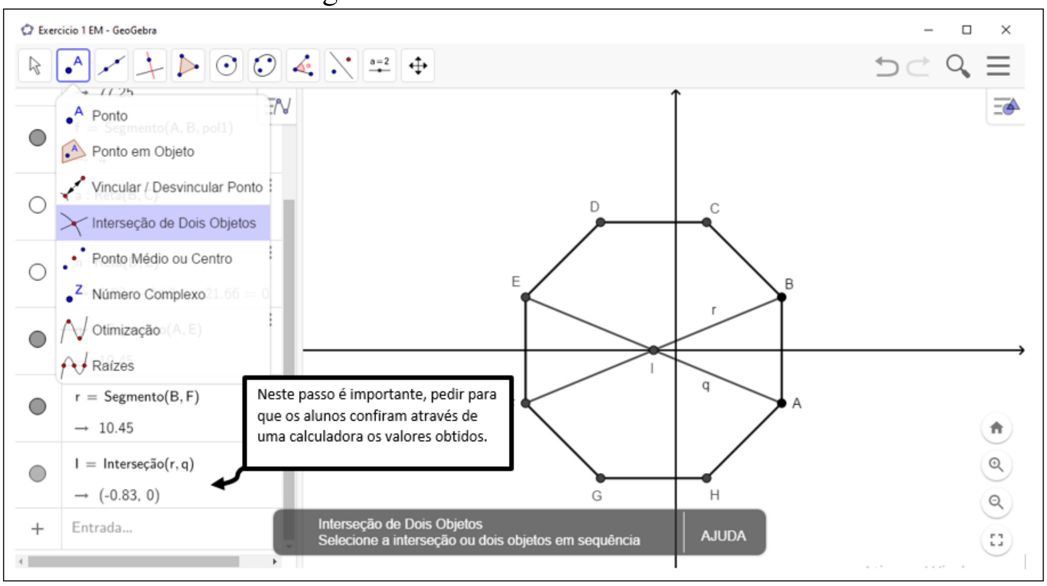
Figura 4.8: Exercício 1 EM Passo 7



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

8º) Usando a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” selecionamos os dois segmentos criados e obtemos o ponto I. (Figura 4.9)

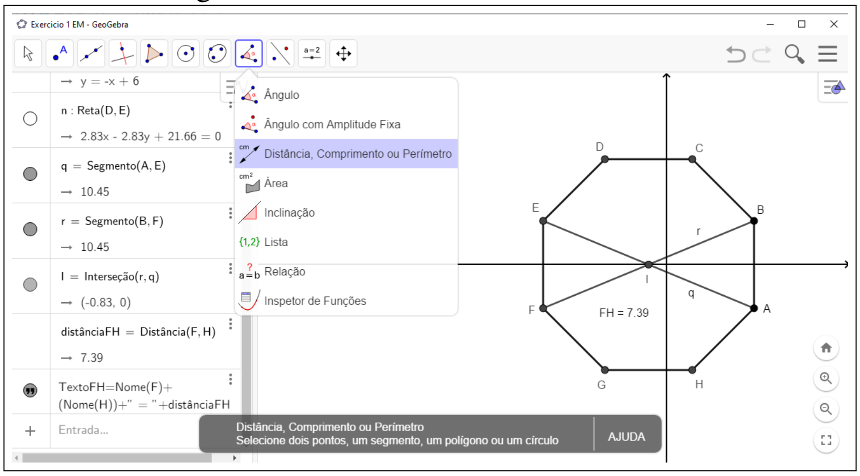
Figura 4.9: Exercício 1 EM Passo 8



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

9º) Por fim, para se obter o comprimento da diagonal $\overline{FH}$ basta utilizar a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro” e selecionar os pontos F e H, automaticamente o programa nos dá o valor do comprimento procurado. (Figura 4.10)

Figura 4.10: Exercício 1 EM Passo Final



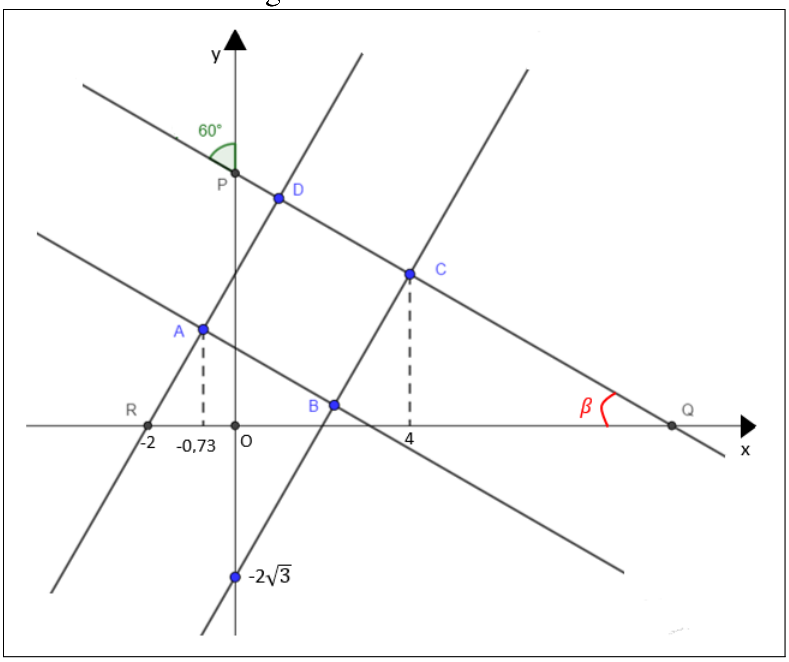
Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Considerações: O objetivo de tal atividade com software é permitir que o aluno verifique a veracidade do software conferindo os resultados fornecidos pelo mesmo comparando-os com os seus resultados obtidos algebricamente, bem como explorar alguns recursos disponíveis pelo aplicativo.

Exercício 2

Na Figura 4.11, $ABCD$ é um quadrado.

Figura 4.11: Exercício 2



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Baseado nas informações acima, faça o que se pede:

a) Calcule a medida do ângulo β.

b) Determine a equação reduzida da reta que contém os vértices B e C e determine a ordenada do vértice C.

c) Escreva a equação geral da reta que contém os vértices A e D e determine a ordenada do vértice A.

d) Determine o ponto de interseção das diagonais do quadrado $ABCD$.

e) Calcule a medida do lado do quadrado $ABCD$.

Resolução Algébrica:

a) Observando o triângulo POQ retângulo em O, podemos afirmar pelas propriedades dos ângulos opostos pelo vértice (no $\angle OPQ$) e da soma dos ângulos internos de um triângulo que o ângulo $\beta = 30$.

b) Precisamos definir a equação do tipo $y = mx + n$. Observando a imagem fornecida e tomando o ponto R que é a interseção da reta AD com o eixo OX, temos que, o triângulo DQR é retângulo em D. Como $\beta = 30$, resta que, $\angle DRQ = 60$.
Portando, sendo 60 inclinação da reta AD, podemos afirmar que a inclinação da reta BC também é 60, visto que são paralelas.

Sabendo que:

- $m = \operatorname{tg} 60 = \sqrt{3}$, e
- $n =$ coeficiente linear $= -2\sqrt{3}$, (pois é a interseção da reta BC com o eixo OY)

concluímos que a equação da reta BC é $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$.
Para se obter a ordenada do ponto C, basta utilizar a equação da reta BC substituindo o x por 4 obtendo $y = 2\sqrt{3}$.

c) Como visto no item anterior a inclinação da reta $AD = 60$, logo, seu coeficiente angular é $\sqrt{3}$. Utilizando o ponto $R = (-2, 0)$ pertencente a reta AD, temos pela equação reduzida que

$$\begin{aligned} & y = mx + n \\ \Rightarrow\quad & 0 = (\sqrt{3})(-2) + n \\ \Rightarrow\quad & n = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Assim, a equação reduzida da reta AD é $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ e a equação geral é

$$\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3} = 0.$$

Para se obter a ordenada do vértice A, basta substituir o valor $x = -0,73$ na equação reduzida da reta AD, assim temos $y = 1,27\sqrt{3}$.

d) Por se tratar de um quadrado, podemos afirmar que a interseção das diagonais é o ponto médio do segmento $\overline{AC}$. Dos resultados obtidos nos itens anteriores temos o ponto $A = (-0,73\ ;\ 1,27\sqrt{3})$ e o ponto $C = (4, 2\sqrt{3})$. Seja M o ponto médio entre A e C, temos então que a interseção das diagonais do quadrado $ABCD$ é o ponto

$$M = \left(\frac{3,27}{2}\ ;\ \frac{3,27\sqrt{3}}{2}\right).$$

e) Usando as coordenadas dos vértices A e C, temos que

$$\begin{aligned} d(A,C) &= \sqrt{(4+0,73)^2 + (2\sqrt{3} - 1,27\sqrt{3})^2} \\ \Rightarrow d(A,C) &= \sqrt{(4,73)^2 + (0,73\sqrt{3})^2} \\ \Rightarrow d(A,C) &= \sqrt{23,97}. \end{aligned}$$

Temos que a diagonal de um quadrado é dada pela expressão $l\sqrt{2}$, onde l é o comprimento do lado do quadrado. Logo, temos que

$$\begin{aligned} l\sqrt{2} &= \sqrt{23,97} \\ \Rightarrow l &= \frac{\sqrt{23,97}}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow l &= 3,46. \end{aligned}$$

Portanto, o lado do quadrado mede $3,46$.

Sugestão de atividade com o GeoGebra:

Este exercício pode ser abordado de maneira semelhante ao primeiro, visto que através da sua construção com o software utilizamos novas ferramentas ainda não mencionadas além de exigir um pouco mais de raciocínio lógico por parte dos alunos.

Novamente, podemos pedir para os alunos que após solucionarem as questões levantadas de maneira algébrica, utilizem seus resultados para construírem a imagem fornecida e verificarem se os resultados apresentados pelo software conferem com os resultados obtidos algebricamente. É importante nesse momento pedir para que os alunos verifiquem o primeiro item (onde se pede o valor de β) apenas após concluírem sua construção.

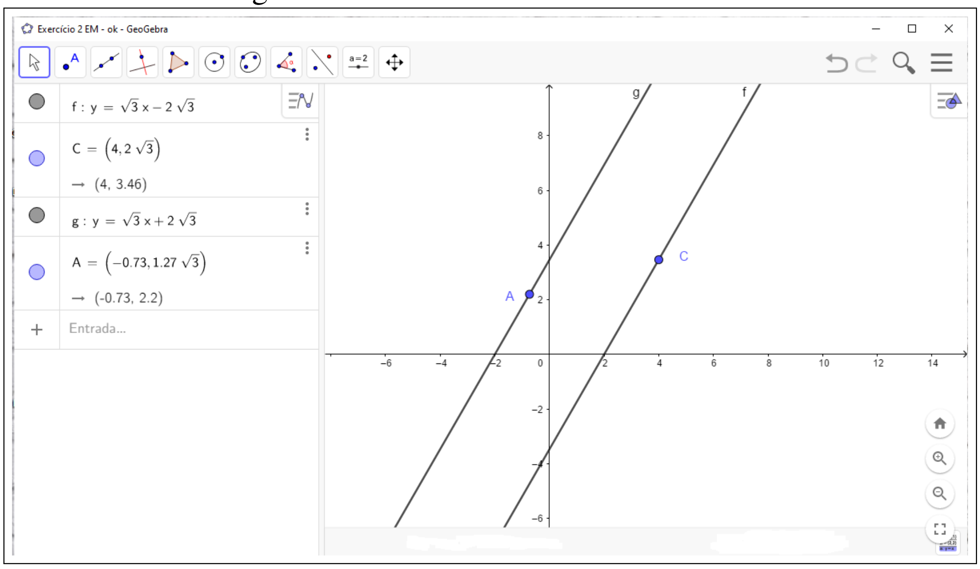
RESULTADOS ESPERADOS COM O GEOGEBRA:

O que se deseja dos alunos com o desenvolvimento desta atividade são os seguintes passos:

1º) No campo de entrada digite a equação obtida durante a resolução algébrica da reta que contém os vértices B e C como visto na Figura 4.11, digite também o ponto $C = (4, 2\sqrt{3})$.

2º) Novamente no campo de entrada digite a equação obtida durante a resolução algébrica da reta que contém os pontos A e D e, em seguida, o ponto $A = (-0,73; 1,27\sqrt{3})$. (Figura 4.12)

Figura 4.12: Exercício 2 EM Passos 1 e 2



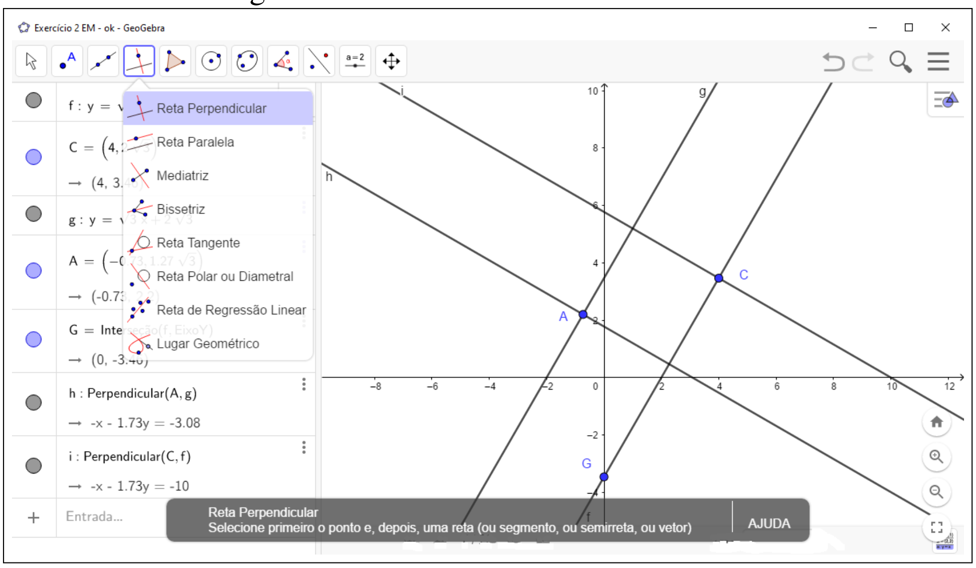
Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

3º) Podemos verificar se a reta que contém o vértice C passa de fato pelo ponto de coordenadas $(0, -2\sqrt{3})$, para isso, basta utilizar a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" selecionando a reta f e o eixo OY.

Observação: Peça para os alunos utilizarem uma calculadora científica para conferir se as coordenadas apresentadas pelo software estão corretas.

4º) Utilizando a ferramenta "Reta Perpendicular", crie uma reta perpendicular a cada uma das retas criadas anteriormente, uma passando pelo ponto A e outra passando pelo ponto C. (Figura 4.13)

Figura 4.13: Exercício 2 EM Passos 3 e 4

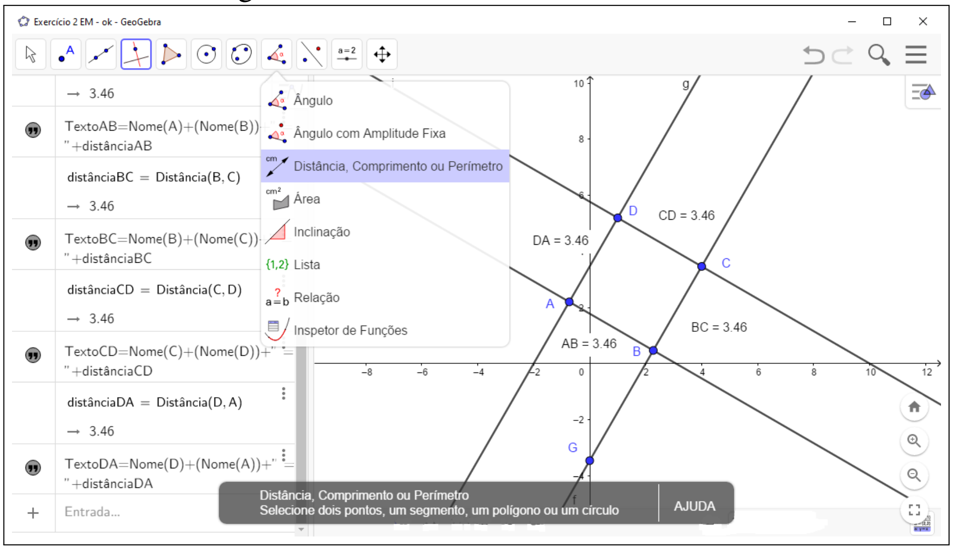


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

5º) Com a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" crie os vértices B e D, que são as interseções das retas criadas.

6º) Afim de verificar se a imagem construída realmente é um quadrado, já que todos os ângulos são ângulos retos, podemos utilizar a ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro" selecionando os pontos A e B, seguidos de B e C, C e D e por fim D e A. Com isso o software nos informa os comprimentos dos lados do polígono formado. (Figura 4.14)

Figura 4.14: Exercício 2 EM Passos 5 e 6

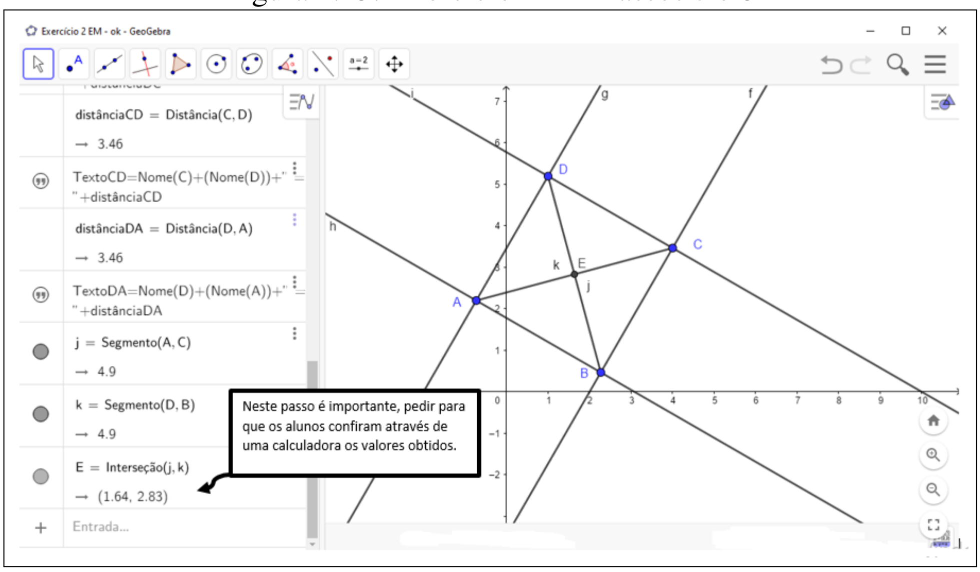


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

7º) Para se determinar o ponto de interseção das diagonais do quadrado $ABCD$ é necessário que primeiramente se crie as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, para isso podemos utilizar a ferramenta "Segmento" selecionando os pontos de início e fim de cada diagonal.

8º) Novamente, utilizando a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" selecionamos as duas diagonais criadas, e obtemos o ponto de interseção representado na Figura 4.15 pelo ponto E.

Figura 4.15: Exercício 2 EM Passos 7 e 8

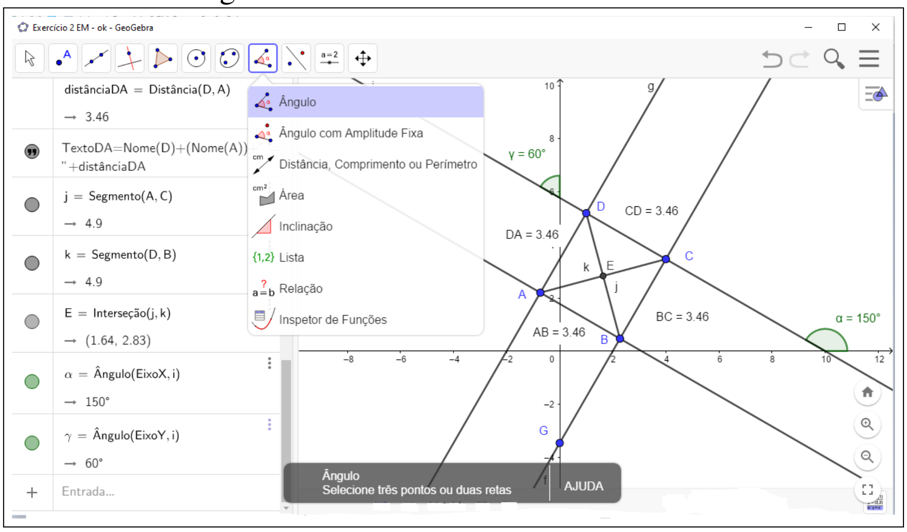


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

9º) Para se finalizar as verificações, falta conferir o valor do ângulo β. Para isso basta utilizar a ferramenta "Ângulo" selecionando o eixo OX e em seguida a reta DC. Podemos também, selecionar o eixo OY e a reta DC para conferir a inclinação mencionada na ilustração do exercício proposto. (Figura 4.16)

Observação: No caso do ângulo β o software nos dá como resultado o valor de 150 que é a abertura do ângulo obtuso com vértice em Q. Esta é uma boa oportunidade de se estimular os alunos a lembrarem do conceito de ângulo suplementar.

Figura 4.16: Exercício 2 EM Passo Final



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Considerações: Através do desenvolvimento desta atividade o aluno pode, além de conferir seus resultados obtidos algebricamente, praticar o raciocínio lógico utilizando conceitos importantes da geometria, como: definição de um quadrado, ângulos suplementares, perpendicularidade entre retas, entre outros.

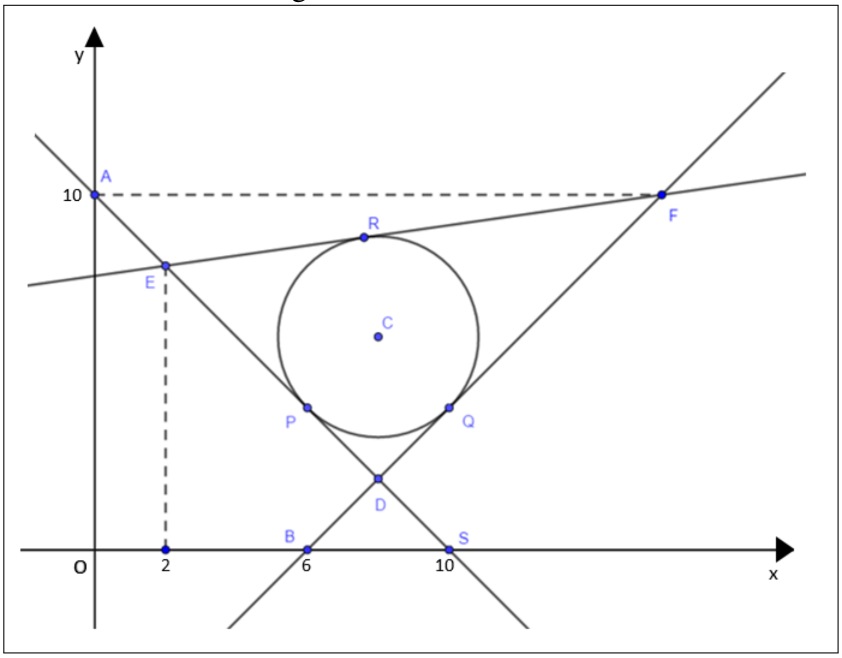
Exercício 3

Na Figura 4.17 o triângulo DEF é retângulo em D, a circunferência de centro C está inscrita nesse triângulo e P, Q e R são seus pontos de tangência.

1) Encontre a equação da reta que contém o cateto DF e as coordenadas do vértice D.

2) Encontre a ordenada do vértice E e a abscissa do vértice F e a equação da reta mediatriz da hipotenusa EF.

Figura 4.17: Exercício 3



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

3) Sabendo-se que a abscissa do ponto Q possui o mesmo valor da ordenada de F e que as ordenadas de P e Q são iguais, encontre os pontos de tangência P e Q e as coordenadas do centro C da circunferência.

4) Determine a medida do raio da circunferência inscrita ao triângulo DEF, bem como sua equação geral.

Resolução Algébrica:

a) Ao observarmos a Figura 4.17 fornecida no exercício, temos que o $\triangle AOS$ é isósceles e retângulo em O. Com isso podemos afirmar que o ângulo agudo $\widehat{S} = 45$. Dessa forma o $\triangle BDS$ também é retângulo e isósceles, visto que pelo enunciado temos que $D = 90$. Assim, podemos afirmar que a inclinação da reta $DF = 45$, consequentemente, $m = \operatorname{tg} 45$, portanto, $m = 1$. Substituindo o ponto $B = (6, 0)$ pertencente a reta DF de equação reduzida $y = (1)x + n$ temos que $n = -6$.
Portanto, a equação reduzida da reta que contém o cateto $\overline{DF}$ é $y = x - 6$.

Para se obter as coordenadas do ponto D precisamos primeiramente obter a equação da reta DE, visto que o ponto D é o ponto de interseção das retas DF e DE.
Como o ângulo agudo $\widehat{S} = 45$ temos, por consequência, que seu suplemento é 135, logo o coeficiente angular da reta DE é igual a tangente de 135, que é -1. Note pela Figura 4.17 que o coeficiente linear da reta DE é 10 pois é o valor onde a reta intersecta o eixo OY.

Assim, concluímos que a equação geral da reta DE é $y = -x + 10$. Fazendo a interseção das retas DE e DF temos $-x + 10 = x - 6$, ou seja, $x = 8$ e, consequentemente, $y = 2$.

Logo, as coordenadas do ponto D são $(8, 2)$.

b) Do item anterior, temos que a equação reduzida da reta DE é $y = -x + 10$, logo como o ponto E tem abscissa 2, segue que

$$y = -2 + 10 \Rightarrow y = 8.$$

Sendo a equação da reta DF igual a $y = x - 6$ e o ponto F com ordenada igual a 10, segue que

$$10 = x - 6 \Rightarrow x = 16.$$

A reta mediatriz divide o segmento ao meio perpendicularmente. Nesse caso ela passa pelo ponto médio M de $\overline{EF}$. Então, $M = \left(\frac{2+16}{2}, \frac{8+10}{2}\right)$, ou seja, $M = (9, 9)$.
O coeficiente angular da reta mediatriz de $\overline{EF}$ é igual ao oposto do inverso do coeficiente angular de $\overline{EF}$, pois é perpendicular a mesma. Assim,

$$m_{\overline{EF}} = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{10 - 8}{16 - 2} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}.$$

Então, $m_{\text{mediatriz}} = -7$.
Daí, a equação da reta mediatriz de $\overline{EF}$ é

$$\begin{aligned} & y - 9 = -7(x - 9) \\ \Rightarrow \quad & y - 9 = -7x + 63 \\ \Rightarrow \quad & y = -7x + 72 \end{aligned}$$

c) Como Q pertence a reta DF e sua abscissa é 10 (mesma ordenada de F) temos de $y = x - 6$ que $y = 4$ e, portanto, $Q = (10, 4)$. Temos também que P pertence a reta DE e sua ordenada é 4 (mesma ordenada de Q), logo ao substituirmos $y = 4$ na equação da reta DE ($y = -x + 10$), obtemos que sua abscissa $x = 6$ e, portanto, $P = (6, 4)$.
Agora, do fato que as retas DE e DF são tangentes a circunferência, para se definir as coordenadas do ponto C, podemos encontrar as retas r e s, perpendiculares as retas DE

e DF passando pelos pontos P e Q, respectivamente, tendo em vista que o ponto C é o ponto de interseção das retas r e s.

1º) **Reta r:** o coeficiente angular da reta DE é -1, logo o coeficiente da reta r é 1, e como o ponto $P = (6, 4)$ pertencente a reta obtemos

$$\begin{aligned} & y - 4 = 1(x - 6) \\ \Rightarrow \quad & y = x - 2 \end{aligned}$$

é a equação da reta r.

2º) **Reta s:** temos que o coeficiente angular da reta DF é 1, logo o coeficiente angular da reta s é -1, e como o ponto $Q = (10, 4)$ pertencente a reta obtemos

$$\begin{aligned} & y - 4 = -1(x - 10) \\ \Rightarrow \quad & y = -x + 14 \end{aligned}$$

é a equação da reta s.

Igualando as equações obtidas $x - 2 = -x + 14$, temos que $x = 8$ e, consequentemente, $y = 6$. Concluímos então que as coordenadas do centro é $C = (8, 6)$.

d) Sabendo que as coordenadas do centro é $C = (8, 6)$, para se descobrir o valor do raio podemos calcular $d(PC)$, ou seja,

$$d(PC) = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Portanto, o raio é $2\sqrt{2}$. Assim, a equação geral da circunferência é

$$(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 8$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 16x + 64 + y^2 - 12y + 36 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 16x - 12y + 92 = 0.$$

Sugestão de atividade com o GeoGebra:

Tal exercício pode ser feito pelos alunos, de maneira simultânea a resolução algébrica, ou seja, podemos solicitar aos mesmos que observem as informações explicitas pelo enunciado e pela imagem do exercício, em seguida reconstruam a imagem utilizando o GeoGebra, verificando os resultados obtidos por meio do desenvolvimento algébrico de cada item.

Os passos para a reconstrução da imagem por meio do software são os seguintes:

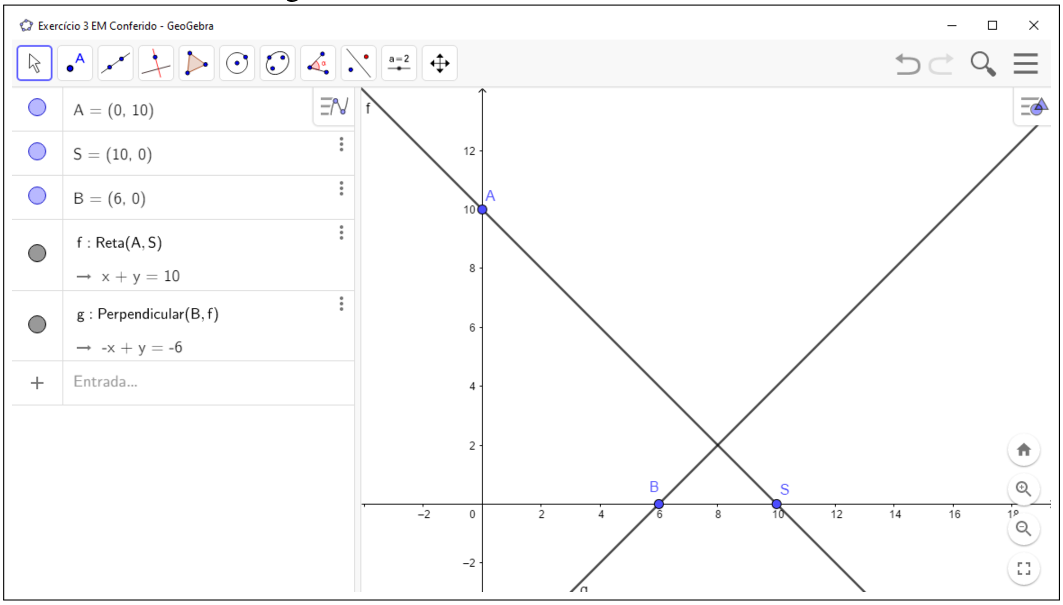
1º) Inicialmente inserimos no campo de entrada as coordenadas dos pontos A, B e S, que são os pontos identificados na Figura 4.17.

2º) Em seguida, com a ferramenta "Reta" selecionamos os pontos A e S.

3º) Com a ferramenta "Reta Perpendicular", criamos uma reta perpendicular a reta criada anteriormente passando pelo ponto B; (Figura 4.18)

Observação: Nesse momento já é possível conferir algebricamente a equação da reta que contém o segmento DF apresentado na Figura 4.17.

Figura 4.18: Exercício 3 EM Passos 1 ao 3



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

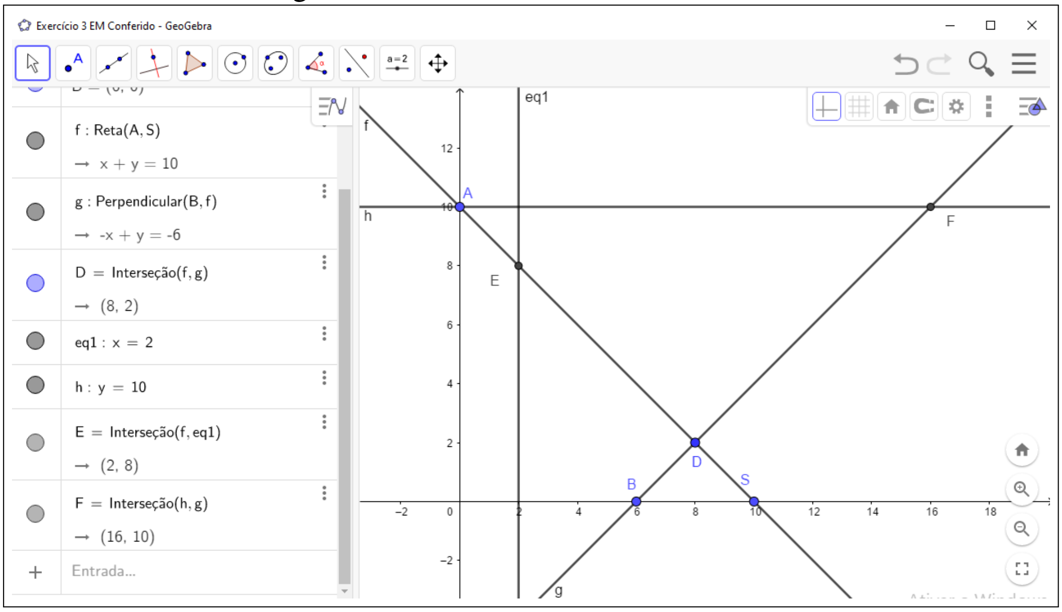
4º) Utilizando a ferramenta "Interseção entre Dois Objetos", já podemos identificar o ponto D que é a interseção das duas retas criadas inicialmente.

Observação: Para se conferir as coordenadas do ponto D obtidas algebricamente, basta selecionar o mesmo utilizando o botão direito do mouse, automaticamente o software irá apresentar as suas coordenadas.

5º) Para se definir os pontos E e F, devemos digitar no campo de entrada as equações das retas $x = 2$ e $y = 10$, e novamente utilizando a ferramenta "Interseção entre Dois Objetos” definimos os pontos desejados simplesmente selecionando duas a duas as retas que se intersectam. (Figura 4.19)

Observação: Sugerimos que após se definir os pontos E e F, desabilitem as retas $x = 2$ e $y = 10$ criadas neste item afim de limpar a imagem evitando que a mesma fique carregada com muitas informações, o que poderia levar a possíveis erros futuros.

Figura 4.19: Exercício 3 EM Passos 4 e 5



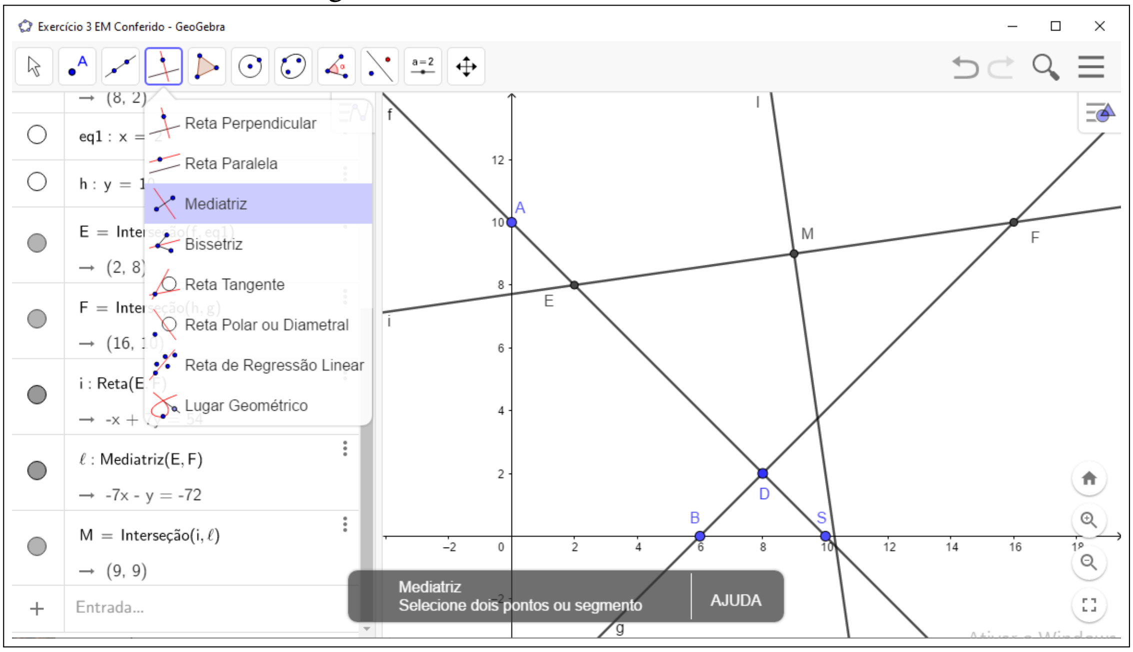
Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

6º) Fazendo o uso da ferramenta “Reta”, selecionando os pontos E e F, criados anteriormente, já podemos criar o triângulo DEF.

7º) Após ter encontrado algebricamente a mediatriz da hipotenusa EF, podemos conferir os nossos resultados utilizando a ferramenta “Reta Mediatriz”, clicamos sobre os pontos E e F como mostrado na Figura 4.20.

Observação: Podemos também conferir se a mediatriz de fato passa pelo ponto $M = (9, 9)$ que foi encontrado algebricamente.

Figura 4.20: Exercício 3 EM Passos 6 e 7



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

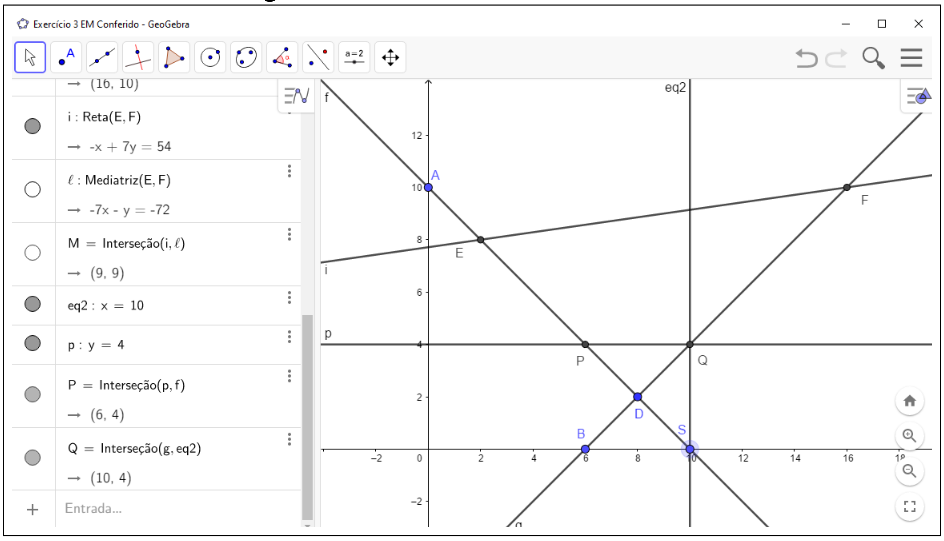
8º) Precisamos agora definir os pontos P e Q, para isso usamos as informações fornecidas pelo enunciado do item c) digitando no campo de entrada as retas $x = 10$ e $y = 4$. Fazendo uso da ferramenta "Interseção entre Dois Objetos" verificamos a interseção entre as retas DF e DE com as retas $x = 10$ e $y = 4$, respectivamente. (Figura 4.21)

Observações:

i) Para se deixar a construção o mais igual possível a imagem da Figura 4.17, podemos renomear os pontos criados nesse passo. E já aproveitamos para conferir nossos cálculos sobre as coordenadas dos pontos P e Q.

ii) Na Figura 4.21 desabilitamos a reta mediatriz e o ponto M, criados no passo 7. O objetivo é limpar a imagem formada, até então, e melhorar a visualização das próximas construções.

Figura 4.21: Exercício 3 EM Passo 8



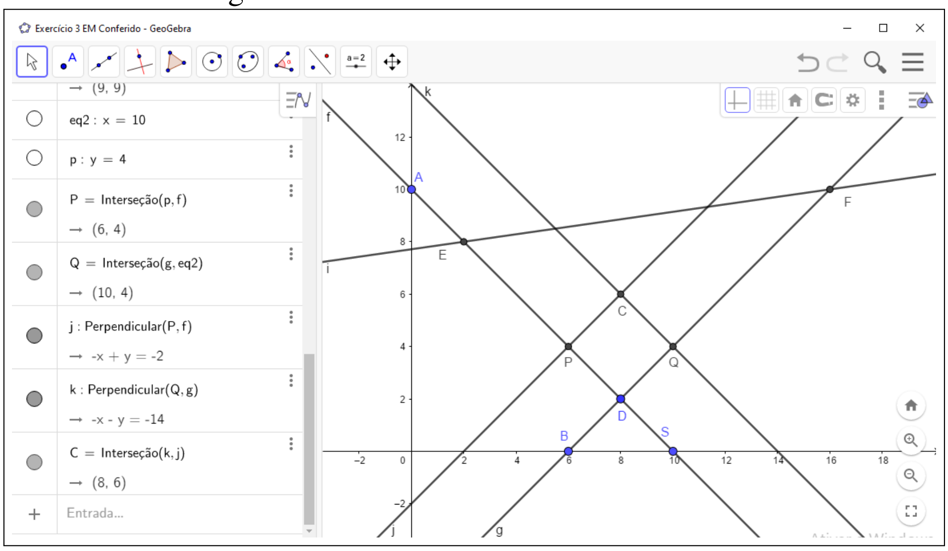
Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

9º) Para criar o ponto C fazemos uso da ferramenta "Reta Perpendicular" inserindo duas perpendiculares, uma passando pelo ponto P e outra por Q. (Figura 4.22)

10º) Novamente utilizando a ferramenta "Interseção entre Dois Objetos" criamos o ponto C que é a interseção das perpendiculares inseridas anteriormente. (Figura 4.22)

Observação: Neste momento podemos conferir nossos cálculos relativos as retas perpendiculares e as coordenadas do centro C.

Figura 4.22: Exercício 3 EM Passos 9 e 10

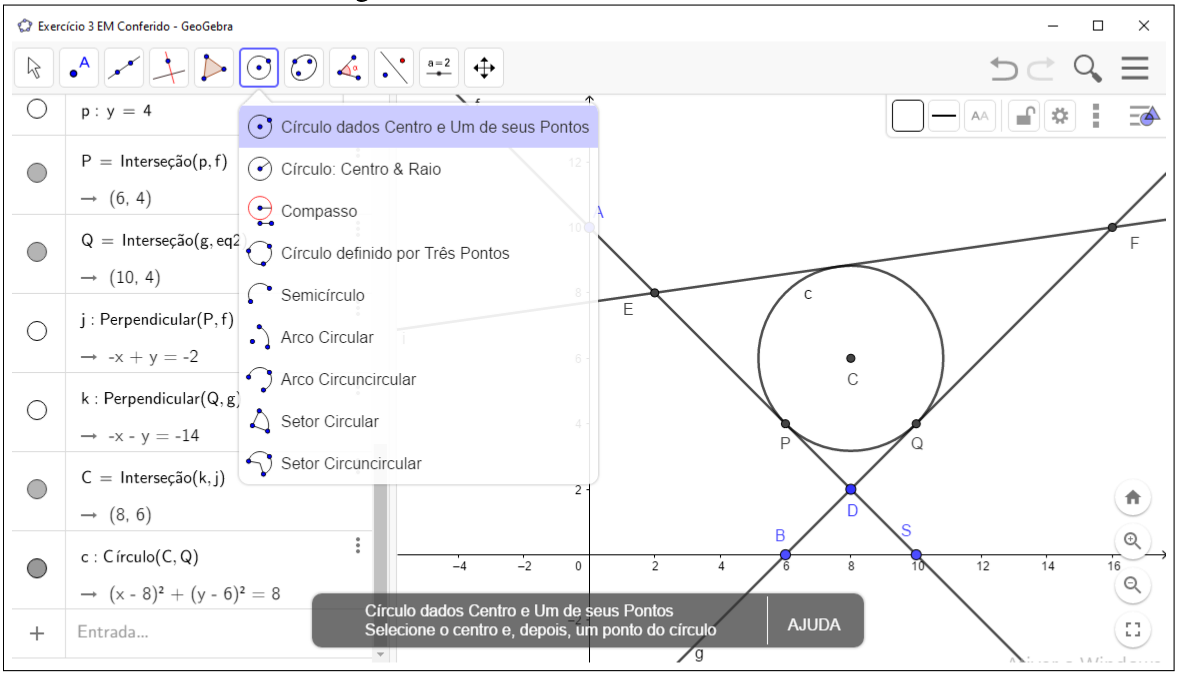


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Observação: Novamente com o intuito de limpar a Figura 4.22, desabilitamos as retas $x = 10$ e $y = 4$.

11º) Para finalizar a construção e as verificações de resultados, falta apenas construir a circunferência com centro em C e tangente ao triângulo DEF. Para isso usamos a ferramenta "Circulo dado Centro e um de seus Pontos", selecionando o centro C e o ponto P ou Q, como apresentado na Figura 4.23.

Figura 4.23: Exercício 3 EM Passo Final



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Observações:

i) Na Figura 4.23 desabilitamos as retas perpendiculares que passam pelos pontos P e Q.

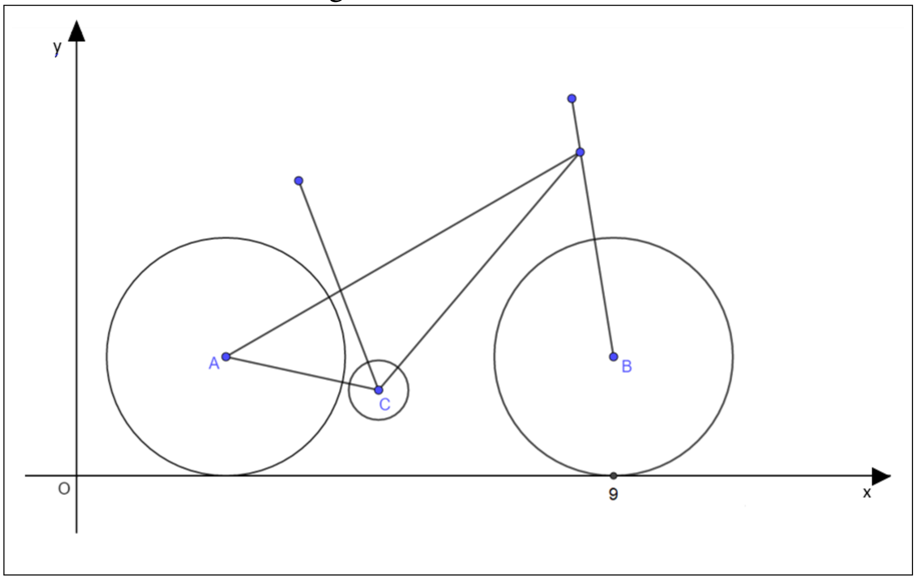
ii) Podemos verificar a equação geral da circunferência alterando em suas configurações o formato da equação no ícone "Álgebra".

Considerações: O desenvolvimento de tal atividade com software permite que os alunos verifiquem se os resultados obtidos algebricamente estão de fato corretos e permite aos mesmos conhecer outras ferramentas disponíveis, relativas a construção de retas e construção de circunferências.

Exercício 4

No plano cartesiano da Figura 4.24 está representado o esboço de uma bicicleta.

Figura 4.24: Exercício 4



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

As rodas dianteira e traseira da bicicleta possuem o mesmo tamanho, têm centros B e A, respectivamente, e são tangentes ao eixo das abscissas, sendo 9 a abscissa do ponto de tangência relacionado à roda dianteira.

Sabe-se que a equação da circunferência que representa a roda traseira é $x^2 + y^2 - 5x - 4y + 6,25 = 0$. Sendo assim, determine:

a) As coordenadas do centro da roda traseira e a medida de seu raio.

b) A equação da circunferência da roda dianteira e a medida de seu comprimento.

Resolução Algébrica:

a) Completando os quadrados na equação dada obtemos,

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 5x - 4y + 6,25 = 0 \\ \Rightarrow \quad & (x^2 - 5x + 6,25) + (y^2 - 4y + 4) = 4 \\ \Rightarrow \quad & (x - 2,5)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas do centro $A = (2,5\ ;\ 2)$ e o raio da roda é $r = 2$.

b) Como as rodas possuem o mesmo tamanho, podemos afirmar que o raio da roda dianteira é 2 e a ordenada do centro B também é 2 e, sabendo que o ponto de tangência é perpendicular ao eixo das abscissas, temos que o centro possui coordenadas $B = (9, 2)$. Logo, a equação da circunferência é $(x - 9)^2 + (y - 2)^2 = 4$, e o comprimento da circunferência é dado por $2\pi r$, ou seja, $2\pi(2) = 4\pi$.

Sugestão de atividade com o GeoGebra:

Afim de se variar a abordagem dos exercícios com o uso do software, pode-se aplicar o mesmo exercício, porém da seguinte forma:

1º) Apresentar a imagem impressa da representação da bicicleta para os alunos e propor o seguinte exercício:

"Fazendo uso do software GeoGebra, construa a imagem que representa o esboço de uma bicicleta sabendo que:"

- A equação da circunferência da roda traseira é $x^2 + y^2 - 5x - 4y + 6,25 = 0$;
- As rodas dianteira e traseira da bicicleta possuem o mesmo tamanho, são tangentes ao eixo das abscissas sendo 9 a abscissa do ponto de tangência relacionado à roda dianteira.

2º) Após fazer a construção da figura responda os seguintes itens:

a) Quais são as coordenadas do centro da roda traseira e a medida do seu raio?

b) Qual é equação geral da circunferência da roda dianteira e a medida de seu comprimento?

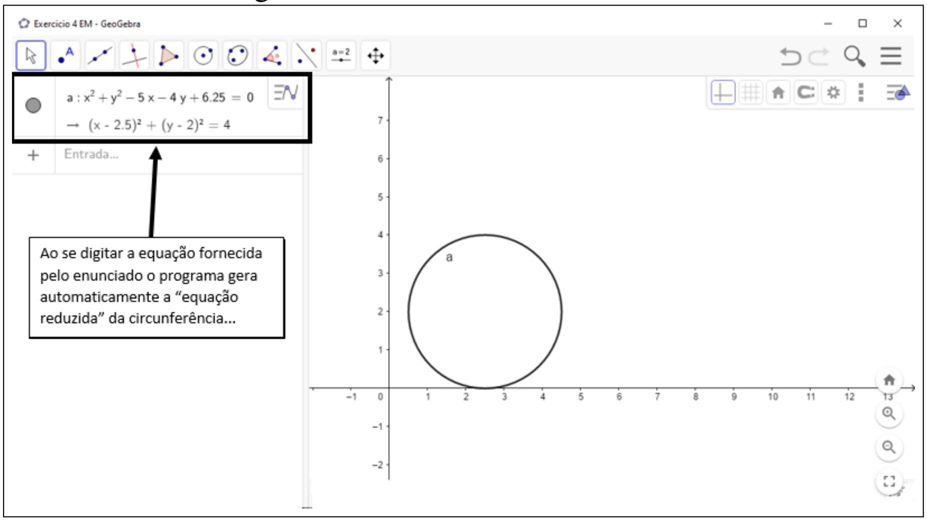
c) Qual é a equação geral da reta que representa a parte superior do quadro da bicicleta, ou seja, que contém o segmento que liga o ponto A e o "Garfo" da bicicleta?

RESULTADOS ESPERADOS COM O GEOGEBRA:

O que se espera dos alunos com o desenvolvimento desta atividade são os seguintes passos:

1º) Ao digitar no campo de entrada a equação da circunferência da roda traseira fornecida no enunciado, o software automaticamente gera abaixo da equação digitada a "equação reduzida" da circunferência, com isso, espera-se que o aluno identifique nesse passo as coordenadas do centro e o raio da circunferência. (Figura 4.25)

Figura 4.25: Exercício 4 EM Passo 1



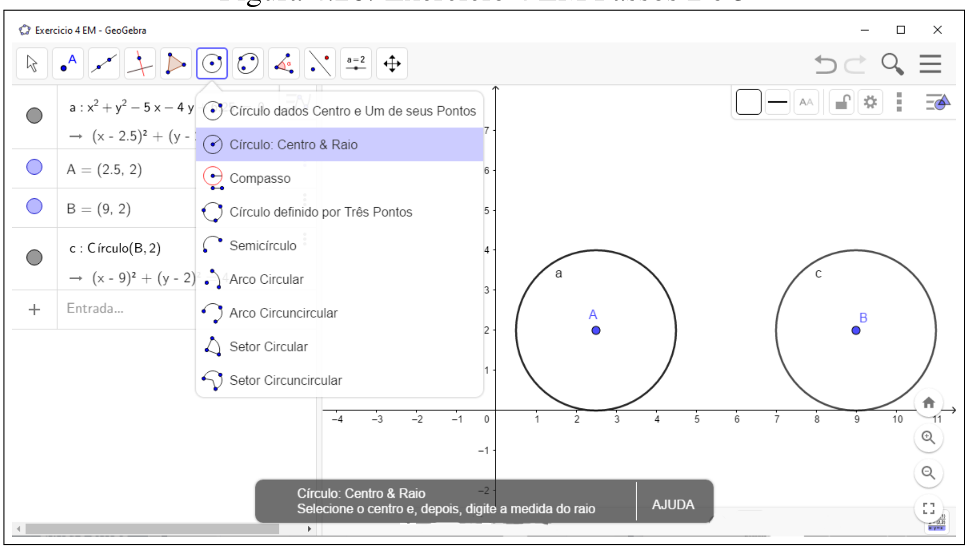
Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

2º) Sabendo as coordenadas do centro e o raio da roda traseira, o aluno pode digitar no campo de entrada os pontos $A = (2,5\ ;\ 2)$ e, por consequência, o ponto $B = (9, 2)$.

Observação: Espera-se que o aluno deduza que a ordenada de ambos os centros é 2, visto que as rodas possuem o mesmo tamanho.

3º) Com a ferramenta "Círculo: Centro & Raio", o aluno pode criar a circunferência da roda dianteira, simplesmente selecionando o centro B e definindo o raio 2, como visto na Figura 4.26.

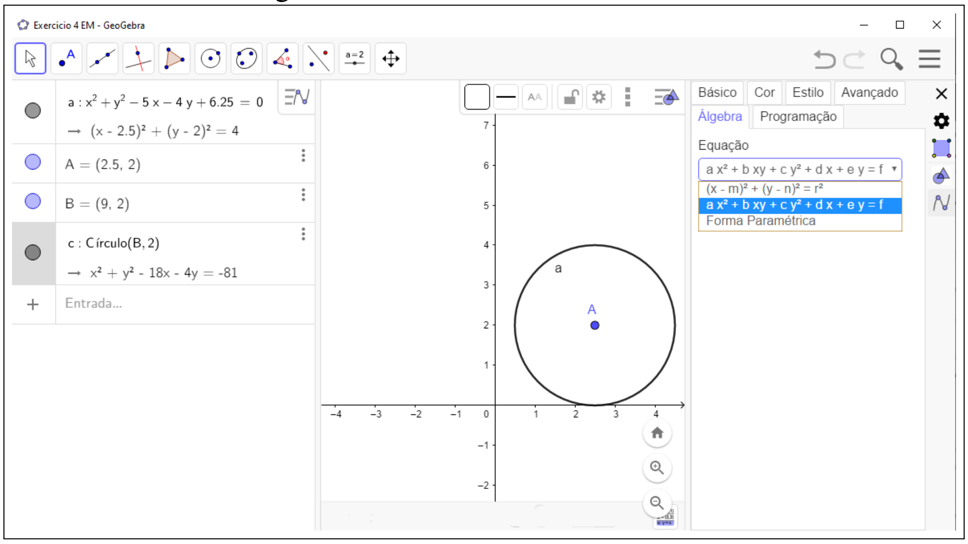
Figura 4.26: Exercício 4 EM Passos 2 e 3



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

4º) Ao entrar nas configurações da circunferência criada o aluno pode alterar através do ícone "Álgebra" o formato da equação, que automaticamente é dado na forma "reduzida" passando-a para forma de "equação geral", obtendo assim, parte da resposta do item b). (Figura 4.27)

Figura 4.27: Exercício 4 EM Passo 4



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

5º) Para se obter a medida do comprimento da circunferência, o aluno precisa apenas fazer uso da ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro" e selecionar a circunferência de centro B.

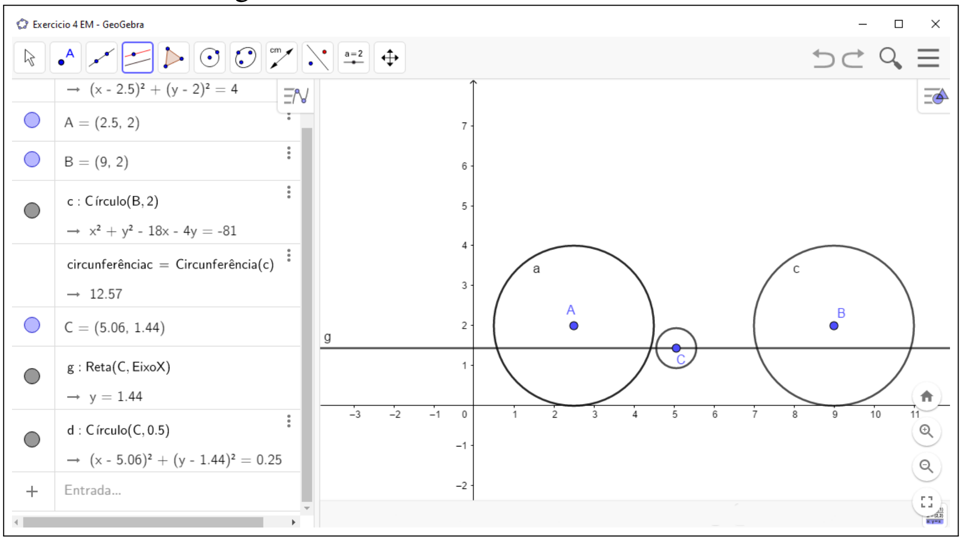
Observação: A partir deste passo os alunos irão construir o restante da bicicleta. Por se tratar de um esboço e de não utilizarmos tais retas para a resolução dos itens, não existe a necessidade de que as retas e pontos criados fiquem todos iguais entre os alunos.

6º) Usando a ferramenta "Reta Paralela" e selecionando o eixo OX o aluno pode definir o ponto C que representa o centro da circunferência menor. (Figura 4.28)

Observação: Neste passo ao usar a ferramenta "Reta Paralela" o aluno obtém uma referência da posição do centro da circunferência menor.

7º) Novamente com a ferramenta "Círculo: Centro & Raio" o aluno seleciona o cento C e pode definir um raio a sua escolha, como por exemplo, um raio de $0,5$ como é visto na Figura 4.28.

Figura 4.28: Exercício 4 EM Passos 5 ao 7

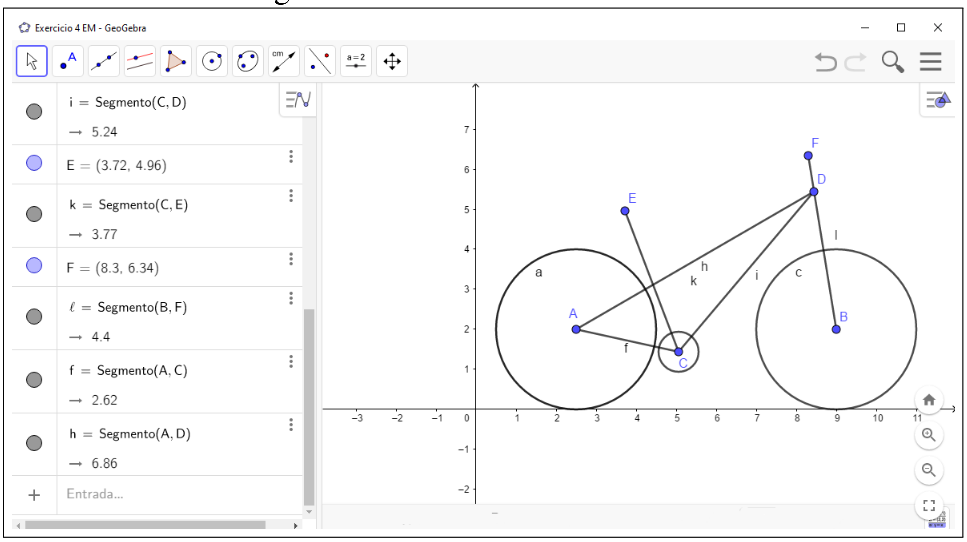


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

8º) Com a ferramenta “Segmento” os alunos podem construir os segmentos que definem a estrutura da bicicleta. Neste passo, certamente as posições dos segmentos estabelecidas por cada aluno serão diferentes, porém, tal situação não irá atrapalhar o desenvolvimento da atividade. (Figura 4.29)

Observação: Afim de se obter uma melhor análise da imagem, deve-se pedir que os alunos desabilitem a visualização da reta paralela ao eixo OX que passa pelo ponto C.

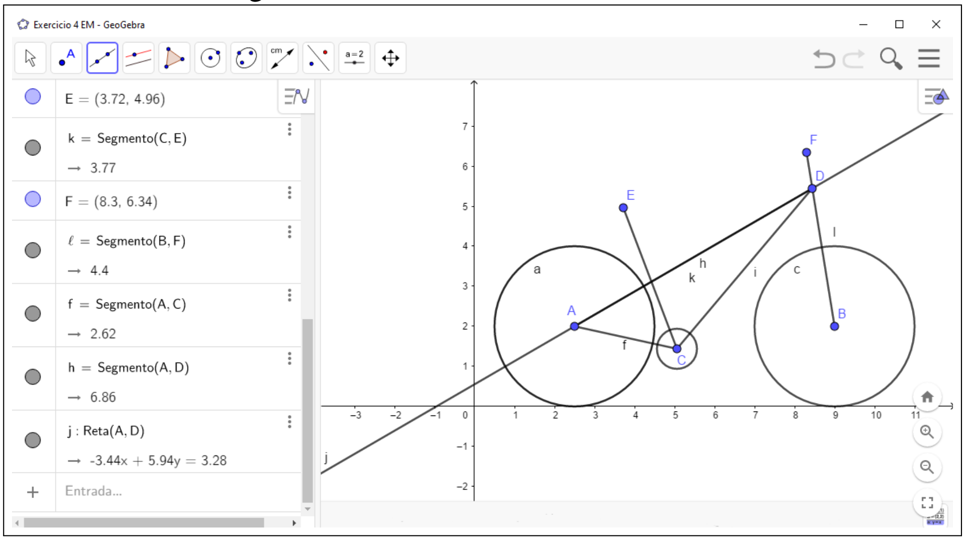
Figura 4.29: Exercício 4 EM Passo 8



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

9º) Para finalizar a atividade basta o aluno utilizar a ferramenta “Reta” e selecionar o ponto A e o outro ponto da extremidade do segmento que representa a parte superior da bicicleta (o ponto D no caso da Figura 4.30).

Figura 4.30: Exercício 4 EM Passo Final



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

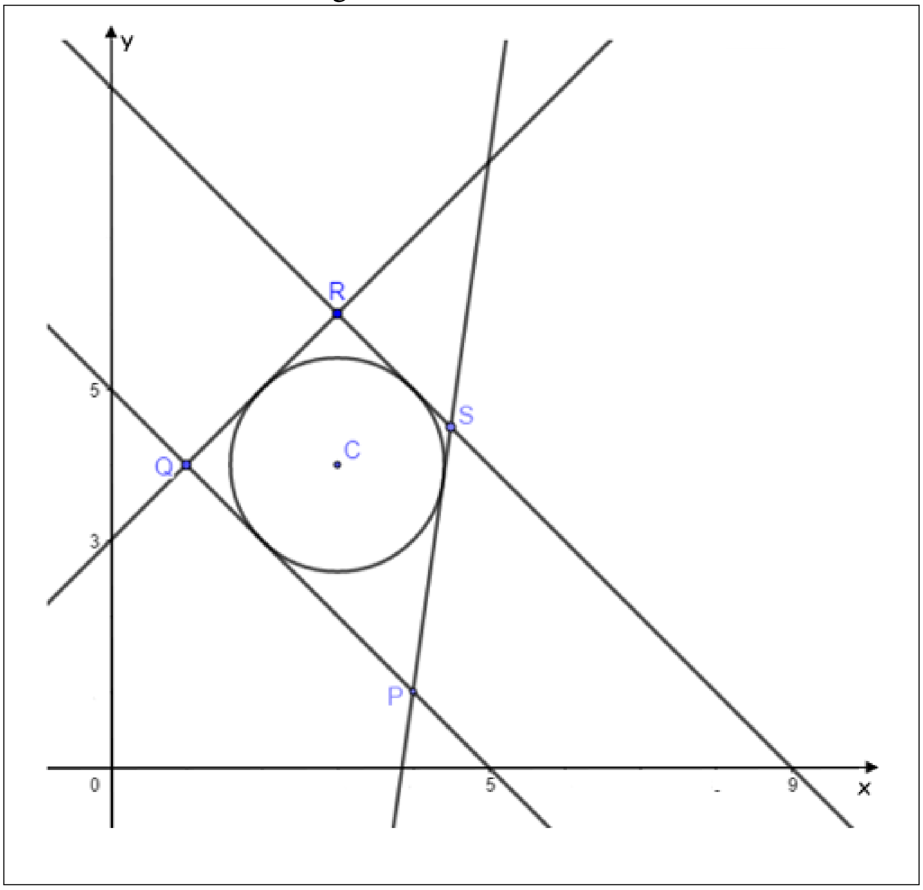
Observação: O resultado deste último item certamente será diferente entre os alunos como mencionado no passo anterior, porém, tal situação abre espaço para um momento de discussão bastante rico, possibilitando aos alunos análises sobre os seus resultados, como por exemplo, verificar o fato pelo qual as equações obtidas foram diferentes.

Considerações: Esta atividade permite que o aluno desenvolva habilidades investigativas e de análises de resultados fornecidos pelo software como: identificar por meio da equação reduzida fornecida pelo aplicativo os valores das coordenadas do centro da circunferência; fazer deduções sobre a equação da circunferência da roda dianteira por meio de análise dos resultados obtidos anteriormente; desenvolver um senso de estimativa referente a circunferência de centro C; encontrar as equações da reta AD.

Exercício 5

Na Figura 4.31 tem-se uma circunferência de centro C, inscrita no trapézio retângulo $PQRS$, de bases $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$ e $\angle PQR = \angle SRQ = 90$.

Figura 4.31: Exercício 5



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

a) Determine a equação da reta que contém o lado QR e as coordenadas do ponto Q.

b) Determine a equação da reta que contém o lado RS e as coordenadas do ponto R.

c) Calcule a medida do raio dessa circunferência e as coordenadas do centro C.

Resolução Algébrica:

A resolução algébrica dos itens propostos seriam

a) Para se determinar diretamente a equação da reta QR faltam na imagem informações, pois temos apenas o ponto $(0, 3)$ pertencente a mesma. Porém, para se determinar a reta QP temos mais recursos, visto que os pontos $(0, 5)$ e $(5, 0)$ pertencem a ela.
Assim, temos para a reta QP na forma $y = mx + n$ que

- Para o ponto $(0, 5)$: $5 = m(0) + n \Rightarrow n = 5$.

- Para o ponto $(5, 0)$: $0 = m(5) + 5 \Rightarrow m = -1$.

Logo, a equação da reta QP é $y = -x + 5$.

Como a reta que contém o segmento $\overline{QR}$ é perpendicular a reta que contém o segmento $\overline{QP}$, temos que $m_{QR} \cdot m_{QP} = -1$, ou seja, $m_{QR} \cdot (-1) = -1$, o que nos leva a $m_{QR} = 1$. Do fato que o ponto $(0, 3)$ pertente a reta QR concluímos que $n_{QR} = 3$ e, portanto, a equação da reta QR é $y = x + 3$.

Para se obter as coordenadas do ponto Q, que é a interseção das retas QR e QP, basta se fazer

$$
\begin{aligned}
& QR = QP \\
\Rightarrow \quad & x + 3 = -x + 5 \\
\Rightarrow \quad & 2x = 2 \\
\Rightarrow \quad & x = 1.
\end{aligned}
$$

Utilizando $x = 1$ em ambas as equações das retas QR e QP, obtemos $y = 4$. Portanto, o ponto $Q = (1, 4)$.

b) Como o lado $\overline{RS}$ é paralelo ao lado $\overline{QP}$, o coeficiente angular das duas retas que contém esses lados são iguais, ou seja, $m = -1$. Temos que o ponto $(9, 0)$ pertence a reta RS, assim, substituindo na equação $y = -x + n$ obtemos $n = 9$. Portanto, a equação da reta RS é $y = -x + 9$.

Para se obter as coordenadas do ponto R que é o ponto de interseção das retas QR e RS, basta procedermos de forma análoga ao item anterior, igualando a equação da reta QR com a equação da reta RS, obtendo assim $x = 3$. Substituindo x por 3 nas equações das retas QR e RS, obtemos $y = 6$. Portanto, as coordenadas do ponto $R = (3, 6)$.

c) Como a circunferência é tangente aos segmentos paralelos $\overline{QP}$ e $\overline{RS}$, temos que o raio da circunferência é a metade da distância entre os pontos Q e R, ou seja,

$$
\begin{aligned}
& r = \frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2 + (6-4)^2} \\
\Rightarrow \quad & r = \frac{1}{2}\sqrt{8} \\
\Rightarrow \quad & r = \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Para se encontrar as coordenadas do centro $C = (a, b)$ precisamos inicialmente encontrar a equação da reta mediatriz do segmento $\overline{QR}$. Temos que o ponto

$M_{\overline{QR}} = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = (2,5)$ é o ponto médio de $\overline{QR}$. Visto que o coeficiente angular da reta QP é -1, podemos afirmar que o coeficiente angular da mediatriz procurada também é -1, pois ambas são paralelas. Fazendo uso do ponto $M_{\overline{QR}}$ e de $m = -1$ temos

$$(y-5) = -1(x-2)$$
$$\Rightarrow \quad y = -x+7$$

que é a equação da mediatriz procurada.

Como o ponto $C = (a,b)$ pertence a mediatriz, temos que $b = -a+7$.

Note pela Figura 4.31 que o ponto $M_{\overline{QR}}$ é tangente a circunferência, como visto anteriormente, possui raio igual a $\sqrt{2}$, logo fazendo uso de tais informações temos pela equação reduzida da circunferência que:

$$(2-a)^2 + (5-b)^2 = (\sqrt{2})^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 - 4a - 10b + 27 = 0$$

substituindo o valor $b = -a+7$ encontrado anteriormente na expressão obtemos $a^2 - 4a + 3 = 0$, de onde tiramos $a = 1$ ou $a = 3$. Para finalizarmos, atribuímos os valores encontrados de a na relação referente a b, e obtemos duas possíveis coordenadas para o centro, sendo, $C = (1,6)$ ou $C = (3,4)$. Ao observar a Figura 4.31 é possível verificar que a ordenada do centro fica entre 3 e 5, logo, as coordenadas do centro $C = (3,4)$.

Sugestão de atividade com o Geogebra:

Pode-se abordar este exercício de uma forma mais construtiva, afim de promover uma experiência investigativa aos alunos, em relação ao software e seus recursos, bem como dos resultados obtidos. A proposta para tal atividade seria:

Entrega-se aos alunos a imagem do exercício com o seguinte enunciado:

"Na Figura 4.31 tem-se uma circunferência de centro C, inscrita no trapézio retângulo $PQRS$, de bases PQ e RS e $\angle PQR = \angle SRQ = 90$. Reconstrua esta imagem usando o software GeoGebra, respeitando os pontos de interseção das retas com os eixos OX e OY conforme ilustrado."

Após ter feito a construção responda:

a) Equação da reta que contém o lado QR e as coordenadas do ponto Q.

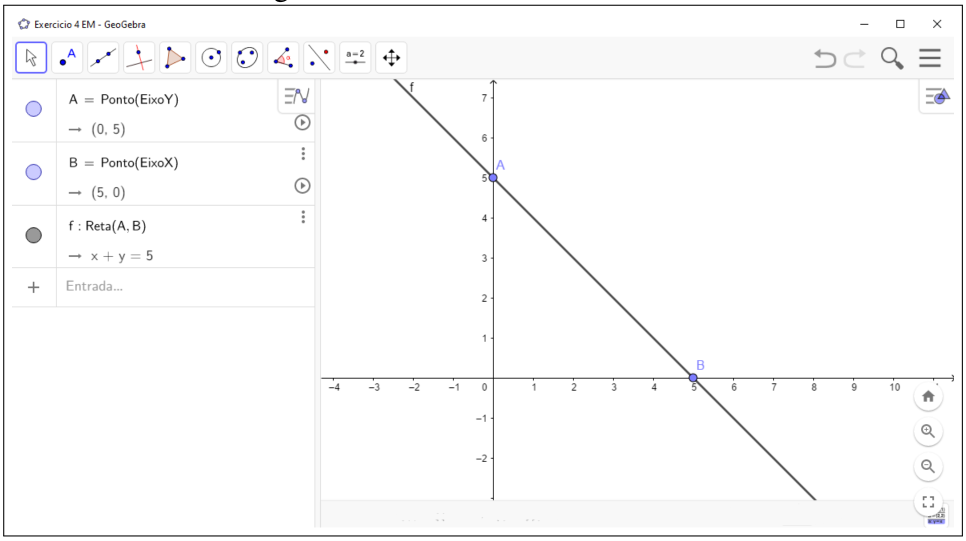
b) Equação da reta que contém o lado RS e as coordenadas do ponto R

c) Equação reduzida e a equação geral da circunferência inscrita ao trapézio $PQRS$ e as coordenadas do centro C.

PASSOS ESPERADOS DOS ALUNOS

1º) Com a ferramenta "Reta" criamos a reta que passa pelos pontos $(0, 5)$ e $(5, 0)$. (Figura 4.32)

Figura 4.32: Exercício 5 EM Passo 1



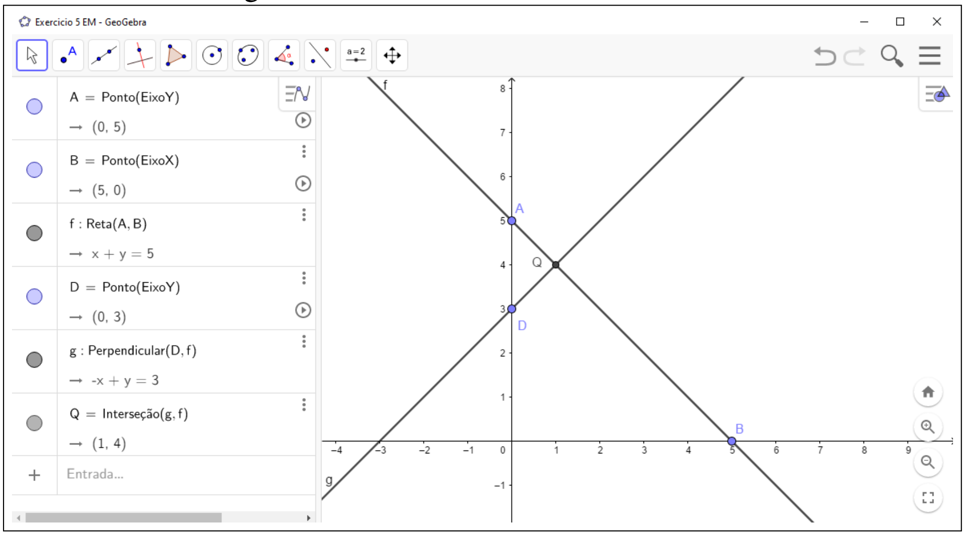
Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

2º) Com a ferramenta "Reta Perpendicular", criamos a reta que passa pelo ponto $(0, 3)$ e é perpendicular a reta criada anteriormente. (Figura 4.33)

3º) Podemos criar o ponto Q fazendo uso da ferramenta "Interseção entre Dois Objetos" selecionando as duas retas criadas. (Figura 4.33)

Observação: Neste momento, os alunos já conseguem identificar a equação da reta QR, e as coordenadas do ponto Q.

Figura 4.33: Exercício 5 EM Passos 2 e 3



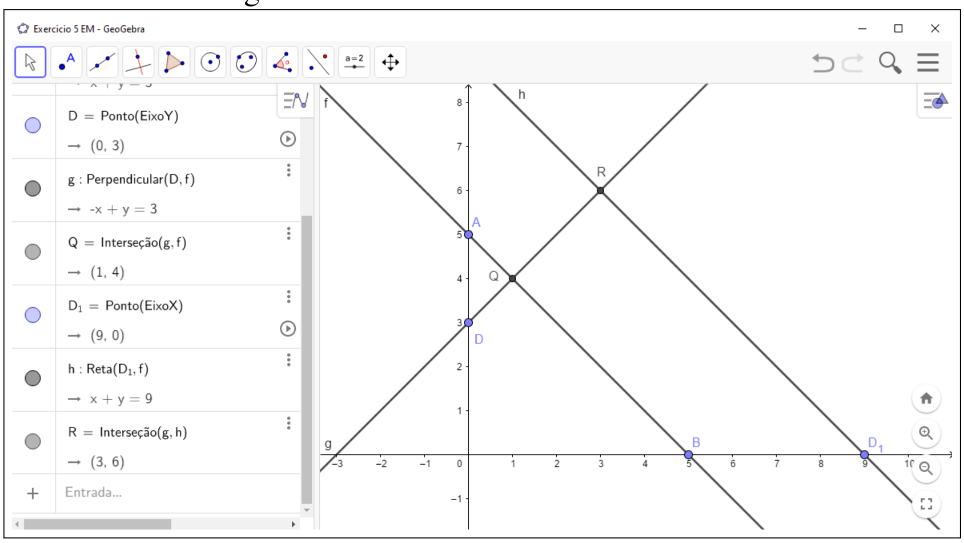
Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

4º) Com a ferramenta "Reta Paralela", criamos uma paralela a reta AB que passa pelo ponto $(9, 0)$. (Figura 4.34)

5º) Novamente fazendo uso da ferramenta "Interseção entre Dois Objetos" criamos o ponto R que é a interseção das retas g e h. (Figura 4.34)

Observação: Ao se desenvolver os passos 4 e 5 os alunos já conseguem identificar a equação da reta RS e as coordenadas do ponto R.

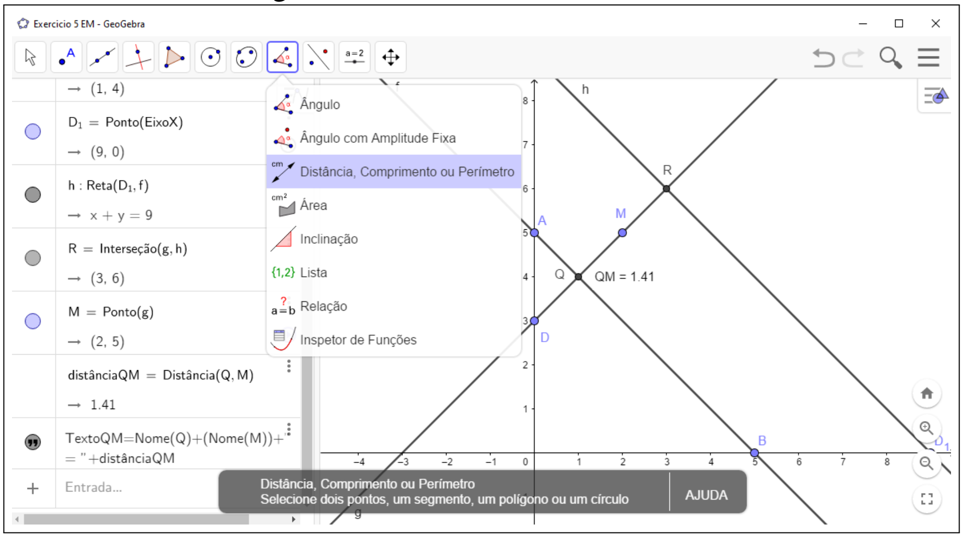
Figura 4.34: Exercício 5 EM Passos 4 e 5



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

6º) Para se descobrir o raio da circunferência, os alunos precisam definir o ponto médio do segmento QR, fazendo uso da ferramenta "Ponto Médio ou Centro" e, em seguida com a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro” selecionar os pontos Q e M, mostrados na Figura 4.35.

Figura 4.35: Exercício 5 EM Passo 6

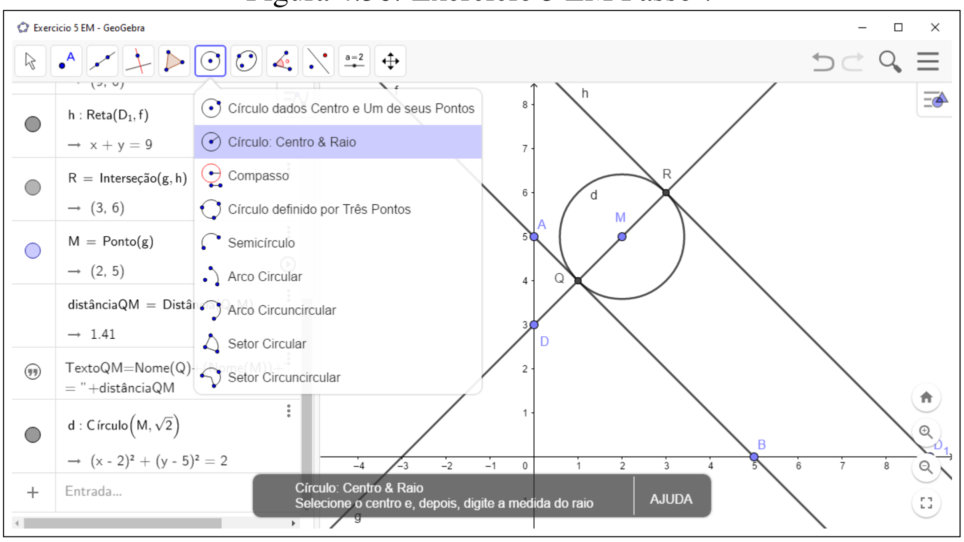


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Observação: Para se definir o centro da circunferência da Figura 4.31 os alunos precisarão adotar as estratégias apresentadas nos itens 7 ao 10.

7º) Utilizando a ferramenta “Círculo: Centro & Raio”, selecionamos o ponto M e definimos o raio $\sqrt{2}$. (Figura 4.36)

Figura 4.36: Exercício 5 EM Passo 7



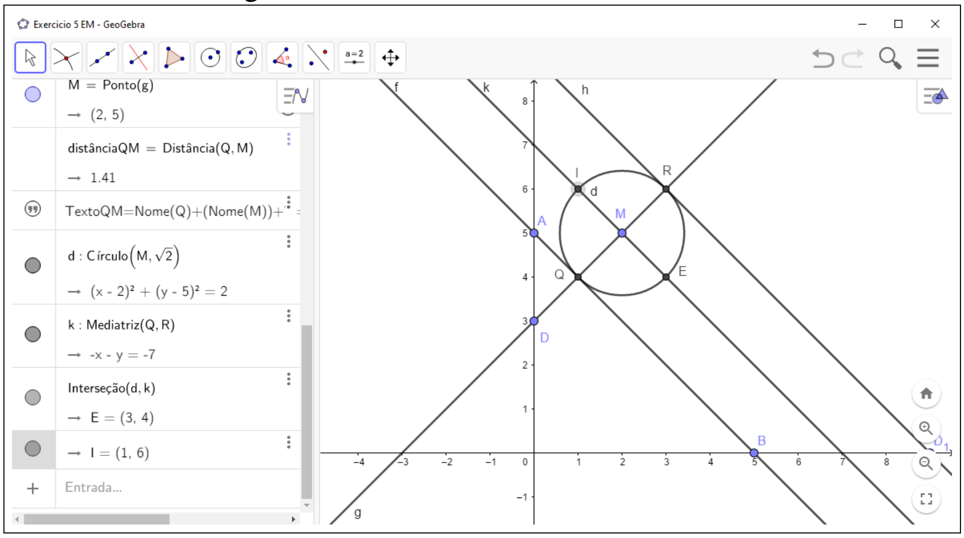
Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Observação: Afim de limpar a figura, desabilitamos o comprimento do segmento QE.

8º) Com a ferramenta “Reta Mediatriz", criamos a mediatriz do segmento QR.

9º) Fazendo uso da ferramenta “Interseção entre Dois Objetos” selecionamos a circunferência e a mediatriz criadas anteriormente, com isso o software nos fornece os pontos E e I, que possuem as possíveis coordenadas do centro da circunferência, como visto algebricamente. (Figura 4.37)

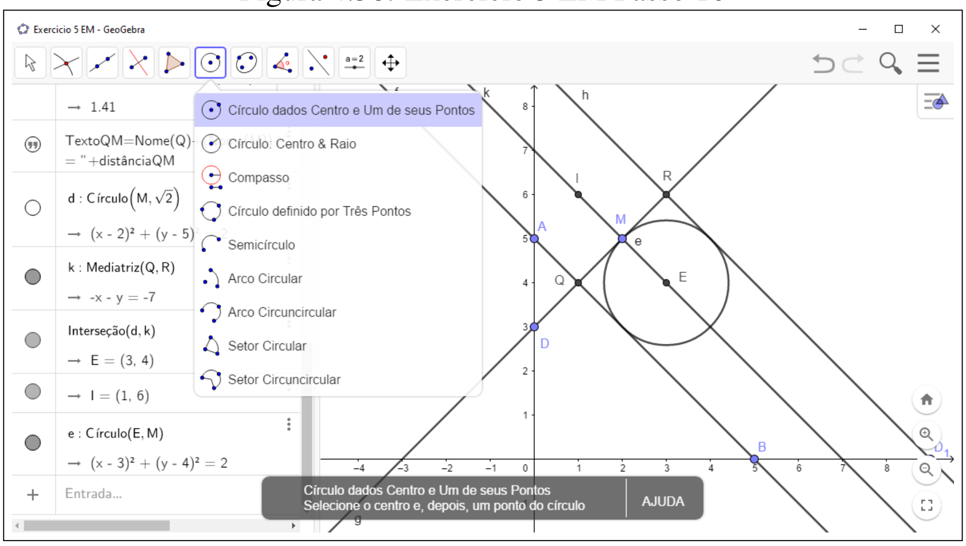
Figura 4.37: Exercício 5 EM Passos 8 e 9



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

10º) Ao se analisar a Figura 4.31 é possível verificar que o centro da circunferência será o ponto E criado anteriormente. Para se concluir a construção da circunferência que de fato precisamos, basta utilizar a ferramenta “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos”, selecionando o ponto E (que será o centro) e o ponto M. (Figura 4.38)

Figura 4.38: Exercício 5 EM Passo 10

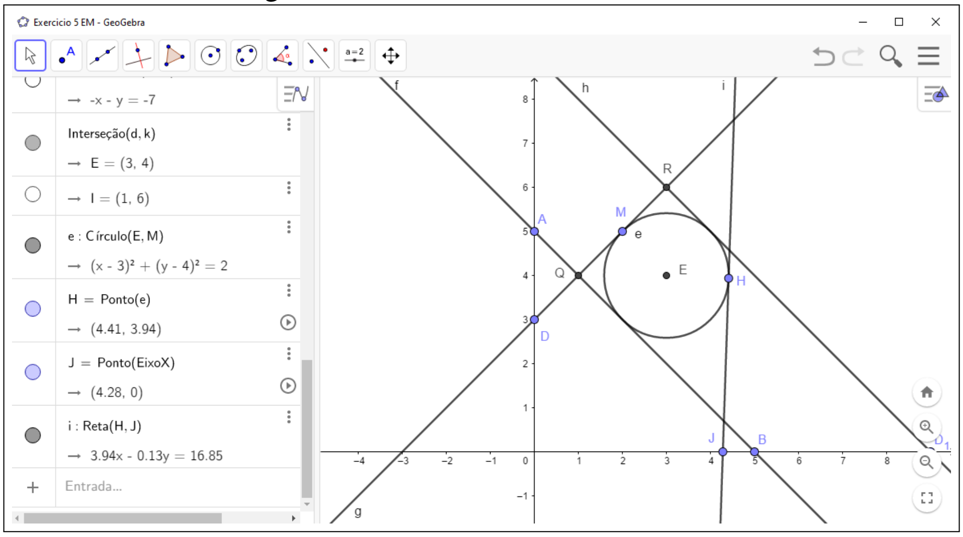


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Observação: Para se obter uma completa visualização, desabilitamos a circunferência criada no item 7.

11º) Para se finalizar a construção da imagem, os alunos devem desabilitar a mediatriz criada e o ponto I. Em seguida, com a ferramenta "Ponto em Objeto", criar o ponto H sobre a circunferência e e o ponto J sobre o eixo OX. Com a ferramenta "Reta" selecionamos os dois pontos criados. (Figura 4.39)

Figura 4.39: Exercício 5 EM Passo 11



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Observação: Como a última reta criada não interfere nos cálculos propostos pelo exercício, os alunos têm liberdade para criá-la de maneira a deixar a construção o mais parecida possível com a Figura 4.31, sem a necessidade de que todos obtenham retas idênticas.

12º) Com o intuito de finalizar a construção e deixá-la o mais parecida possível com a imagem fornecida, os alunos podem desabilitar os pontos H e J mostrados na Figura 4.39 e com a ferramenta "Interseção entre Dois Objetos" criar os pontos S e P conforme a Figura 4.31.

Considerações: Esta atividade permite que o aluno desenvolva habilidades investigativas e de análises de resultados fornecidos pelo software como: Identificar as coordenadas e equações solicitadas no enunciado da questão, desenvolver um raciocínio lógico em relação ao "Lugar Geométrico" do centro da circunferência da Figura 4.31 e um senso de estimativa ao se finalizar a construção do trapézio retângulo $PQRS$.

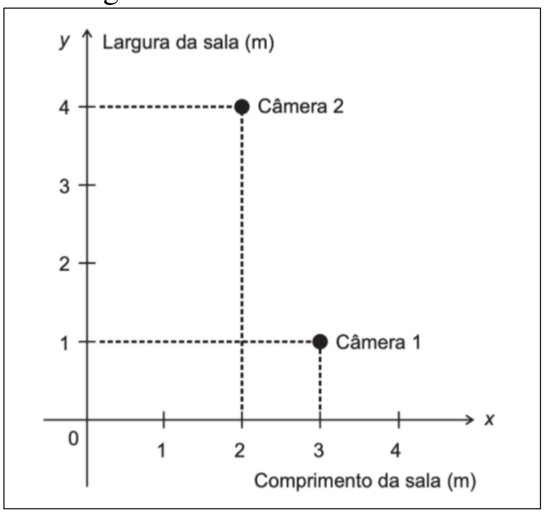
Exercício 6

A seguir temos um exercício de Geometria Analítica extraído do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) 2019, no qual fizemos pequenas adaptações no enunciado da questão afim de se melhorar a interpretação da mesma.

(INEP, 2019, p. 25): "Uma empresa, investindo na segurança, contrata uma firma para instalar mais uma câmera de segurança no teto de uma sala. Para iniciar o serviço, o representante da empresa informa ao instalador que nessa sala já estão instaladas duas câmeras e, a terceira, deverá ser colocada de maneira a ficar equidistante destas. Além disso, ele apresenta outras duas informações:

i) um esboço em um sistema de coordenadas cartesianas, do teto da sala, onde estão inseridas as posições das câmeras 1 e 2, conforme a Figura 4.40.

Figura 4.40: ENEM 2019 PPL



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

ii) cinco relações entre as coordenadas (x, y) da posição onde a câmera 3 deverá ser instalada.

$$R_1: \quad y = x,$$

$$R_2: \quad y = -3x + 5,$$

$$R_3: \quad y = -3x + 10,$$

$$R_4: \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \quad \text{e}$$

$$R_5: \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{10}$$

O instalador, após analisar as informações e as cinco relações, faz a opção correta dentre as relações apresentadas para instalar a terceira câmera. Qual foi a reta escolhida pelo instalador?

Resolução Algébrica:

Para se satisfazer as condições necessárias pela empresa, precisamos encontrar a reta mediatriz ao segmento que une os pontos C_1 e C_2 (respectivos representantes das câmeras 1 e 2), visto que a mesma possui uma importante propriedade que nos garante que todos os pontos pertencentes a ela são equidistantes das extremidades deste segmento. Para isso é necessário saber o coeficiente angular da reta que contém do segmento $\overline{C_1C_2}$.

Sendo $C_1 = (3, 1)$ e $C_2 = (2, 4)$ e $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, então

$$
\begin{aligned}
& m = \frac{4-1}{2-3} \\
\Rightarrow \quad & m = -3.
\end{aligned}
$$

Temos por propriedade que dadas duas retas perpendiculares entre si, o produto de seus coeficientes angulares é igual a -1. Logo, o coeficiente angular da reta mediatriz procurada é $\dfrac{1}{3}$.

De posse do coeficiente angular da mediatriz, precisamos agora de um ponto pertencente a mesma. Podemos então fazer uso do ponto médio do segmento $\overline{C_1C_2}$. Logo, temos

$$M_{\overline{C_1C_2}} = \left(\frac{2+3}{2}; \frac{4+1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Agora, sendo a mediatriz uma reta do tipo $y = mx + n$ onde, $m = \dfrac{1}{3}$ e o ponto $M_{\overline{C_1C_2}} = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ pertencente a mesma, segue que

$$
\begin{aligned}
& \frac{5}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\right) + n \\
\Rightarrow \quad & n = \frac{5}{2} - \frac{5}{6} \\
\Rightarrow \quad & n = \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

Assim, podemos concluir que a equação da reta mediatriz procurada é $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$, ou seja, a reta R_4.

Sugestão de atividade com o GeoGebra:

Podemos utilizar tal exercício que se trata de uma situação problema, pedindo que os alunos montem tal situação e resolvam a mesma fazendo uso do software GeoGebra e, em seguida, confiram os resultados apresentados pelo programa fazendo o desenvolvimento algébrico necessário.

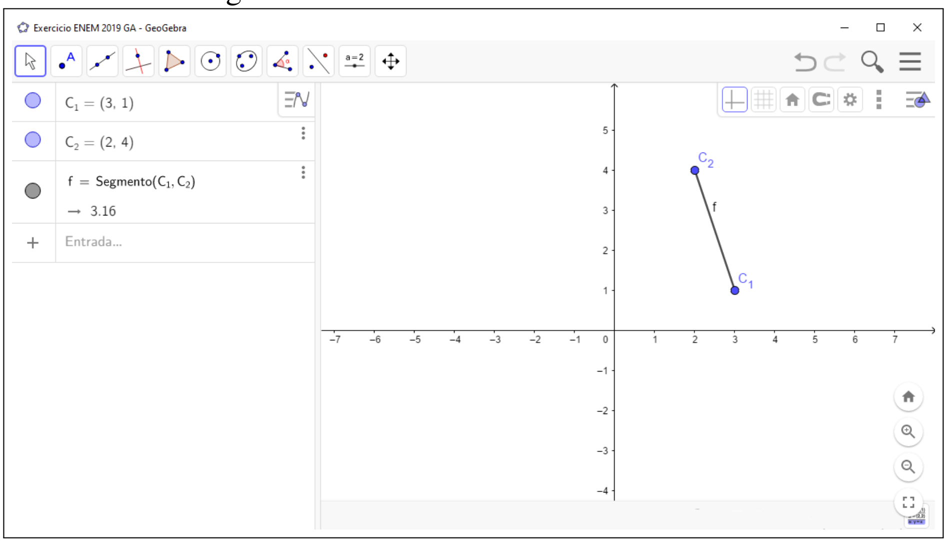
PASSOS ESPERADOS DOS ALUNOS

Espera-se que os alunos após já terem se familiarizado com os comandos dos software, solucionem tal exercício de maneira rápida e objetiva, através dos passos a seguir:

1º) Primeiramente, digite no campo de entrada as coordenadas onde estão localizadas as câmeras 1 e 2, representados na Figura 4.41 por $C_1 = (3, 1)$ e $C_2 = (2, 4)$.

2º) Com a ferramenta “Segmento”, selecione os pontos C_1 e C_2, criando o segmento f. (Figura 4.41)

Figura 4.41: Exercício 6 EM - Passos 1 e 2



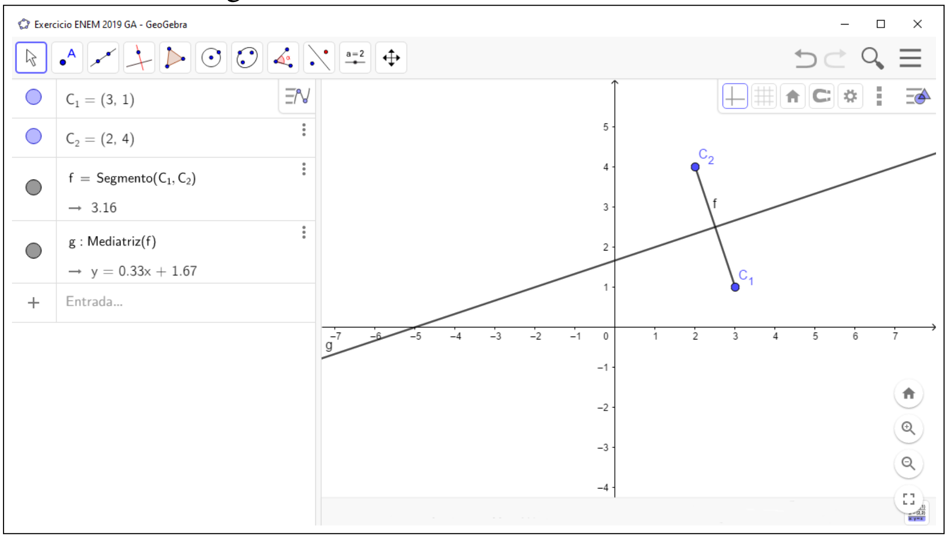
Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

3º) Utilizando a ferramenta “Mediatriz”, clicamos sobre o segmento criado anteriormente. (Figura 4.42)

Observação: Ao utilizar a reta mediatriz, o aluno estará demonstrando conhecer bem as propriedades de tal reta, que são necessárias para satisfazer as condições estabelecidas pela empresa.

4º) Para se obter a equação reduzida da reta dada, apresentada nas opções do exercício, basta entrar nas configurações da reta e no ícone "Álgebra".

Figura 4.42: Exercício 6 EM - Passos 3 e 4



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Considerações: A resolução deste exercício fazendo uso do software GeoGebra, se dá de uma maneira muito simples, porém, o objetivo de tal exercício é apresentar aos alunos o uso da tecnologia e de conceitos matemáticos para solucionar problemas da vida real.

4.2 ENSINO SUPERIOR

A Geometria Analítica no âmbito acadêmico aborda os seguintes tópicos: pontos e vetores no espaço, operações com vetores, estudo de retas e planos (equações, posições relativas, distâncias e ângulos), cônicas e superfícies quádricas.

Veremos a seguir uma sequência de exercícios que foram extraídos de listas de Geometria Analítica, aplicadas em turmas de graduação nos cursos de Engenharias da Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM, disponibilizadas pelo professor Me. Danilo Adrian Marques. Para cada um dos exercícios apresentaremos a resolução tradicional - desenvolvimento algébrico - e uma abordagem com o software GeoGebra. Separamos tais exercícios por meio de quatro aspectos, sendo eles, "Exercícios de conferência de resultados", "Classificação de Verdadeiro ou falso: investigando resultados", "Visualização de equações" e "Exercício não elementares no GeoGebra". O objetivo de tal separação é, apresentar diferentes benefícios propiciados pelo GeoGebra ao ser utilizado como ferramenta de estudo da Geometria Analítica no âmbito acadêmico.

4.2.1 Exercícios de conferência de resultados

Neste tópico, apresentaremos exercícios em que se é dado algumas sentenças algébricas envolvendo conceitos fundamentais da Geometria Analítica, como: operações com vetores, posições relativas entre planos e reconhecimento de Cônicas. Tais sentenças, requerem um desenvolvimento algébrico e uma análise minuciosa dos resultados obtidos, que serão conferidos através do software GeoGebra, como veremos a seguir.

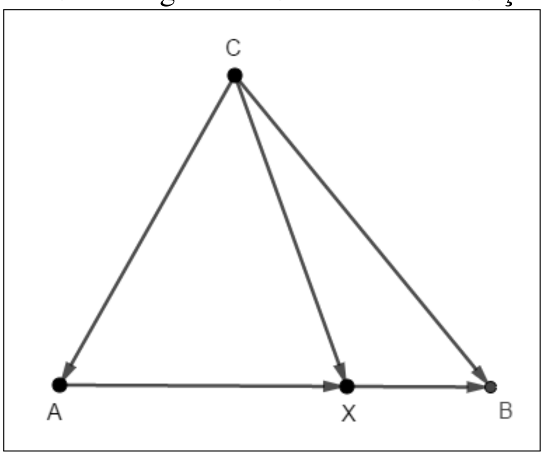
Exercício 1 - Adaptado de Boulos e Camargo (1987, p. 22)

Sejam quatro pontos A, B, C e X, como na Figura 4.43, tais que $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{XB}$.
Entre as igualdades

$$\overrightarrow{CX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{CX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$$

qual é a verdadeira?

Figura 4.43: Triângulo ABC Exercício 1 - Seção 4.2.1



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Resolução Algébrica:
Temos que $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX}$. Como $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{XB}$, segue que $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{XB}$.

Temos também que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CX} + \overrightarrow{XB}$, ou seja, $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CX}$.

Logo,

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{XB} \\ \Rightarrow\ & \overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + 2(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CX}) \\ \Rightarrow\ & \overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CX} \\ \Rightarrow\ & 3\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} \\ \Rightarrow\ & \overrightarrow{CX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

Portanto, a primeira igualdade é **FALSA** e a segunda igualdade é **VERDADEIRA**.

Resolução com o GeoGebra:

Podemos construir as duas igualdades para fazer a conferência da veracidade das afirmações, fazendo os seguintes passos.

1º) Criamos com a ferramenta "Ponto", os pontos quaisquer A e X sobre a superfície do plano.

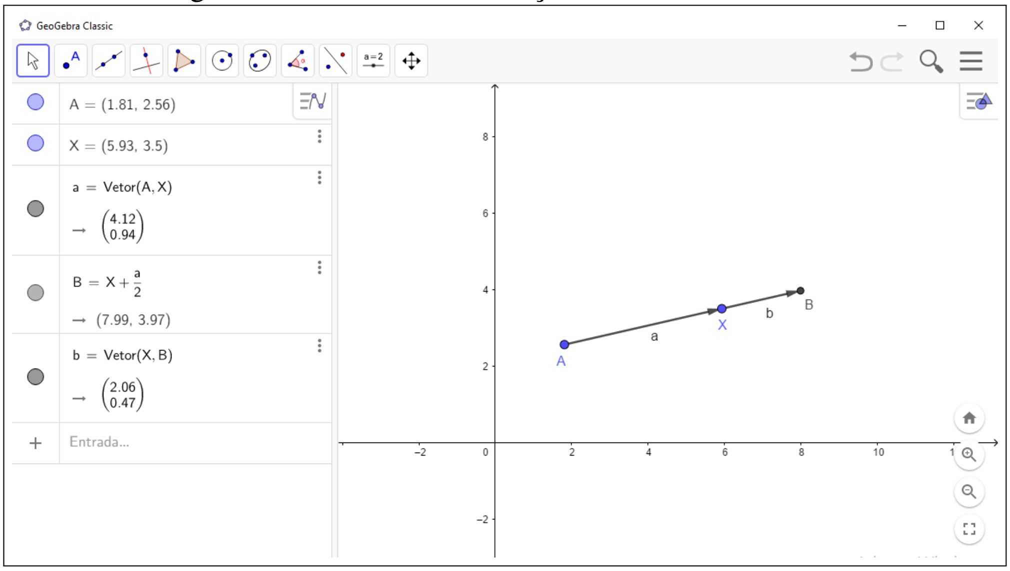
2º) Com a ferramenta "Vetor" unimos os pontos A e X criando o vetor $\overrightarrow{a}$. (Figura 4.44)

3º) No campo de entrada criamos o ponto B através da expressão $B = X + \dfrac{\overrightarrow{a}}{2}$. (Figura 4.44)

Observação: Nesse passo, estamos utilizando que a soma de um ponto X com um vetor $\frac{1}{2}\overrightarrow{AX}$ resulta em um ponto B com as seguintes características: os pontos A, X e B são colineares e $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{XB}$. Com isso, garantimos que mesmo com alterações futuras nos pontos A e X as condições iniciais do problema serão mantidas.

4º) Para se completar a base do triângulo ABC criamos um vetor $\overrightarrow{b}$ unindo os pontos X e B. (Figura 4.44)

Figura 4.44: Exercício 1 - Seção 4.2.1 - Passos 1 ao 4

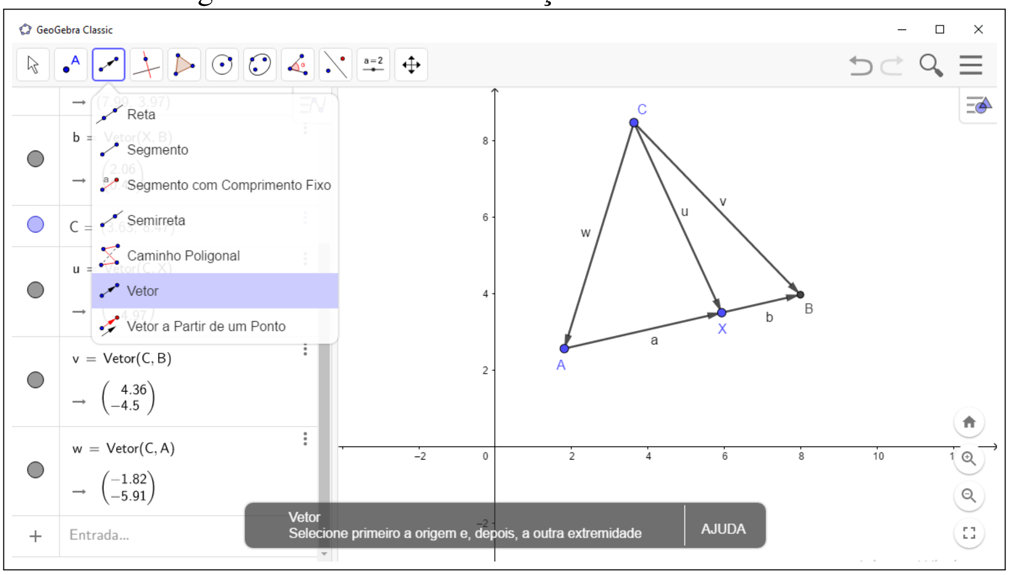


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

5º) Novamente com a ferramenta "Ponto" criamos um ponto "C"qualquer, para ser o vértice superior do triângulo ABC.

6º) Com a ferramenta "Vetor" criamos os vetores $\overrightarrow{CX} = u$, $\overrightarrow{CB} = v$ e $\overrightarrow{CA} = w$. (Figura 4.45)

Figura 4.45: Exercício 1 - Seção 4.2.1 - Passos 5 e 6

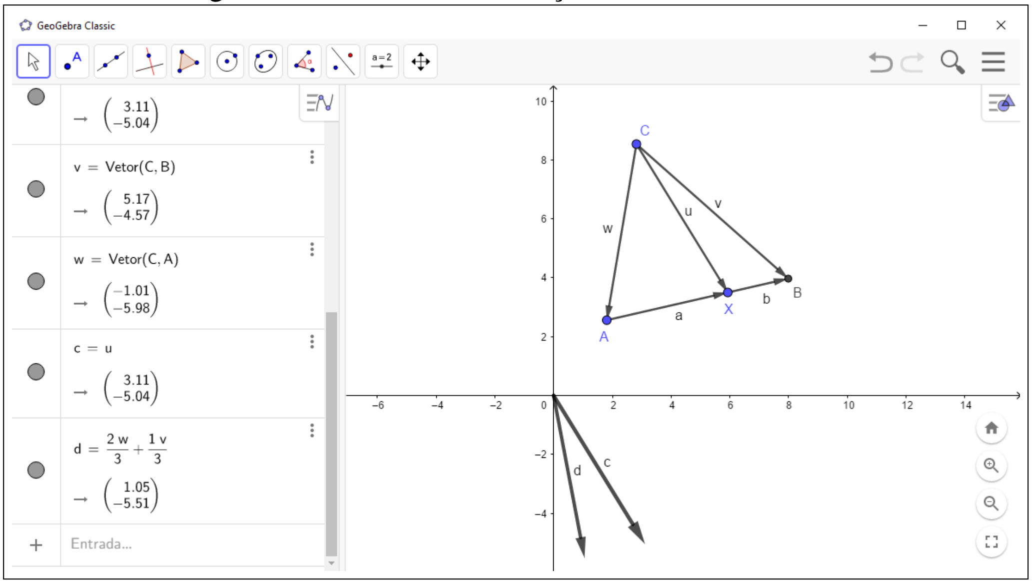


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

7º) Digitamos no campo de entrada $c = u$, afim de se obter um vetor com início na origem e com o mesmo comprimento que o vetor $u = \overrightarrow{CX}$.

8º) Digitamos no campo de entrada a expressão $d = \dfrac{2w}{3} + \dfrac{1v}{3}$, afim de se obter um vetor com início na origem e com comprimento igual a primeira equação citada no enunciado da questão. (Figura 4.46)

Figura 4.46: Exercício 1 - Seção 4.2.1 - Passos 7 e 8

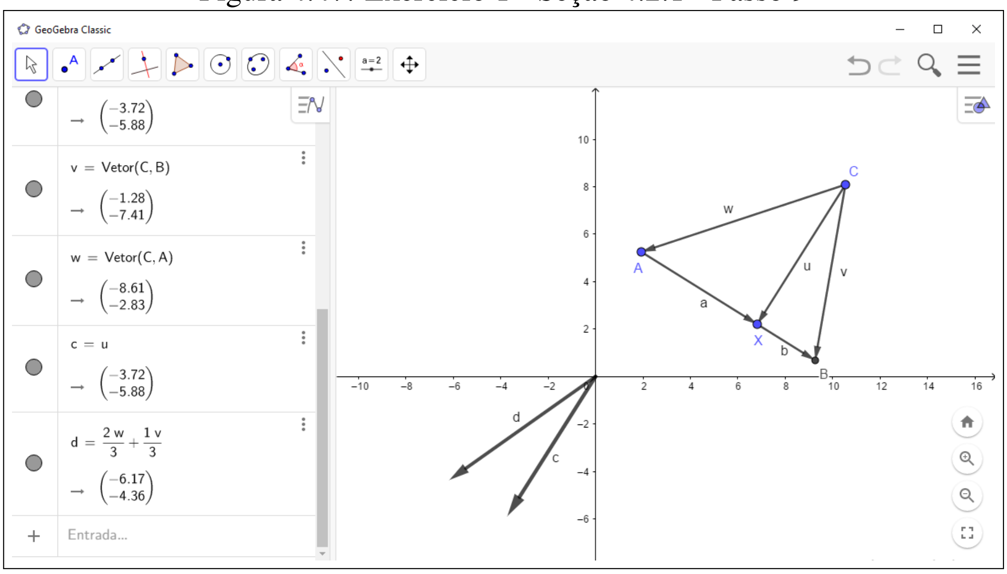


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Observação: Perceba que os vetores $\vec{c}$ e $\vec{d}$ criados afim de se comparar a sentença apresentada no enunciado, não são iguais, pois possuem direções e sentidos diferentes, logo a sentença é **falsa**.

9º) Mesmo mudando as posições dos pontos A, B ou C (através da ferramenta "Mover") a sentença permanece **falsa**. (Figura 4.47)

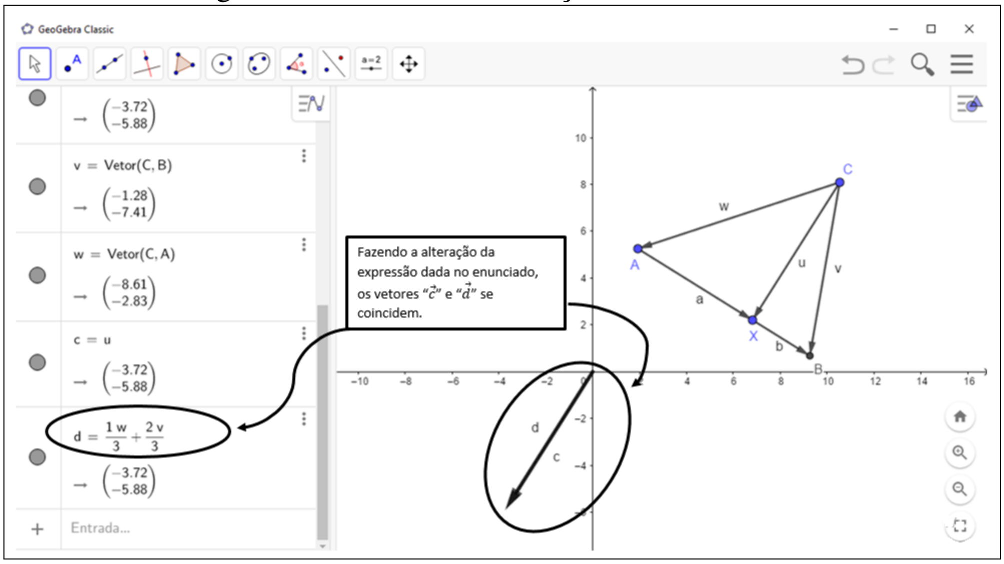
Figura 4.47: Exercício 1 - Seção 4.2.1 - Passo 9



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

10º) Aproveitando a construção desenvolvida, trocamos apenas os valores da primeira sentença que era $\frac{2w}{3} + \frac{1v}{3}$, alterando para $\frac{1w}{3} + \frac{2v}{3}$, assim obtemos

Figura 4.48: Exercício 1 - Seção 4.2.1 - Passo 10

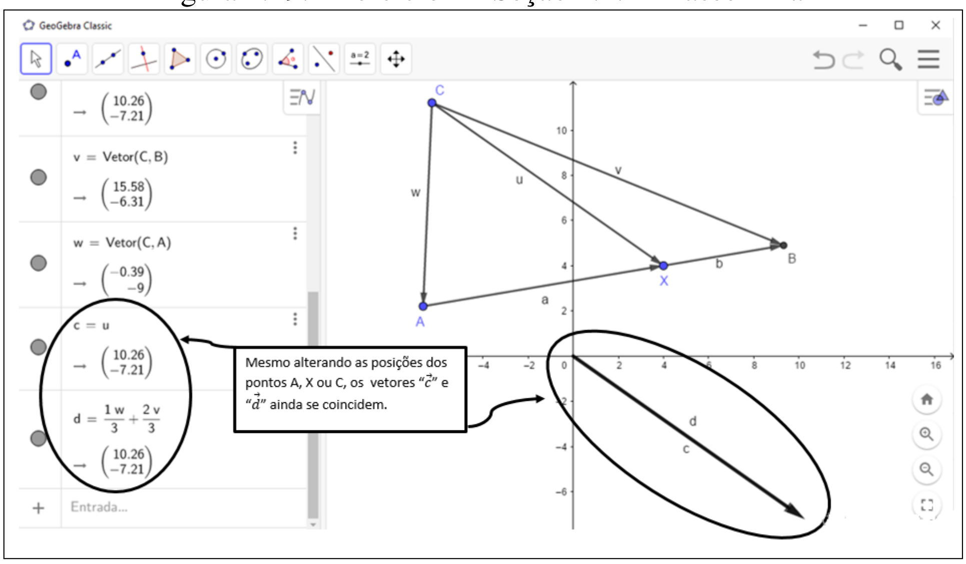


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Observação: Os vetores $\vec{c}$ e $\vec{d}$ se tornam iguais, pois, possuem a mesma direção, sentido e comprimento (e mesmas coordenadas). Logo, a sentença se torna **verdadeira**. (Veja Figura 4.48)

11º) Mesmo mudando a posição dos pontos A, X ou C, percebe-ser que a sentença continua sendo **verdadeira**. (Figura 4.49)

Figura 4.49: Exercício 1 - Seção 4.2.1 - Passo Final



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Exercício 2

Determine a posição relativa entre os planos.

a) $\pi_1 : -x + 3y - 4z + 2 = 0$, $\pi_2 : -4x - y + 8z + 4 = 0$ e $\pi_3 : x - y + 4z + 1 = 0$

b) $\pi_1 : -x + y - 4z + 2 = 0$, $\pi_2 : -2x + 2y + 8z + 4 = 0$ e $\pi_3 : x - y + 4z + 1 = 0$

Resolução Algébrica:

a) Temos que os vetores normais de cada plano são $\overrightarrow{n_1} = (-1, 3, -4)$, $\overrightarrow{n_2} = (-4, -1, 8)$ e $\overrightarrow{n_3} = (1, -1, 4)$, respectivamente.

Logo, nenhum dos vetores $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ e $\overrightarrow{n_3}$ é múltiplo um do outro. Fazendo agora

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{n_3} = \alpha\overrightarrow{n_1} + \beta\overrightarrow{n_2} \\ \Rightarrow \quad & (1, -1, 4) = \alpha(-1, 3, -4) + \beta(-4, -1, 8). \end{aligned}$$

Assim, temos o sistema

$$\begin{cases} -\alpha - 4\beta = 1 \\ 3\alpha - \beta = -1 \\ -4\alpha + 8\beta = 4 \end{cases} \xrightarrow{3L_1 + L_2} -13\beta = 2 \Rightarrow \beta = -\frac{2}{13}.$$

Utilizando o valor de β na primeira equação do sistema, segue que $\alpha = \frac{8}{13} - 1$, ou seja, $\alpha = -\frac{5}{13}$. Substituindo α e β na equação 3 do sistema obtemos

$$-4\left(-\frac{5}{13}\right) + 8\left(-\frac{2}{13}\right) = \frac{4}{13} \neq 4.$$

Logo, **não** existe α e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que, $\overrightarrow{n_3} = \alpha\overrightarrow{n_1} + \beta\overrightarrow{n_2}$, ou seja, $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ e $\overrightarrow{n_3}$ são linearmente independentes.

Portanto, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = P$, ou seja, um ponto.

b) Temos que os vetores normais de cada plano são $\overrightarrow{n_1} = (-1, 1, -4)$, $\overrightarrow{n_2} = (-2, 2, 8)$ e $\overrightarrow{n_3} = (1, -1, 4)$, respectivamente.

Observe que $\overrightarrow{n_3} = -\overrightarrow{n_1}$ e que não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{n_2} = \lambda\overrightarrow{n_1}$ ou $\overrightarrow{n_2} = \lambda\overrightarrow{n_3}$.

Observe também que $d_3 \neq -d_1$.

Dessa forma, concluímos que π_1 é paralelo a π_3 e π_2 intersecta os planos π_1 e π_3 por duas retas l_1 e l_2 paralelas.

Resolução com o GeoGebra:

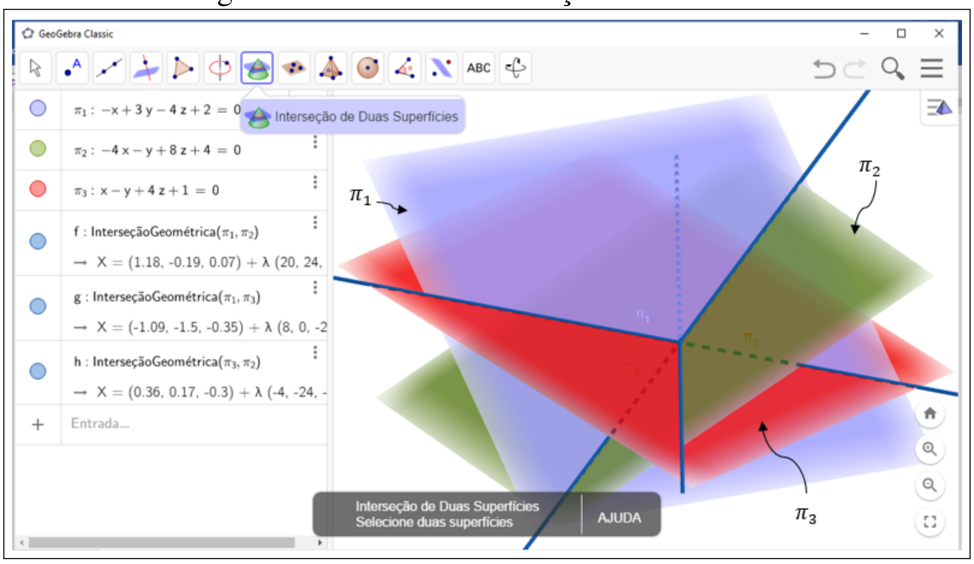
Exercícios como este, onde é necessário verificar qual é a posição relativa entre planos, são resolvidos de forma extremamente simples e prática através do GeoGebra. Além disso, o uso do software propicia tanto para o aluno quanto para o professor uma perfeita visualização do que de fato está acontecendo com os planos, uma vez que temos 8 possíveis situações no que diz respeito a posições relativas entre planos.

A seguir temos a visualização dos dois exercícios analisados através do software, uma vez que para o desenvolvimento dos mesmos basta inserir as equações de cada um dos planos no campo de entrada e em seguida utilizando a ferramenta de “Interseção de Duas Superfícies” selecionamos os planos dois a dois.

Resolução do item a)

1º) Ao digitarmos no campo de entrada as equações dos planos π_1, π_2 e π_3 e, fazendo uso da ferramenta “Interseção de Duas Superfícies” (selecionando os planos dois a dois), já conseguimos perceber que as interseções entre os pares de planos selecionados são retas que se intersectam um ponto comum. (Figura 4.50)

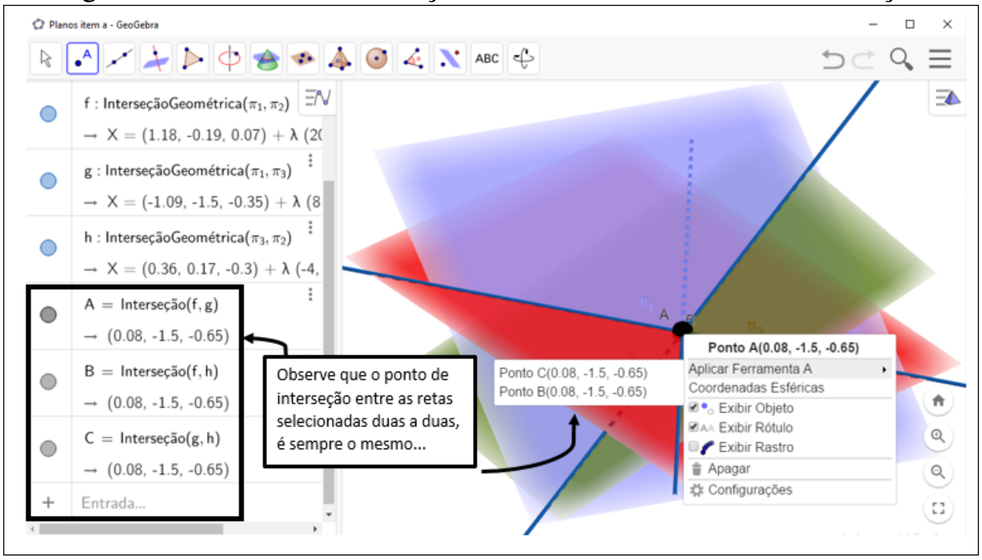
Figura 4.50: Exercício 2 - Seção 4.2.1 - Item a



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

2º) Afim de se garantir que a interseção entre os três planos de fato é um ponto, podemos utilizar a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”, selecionando duas a duas, as retas criadas no item anterior. Obtendo um ponto em comum. (Figura 4.51)

Figura 4.51: Exercício 2 - Seção 4.2.1 - Item a - Ponto de Interseção

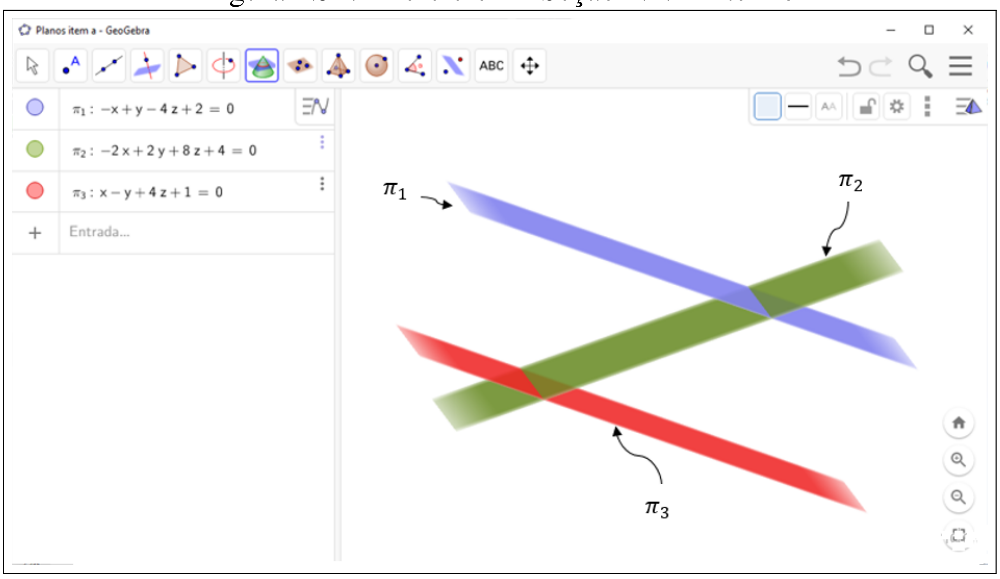


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Resolução do item b)

1º) Novamente, ao se digitar no campo de entrada as equações dos planos π_1, π_2 e π_3, o software GeoGebra nos fornece uma visão bastante clara da posição relativa entre tais planos. (Figura 4.52)

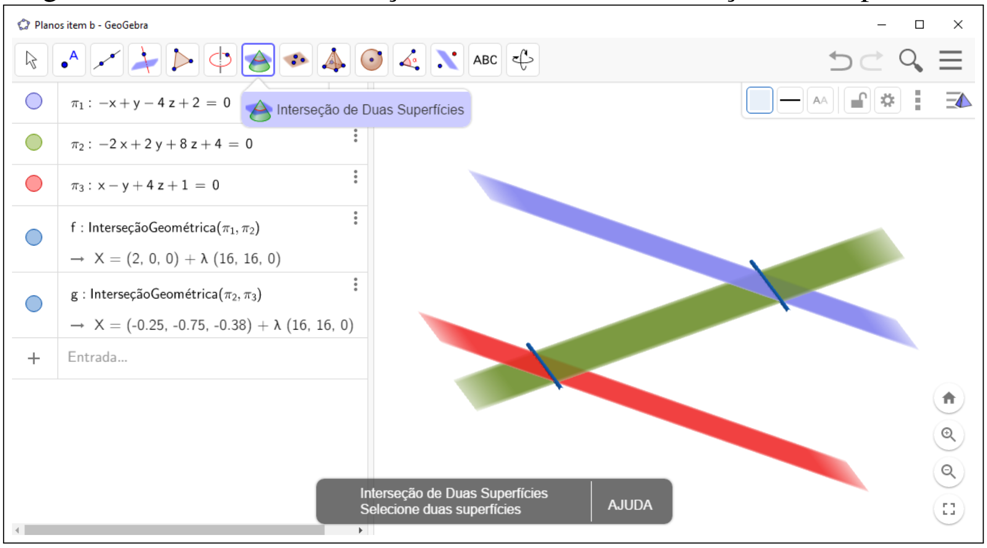
Figura 4.52: Exercício 2 - Seção 4.2.1 - Item b



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

2º) Fazendo uso da ferramenta "Interseção de Duas Superfícies", o software gera automaticamente as equações vetoriais das retas que são as interseções $\pi_1 \cap \pi_2$ e $\pi_2 \cap \pi_3$. Como não existe interseção entre os planos π_1 e π_3 (pois são paralelos) o software não gerará nenhum resultado. (Figura 4.53)

Figura 4.53: Exercício 2 - Seção 4.2.1 - Item b - Interseção das Superfícies



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Exercício 3 - Adaptado de Delgado, Frensel e Crissaff (2017, p. 137)

Classifique, em função do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, a família de curvas

$$x^2 + (\lambda - 2)y^2 + 2\lambda x + 2(\lambda - 2)y + 3\lambda - 3 = 0$$

RESOLUÇÃO:

Para solucionar tal problema devemos "completar quadrados" e desenvolver a equação.

$$\begin{aligned}
& x^2 + (\lambda - 2)y^2 + 2\lambda x + 2(\lambda - 2)y + 3\lambda - 3 = 0 \\
\Rightarrow \ & (x^2 + 2\lambda x + \lambda^2) + [(\lambda - 2)\,(y^2 + 2y + 1)] + 3\lambda - 3 = \lambda^2 + (\lambda - 2) \\
\Rightarrow \ & (x + \lambda)^2 + (\lambda - 2)(y + 1)^2 = \lambda^2 + \lambda - 2 - 3\lambda + 3 \\
\Rightarrow \ & (x + \lambda)^2 + (\lambda - 2)(y + 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\
\Rightarrow \ & (x + \lambda)^2 + (\lambda - 2)(y + 1)^2 = (\lambda - 1)^2.
\end{aligned}$$

Fazendo uma análise da variação dos sinais dos coeficientes $(\lambda - 2)$ e $(\lambda - 1)^2$, obtemos.

Tabela 4.1: Quadro de Sinais das Variações do Parâmetro λ

	$-\infty < \lambda < 1$	$\lambda = 1$	$1 < \lambda < 2$	$\lambda = 2$	$2 < \lambda < +\infty$
$\lambda - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(\lambda - 1)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Para $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq 2$, temos que

$$\frac{(x+\lambda)^2}{(\lambda-1)^2} + \frac{(y+1)^2}{\dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}} = 1.$$

Logo,

- se $\lambda \in (-\infty, 1)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $l : y = -1$ paralela ao eixo OX.

- se $\lambda \in (1, 2)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $l : y = -1$ paralela ao eixo OX.

- se $\lambda \in (2, +\infty)$,

  i) Para $\lambda \in (2, 3)$, uma elipse de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $l : x = -\lambda$, paralela ao eixo OY, pois $(\lambda - 1)^2 < \dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}$ nesse intervalo.

  ii) Para $\lambda = 3$, um círculo de centro $(-3, -1)$ e raio 2, pois nesse caso $(\lambda - 1)^2 = \dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2} = 4$.

  iii) Para $\lambda \in (3, +\infty)$, uma elipse de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $l : y = -1$, paralela ao eixo OX, pois $(\lambda - 1)^2 > \dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}$ nesse intervalo.

Agora se,

- $\lambda = 1$, a equação $(x + 1)^2 - (y + 1)^2 = 0$ representa um par de retas concorrentes $y + 1 = \pm(x + 1)$ que se cortam no ponto $(-1, -1)$.

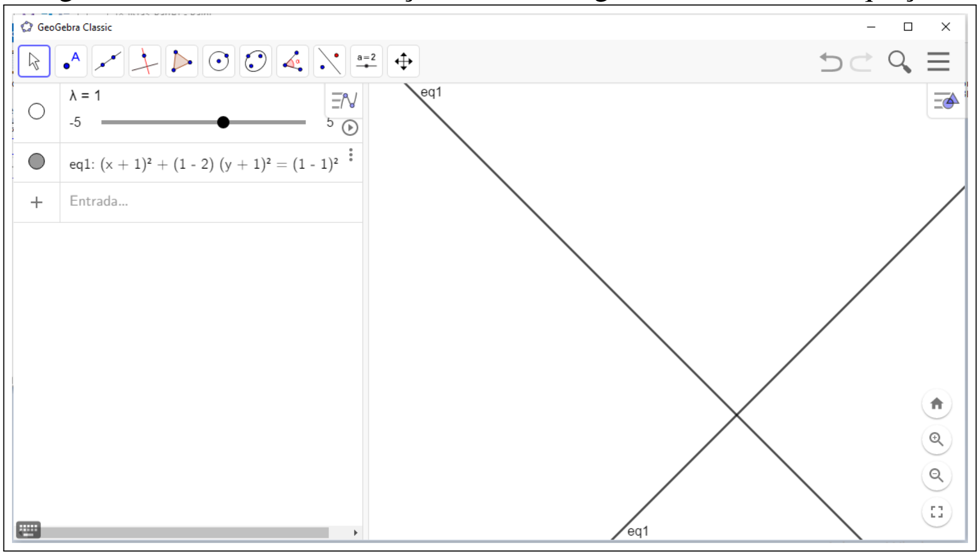
- $\lambda = 2$, a equação $(x + 2)^2 = 1$ representa o par de retas $x + 2 = \pm 1$, ou seja, $x = -1$ e $x = -3$, paralelas ao eixo OY.

Resolução com o GeoGebra:

Para se conferir esse exercício com o GeoGebra, simplesmente digitamos no campo de entrada a equação final "$(x+\lambda)^2 + (\lambda-2)(y+1)^2 = (\lambda-1)^2$" (ou a equação inicial) e automaticamente o programa gera um "Controle Deslizante" em função do parâmetro λ. Observe nos passos a seguir a verificação desse exercício.

1º) Na Figura 4.54 temos a imagem da equação "$(x+\lambda)^2 + (\lambda-2)(y+1)^2 = (\lambda-1)^2$" digitada no campo de entrada.

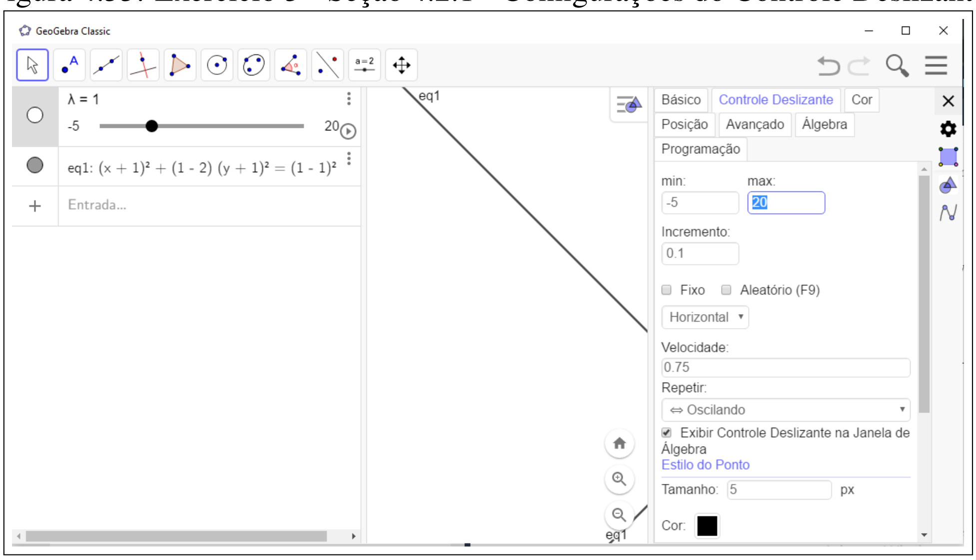
Figura 4.54: Exercício 3 - Seção 4.2.1 - Imagem automática da equação



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

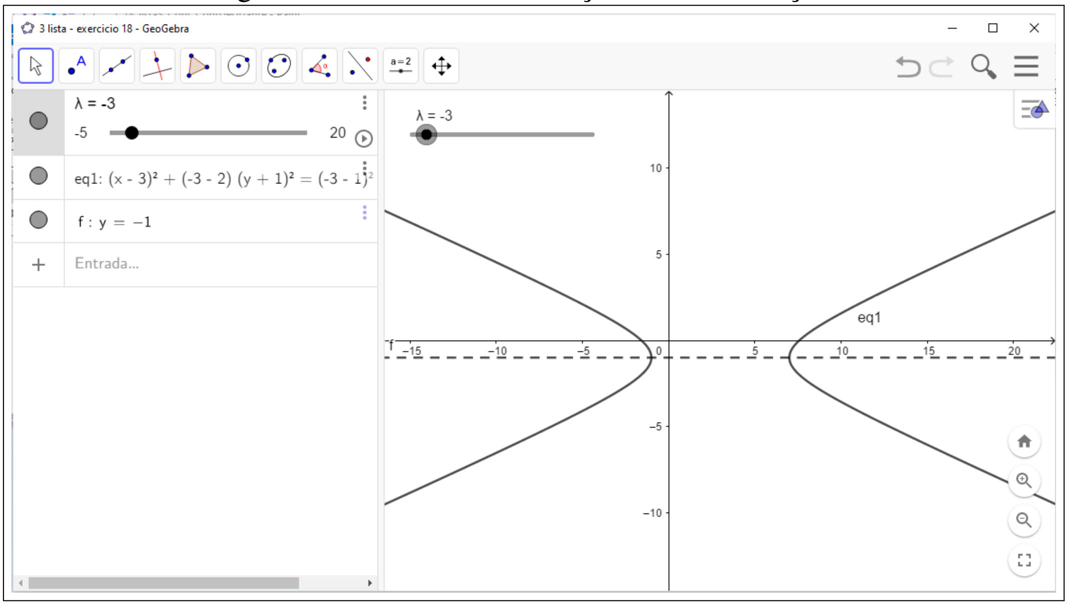
2º) Entrando nas configurações do controle deslizante alteramos o valor de intervalo (-5 a 20) e incremento (0.1), afim de se obter uma melhor utilização do controle deslizante. (Figura 4.55)

Figura 4.55: Exercício 3 - Seção 4.2.1 - Configurações do Controle Deslizante



3º) Para $\lambda \in (-\infty, 1)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $l : y = -1$ paralela ao eixo OX. (Figura 4.56)

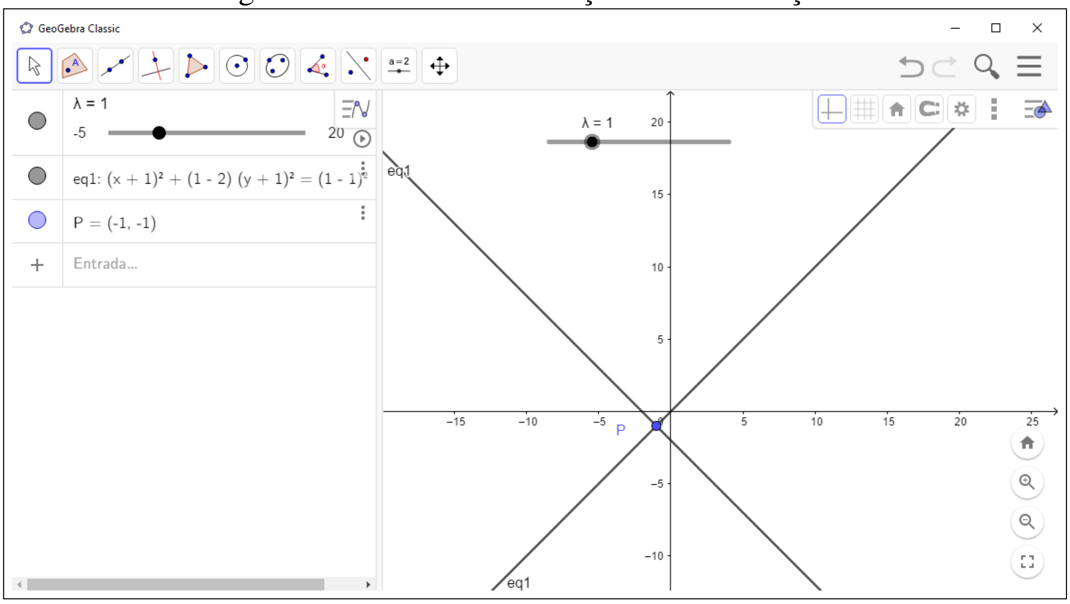
Figura 4.56: Exercício 3 - Seção 4.2.1 - Situação 1



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

4º) Para $\lambda = 1$, a equação $(x+1)^2 - (y+1)^2 = 0$ representa um par de retas concorrentes $y + 1 = \pm(x+1)$ que se cortam no ponto $(-1, -1)$. (Figura 4.57)

Figura 4.57: Exercício 3 - Seção 4.2.1 - Situação 2

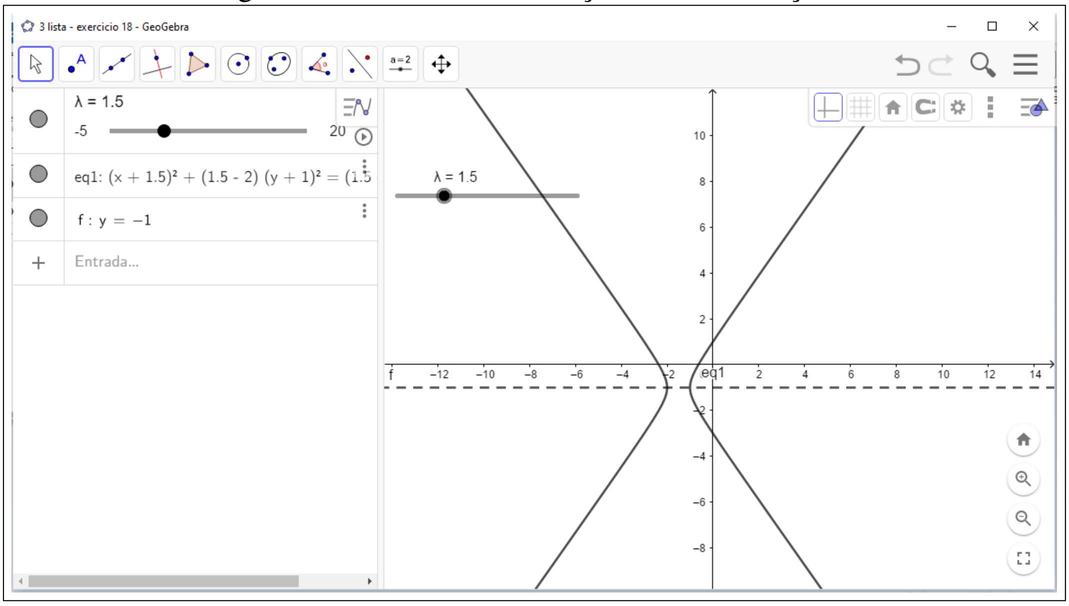


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

5º) Para $\lambda \in (1, 2)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal

$l : y = -1$ paralela ao eixo OX. (Figura 4.58)

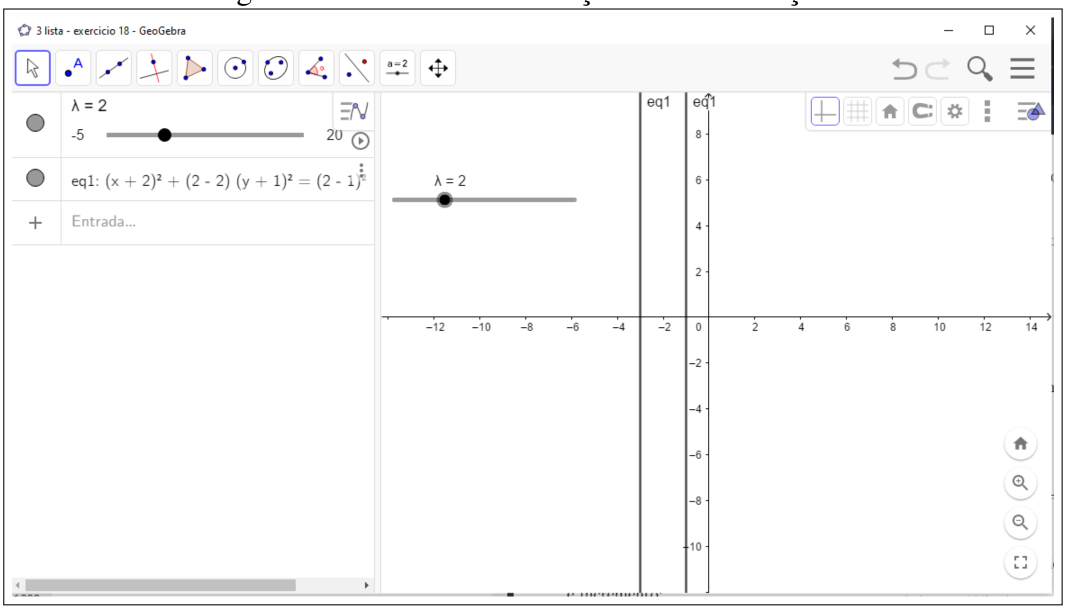
Figura 4.58: Exercício 3 - Seção 4.2.1 - Situação 3



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

6º) Para $\lambda = 2$, a equação $(x+2)^2 = 1$ representa o par de retas $x+2 = \pm 1$, ou seja, $x = -1$ e $x = -3$, paralelas ao eixo OY. (Figura 4.59)

Figura 4.59: Exercício 3 - Seção 4.2.1 - Situação 4

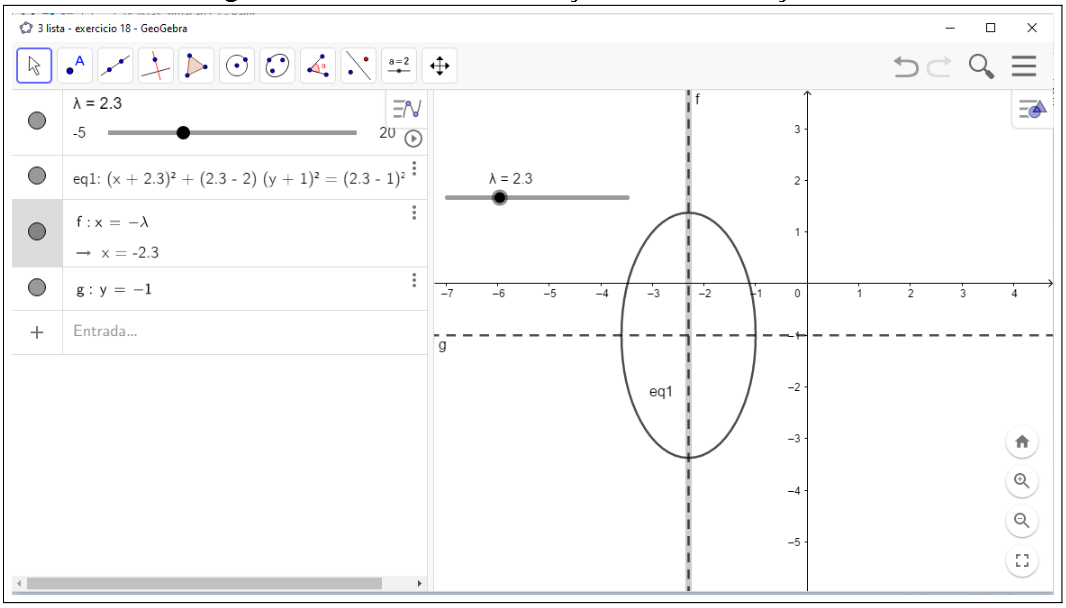


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

7º) Para $\lambda \in (2, 3)$, uma elipse de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $l : x = -\lambda$, paralela ao eixo

OY, pois $(\lambda - 1)^2 < \dfrac{(\lambda - 1)^2}{\lambda - 2}$ nesse intervalo. (Figura 4.60)

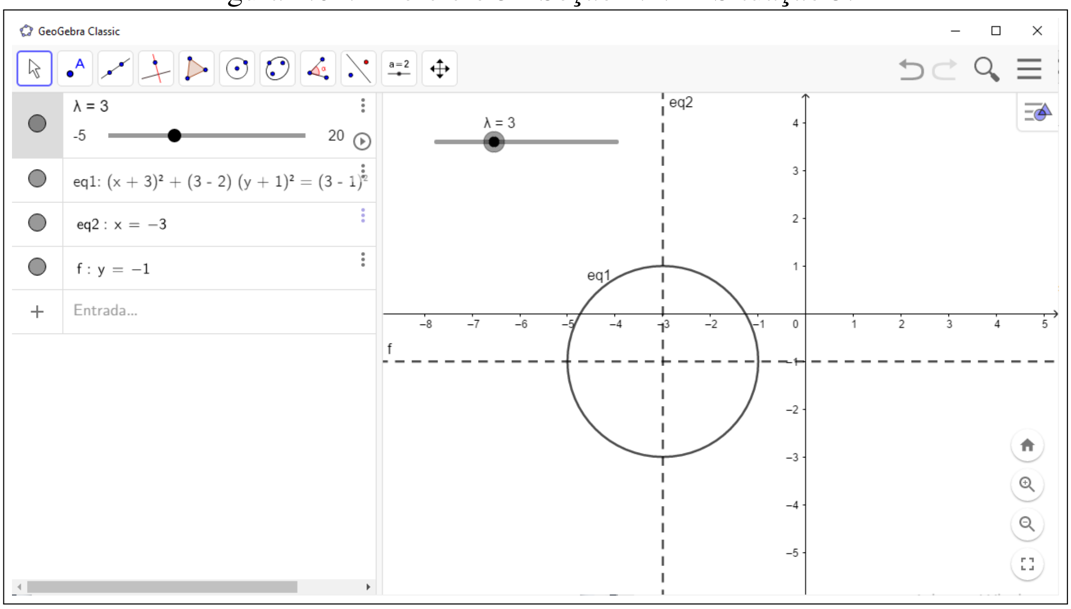
Figura 4.60: Exercício 3 - Seção 4.2.1 - Situação 5.1



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

8º) Para $\lambda = 3$, um circulo de centro $(-3, -1)$ e raio 2, pois nesse caso $(\lambda - 1)^2 = \dfrac{(\lambda - 1)^2}{\lambda - 2} = 4$. (Figura 4.61)

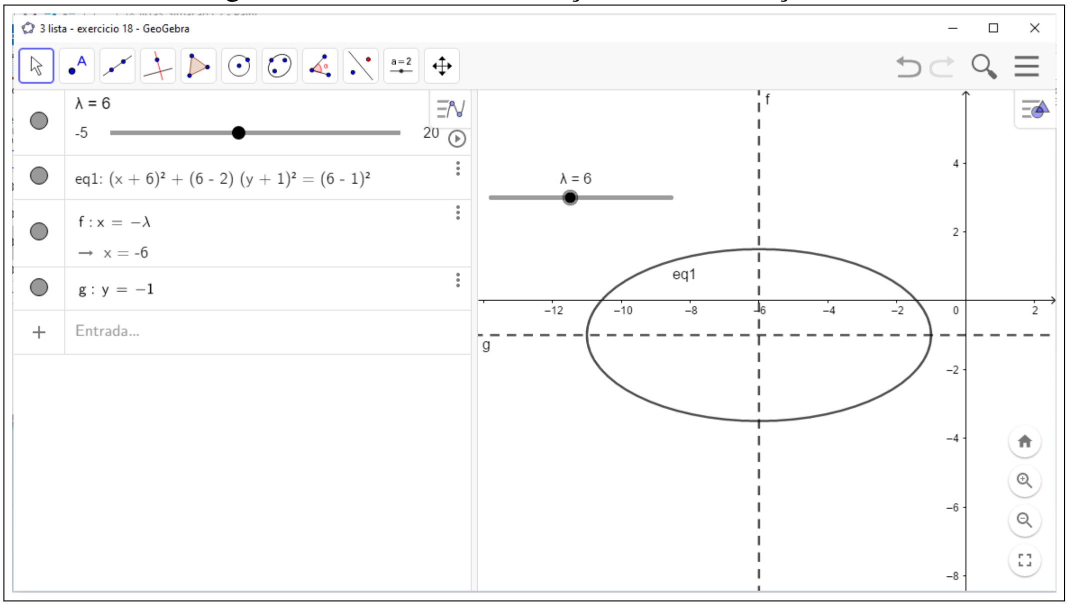
Figura 4.61: Exercício 3 - Seção 4.2.1 - Situação 5.2



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

9º) Para $\lambda \in (3, +\infty)$, uma elipse de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $l : y = -1$, paralela ao eixo OX, pois $(\lambda - 1)^2 > \dfrac{(\lambda - 1)^2}{\lambda - 2}$ nesse intervalo. (Figura 4.62)

Figura 4.62: Exercício 3 - Seção 4.2.1 - Situação 5.3



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Observação: Todas as retas pontilhadas e os pontos que apareceram nas figuras foram colocadas para uma melhor visualização das cônicas trabalhadas.

4.2.2 Classificação de verdadeiro ou falso: investigando resultados

Os exercícios deste tópico tratam de sentenças matemáticas em que os alunos devem julgar como sendo verdadeiras ou falsas. Para isso, é necessário que os mesmos tenham um bom domínio e conhecimento de propriedades específicas da Geometria Analítica. Mas, infelizmente muitas dessas propriedades não são tão elementares, além de serem obtidas por meio de manipulações algébricas - que nem sempre são compreendidas de maneira fácil - apresentam certo grau de abstração que dificulta a assimilação por parte dos alunos. Nosso objetivo é utilizar o software GeoGebra como uma ferramenta investigativa, afim de facilitar a análise de cada sentença que inicialmente construiremos fazendo uso do software e na sequência provaremos algebricamente.

Classifique em Verdadeiro (V) ou Falso (F) as seguintes afirmações.

Exercício 1 - Adaptado de Santos (2017, p. 164).

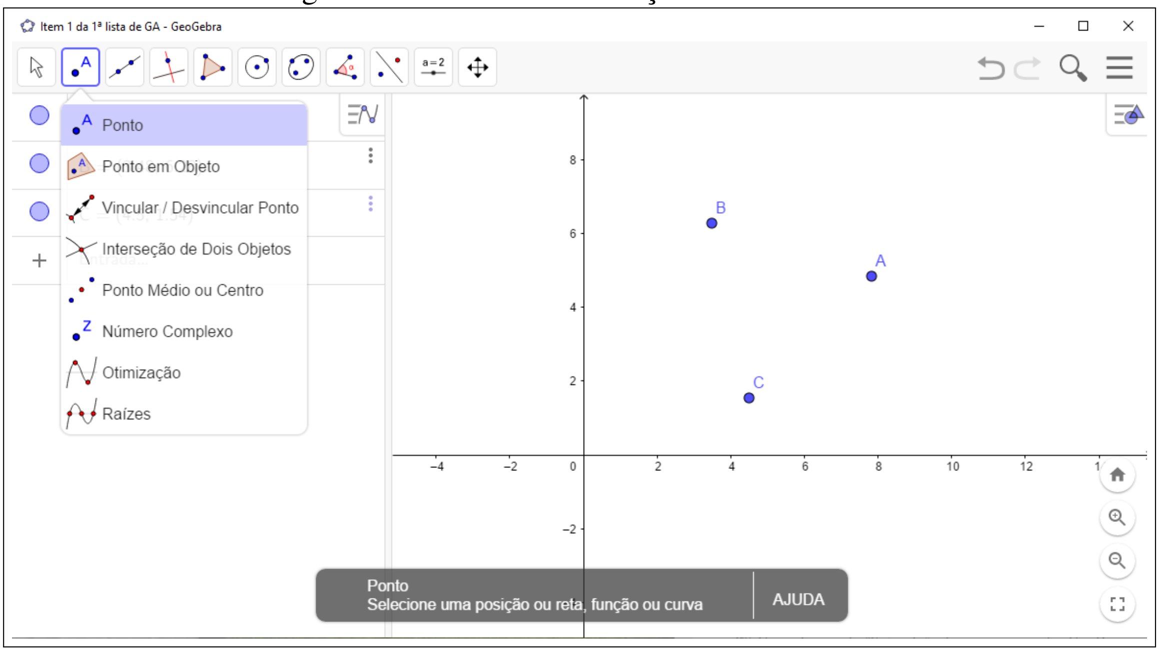
O segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a média aritmética das medidas das bases.

Resolução com o GeoGebra:

Com o software aberto na janela de visualização 2D, tela inicial do software (Figura 2.1), seguimos os seguintes passos.

1º) Com a ferramenta "Ponto" selecionada, criamos 3 pontos quaisquer no plano. (Figura 4.63)

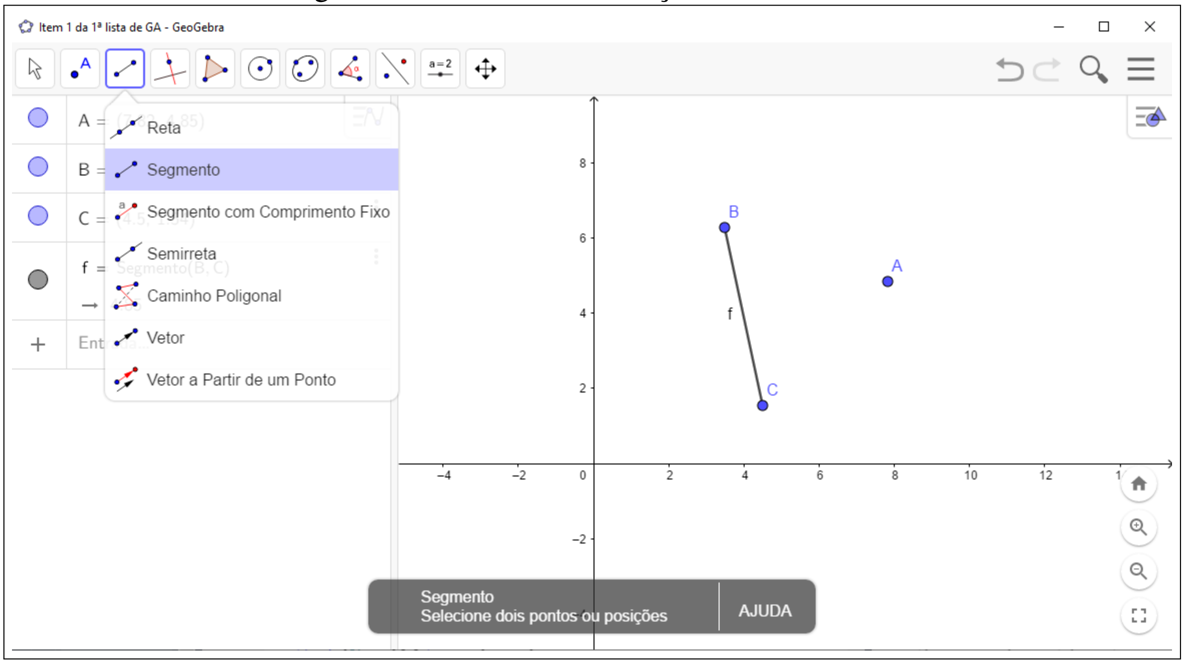
Figura 4.63: Exercício 1 - Seção 4.2.2 - Passo 1



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

2º) Com a ferramenta "Segmento" selecionamos os pontos B e C para criarmos os segmento $\overline{BC}$. (Figura 4.64)

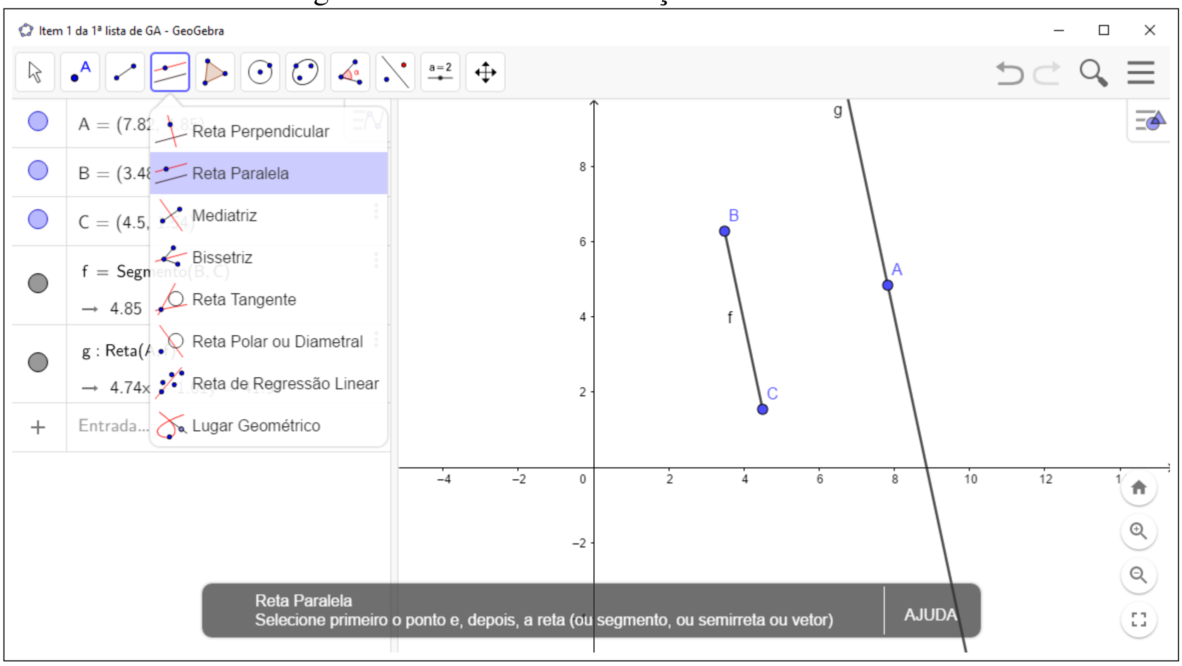
Figura 4.64: Exercício 1 - Seção 4.2.2 - Passo 2



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

3º) Com a ferramenta "Reta Paralela" selecionamos primeiramente o ponto A e em seguida o segmento de reta criado anteriormente. (Figura 4.65)

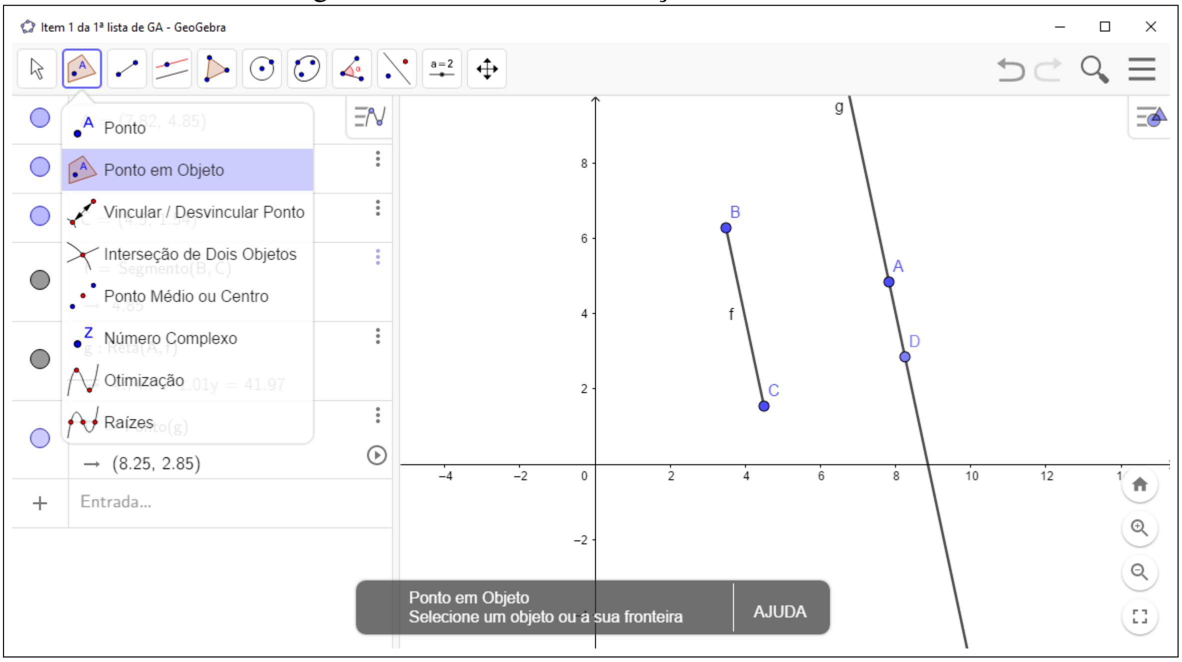
Figura 4.65: Exercício 1 - Seção 4.2.2 - Passo 3



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

4º) Utilizando a ferramenta "Ponto em Objeto", criamos o ponto D sobre a reta paralela ao segmento $\overline{BC}$ criado no passo anterior. (Figura 4.66)

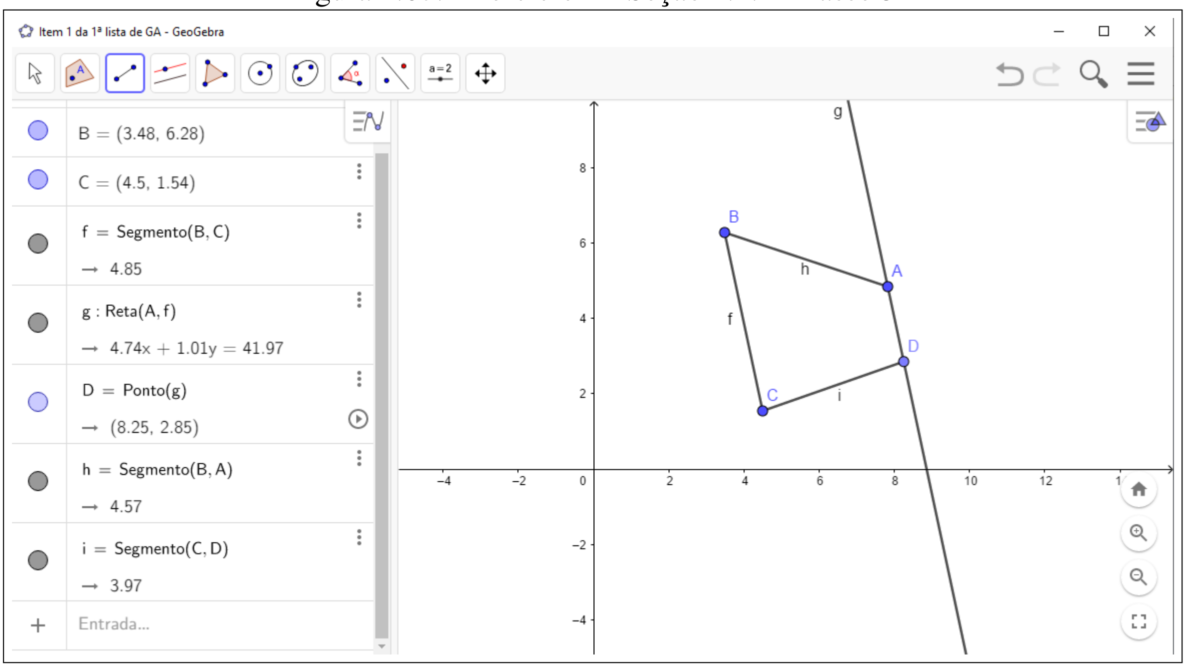
Figura 4.66: Exercício 1 - Seção 4.2.2 - Passo 4



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

5º) Agora voltando a ferramenta "Segmento", criamos os segmentos h e i, obtidos respectivamente pela seleção dos pontos B e A e os pontos C e D. Fazendo assim, obtemos a construção de um trapézio. (Figura 4.67)

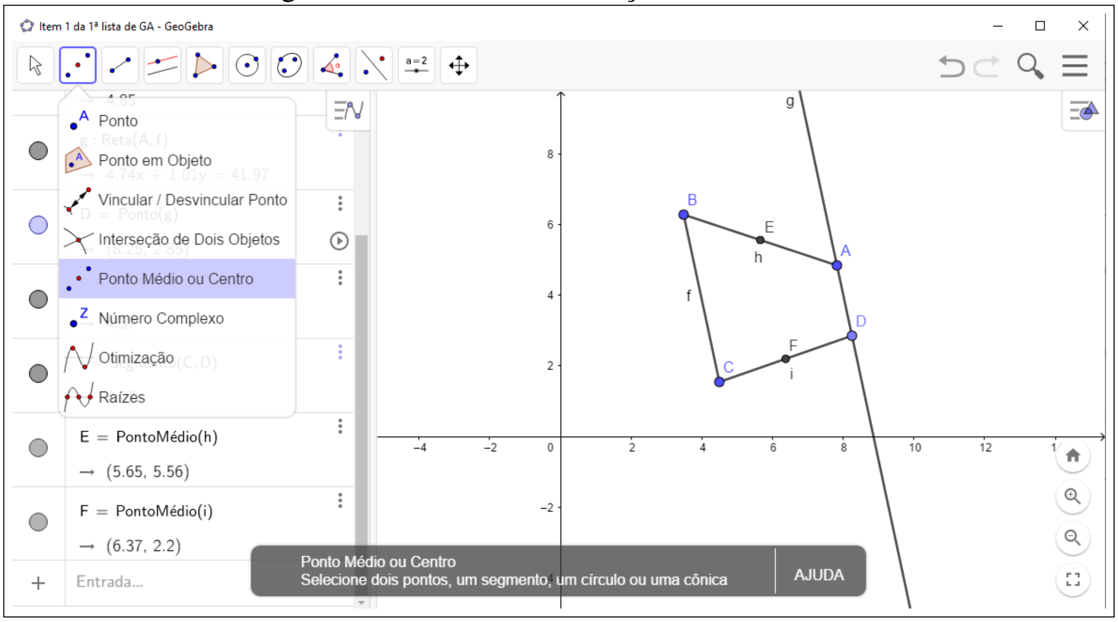
Figura 4.67: Exercício 1 - Seção 4.2.2 - Passo 5



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

6º) Com a ferramenta “Ponto Médio ou Centro” criamos os pontos E e F que são os pontos médios respectivos aos lados $\overline{BA}$ e $\overline{CD}$. (Figura 4.68)

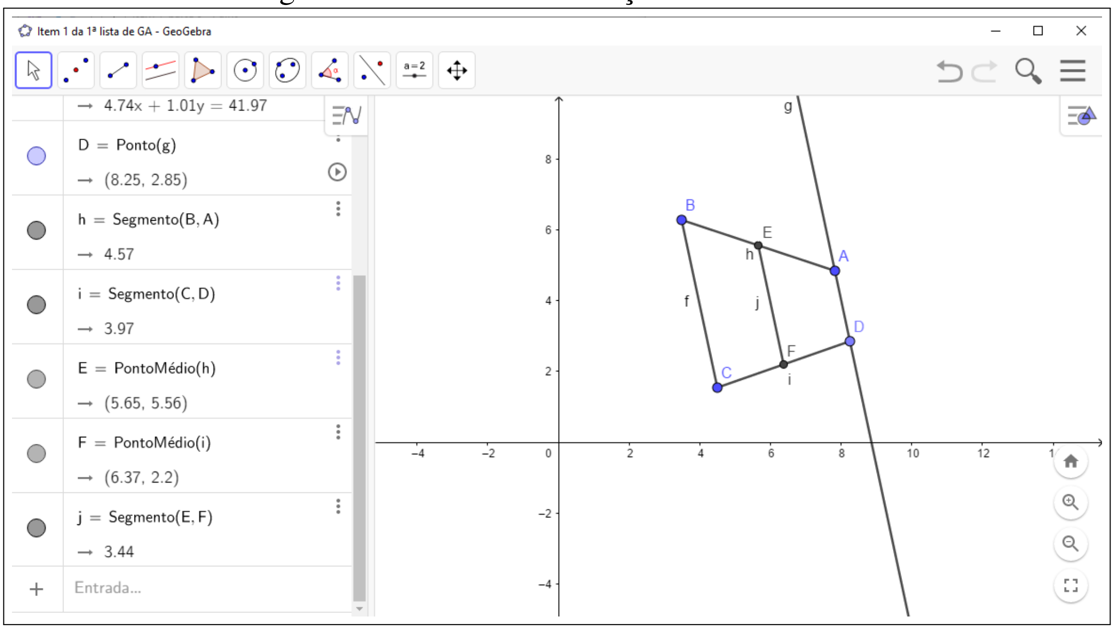
Figura 4.68: Exercício 1 - Seção 4.2.2 - Passo 6



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

7º) Unindo os pontos médios E e F através da ferramenta “Segmento” obtemos o segmento j. (Figura 4.69)

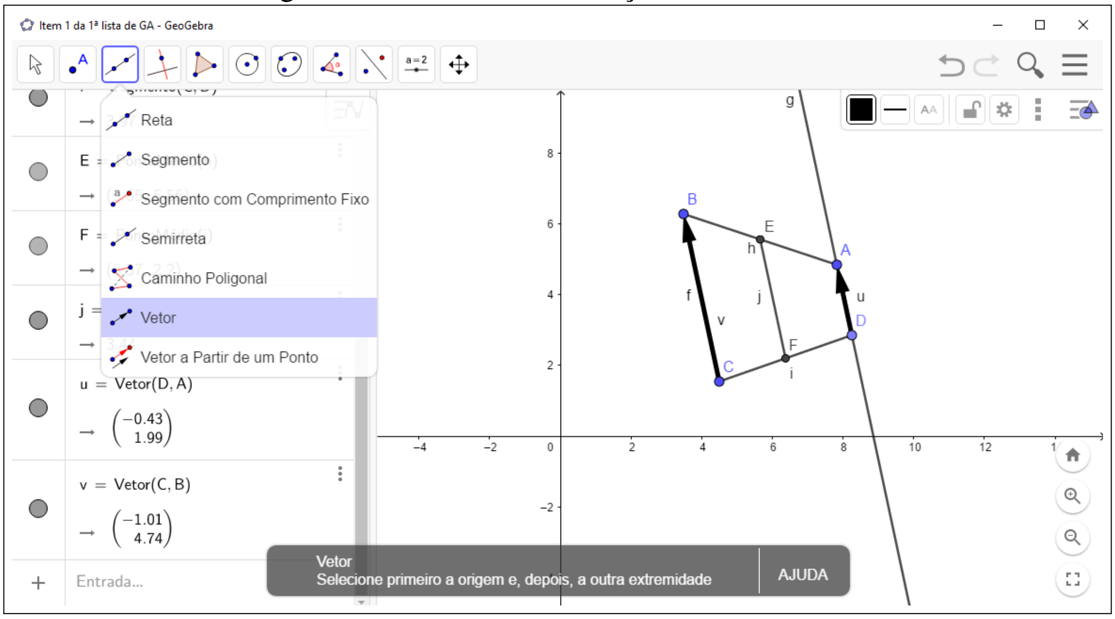
Figura 4.69: Exercício 1 - Seção 4.2.2 - Passo 7



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

8º) Com a ferramenta “Vetor” criamos os vetores $\overrightarrow{DA}$ e $\overrightarrow{CB}$ destacados na Figura 4.70.

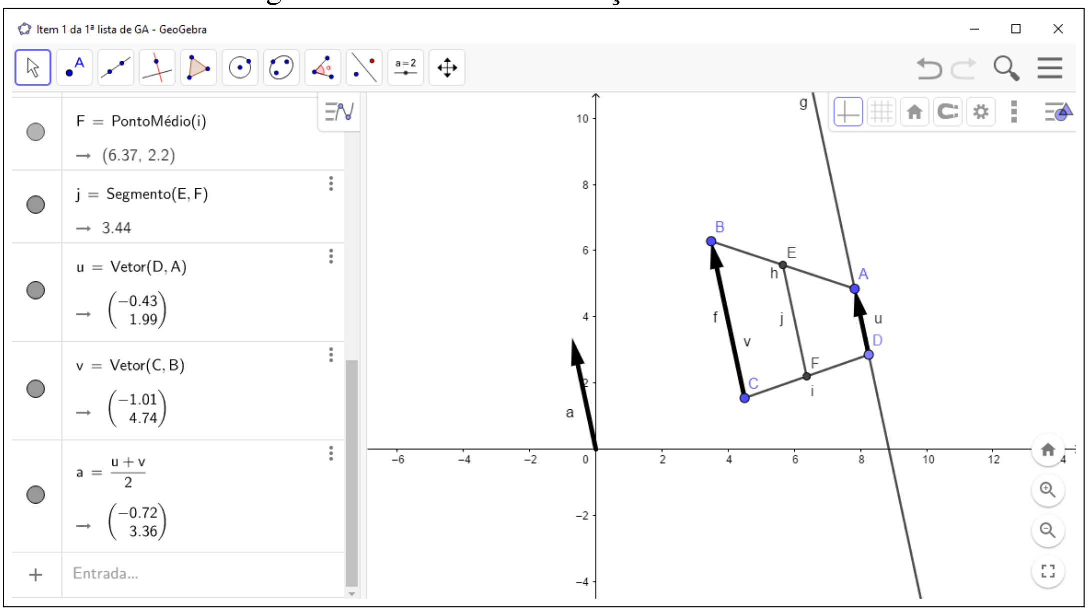
Figura 4.70: Exercício 1 - Seção 4.2.2 - Passo 8



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

9º) No campo de “Entrada” criamos a expressão $a = \dfrac{u+v}{2}$, com isso, criamos um vetor com início na origem que representa a média da soma das bases do trapézio. (Figura 4.71)

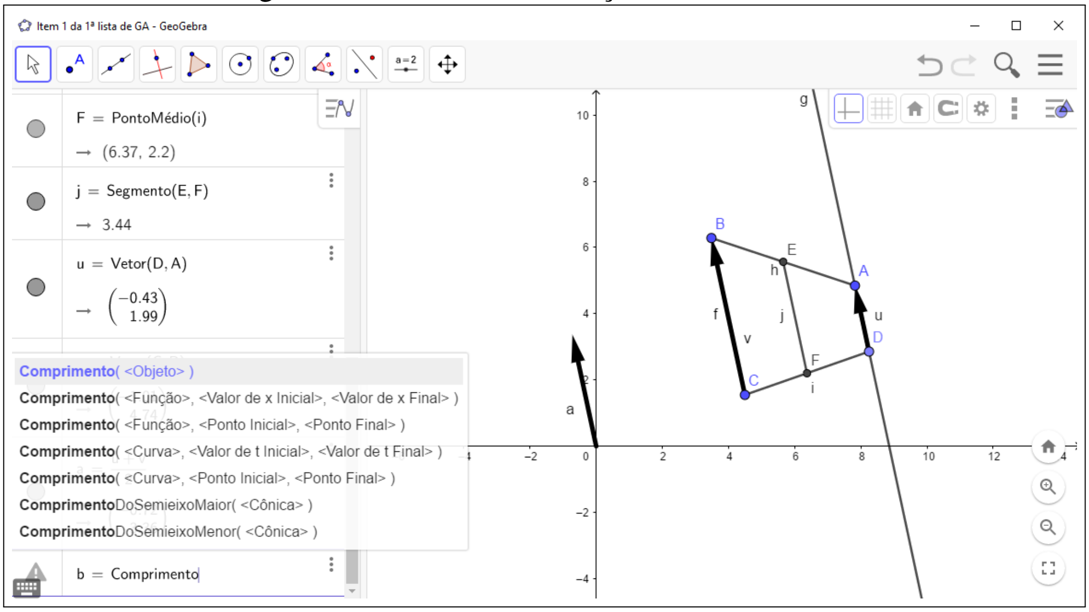
Figura 4.71: Exercício 1 - Seção 4.2.2 - Passo 9



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

10º) Novamente no campo de entrada, digitamos “$b = Comprimento(a)$”. Esse comando nos permite calcular medidas de comprimento de objetos, segmentos... (Figura 4.72)

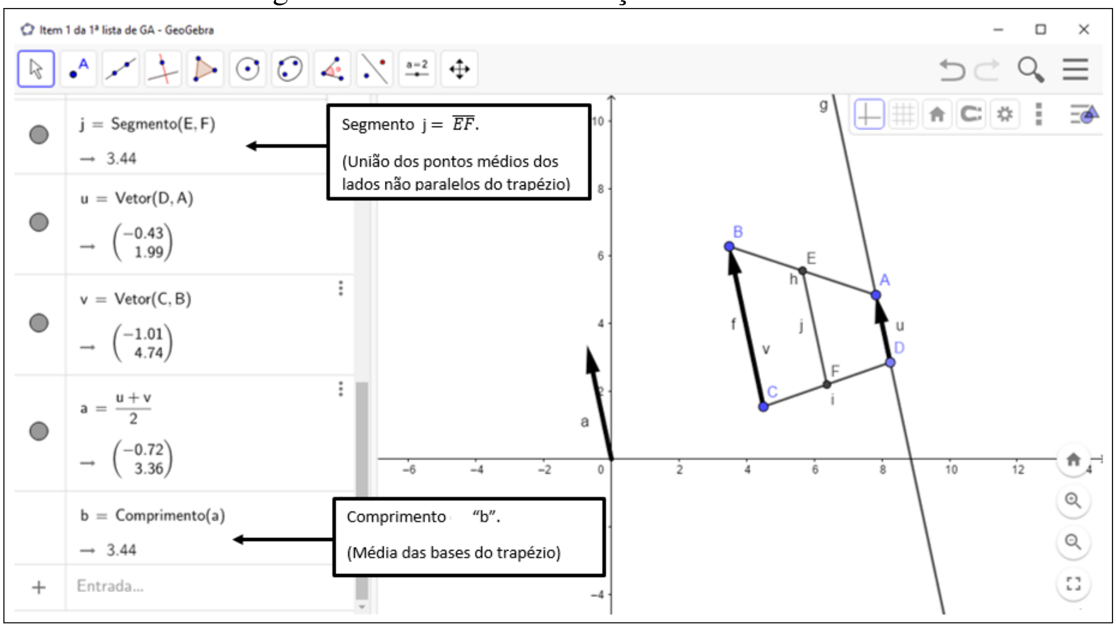
Figura 4.72: Exercício 1 - Seção 4.2.2 - Passo 10



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

11º) Agora basta comparar os valores do segmento j e do comprimento de a como apresentado na Figura 4.73.

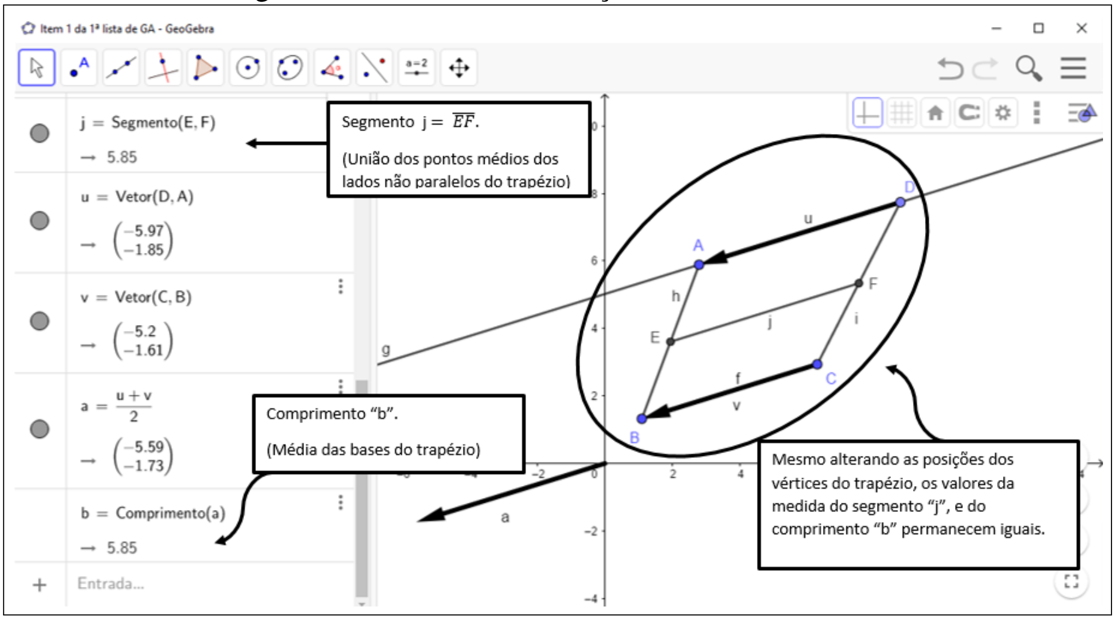
Figura 4.73: Exercício 1 - Seção 4.2.2 - Passo 11



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

12º) Fazendo uso da ferramenta “Mover”, podemos mudar a posição dos vértices do trapézio construído afim de se verificar oque acontece com os valores do segmento j e do comprimento de a:

Figura 4.74: Exercício 1 - Seção 4.2.2 - Passo Final



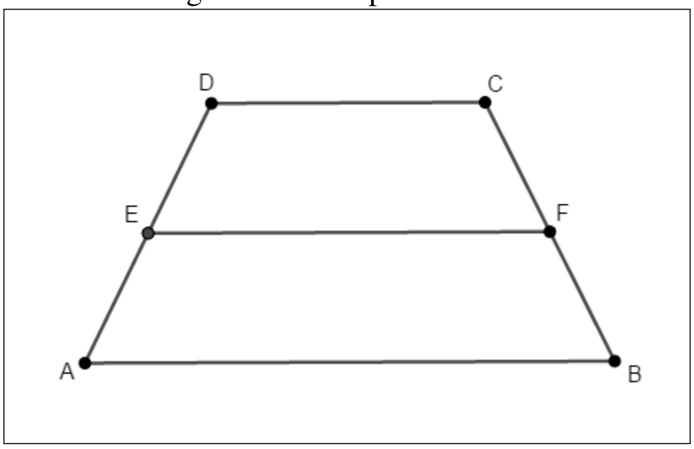
Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Considerações: Após fazer tal construção o software GeoGebra nos mostra que a afirmação "tende" a ser **verdadeira**.

Resolução Algébrica:

Para a resolução desta afirmação faremos uso da Figura 4.75 e utilizaremos os conceitos de vetores e suas propriedades de adição e multiplicação por escalar

Figura 4.75: Trapézio ABCD



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Queremos provar que

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right).$$

Note que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ e $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$.

Como E e F são os pontos médios de $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente, temos que

$$\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\,, \quad \overrightarrow{ED} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\,, \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Assim, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Somando as duas igualdades obtemos

$$\begin{aligned}
& 2\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\
\Rightarrow\ & 2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \\
\Rightarrow\ & \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).
\end{aligned}$$

Observação: A investigação do exercício no GeoGebra também pode ser realizado na janela 3D, visto que as propriedades utilizadas para a apresentação do resultado, são válidas tanto em $\mathbb{R}^2$ como em $\mathbb{R}^3$.

Exercício 2 - Extraído de Delgado, Frensel e Crissaff (2017, p. 52)

Se $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$, então $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ são perpendiculares.

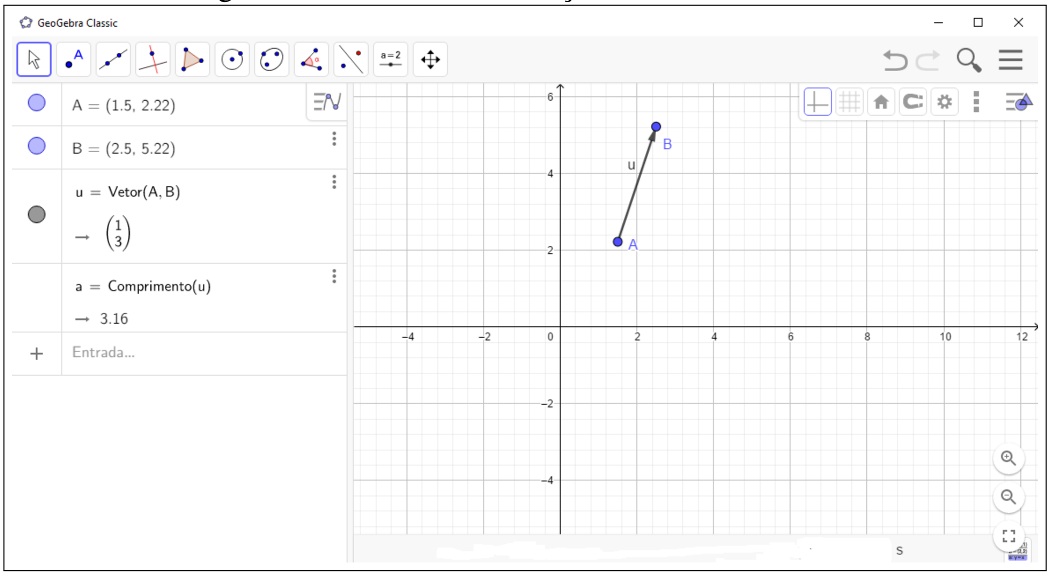
Resolução com o GeoGebra:

Este exercício possui um considerável nível de abstração, visto que para sua resolução, feita de maneira convencional, exige do aluno um bom conhecimento de propriedades relativas aos vetores e suas normas, bem como propriedades geométricas dos vetores (ângulo entre vetores). Através do software GeoGebra podemos verificar a veracidade da afirmação construindo-a com poucos passos, como descrito a seguir.

1º) Inicialmente criamos através da ferramenta “Vetor” um vetor $\overrightarrow{u}$ qualquer sobre o plano. (Figura 4.76)

2º) No campo de entrada digitamos a expressão “$a = Comprimento(u)$” afim de se obter o valor do comprimento de $\overrightarrow{u}$. (Figura 4.76)

Figura 4.76: Exercício 2 - Seção 4.2.2 - Passos 1 e 2

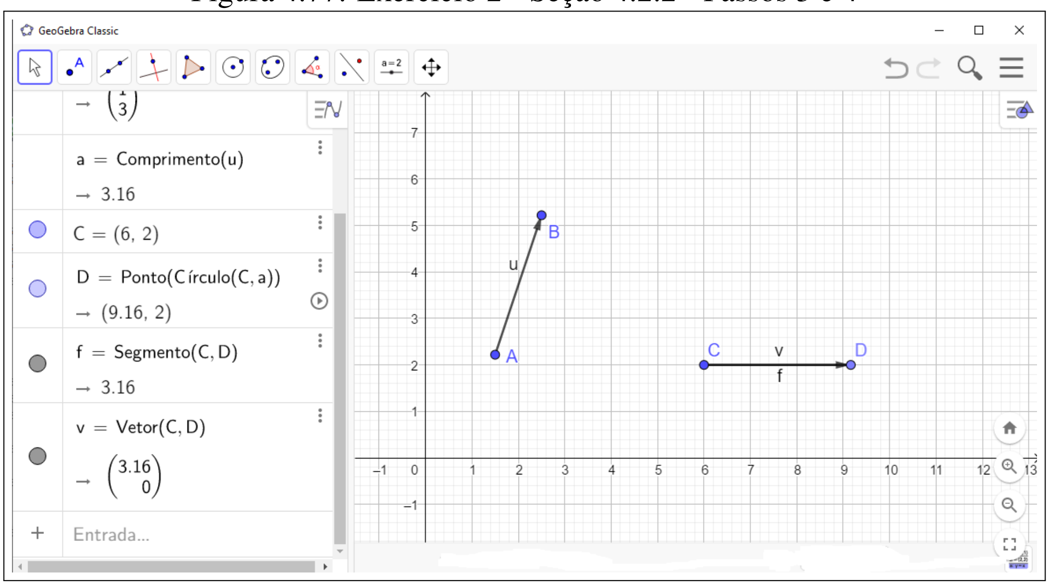


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

3º) Na sequência utilizamos a ferramenta “Segmento com comprimento Fixo” para criar um segmento “f” com o comprimento “a” (valor do comprimento do vetor $\overrightarrow{u}$). (Figura 4.77)

4º) Fazendo uso do segmento criado no item anterior, criamos um vetor $\overrightarrow{v}$ usando as extremidades do segmento (pontos C e D) como referência para início e fim do vetor. (Figura 4.77)

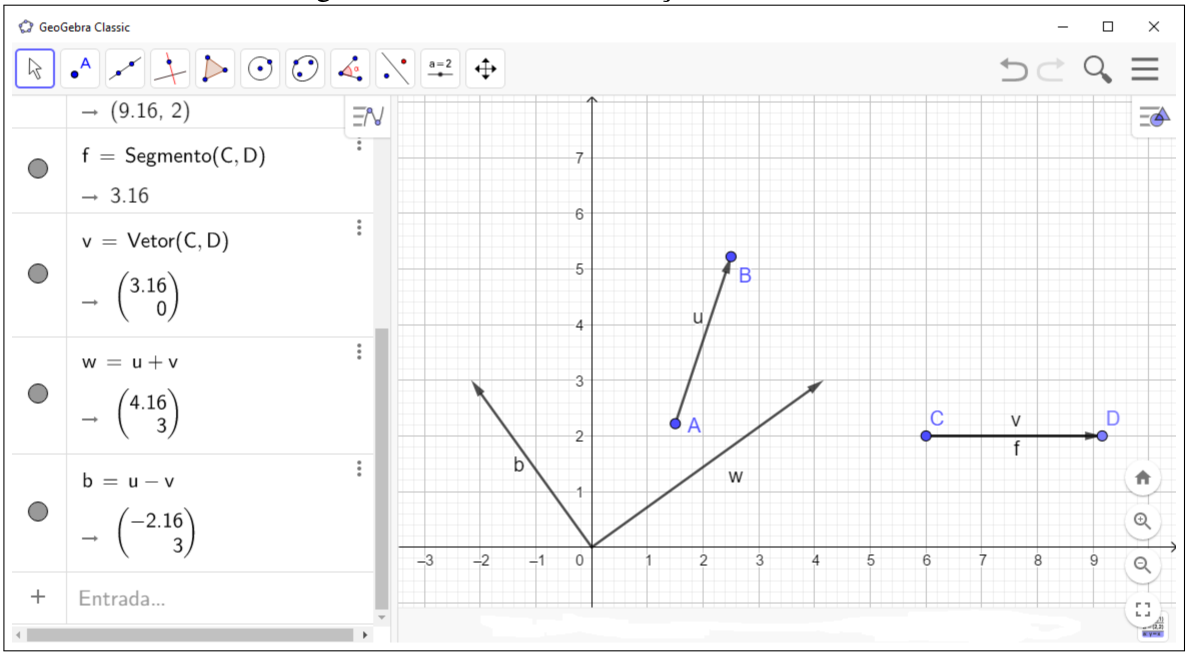
Figura 4.77: Exercício 2 - Seção 4.2.2 - Passos 3 e 4



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

5º) Agora no campo de entrada, digitamos as duas expressões apresentadas no enunciado, $\vec{u} + \vec{v}$ e em seguida $\vec{u} - \vec{v}$. Na Figura 4.78 as expressões são representadas pelos vetores $\vec{w}$ e $\vec{b}$.

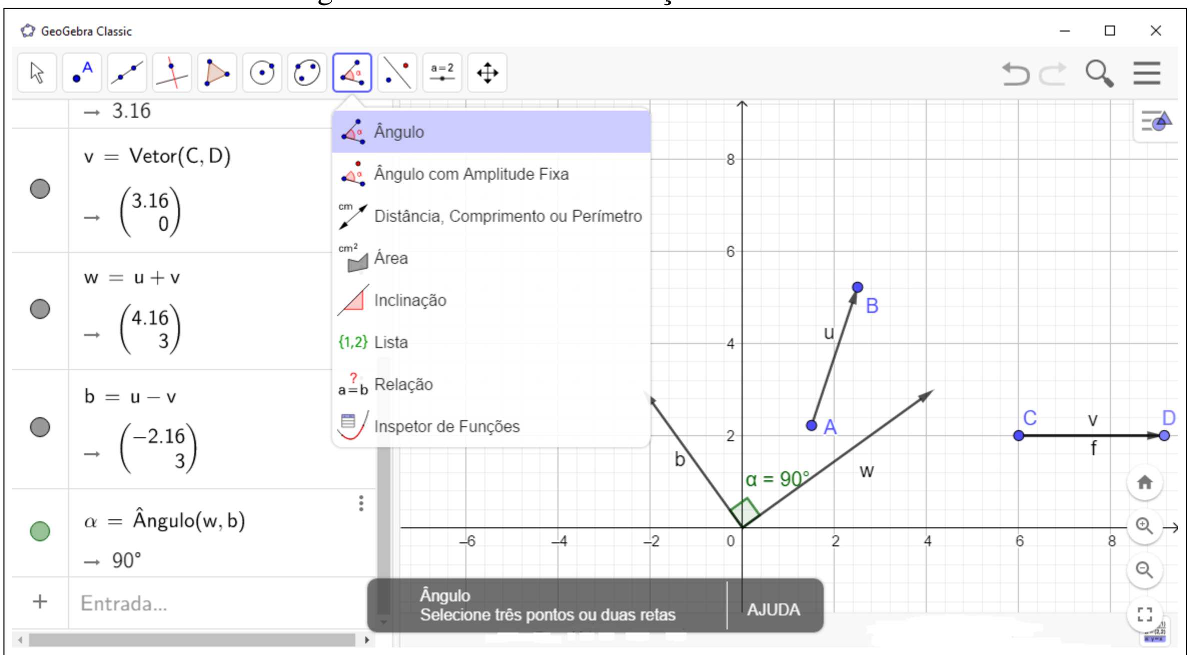
Figura 4.78: Exercício 2 - Seção 4.2.2 - Passo 5



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

6º) Por fim, utilizando a ferramenta "Ângulo", selecionamos os vetores $\vec{w}$ e $\vec{b}$ oriundos das expressões analisadas e obtemos o valor $\alpha = 90$. (Figura 4.79)

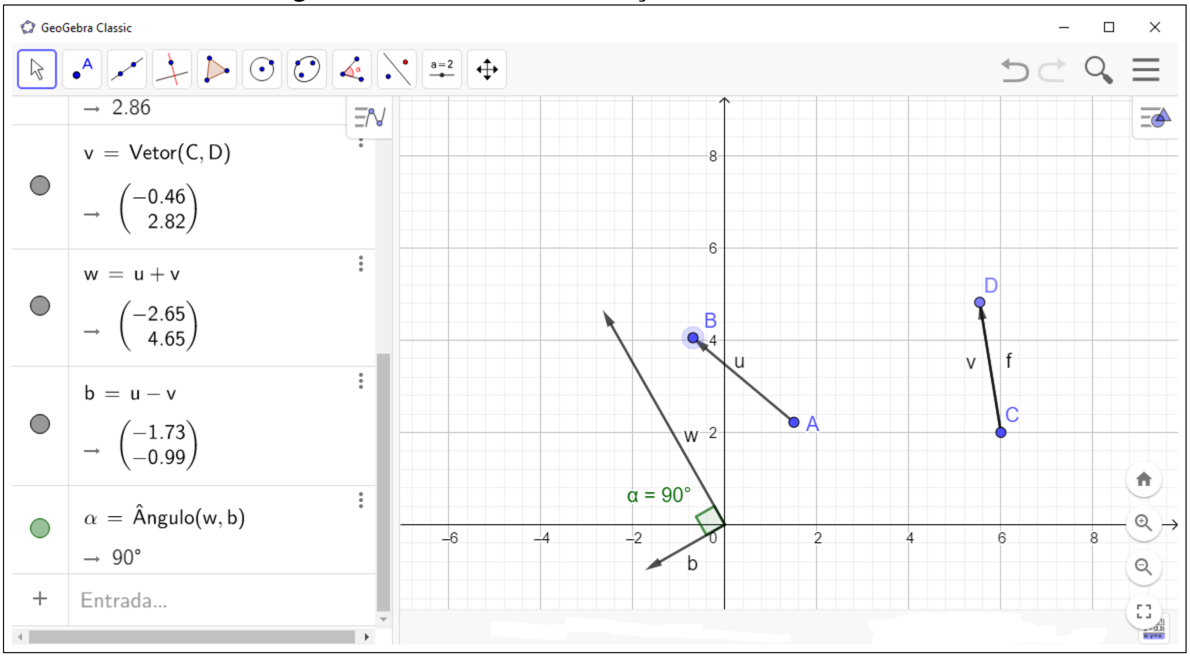
Figura 4.79: Exercício 2 - Seção 4.2.2 - Passo 6



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

7º) Com a ferramenta "Mover" podemos alterar o vetor $\overrightarrow{u}$ e (ou) o vetor $\overrightarrow{v}$ o quanto se queira, e mesmo assim, a propriedade prevalece **verdadeira**. (Figura 4.80)

Figura 4.80: Exercício 2 - Seção 4.2.2 - Passo Final



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Resolução Algébrica:

Temos por propriedade que dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são perpendiculares se, e somente se, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, onde "$\cdot$" representa o produto escalar entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Logo, como queremos provar que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ são perpendiculares, devemos mostrar que $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = 0$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) &= \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} - \cancel{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}} + \cancel{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}} - \overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} \\
&= \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} \\
&= ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2.
\end{aligned}$$

Como, pelo enunciado, $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$, segue que, $||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2 = 0$, ou seja, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ é perpendicular a $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, mostrando que a sentença é **verdadeira**.

Observação: A investigação do exercício no GeoGebra também pode ser realizado na janela 3D, visto que as propriedades utilizadas para a demonstração do resultado, são válidas tanto em $\mathbb{R}^2$ como em $\mathbb{R}^3$.

Exercício 3 - Adaptado de Delgado, Frensel e Crissaff (2017, p. 258).

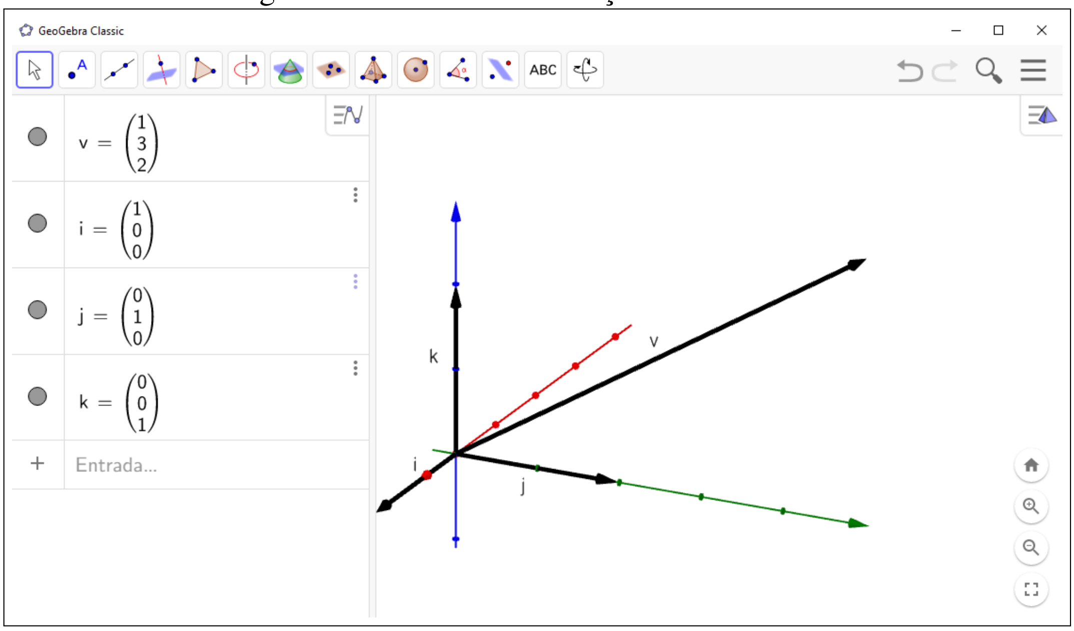
Sejam $\vec{v}$ um vetor não nulo no espaço e α, β e γ os ângulos que $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente. Então temos que $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$.

Resolução com o GeoGebra:

Os passos para a construção da resolução desse exercício são os seguintes.

1º) Com a "Janela de Visualização 3D" aberta, digitamos no campo de entrada um vetor $\vec{v}$ qualquer, no exemplo a seguir $\vec{v} = (1, 3, 2)$ e em seguida os vetores canônicos $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$ como segue na Figura 4.81.

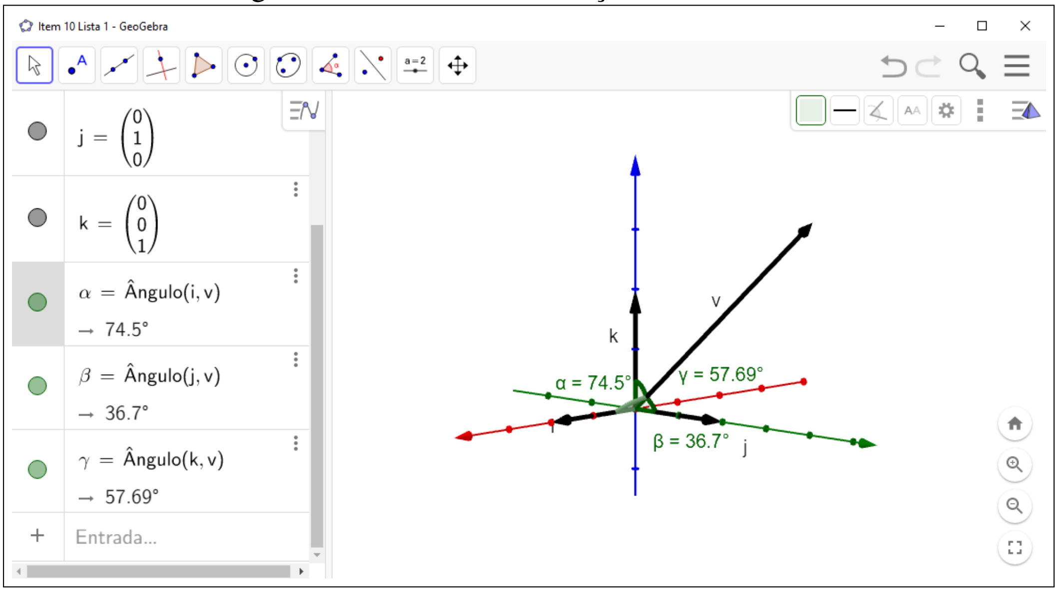
Figura 4.81: Exercício 3 - Seção 4.2.2 - Passo 1



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

2º) Com a ferramenta "Ângulo" selecionada, calculamos os valores dos ângulos α, β e γ que o vetor $\vec{v}$ forma respectivamente com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. (Figura 4.82)

Figura 4.82: Exercício 3 - Seção 4.2.2 - Passo 2

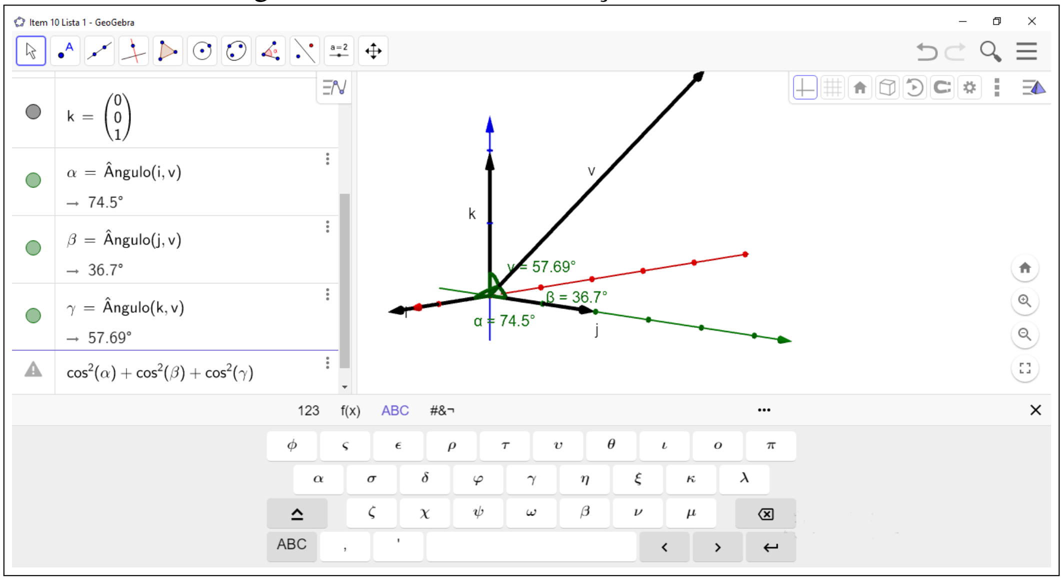


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

3º) No campo de entrada digitamos a expressão "$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma)$" afim de se obter uma análise da afirmação feita no enunciado. (Figura 4.83)

Observação: No campo de entrada existe um ícone com o formato de um teclado que nos permite ter mais ferramentas para se digitar expressões mais elaboradas, como a vista nesse caso.

Figura 4.83: Exercício 3 - Seção 4.2.2 - Passo 3

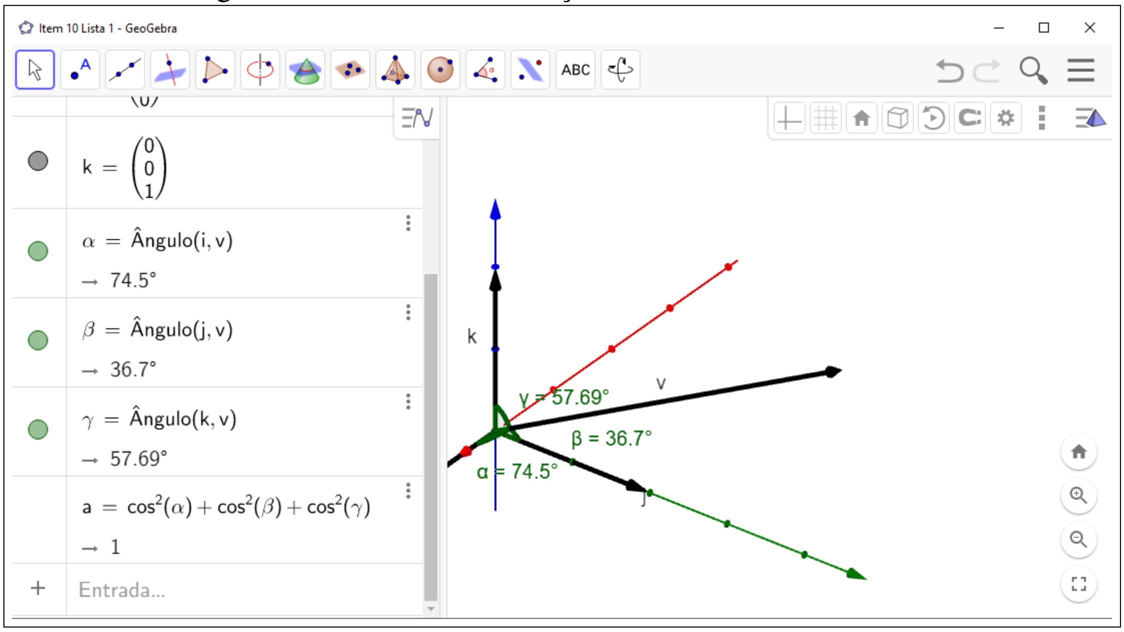


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Perceba por meio da Figura 4.84, que após ter feito a digitação da sentença e pressionar a tecla enter, já é possível verificar que a sentença é verdadeira.

Observação: O resultado aparece no campo de entrada da sentença digitada.

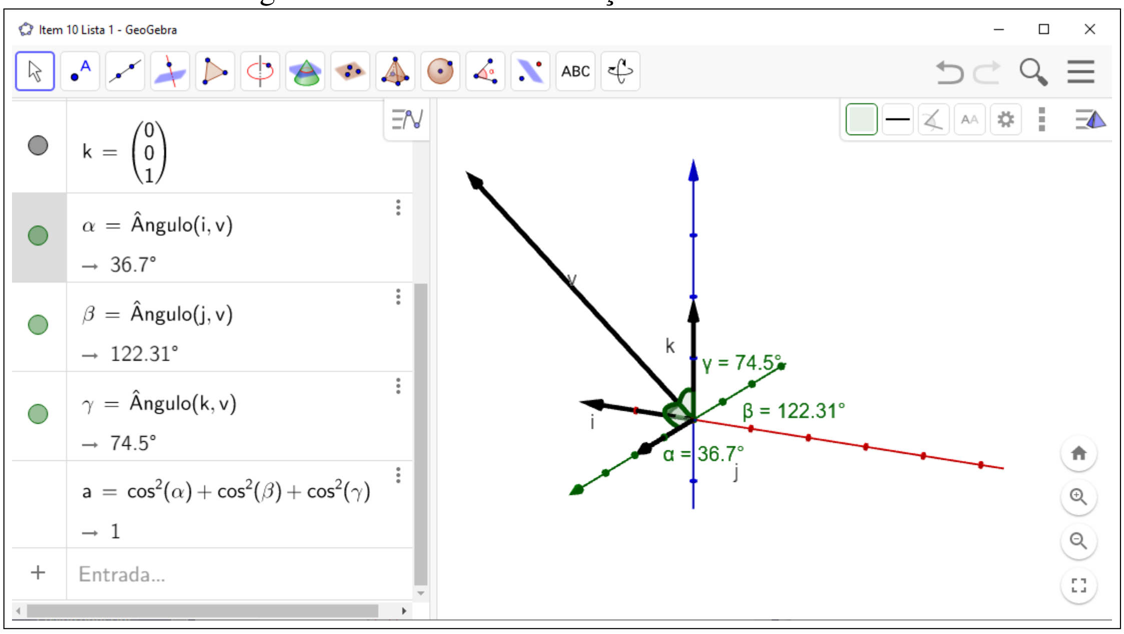
Figura 4.84: Exercício 3 - Seção 4.2.2 - Resultado Passo 3



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

4º) Por fim, podemos fazer alterações no vetor $\vec{v}$ e verificar que a sentença permanece **verdadeira**. (Figura 4.85)

Figura 4.85: Exercício 3 - Seção 4.2.2 - Passo Final



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Resolução Algébrica:

Sejam $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$, $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$ e $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$. Sendo α, β e γ os ângulos formados, respectivamente, por $\overrightarrow{v}$ e os vetores $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ temos

$$\text{i)}\ \cos\alpha = \frac{<\overrightarrow{v}, \overrightarrow{i}>}{||\overrightarrow{v}||.||\overrightarrow{i}||} = \frac{a.1 + b.0 + c.0}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

$$\text{ii)}\ \cos\beta = \frac{<\overrightarrow{v}, \overrightarrow{j}>}{||\overrightarrow{v}||.||\overrightarrow{j}||} = \frac{a.0 + b.1 + c.0}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

$$\text{iii)}\ \cos\gamma = \frac{<\overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}>}{||\overrightarrow{v}||.||\overrightarrow{k}||} = \frac{a.0 + b.0 + c.1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Logo temos,

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2+c^2} \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1. \end{aligned}$$

Assim concluímos algebricamente que a sentença é **verdadeira**.

Exercício 4 - Extraído de Delgado, Frensel e Crissaff (2017, p. 305).

Seja Q o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre o plano π e R o pé da perpendicular baixada de Q sobre uma reta r contida em π. Então, o vetor $\overrightarrow{PR}$ é perpendicular à reta r.

Resolução com o GeoGebra:

Este exercício possui um elevado grau de abstração e para ser solucionado carece de ao menos um "esboço" afim se facilitar sua visualização.

Sua construção por meio do GeoGebra exige um pouco mais de atenção, porém é possível conferir o resultado apresentado pelo enunciado com bastante clareza.

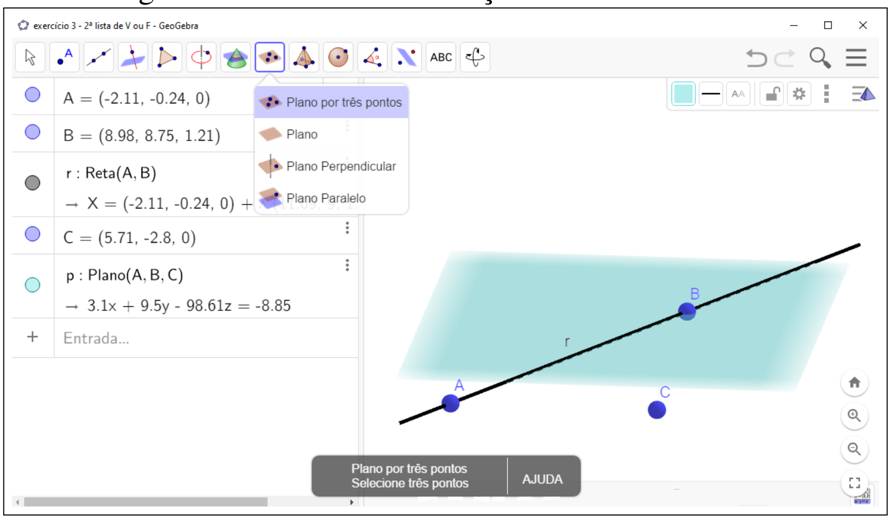
Os passos para a sua construção por meio do software são os seguintes.

Observação: Para se obter uma melhor visualização, desativamos a visualização dos eixos e do plano de referência. (Para tal situação, basta clicar com o botão direito do mouse sobre a janela de visualização e desabilitar as funções "Eixos" e "Plano")

1º) Com a ferramenta "Ponto" criamos os pontos A e B e na sequência, com a ferramenta "Reta" criamos uma reta r que passa pelos pontos criados inicialmente. (Figura 4.86)

2º) Criamos um terceiro ponto C não pertencente a reta criada anteriormente e, na sequência, com a ferramenta "Plano por três pontos", selecionamos os pontos A, B e C para gerar o plano p. (Figura 4.86)

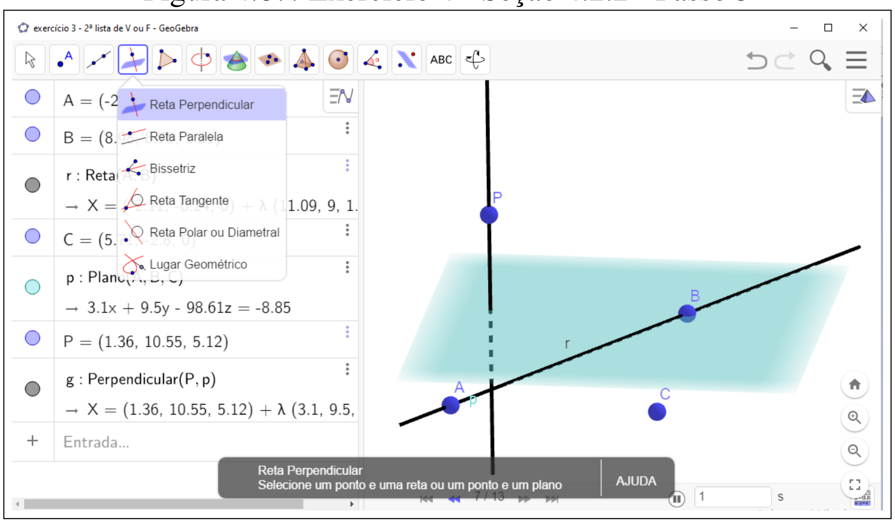
Figura 4.86: Exercício 4 - Seção 4.2.2 - Passos 1 e 2



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

3º) Criamos o ponto P (não pertencente ao plano p) no espaço e com a ferramenta "Reta Perpendicular", baixamos a perpendicular de P ao plano. (Figura 4.87)

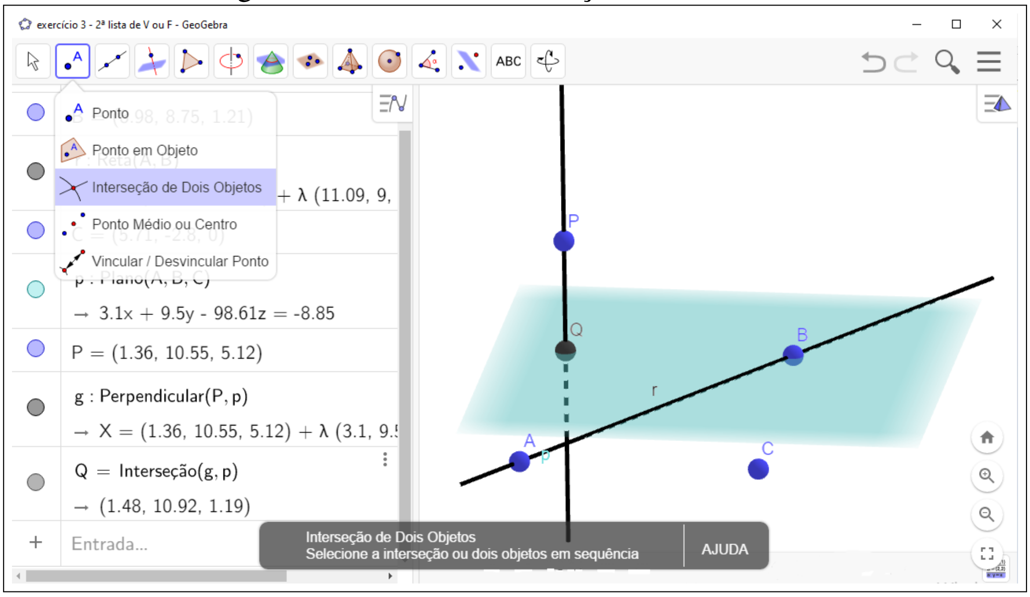
Figura 4.87: Exercício 4 - Seção 4.2.2 - Passo 3



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

4º) Utilizando a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” definimos o ponto Q. (O pé da perpendicular baixada de P sobre o plano). (Figura 4.88)

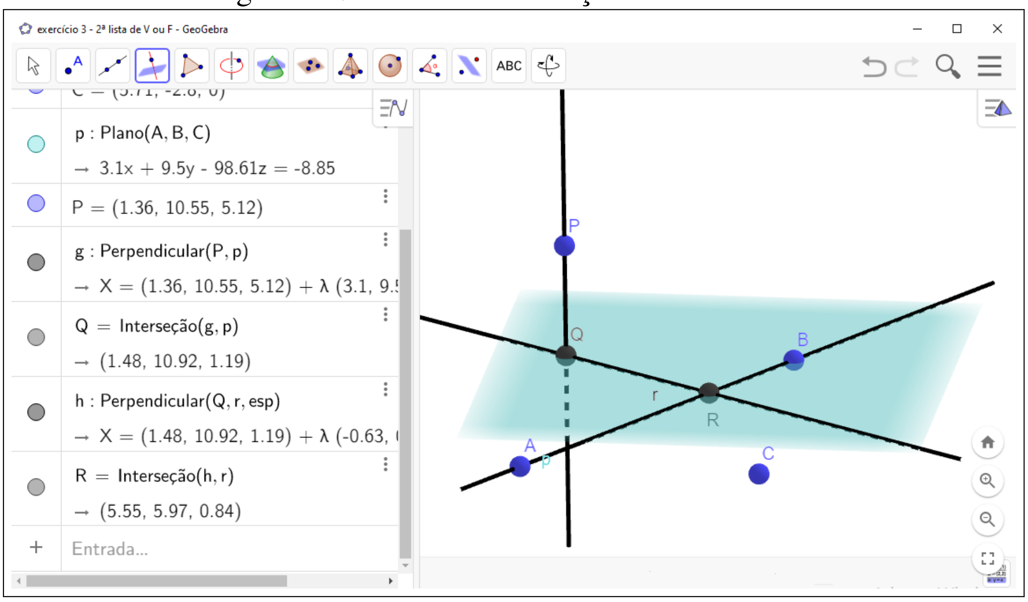
Figura 4.88: Exercício 4 - Seção 4.2.2 - Passo 4



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

5º) Novamente utilizamos a ferramenta “Reta perpendicular” para baixar uma perpendicular do ponto Q até a reta r. Em seguida com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” definimos o ponto R, que é o pé da perpendicular baixada de Q sobre a reta r contida ao plano π. (Figura 4.89)

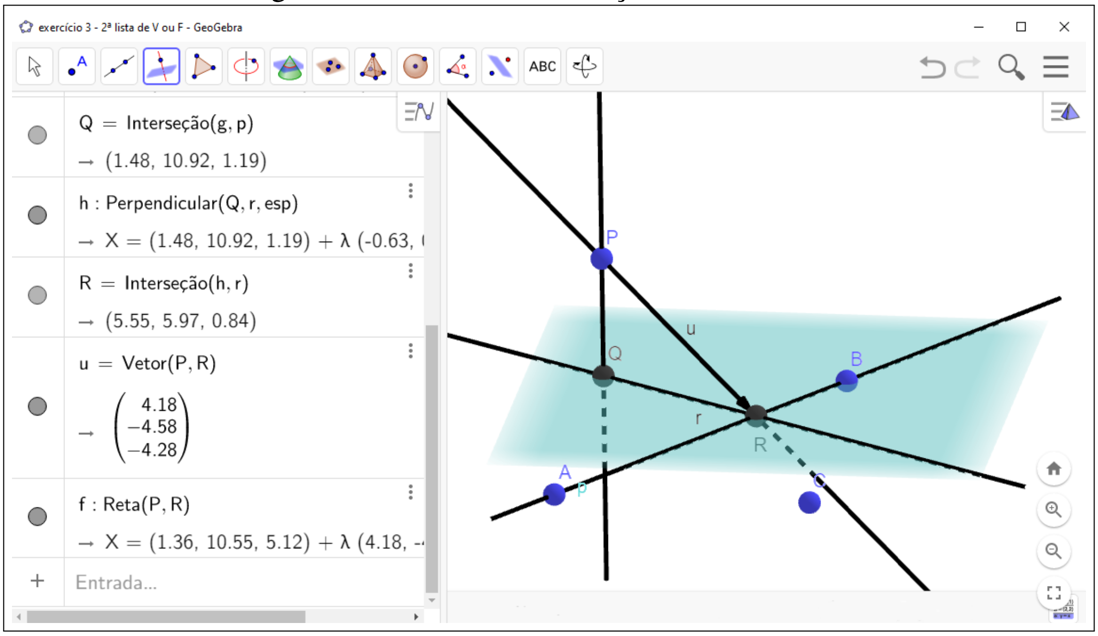
Figura 4.89: Exercício 4 - Seção 4.2.2 - Passo 5



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

6º) Criamos em seguida um vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PR}$ e para facilitar posteriormente a análise do ângulo entre a reta r e o vetor $\overrightarrow{PR}$, criamos também uma reta f auxiliar que contém tal vetor. (Figura 4.90)

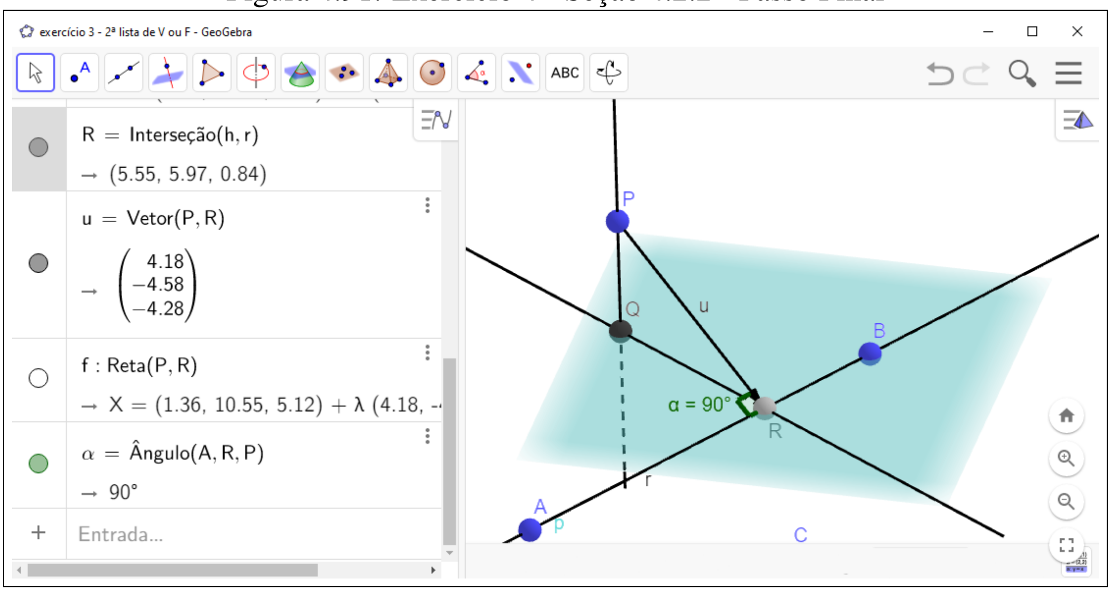
Figura 4.90: Exercício 4 - Seção 4.2.2 - Passo 6



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

7º) Para finalizar, fazemos uso da ferramenta "Ângulo" e selecionamos as retas r e f, para verificar qual o valor do ângulo entre o vetor $\overrightarrow{PR}$ e a reta r. (Figura 4.91)

Figura 4.91: Exercício 4 - Seção 4.2.2 - Passo Final



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Resolução Algébrica:

Pelo enunciado temos que $\overrightarrow{PQ}$ é perpendicular ao plano π. Como r está contido em π, então $\overrightarrow{PQ}$ é perpendicular a r. Sendo $\overrightarrow{v}$ um vetor paralelo a reta r, temos, $\overrightarrow{PQ}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$.

Temos também pelo enunciado que $\overrightarrow{QR}$ é perpendicular a r, logo $\overrightarrow{QR}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$.

Note que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{v} &= (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) \cdot \overrightarrow{v} \\
&= (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{v}) \\
&= 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, temos que $\overrightarrow{PR}$ é perpendicular a reta r.

Exercício 5 - Extraído de Delgado, Frensel e Crissaff (2017, p. 340).

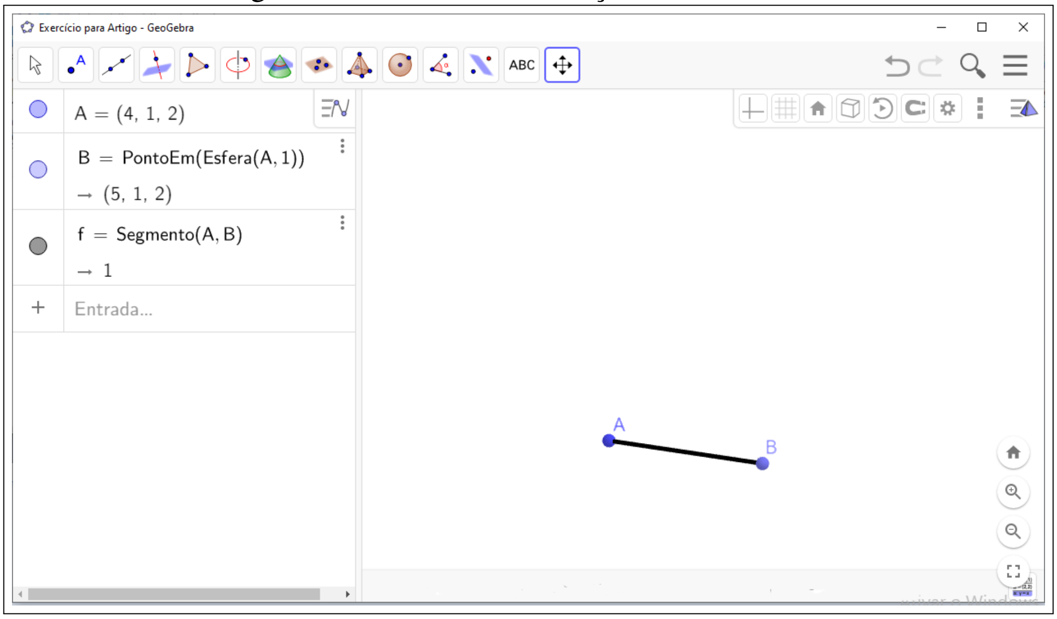
Em um cubo $ABCDEFGH$ de aresta a, a distância do vértice B à reta que contém a diagonal AG é $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Resolução com o Geogebra:

Podemos verificar a veracidade do resultado desse exercício através do software seguindo os seguintes passos.

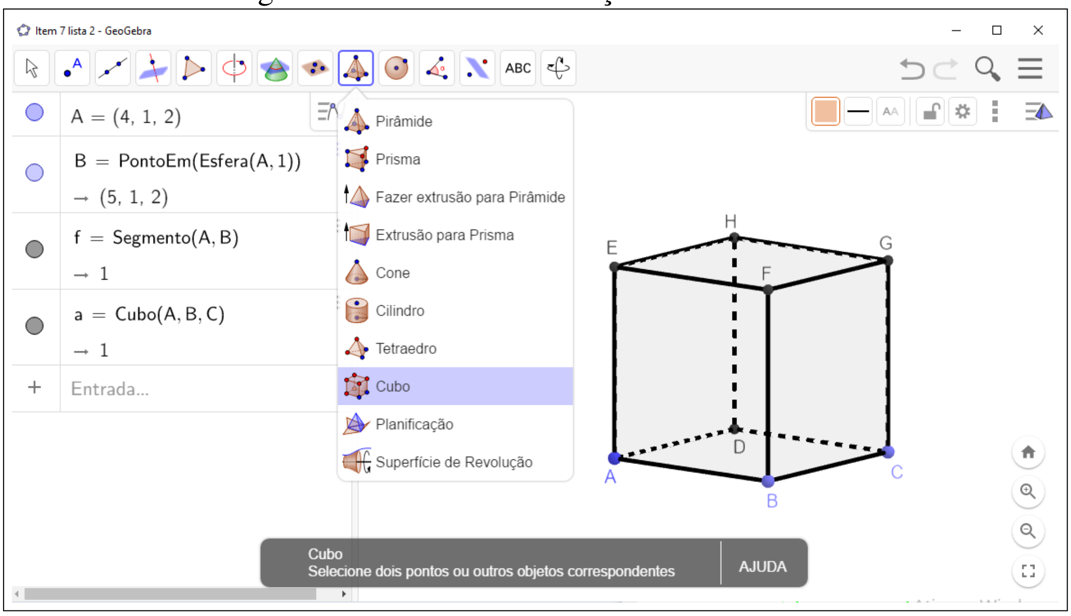
1º) Primeiramente criamos um ponto A no espaço e para facilitar a análise utilizamos a ferramenta “Segmento com Comprimento Fixo” definindo o tamanho do comprimento como 1 e assim, obtemos o segmento $\overline{AB}$ que será uma das arestas do cubo. (Figura 4.92)

Figura 4.92: Exercício 5 - Seção 4.2.2 - Passo 1



2º) Fazendo uso da ferramenta “Cubo” selecionamos os pontos A e B e construímos o cubo $ABCDEFGH$ com aresta medindo 1. (Figura 4.93)

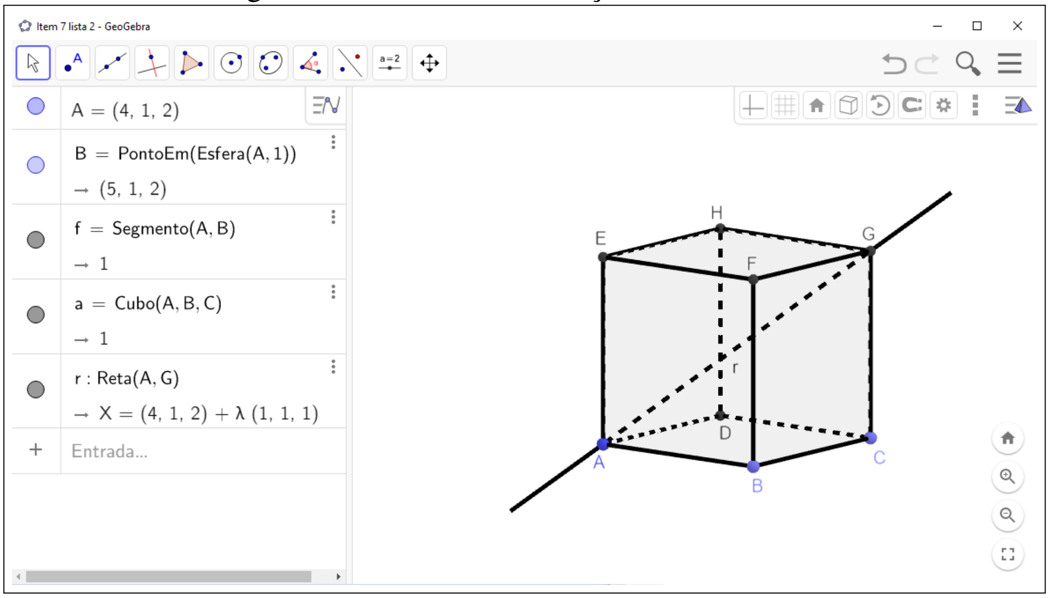
Figura 4.93: Exercício 5 - Seção 4.2.2 - Passo 2



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

3º) Construímos a reta r que contém a diagonal $\overline{AG}$. (Figura 4.94)

Figura 4.94: Exercício 5 - Seção 4.2.2 - Passo 3

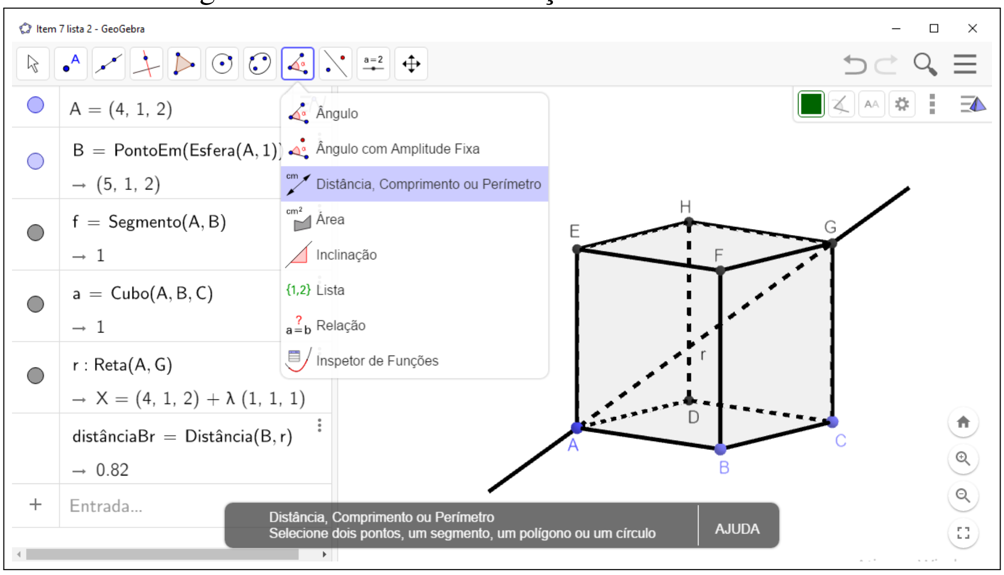


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

4º) Por fim, utilizamos a ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro" para se calcular o valor da distância entre o ponto B e a reta r que contém a diagonal $\overline{AG}$. (Figura 4.95)

Observação: Note que $0,82$ é o resultado aproximado de $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Figura 4.95: Exercício 5 - Seção 4.2.2 - Passo Final

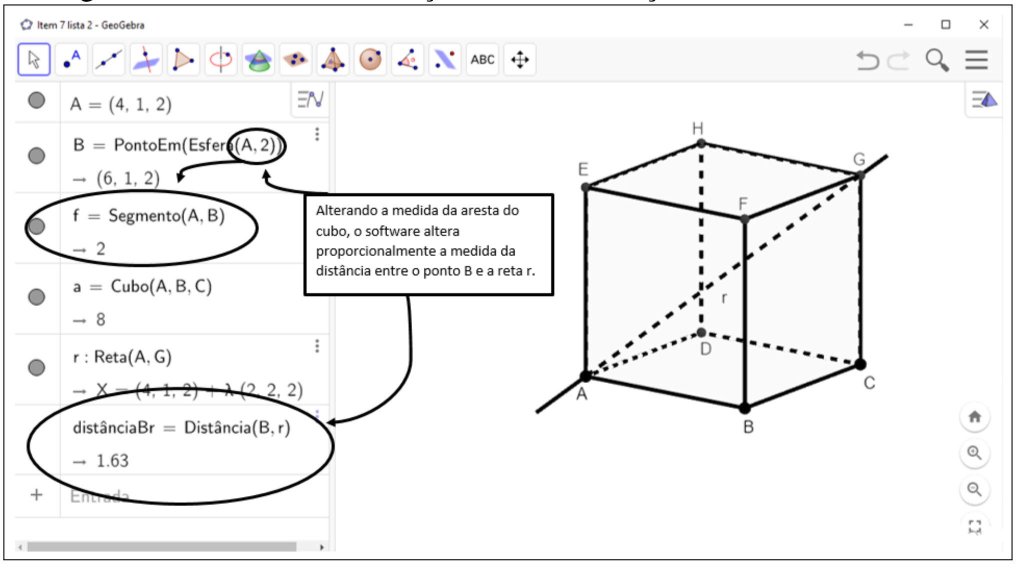


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Observação: Nesta construção definimos a medida da aresta do cubo $ABCDEFGH$ como 1, com o objetivo de facilitar a análise da sentença (conforme mencionado no primeiro passo da construção). Porém, poderíamos utilizar qualquer outro valor e verificaríamos que o resultado apresentado pelo software será proporcional ao valor utilizado.

Para se alterar o valor da aresta do cubo $ABCDEFGH$, basta clicar duas vezes sobre o campo de entrada do ponto B e alterar a medida da aresta conforme se queira. Observe um exemplo na Figura 4.96 onde alteramos a medida da aresta de 1 para 2, e automaticamente o valor da distância dobrou.

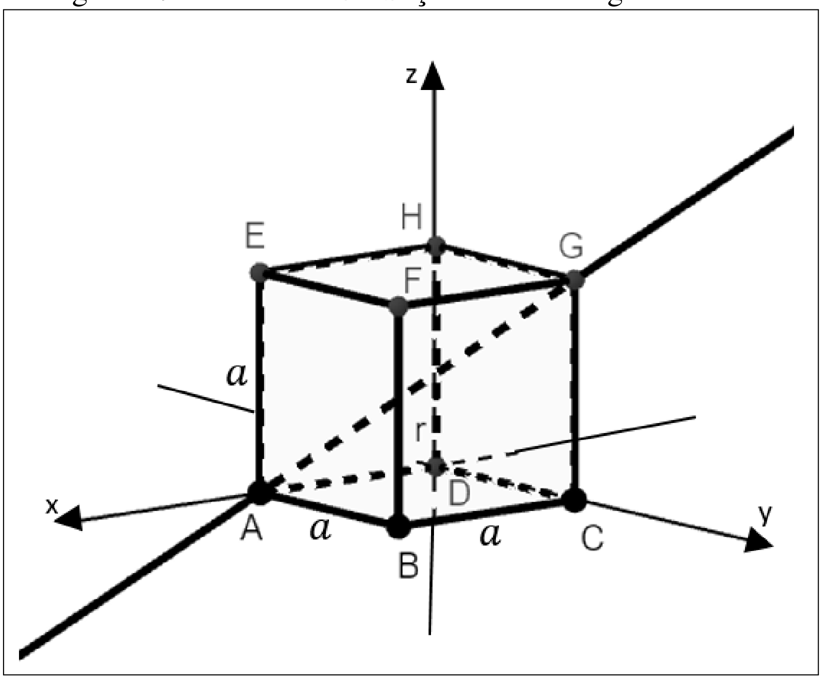
Figura 4.96: Exercício 5 - Seção 4.2.2 - Alteração da Medida da Aresta



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Resolução Algébrica:

Figura 4.97: Exercício 5 - Seção 4.2.2 - Imagem Auxiliar



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Sem perca de generalidade, vamos tomar um cubo $ABCDEFGH$ de aresta "a", apoiado sobre o plano XY com origem em D, como na Figura 4.97, de modo a obter as coordenadas $A = (a, 0, 0)$, $B = (a, a, 0)$ e $G = (0, a, a)$. Assim, temos que

$$\overrightarrow{AG} = G - A = (0, a, a) - (a, 0, 0) = (-a, a, a) \text{ e}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (a, a, 0) - (a, 0, 0) = (0, a, 0).$$

A distância do ponto B a reta r é dada por $d(B, r) = \dfrac{||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AG}||}{||\overrightarrow{AG}||}$, onde A é um ponto da reta AG, $\overrightarrow{AG}$ é um vetor diretor da reta r e "$\times$" representa o produto vetorial entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AG}$.

Calculando o produto vetorial $||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AG}||$, obtemos

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & a & 0 \\ -a & a & a \end{vmatrix} = (a^2, 0, a^2).$$

Logo, segue que

$$\frac{||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AG}||}{||\overrightarrow{AG}||} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a\sqrt{3}},$$

portanto, a distância do ponto B a reta r que contêm a diagonal $\overline{AG}$ é $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

4.2.3 Visualização de equações

Neste tópico abordamos alguns exercícios que tratam de Lugares Geométricos. Mais precisamente sentenças matemáticas que devem ser transformadas em equações e, em seguida, analisadas com o propósito de serem classificadas.

Tais transformações resultam em equações do segundo grau com duas variáveis, que podem escritas na forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Essas equações são conhecidas como as equações gerais das Cônicas, porém, nem sempre são facilmente interpretadas pelos alunos. Com isso, propomos a utilização do software GeoGebra para visualização e análise das equações que serão primeiramente desenvolvidas algebricamente e em seguida analisadas com auxílio da ferramenta.

Exercício 1

Considere o ponto $F = (1, 2)$ e a reta $r : y = 1$. Determine o lugar geométrico do conjunto $X = \left\{ P \mid d(P, F) = \frac{1}{2} d(P, r) \right\}$.

Desenvolva a equação e depois utilize o GeoGebra para classificar o lugar geométrico obtido.

DESENVOLVIMENTO DA EQUAÇÃO:

Seja $P = (x, y)$, $F = (1, 2)$ e $r : y = 1$.

Temos que

$$d(P, F) = \frac{1}{2} d(P, r)$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \frac{1}{2} \frac{|y-1|}{\sqrt{1^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4} = \frac{1}{2}|y-1|,$$

elevando ambos os membros ao quadrado

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = \frac{1}{4}(y^2 - 2y + 1),$$

multiplicando ambos os membros por 4

$$4x^2 + 4y^2 - 8x - 16y + 20 = y^2 - 2y + 1$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 + 3y^2 - 8x - 14y + 19 = 0,$$

que é a equação do lugar geométrico.

Utilização do GeoGebra:

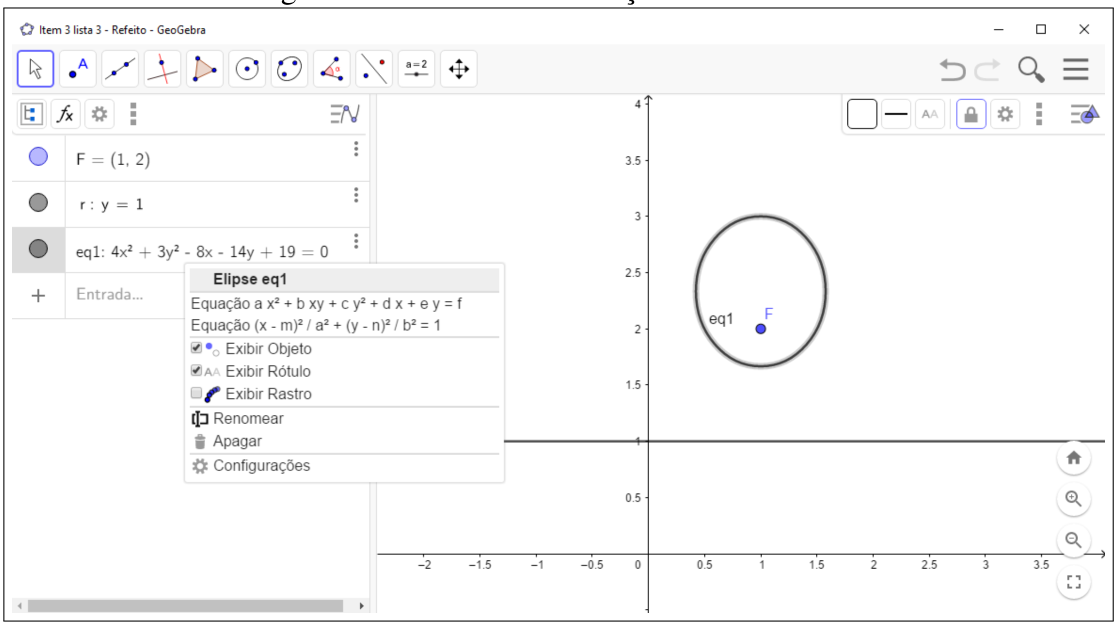
Vamos analisar a equação obtida no software GeoGebra através dos seguintes passos.

1º) No campo de entrada inserimos o ponto $F = (1, 2)$, a reta $r : y = 1$ e a equação $4x^2 + 3y^2 - 8x - 14y + 19 = 0$ obtida através do desenvolvimento da expressão

$d(P,F) = \dfrac{1}{2}d(P,r)$. Com isso, já conseguimos observar um ponto, uma elipse e uma reta.

Observação: O software GeoGebra nos mostra que a equação inserida é uma elipse. Para se verificar, basta clicar com o botão direito do mouse sobre o campo de entrada da equação que o software nos mostra que a equação se trata de uma elipse. (Figura 4.98)

Figura 4.98: Exercício 1 - Seção 4.2.3 - Passo 1



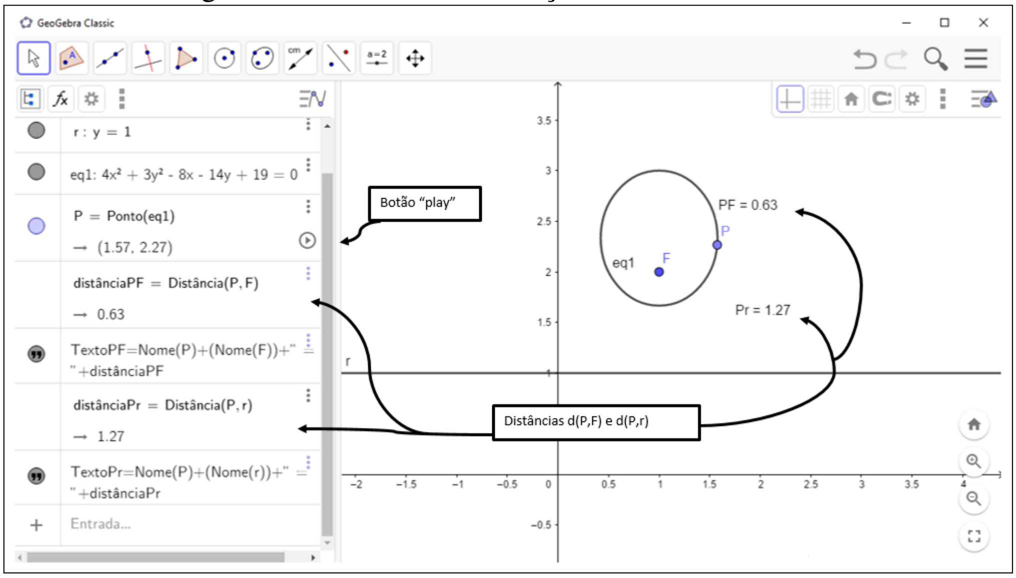
Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

2º) Com a ferramenta “Ponto em Objeto”, criamos um ponto P qualquer sobre a elipse. (Figura 4.99)

Observação: Ao criar o ponto P sobre a elipse como dito neste passo, automaticamente o software gera um botão “play” no campo de entrada do mesmo. Tal botão ao ser selecionado faz com que o ponto percorra automaticamente toda a elipse.

3º) Utilizando a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro”, calculamos as distâncias $d(P,F)$ e $d(P,r)$. (Figura 4.99)

Figura 4.99: Exercício 1 - Seção 4.2.3 - Passos 2 e 3



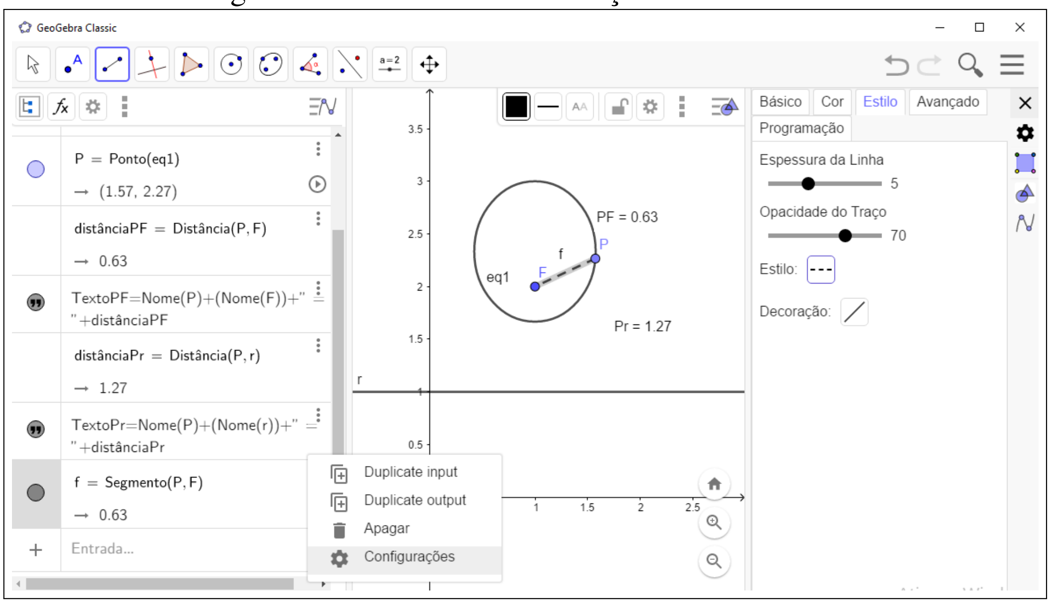
Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Para se obter uma melhor visualização da distância do ponto P a reta r, seguiremos os comandos dos três próximos passos.

4º) Fazendo uso da ferramenta "Segmento" criamos um segmento $f = \overline{PF}$.

Observação: Para deixá-lo tracejado, clicamos nos 3 pontos localizados no seu respectivo campo de entrada, selecionamos a opção "configurações" e por fim fazemos as edições na aba "Estilo". (Figura 4.100)

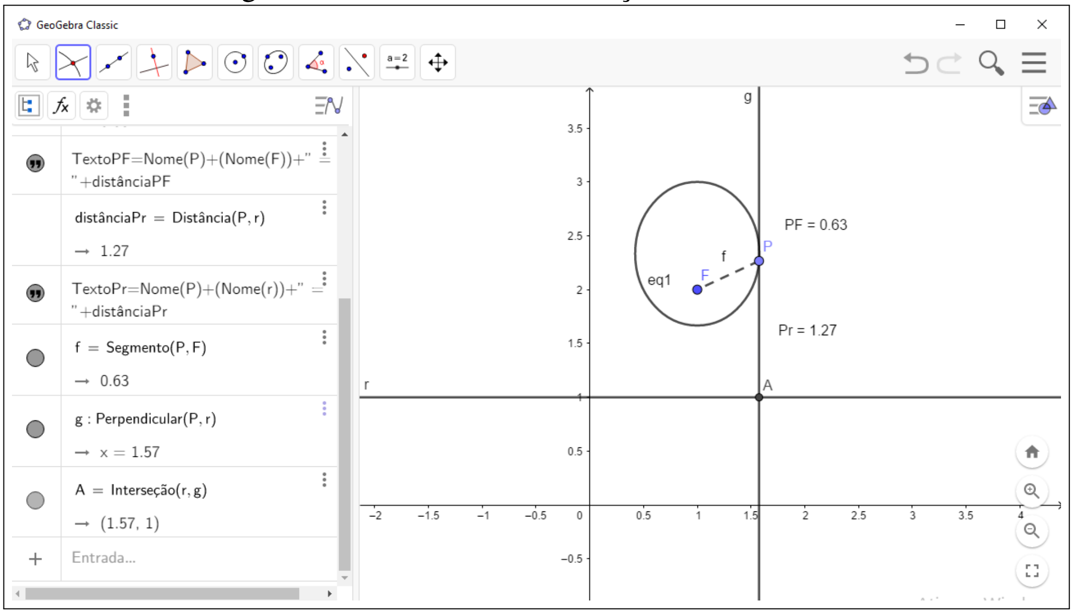
Figura 4.100: Exercício 1 - Seção 4.2.3 - Passo 4



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

5º) Criamos uma reta perpendicular a r que passe pelo ponto P, em seguida com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” definimos um ponto A que é a interseção da reta g, perpendicular a reta r, que passa pelo ponto P. (Figura 4.101)

Figura 4.101: Exercício 1 - Seção 4.2.3 - Passo 5

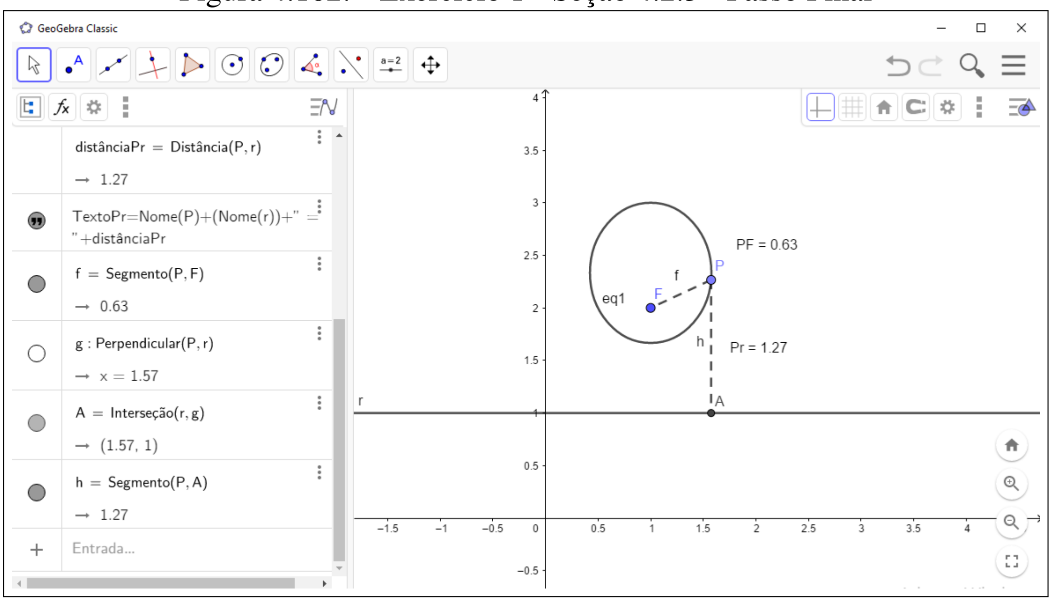


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

6º) Por fim, criamos um segmento tracejado h unindo os pontos P e A. (Figura 4.102)

Observação: Para se ter uma melhor visualização, desabilitamos a reta g.

Figura 4.102: Exercício 1 - Seção 4.2.3 - Passo Final

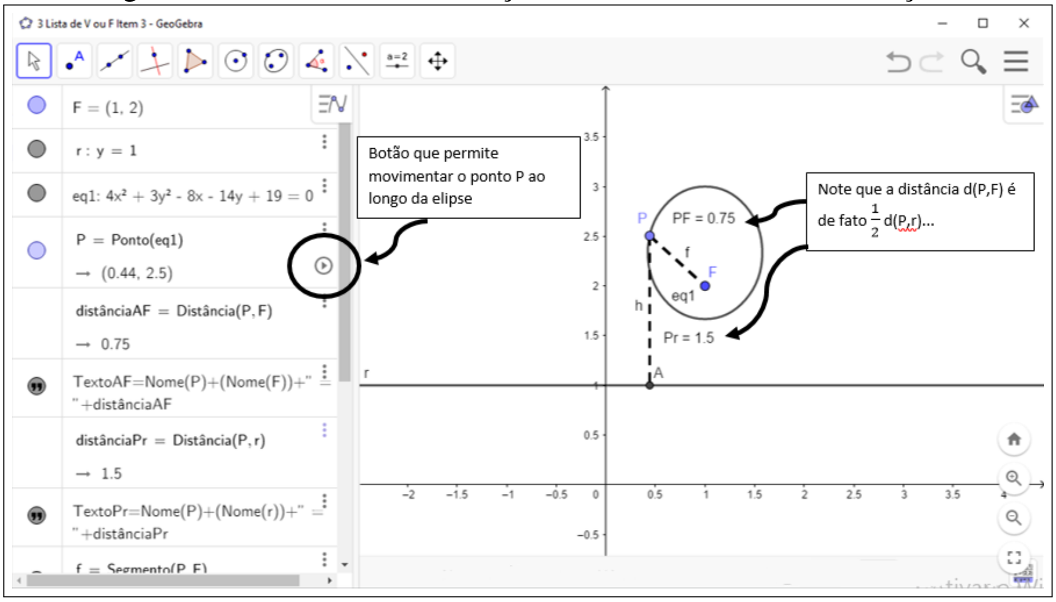


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

7º) Podemos agora no campo de entrada do ponto P utilizar o botão “play”, que nos permite movimentar o ponto ao longo da elipse formada. Tal movimentação também pode ser feita selecionando a ferramenta “Movimentar” e mudando a posição do ponto manualmente. (Figura 4.103)

Observação: Note que a distância $d(P, F)$ é de fato $\frac{1}{2}d(P, r)$.

Figura 4.103: Exercício 1 - Seção 4.2.3 - Passo Final Observações



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Exercício 2

Qual é o lugar geométrico de um ponto que se move de maneira que sua distância à reta $4x - 3y + 12 = 0$ seja sempre igual a duas vezes a sua distância ao eixo OX?
Desenvolva a equação e depois utilize o GeoGebra para classificar o lugar geométrico obtido.

DESENVOLVIMENTO DA EQUAÇÃO:

Seja $P = (x, y)$ um ponto no plano e r a reta $r : 4x - 3y + 12 = 0$. Temos que

$$d(P, r) = 2d(P, OX).$$

Tomando $y = 0$, a reta que contém o eixo OX temos

$$\Rightarrow \frac{|4x - 3y + 12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2\frac{|y|}{\sqrt{1^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{|4x - 3y + 12|}{\sqrt{25}} = 2|y|$$

$$\Rightarrow |4x - 3y + 12| = 10|y|,$$

elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$16x^2 + 9y^2 - 24xy + 96x - 72y + 144 = 100y^2$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 91y^2 - 24xy + 96x - 72y + 144 = 0.$$

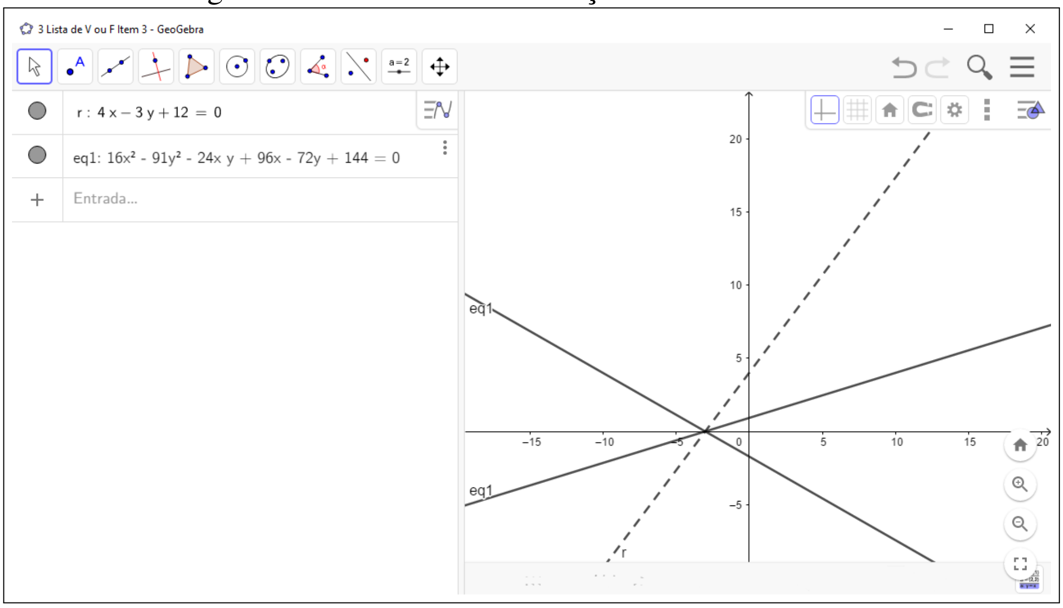
Resolução com o GeoGebra

Para se verificar o resultado obtido com o desenvolvimento da expressão, basta seguir os seguintes passos.

1º) Inserimos no campo de entrada a sentença $r : 4x - 3y + 12 = 0$, para se obter a reta r. **Observação**: Para se obter uma melhor visualização deixamos essa reta "tracejada".

2º) Inserimos a equação $16x^2 - 91y^2 - 24xy + 96x - 72y + 144 = 0$, que foi obtida através do desenvolvimento da sentença. (Figura 4.104) **Observação**: Note que de fato a equação representa uma par de retas concorrentes.

Figura 4.104: Exercício 2 - Seção 4.2.3 - Passos 1 e 2

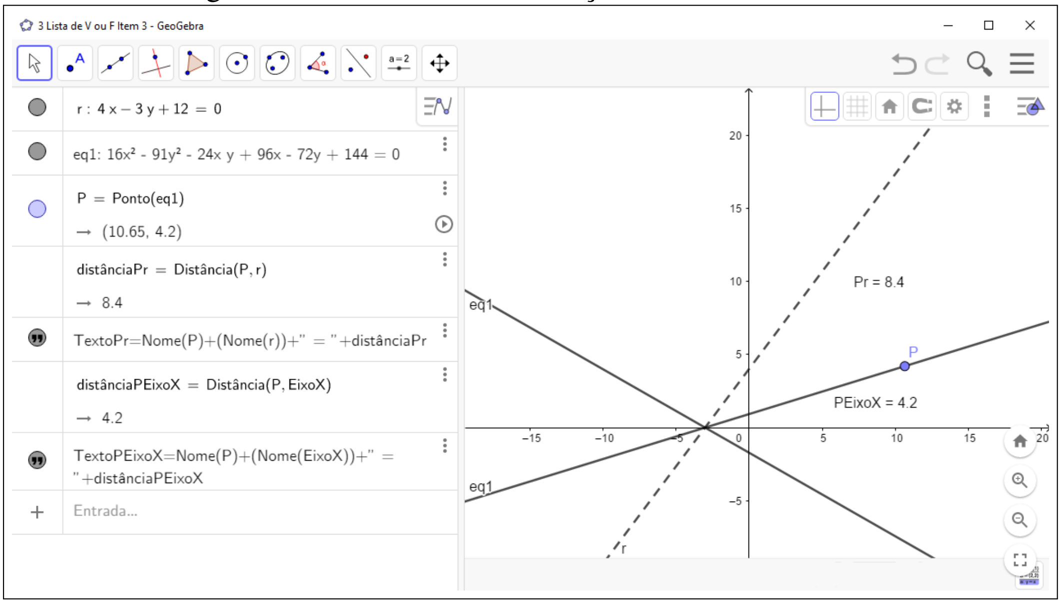


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

3º) Sobre uma das retas que representa a equação obtida, criamos um ponto P.

4º) Com a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro” calculamos as distâncias $d(P, r)$ e $d(P, OX)$. (Figura 4.105)

Figura 4.105: Exercício 2 - Seção 4.2.3 - Passos 3 e 4

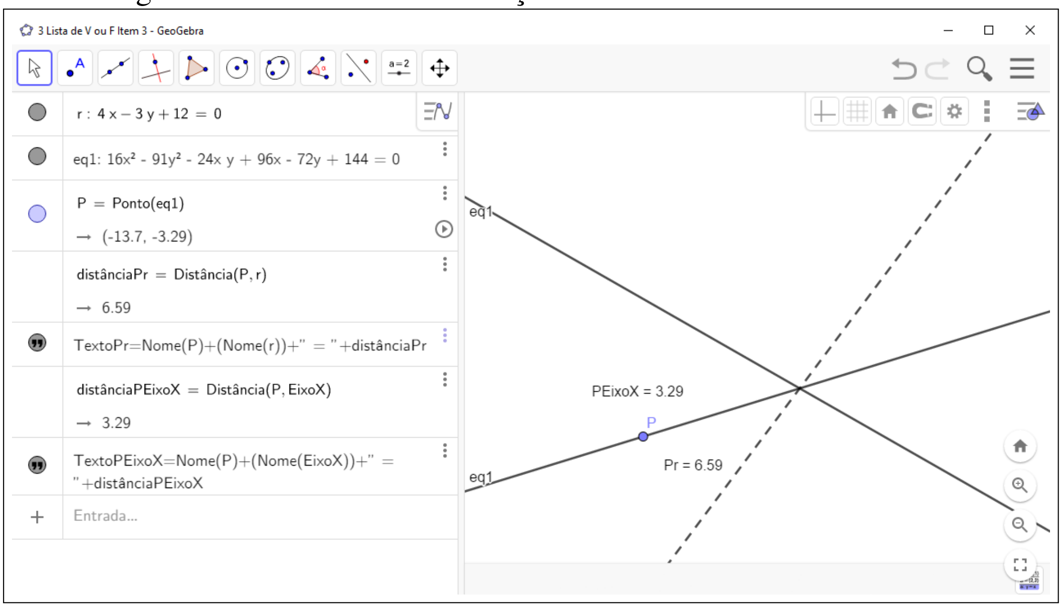


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

5º) Novamente, podemos movimentar o ponto P sobre as retas obtidas e conferir a veracidade da sentença. (Figura 4.106)

Observação: Afim de se obter uma melhor visualização, desabilitamos os Eixos.

Figura 4.106: Exercício 2 - Seção 4.2.3 - Movimento do Ponto P



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

4.2.4 Exercício não elementar no GeoGebra

Temos a seguir um exercício envolvendo o estudo de esferas, que para ser desenvolvido requer uma quantidade considerável de cálculos e sua resolução com o software GeoGebra exige um embasamento teórico um pouco mais aprofundado, uma vez que é necessário utilizar algumas ferramentas tento em vista conceitos teóricos que justificam o seu uso como veremos a seguir.

"Ache uma equação da superfície esférica que passa pelos pontos $M = (1, 1, 3)$, $N = (3, 3, 5)$ e $P = (3, 1, 5)$ e cujo centro está no plano $\pi : x + y - z = 0$."

Resolução Algébrica

Para satisfazer as condições estabelecidas pelo enunciado, precisamos encontrar a ou as esferas com centro $C = (a, b, c)$ pertencentes ao plano $\pi : x + y - z = 0$. Como o centro C pertente ao plano π, temos que suas coordenadas satisfazem a seguinte relação

$$a + b - c = 0.$$

Logo, podemos afirmar que

$$c = a + b.$$

Portanto, escrevendo as coordenadas do centro C em função das variáveis a e b, temos

$$C = (a, b, a + b).$$

Da equação reduzida da esfera $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$, temos ao atribuir as coordenadas dos pontos M, N e P o seguinte sistema

$$\begin{cases} (1 - a)^2 + (1 - b)^2 + (3 - a - b)^2 = r^2 \\ (3 - a)^2 + (3 - b)^2 + (5 - a - b)^2 = r^2 \\ (3 - a)^2 + (1 - b)^2 + (5 - a - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

Subtraindo a terceira equação da segunda, obtemos $b = 2$.

Usando o valor $b = 2$ nas equações podemos montar um novo sistema em função de a e r, como se segue

$$\begin{cases} 2a^2 - 4a + 3 = r^2 \\ 2a^2 - 12a + 19 = r^2 \\ 2a^2 - 12a + 19 = r^2 \end{cases}$$

Como a segunda e a terceira equação ficam idênticas podemos considerar apenas as duas primeiras equações. Agora, subtraindo a segunda equação da primeira obtemos $8a - 16 = 0$, ou seja, $a = 2$.

Voltando o valor de $a = 2$ em uma das equações do último sistema obtemos $r = \sqrt{3}$. E, pela relação $c = a + b$, segue que $c = 4$.

Assim, concluímos que a esfera procurada possui centro em $C = (2, 2, 4)$ e raio $r = \sqrt{3}$. Logo, sua equação da superfície esférica procurada pode ser escrita como

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 3.$$

Resolução com o GeoGebra

Para se resolver este exercício com o GeoGebra, precisamos encontrar o lugar geométrico dos pontos equidistantes a dois pontos dados.

Dados os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, seja $C = (x, y, z)$ um ponto do espaço, tal que $d^2(A, C) = d^2(B, C)$.

Logo temos

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2$$

desenvolvendo os quadrados obtemos,

$$(2x_1 - 2x_2)x + (2y_1 - 2y_2)y + (2z_1 - 2z_2)z + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2) = 0$$

que se trata de uma equação do tipo

$$ax + by + cz + d = 0,$$

onde $a = 2x_1 - 2x_2$, $b = 2y_1 - 2y_2$, $c = 2z_1 - 2z_2$ e $d = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2$, ou seja, um plano π.

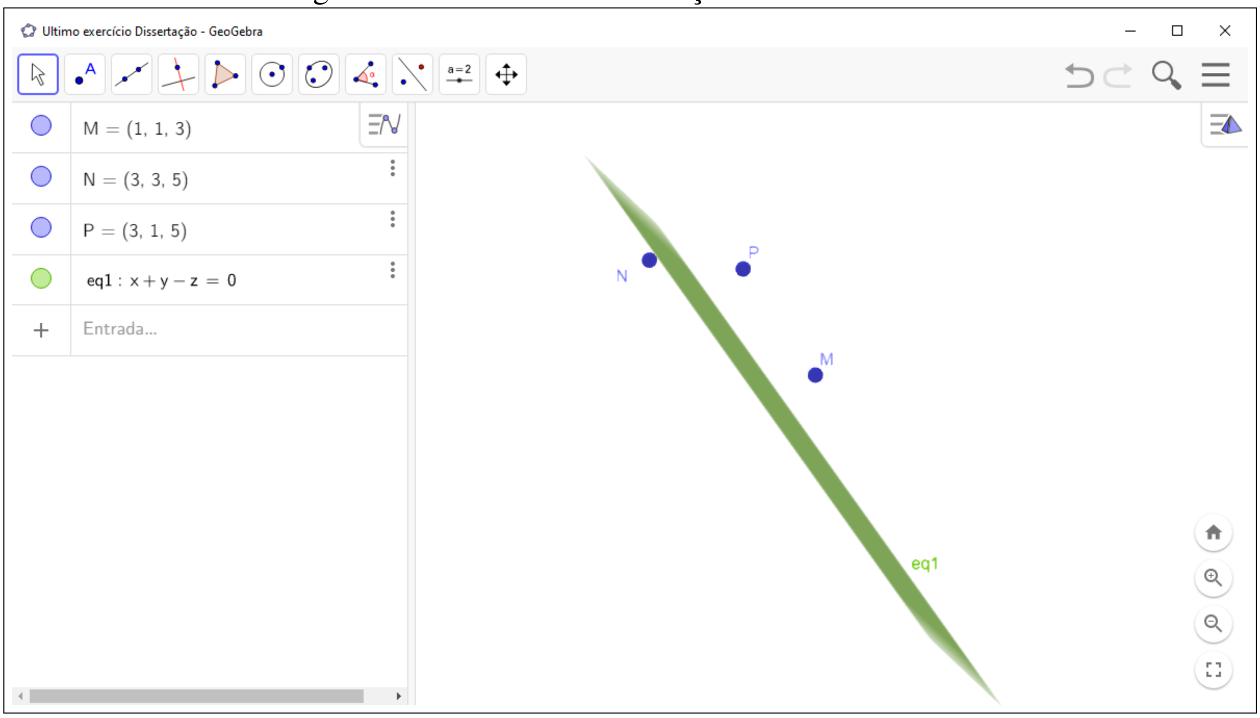
Como $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ e o vetor normal ao plano π, $\overrightarrow{n} = (2x_2 - 2x_1, 2y_2 - 2y_1, 2z_2 - 2z_1)$, temos que $\overrightarrow{n} = 2\overrightarrow{AB}$, ou seja, $\overrightarrow{n}$ é múltiplo de $\overrightarrow{AB}$, portanto, $\overrightarrow{AB}$ é perpendicular ao plano π.

Este plano π obtido, é chamado de "plano mediador". Tal plano possui as seguintes características: é um plano perpendicular ao segmento dado, passa pelo ponto médio deste segmento, e contém todos os pontos do espaço que são equidistantes das extremidades deste segmento.

Agora de posse de tal definição, podemos resolver o exercício pelo GeoGebra, usando a "Janela de Visualização 3D", seguindo os seguintes passos.

1º) Digitamos no campo de entrada as informações concedidas no enunciado, ou seja, os pontos $M = (1, 1, 3)$, $N = (3, 3, 5)$ e $P = (3, 1, 5)$, e a equação do plano $\pi : x + y - z = 0$. (Figura 4.107)

Figura 4.107: Exercício 1 - Seção 4.2.4 - Passo 1



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

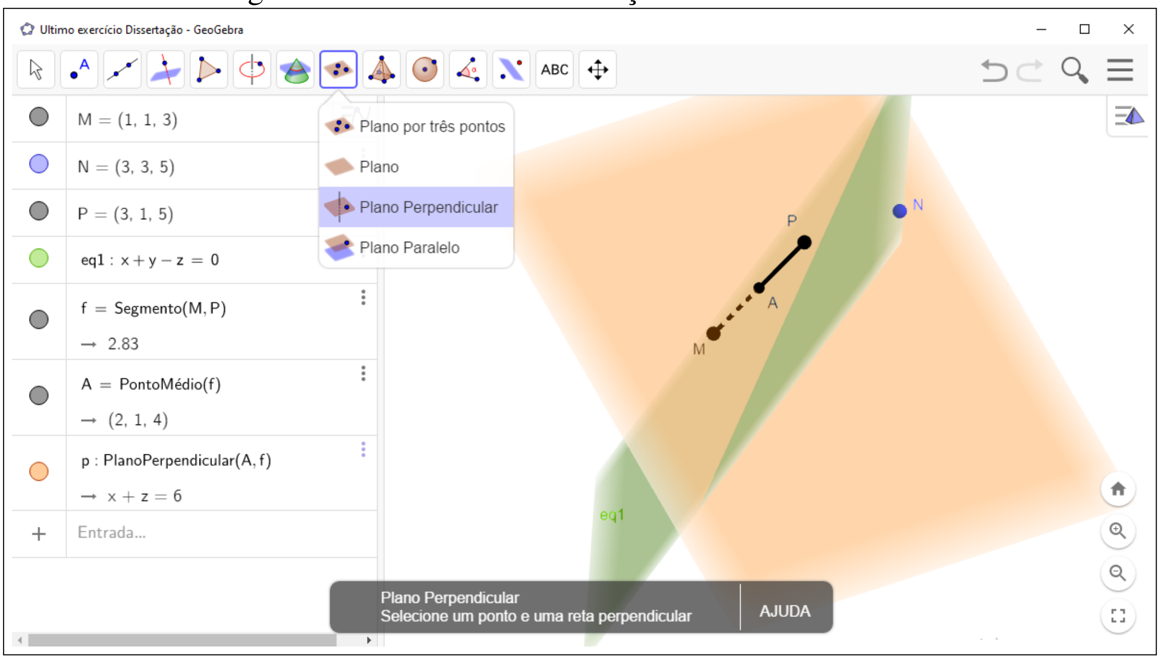
Após inserir tais informações, é possível visualizar que nenhum dos pontos está sobre o plano fornecido. Como os três pontos dados pertencem a esfera procurada, precisamos encontrar um ponto que seja equidistante dos pontos M, N e P simultaneamente, para isso vamos precisar dos passos a seguir.

2º) Com a ferramenta "Segmento" selecionamos os pontos M e P, para criar um segmento $\overline{MP}$. (Figura 4.108)

3º) Usando a ferramenta "Ponto Médio" clicamos sobre o segmento f criado no passo anterior, obtendo o ponto A. (Figura 4.108)

4º) Fazendo uso da ferramenta "Plano Perpendicular", selecionamos o ponto A e o segmento f, obtendo o plano p, que se trata de um "plano mediador" como mostrado na Figura 4.108.

Figura 4.108: Exercício 1 - Seção 4.2.4 - Passos 2 ao 4



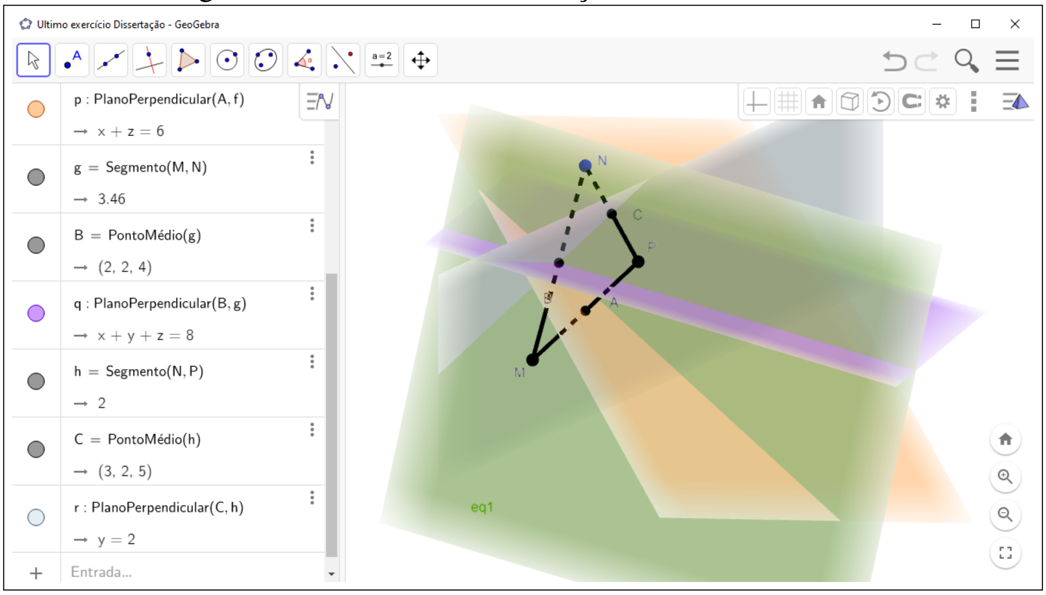
Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Observação: Para se obter uma melhor visualização alteramos a cor dos pontos P, M e N, e mudamos também o ângulo da imagem.

5º) Seguindo os passos de 2 a 4, criamos o segmento $\overline{MN}$ e o plano q passando pelo seu ponto médio B. (Figura 4.109)

6º) Novamente seguindo os passo de 2 a 4, criamos o segmento $\overline{NP}$ e pelo seu ponto médio C o plano r. (Figura 4.109)

Figura 4.109: Exercício 1 - Seção 4.2.4 - Passos 5 e 6

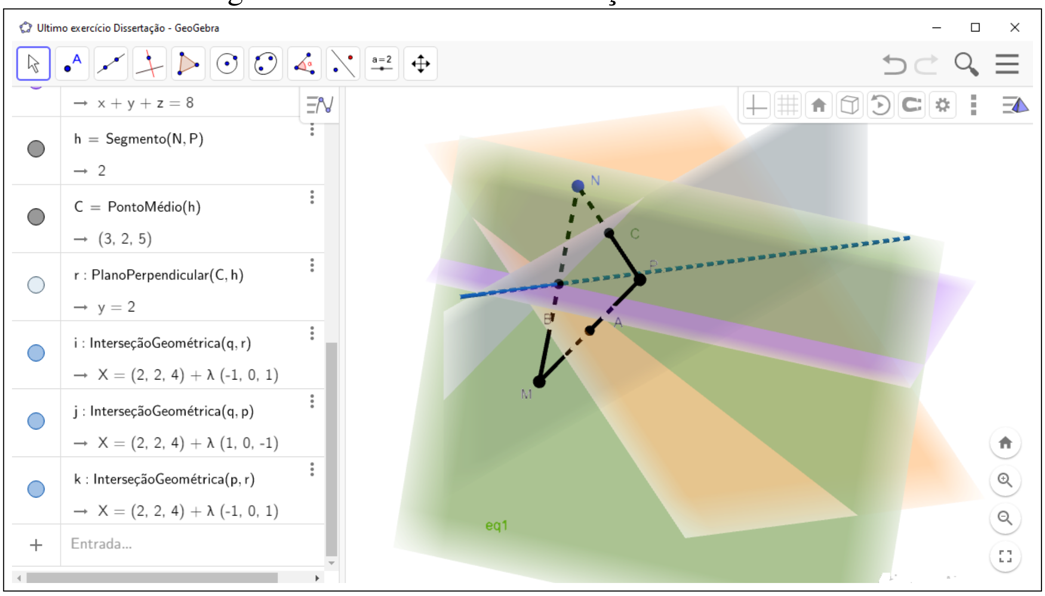


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Após criar os "planos mediadores" conseguimos perceber que existe uma interseção entre eles.

7º) Para se ter precisão da interseção entre os planos criados, utilizamos a ferramenta "Interseção de Duas Superfícies" selecionando os planos dois a dois. Com isso obtemos que a interseção entre os planos é a reta $X = (2,2,4) + \lambda(-1,0,1)$. (Figura 4.110)

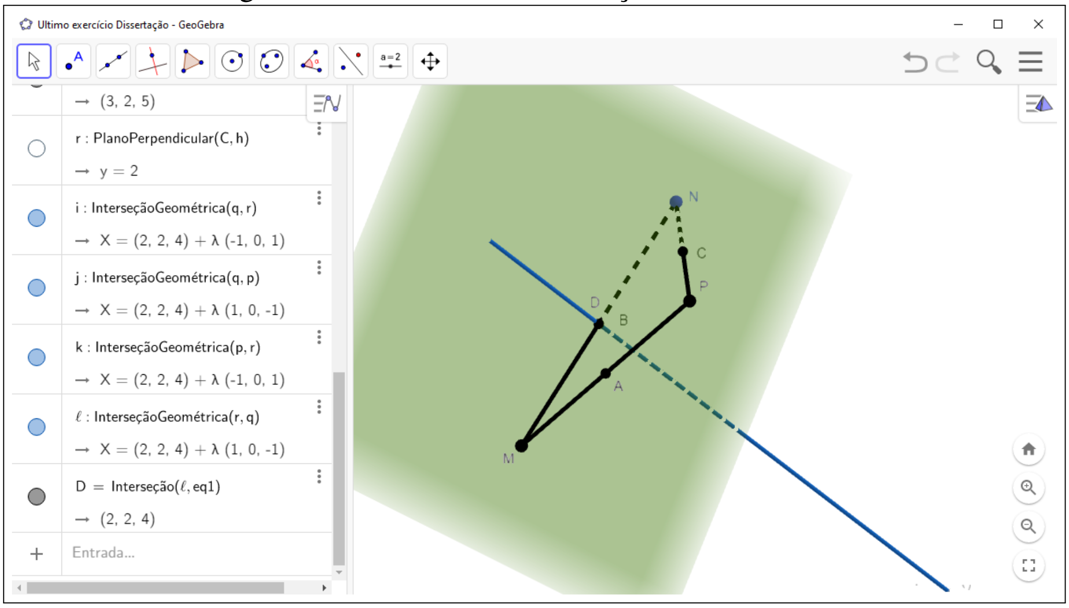
Figura 4.110: Exercício 1 - Seção 4.2.4 - Passo 7



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

8º) Utilizando a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" selecionamos a reta obtida e o plano fornecido pelo enunciado. Assim descobrimos que o ponto de interseção entre os "planos mediadores" e o plano que contêm o centro é o ponto $D = B = (2, 2, 4)$. Este ponto é equidistante aos pontos M, N e P, como se queria. (Figura 4.111)

Figura 4.111: Exercício 1 - Seção 4.2.4 - Passo 8

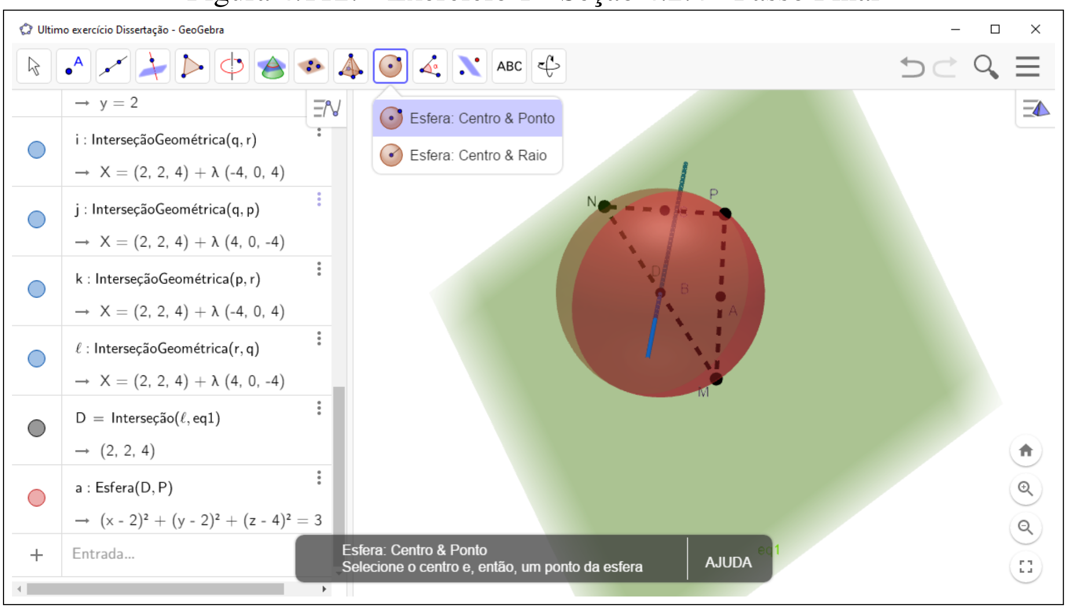


Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Observação: Na Figura 4.111 desabilitamos os planos p, q e r, afim de se obter uma melhor visualização da interseção criada no passo 8.

9º) Para finalizar, utilizamos a ferramenta "Esfera: Centro & Ponto", selecionando o centro $B = D$ e uns dos pontos M, N ou P. (Figura 4.112)

Figura 4.112: Exercício 1 - Seção 4.2.4 - Passo Final



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Logo a equação da superfície esférica procurada é gerada automaticamente pelo software, como se vê na Figura 4.112.

4.3 SUGESTÕES DE EXERCÍCIOS

Nesta seção sugerimos alguns exercícios relativos ao Ensino Superior a serem trabalhados com o software GeoGebra, que assim como na seção anterior estão separados por "Exercícios de conferência de resultados", "Classificação de Verdadeiro ou falso: investigando resultados", "Visualização de equações" e um "Exercício não elementar no GeoGebra". Em alguns deles é abordado o uso de propriedades com vetores, que podem também ser utilizados no Ensino Médio, porém, fica a critério da escola, pois tal abordagem não faz parte do currículo nacional, com isso não se trata de um conteúdo obrigatório.

4.3.1 Exercícios de conferência de resultados

1) Determine a posição relativa entre os planos.

    a) $\pi_1 : x + y - 4z + 2 = 0$, $\pi_2 : -3x - 3y + 12z + 4 = 0$ e $\pi_3 : x + y - 4z + 1 = 0$

    b) $\pi_1 : x + y - 4z + 2 = 0$, $\pi_2 : -3x - 3y + 12z + 6 = 0$ e $\pi_3 : 2x + 2y - 8z + 4 = 0$

    c) $\pi_1 : x + y - 4z + 2 = 0$, $\pi_2 : -3x - 3y + 12z - 6 = 0$ e $\pi_3 : 2x + 2y - 8z + 4 = 0$

    d) $\pi_1 : 2x + y - 4z + 2 = 0$, $\pi_2 : -3x - 3y + 2z - 6 = 0$ e $\pi_3 : 2x + 2y - 8z + 4 = 0$

2) Determine as equações das esferas de raio $\sqrt{17}$ que contém os pontos $A = (2, 3, 1)$ e $B = (4, 1, 3)$ e com centro pertencente ao plano $\pi : 2x + y + z = 3$.
(Exercício extraído de Delgado, Frensel e Crissaff (2017, p. 309))

4.3.2 Classificação de Verdadeiro ou falso: investigando resultados

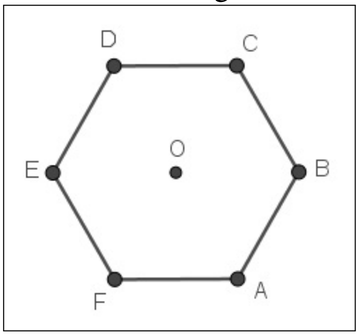
A seguir, temos sentenças a serem classificadas como verdadeiras ou falsas, assim como apresentado na Seção 4.2.2.

1) Os pontos médios dos lados de um quadrilátero do plano são vértices de um paralelogramo.

2) Seja $ABCDEF$ um hexágono regular com centro em O.

   Temos que: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6 \cdot \overrightarrow{AO}$.

Figura 4.113: Hexágono ABCDEF



Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

3) Seja ABCD um quadrilátero de lados AB, BC, CD e DA. Sejam E e F os pontos médios dos lados AB e CD, respectivamente. Então, $\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

4) $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 + ||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2 = 2||\overrightarrow{u}||^2 + 2||\overrightarrow{v}||^2$

5) O **latus rectum** de uma parábola P é o comprimento da corda de P perpendicular à reta focal que passa pelo foco da parábola. Temos que o latus rectum de uma parábola é igual ao dobro do parâmetro de P.

4.3.3 Visualização de equações

1) Considere o ponto $F = (1, 2)$ e a reta $r : y = 1$. Então o conjunto $X = \left\{ P \mid d(P, F) = \dfrac{3}{2} d(P, r) \right\}$ é uma hipérbole com um dos focos no ponto F.

   Observação: Os exercícios a seguir (enumerados de 2 a 7) são relativos a conceitos trabalhados no espaço, e podem ser abordados da mesma forma que a proposta na seção 4.2.3, porém, deverão ser desenvolvidos na "Janela de Visualização 3D".

2) Seja S o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ equidistantes do ponto $A = (0, 2, 0)$ e da esfera $S_0 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Que conjunto é este?

3) Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos que equidistam do plano $\pi : x = 2$ e do ponto $P = (-2, 0, 0)$. Que conjunto é este?

4) Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos que equidistam das retas $r : y = z = 0$ e $l : x = y - 1 = 0$. Que conjunto é este? Desenvolva a equação e depois utilize o GeoGebra para determinar a superfície.

5) Determine a equação do lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que a soma das distâncias de P aos dois pontos $(2, 0, 0)$ e $(-2, 0, 0)$ seja igual a 6. Que lugar geométrico é este?

6) Determine uma equação da superfície consistindo em todos os pontos $P(x, y, z)$ que estão equidistantes do ponto $(0, 0, 1)$ e do plano $z = -1$. Identifique a superfície.

7) Identifique a superfície na qual todos os pontos $P(x, y, z)$ estão duas vezes mais afastados do plano $z = -1$ que do ponto $(0, 0, 1)$. Desenvolva a equação e depois utilize o GeoGebra para determinar a superfície

4.3.4 Exercício não elementar no GeoGebra

Sejam as seguintes retas passando por um ponto T da parábola P:

- r, paralela à reta focal;
- s, normal à P (reta perpendicular à reta tangente a P no ponto T);
- t, que passa pelo foco F de P.

Então temos que os ângulos entre r e s e entre t e s são iguais.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Todo o desenvolvimento tecnológico vivenciado pela nossa sociedade nos obriga a repensar nas práticas pedagógicas bem como nosso modo de estudar, aprender e enxergar o mundo.

A Geometria Analítica, assim como outras áreas de estudos da Matemática, carrega consigo um grau de abstração que faz com que alunos percam a motivação durante os estudos. Não que seja um assunto pouco interessante, mas, a não compreensão de tópicos abordados geram inúmeras dúvidas que por sua vez, fazem com que a matéria seja considerada “difícil”.

O nosso objetivo então, foi através deste trabalho propor o estudo da Geometria Analítica com o uso do software GeoGebra, que como visto, nos permite em muitos momentos ter visões mais claras e precisas de diversos tópicos abordados dentro da disciplina. Seja, como uma ferramenta para conferência de resultados, construções de situações problemas, investigações de sentenças matemáticas, visualização de equações e até mesmo como ferramenta para construção de um raciocínio que nos leva as resoluções, este software certamente é uma poderosa ferramenta de estudo. Observa-se entretanto que, a resolução formal dos exercícios de maneira alguma pode ser deixada de lado, até mesmo porque todo software matemático é desenvolvido a partir de teorias, sem as quais jamais teríamos condições de desenvolver tais tecnologias. Por fim, nosso trabalho trata do uso do GeoGebra como um facilitador tanto para o docente quanto para o discente no momento da apresentação e compreensão visual dos conceitos trabalhados algebricamente.

Acreditamos piamente nos benefícios propiciados pela utilização do software GeoGebra, tendo perspectivas futuras de uma possível aplicação deste trabalho, visando um estudo de caso por meio de uma abordagem quantitativa.

REFERÊNCIAS

BORBA, M. C.; ARAúJO, J. D. L. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. [S.l.]: Autêntica Editora, 2019. v. 9.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. D. **Geometria Analítica**: um tratamento vetorial. São Paulo, SP: MAKRON Books do Brasil, 1987.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio>. Acesso em: 20 jan. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Relatório Brasil no PISA 2018: Versão Preliminar.** Brasília, DF: INEP, MEC, 2019. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf>. Acesso em: 10 out. 2020.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**: Coleção profmat. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2017.

FROTA, M. C. R.; BORGES, O. Perfis de Entendimento Sobre o Uso de Tecnologias na Educação matemática. **Anais da 27ª reunião anual da Anped**, v. 1, 2004. Disponível em: <https://anped.org.br/sites/default/files/t199.pdf> Acesso em: 13 ago. 2020.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO. **DECRETO Nº 64.864,DE 16 DE MARÇO DE 2020**. São Paulo, SP, 2020. Disponível em: https://www.saopaulo.sp.gov.br/wp-content/uploads/2020/03/decreto-64864.pdf.

INEP. MEC. **Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM: prova de ciências da natureza e suas tecnologias prova de Matemática e suas tecnologias. 2º dia Caderno 5 amarelo**. [Brasília, DF]: INEP, MEC, 2019. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/ppl/2019/provas/BAIXA_PPL_2_DIA_CADERNO_5_AMARELO.pdf>. Acesso em: 6 jan. 2021.

LIMA, E. L. Exame de textos: análise de livros de matemática para o ensino médio. **Rio de Janeiro: SBM**, 2001.

MONTENEGRO, F.; NUNES, M. C.; RIBEIRO, V. M.; FONSECA, M. d. C. F. **Indicador nacional de alfabetismo funcional, 4º: um diagnóstico para a inclusão social pela educação: avaliação de habilidades matemáticas**. [S.l.], 2004.

PACHECO, M. B.; ANDREIS, G. d. S. L. Causas das dificuldades de aprendizagem em matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do ensino médio. **Revista Principia, João Pessoa**, v. 38, p. 105–119, 2018.

PATRÍCIO, R. S. **As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de . . . , 2011.

PEREIRA, G. S. d. S.; CORDEIRO, S. M. S. Geogebra: Uma proposta para o ensino de Geometria Analítica na educação básica. **II Jornada de Estudos em Matemática: Tecnologias de Informática no Estudo da Matemática**, 2016.

PUC-SP. **Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia –Instituto São Paulo GeoGebra**. [S.l.]: PUC-SP, 2020. Disponível em: <https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html#:~:text=O>. Acesso em: 7 ago. 2020.

SANTOS, R. J. **Matrizes, Vetores e Geometria Analítica**. Belo Horizonte, MG: Imprensa Universitária da UFMG, 2017.

SILVA, W. F. d. **O Ponto de Fermat e o problema de Steiner Euclidiano: Uma sequência didática com o uso do software GeoGebra**. 2020.

UFTM. REITOR DA UFTM. **RESOLUÇÃO Nº 14, DE 17 DE MARÇO DE 2020.**: Estabelece medidas de caráter temporário visando reduzir exposição pessoal e interações presenciais entre os servidores da uftm e a comunidade universitária, incluindo o replanejamento de rotinas e procedimentos de trabalho, como forma de prevenção aos problemas causados pelo covid-19. Uberaba, MG: UFTM, 2020, 2020. Disponível em: <https://sistemas.uftm.edu.br/integrado/sistemas/pub/publicacao.html?secao=33&publicacao=6944>. Acesso em: 10 jul. 2020.