UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO
Programa de Mestrado em Matemática - PROFMAT

GUILHERME DA SILVA OLIVEIRA

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: O USO DA TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

UBERABA
2020

GUILHERME DA SILVA OLIVEIRA

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: O USO DA TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Flavio Molina

UBERABA

2020

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

	Oliveira, Guilherme da Silva
O47a	Atividades de modelagem matemática: o uso da teoria de grafos no ensino fundamental / Guilherme da Silva Oliveira. -- 2020.
	86 p. : il., tab.
	Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2020
	Orientador: Prof. Dr. Flavio Molina da Silva
	1. Teoria dos grafos. 2. Ensino fundamental. 3. Modelos matemá - ticos. 4. Aprendizagem baseada em problemas. 5. Habilidades de vida. I. Silva, Flavio Molina da. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.
	CDU 519.87:373.3(043)

Leila Aparecida Anastácio - CRB-6/2513

GUILHERME DA SILVA OLIVEIRA

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: O USO DA TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, área de concentração Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

Uberaba, 20 de julho de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Flávio Molina – Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Prof. Dr. Osmar Aléssio
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Profa. Dra. Deisemara Ferreira
Universidade Federal de São Carlos

de Mestrado Profissional em Matemática, em 22/09/2020, às 15:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 e no art. 14 da Resolução nº 34, de 28 de dezembro de 2017.

Documento assinado eletronicamente por **OSMAR ALESSIO**, **Professor do Magistério Superior**, em 22/09/2020, às 15:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 e no art. 14 da Resolução nº 34, de 28 de dezembro de 2017.

Documento assinado eletronicamente por **Deisemara Ferreira**, **Usuário Externo**, em 22/09/2020, às 16:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 e no art. 14 da Resolução nº 34, de 28 de dezembro de 2017.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.uftm.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0401310** e o código CRC **2B6CD6B9**.

Dedico este trabalho aos meus pais, Antônio e Joana, pelo amor, carinho e apoio durante todos esses anos da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela minha vida e todas as bênçãos que me foram concedidas.

Agradeço ao meu orientador pela dedicação e paciência.

Agradeço ao programa PROFMAT e a todos os funcionários que fazem parte desse projeto maravilhoso.

Agradeço aos meus pais, minha querida noiva e meu sobrinho, por me proporcionarem tantos momentos felizes.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é propor a inclusão de conceitos da teoria de grafos no currículo dos alunos do ensino fundamental. Para isso, foram criadas e aplicadas para duas turmas do oitavo ano um conjunto de atividades de modelagem matemática, nelas os grafos são a principal ferramenta na representação dos problemas. O foco principal do trabalho está na resolução de problemas da teoria de grafos, assim são abordados o problema do caixeiro viajante e do carteiro chinês. As atividades possuem orientações de aplicação para os docentes, bem como alguns objetivos e habilidades que podem ser consolidadas durante os trabalhos em sala.

Palavras-chave: teoria de grafos, ensino fundamental, modelagem matemática, problema do caixeiro viajante, problema do carteiro chinês, habilidades.

ABSTRACT

The objective of this work is to propose the inclusion of graph theory concepts in the curriculum of elementary school students. For this, a set of mathematical modeling activities were created and applied to two classes of the eighth year, in which graphs are the main tool in representing problems. The main focus of the work is on solving graph theory problems, thus addressing the problem of the traveling salesman and the Chinese postman. The activities have application guidelines for teachers, as well as some objectives and skills that can be consolidated during the classroom work.
Keywords: graph theory; elementary School; mathematical modeling; traveling salesman problem; Chinese postman problem; skills.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ser humano sempre desejou compreender e controlar o mundo e os diversos fenômenos que o cercavam, podendo ser eles de característica física, biológica, econômica e outros. Na busca por respostas para os diversos questionamentos que os intrigava, percebeu que possuía uma aliada muito importante durante esse processo de investigação: a Matemática. Segundo Arenales et al. (2015, p. 4) “se fazer ciência é a capacidade de observar e descrever fenômenos naturais, sociais, econômicos, entre outros, a matemática tem uma importância fundamental na descrição desses fenômenos.”

Essa realidade científica está concentrada majoritariamente ao público do ensino superior, porém a necessidade de despertar a curiosidade sobre o mundo e a busca por respostas deve ser iniciada desde o ensino básico. O ensino de matemática é essencial nesse processo, pois além de despertar o instinto de investigação, desenvolver o raciocínio, e a compreensão do mundo a sua volta, ela pode desempenhar um papel importante na formação do cidadão.

Além disso, durante o processo de ensino e aprendizagem de matemática é esperado que o discente, caso não possua, desenvolva e consolide competências destacadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Em resumo, tais competências atendem quesitos específicos de cada disciplina e quesitos multidisciplinares.

Pensando no processo de ensino e aprendizagem de matemática no ensino fundamental, este trabalho propõe a inclusão de alguns conceitos da teoria de grafo no currículo desses alunos. Essa introdução é feita através de atividades de modelagem matemática adaptadas a realidade dos discentes. Desse modo, foi possível trabalhar alguns conceitos de grafos em contextos e situações do cotidiano das pessoas.

O entendimento de que os grafos podem ser incluídos no currículo dos alunos do ensino fundamental e médio é compartilhado por outros trabalhos, Monteiro (2015) cita algumas dissertações que abordam esse tema, e a própria autora aplicou os grafos e alguns de seus problemas no ensino médio. O trabalho de Lozano (2007) citado nessa dissertação propõe o problema da coloração de grafos para o ensino fundamental. O diferencial desse trabalho é propor um conjunto de atividades contextualizadas que visam inicialmente apresentar os grafos como uma ferramenta para modelagem de problemas, e em seguida trabalhar com dois problemas clássicos da teoria de grafos. Durante a resolução das atividades espera-se que os discentes consolidem algumas habilidades descritas na BNCC, além de desenvolver algumas competências específicas da disciplina de matemática. Sobre esses objetivos a serem alcançados, podemos destacar:

> Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. (BNCC, 2017, p. 265).

O presente trabalho está organizado com a seguinte estrutura. Além desse primeiro capítulo introdutório, o segundo capítulo desse trabalho explora a teoria de grafos, abordando um pouco de sua história e alguns conceitos relevantes da área, citando problemas que hoje são tratados pela ótica dos grafos. Vale ressaltar que é uma teoria muito rica em conceitos e notações, portanto foram descritos aqui aqueles que foram importantes para o entendimento do trabalho.

O terceiro capítulo aborda dois problemas considerados clássicos e presentes em muitas situações do cotidiano: o Problema do Caixeiro Viajante (PCC) e o Problema do Carteiro Chinês (PCC). O texto apresenta a história desses problemas, o contexto em que eles frequentemente aparecem e algumas técnicas ou algoritmos que permitem encontrar uma solução.

No quarto capítulo, foi feita uma discussão sobre o papel do professor durante atividades de modelagem matemática em sala aula. É apresentado um conjunto de atividades relacionadas à teoria dos grafos, adaptadas a alunos do 8º ano do ensino fundamental. Essas atividades estão acompanhadas de sugestões para aplicação, assim como procedimentos que devem ser adotados durante as aulas.

No quinto capítulo são apresentados os resultados alcançados por duas turmas do 8º ano do ensino fundamental em relação às atividades propostas do capítulo anterior. Foram analisadas as soluções entregues pelos grupos de trabalho para os problemas abordados, os principais questionamentos feitos pelos alunos e os fatos relevantes que aconteceram durante a aplicação.

O último capítulo é dedicado a algumas considerações finais sobre as atividades trabalhadas e possíveis adaptações para outros anos do ensino fundamental.

2 CONCEITOS SOBRE GRAFOS

Neste capítulo são apresentadas algumas definições e conceitos importantes da teoria de grafos. Para isso, esses elementos estão embasados nas obras citadas nas referências bibliográficas desse trabalho.

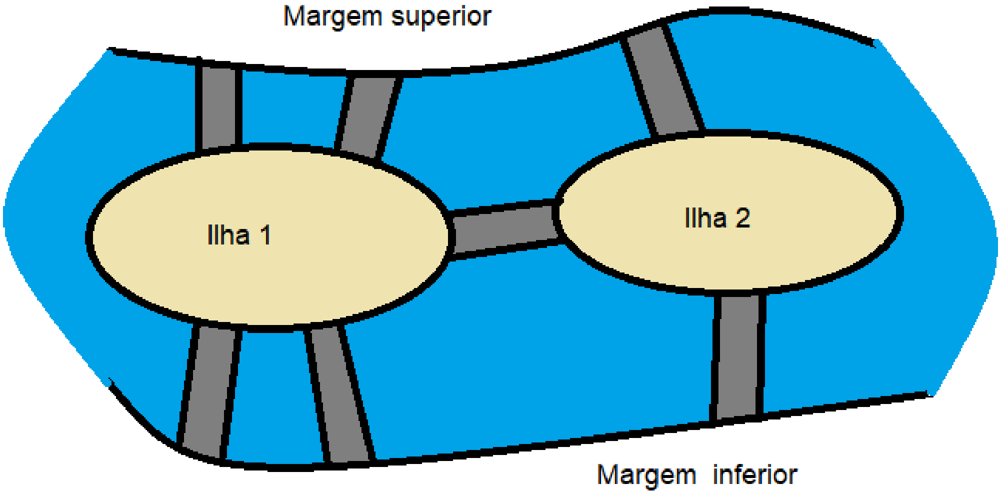
2.1 ORIGEM DOS GRAFOS

O surgimento de importantes resultados na matemática de modo geral, deve-se a motivação das pessoas em solucionar algum tipo de problema. Segundo Arenales et al. (2015), um dos primeiros resultados da teoria de grafos foram obtidos graças ao famoso matemático suíço Leonard Euler, considerado por muitos o maior matemático do século XVIII. Diz Garbi sobre Euler:

> Euler é, sem dúvida e de longe, o matemático que mais obras produziu em todos os tempos, cobrindo todas as áreas então conhecidas da matemática e criando outras que não haviam sido sequer vislumbradas por seus antecessores. (GARBI, 2011, p. 242).

Segundo Monteiro (2015), tudo começou em uma antiga cidade chamada de Königsberg, situada entre a Polônia e a Lituânia, atualmente conhecida como Kaliningrado. Em 1736, Königsberg era cortada por um rio chamado Prególia, e como consequência, formava-se duas ilhas no interior da cidade. O acesso a elas se dava por sete pontes que as conectava com a margem e entre si. A Figura 1 mostra um esboço dessa situação.

Figura 1 − Ilustração das Pontes de Königsberg

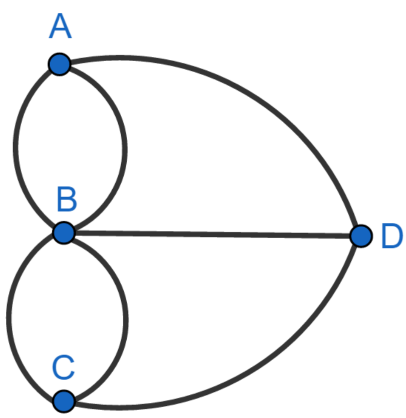


Fonte: Do autor, 2019.

Foi então que um enigma foi criado e permaneceu sem solução por vários anos. O problema consistia em determinar uma rota que permitisse sair e retornar a mesma margem passando uma única vez por cada uma das pontes. Este enigma ficou famoso e foi-lhe atribuído o nome de Problema das Sete Pontes de Königsberg.

Analisando o problema, Euler criou uma estrutura formada por pontos e curvas para modelá-lo. Essa representação é conhecida hoje como grafo. Na Figura 2 podemos observar um grafo semelhante ao que foi construído por Euler. Nele, os pontos A, B, C e D representam, respectivamente, a margem superior, a Ilha 1, margem inferior e Ilha 2. Para entender melhor a representação usada por Euler, o Capítulo 2 foi dedicado à apresentação de definições e conceitos sobre a teoria de grafos.

Figura 2 − Representação geométrica para o problema das pontes



Fonte: Do autor, 2019

2.2 DEFINIÇÃO E NOTAÇÃO DOS GRAFOS

Apresentaremos nesse momento uma definição para grafo e alguns conceitos importantes dessa teoria. Neste trabalho será considerada a definição para grafo dada por Goldberg e Luna, segundo eles: "Um grafo é uma estrutura de abstração que representa um conjunto de elementos denominados nós e suas relações de interdependência ou arestas." (GOLDBARG; LUNA, 2005, p. 482).

Para entender melhor a definição dada pelos autores, vamos considerar os conjuntos V e A, ambos finitos. Os elementos do conjunto V são chamados de nós ou vértices, já os elementos de A são chamados de arestas ou arcos. Um grafo será denotado como $G = (V, A)$, em que V é um conjunto de elementos e A é um subconjunto do produto cartesiano $V \times V$, ou seja, contém os pares de alguma relação entre os elementos de V.

Segundo Goldbarg e Goldbarg E. (2012), a ordem de um grafo corresponde a cardinalidade de seu conjunto de vértices, ou seja, $|V|$. Já o tamanho de um grafo é dado pela cardinalidade de seu conjunto de arestas. Considerando os conjuntos $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A = \{(1,3), (2,5), (2,4), (5,1)\}$ temos um exemplo prático de um grafo $G = (V, A)$ de ordem 5 e tamanho 4, em que, novamente, os elementos de A representam as relações entre os nós (números) de V. Mais a seguir veremos que os elementos de A podem ser pares não ordenados, dando origem aos grafos não orientados.

2.3 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA

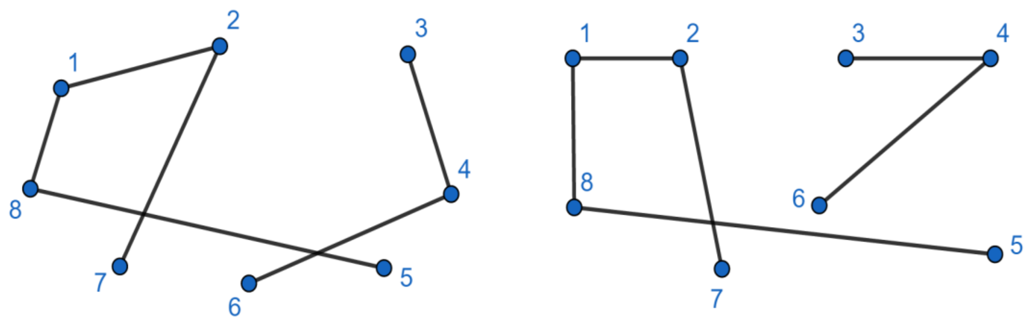
Além da notação algébrica, é possível representar um grafo através de uma representação geométrica. Neste caso, os vértices (elementos de V) são representados por pontos distintos em um plano. Sempre que houver uma relação entre dois vértices de V usaremos curvas, segmentos de reta ou vetores para conectá-los. Se os elementos de A forem pares não ordenados, então usaremos apenas segmentos ou uma curva qualquer. Porém, se A é formado por pares ordenados, então devemos usar segmentos orientados para relacionar esses pontos. Sendo assim, forma-se uma figura com segmentos orientados ou não que vão se conectando e formando a estrutura do grafo.

Na Figura 3 podemos analisar a representação geométrica de um grafo. Nela, os grafos (a) e (b) representam a mesma estrutura. Neste caso, estamos considerando as arestas como sendo pares não ordenados, por isso, foram usados segmentos de reta na ligação dos pontos. Apesar de parecerem diferentes, as estruturas são as mesmas, logo, o que realmente importa é a relação entre os nós e não a posição deles.

Figura 3 − Representação geométrica de um grafo

V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

A = { (1,2), (1,8), (2,7), (3,4), (4,6), (5,8) }



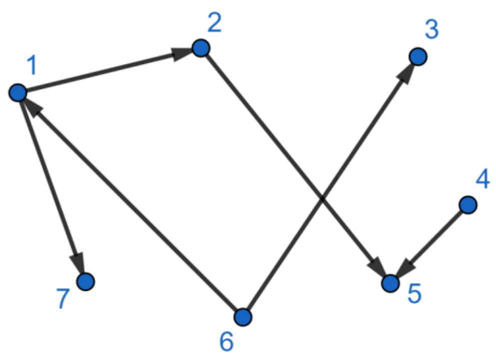
Fonte: Do autor, 2019.

Em algumas situações é necessário que as arestas de um grafo sejam seguimentos orientados. Um grafo com essas características é chamado de *direcionado*, *orientado*, ou *Dígrafo*. É comum chamar as arestas de um grafo orientado apenas de arcos.

Figura 4 − Dígrafo

V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

A = { (1,2), (1,7), (2,5), (4,5), (6,3), (6,1) }



Fonte: Do autor, 2019.

A teoria de grafos se tornou importante pelo fato de ser possível modelar problemas de vários contextos através de seus conceitos. Sua representação geométrica é uma ferramenta relevante, pois, permite através da ilustração analisar visualmente a relação entre os elementos de um conjunto V, possibilitando ao interessado extrair informações ou propor soluções para o problema abordado.

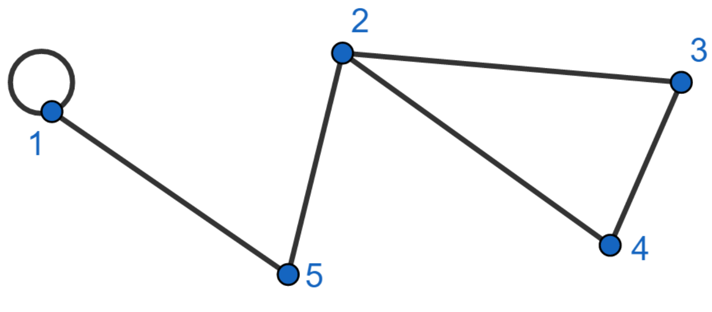
Analisando as Figuras 3 e 4 percebe-se que a notação usada no conjunto A para os grafos orientados e não orientados é a mesma, isso é uma característica da própria teoria. Para distinção do grafo que está sendo usado é necessário apresentar sua representação geométrica ou explicitar o seu tipo. Assim, deve-se observar que apesar de se usar pares ordenados como elementos de A em um grafo não orientado, na verdade, eles são subconjuntos de V com dois elementos.

Consideremos agora um grafo $G = (V, A)$ não orientado qualquer. Segundo Lozano (2007), dois vértices v_1 e v_2 são as *extremidades* de uma aresta a_1 quando existe um segmento que os une. Na Figura 5, podemos observar que os vértices 2 e 5 são extremidades de uma das arestas do grafo. É possível que um vértice do grafo se relacione consigo mesmo, neste tipo de relação Goldbarg e Goldbarg E. (2012) dizem que o grafo possui um *laço*. Ainda na Figura 5 observa-se o elemento $(1,1)$ no conjunto A e a representação do laço na estrutura do grafo.

Figura 5 − Grafo com laço

V = { 1, 2, 3, 4, 5 }

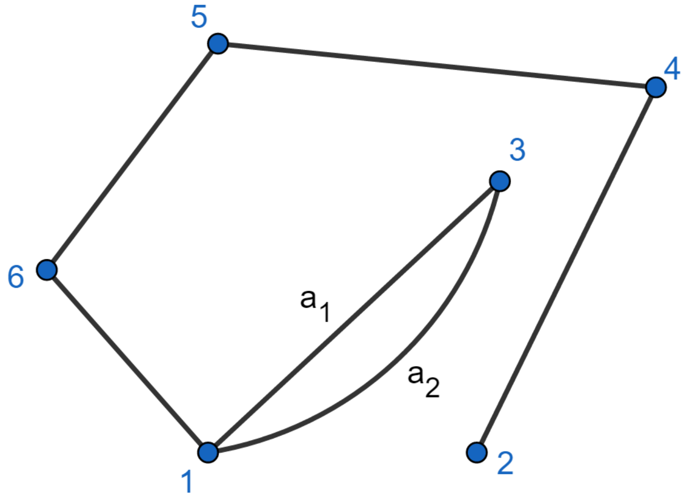
A = { (1,1), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4) }



Fonte: Do autor, 2019.

Ainda na obra de Goldbarg e Goldbarg E. (2012), se ocorrerem duas ou mais arestas entre dois vértices do grafo, então elas serão chamadas de *paralelas*. Na Figura 6 podemos observar esse caso, onde as arestas $a_1 = (1,3)$ e $a_2 = (1,3)$ são consideradas paralelas.

Figura 6 − Grafo com arestas paralelas nos vértices 1 e 3

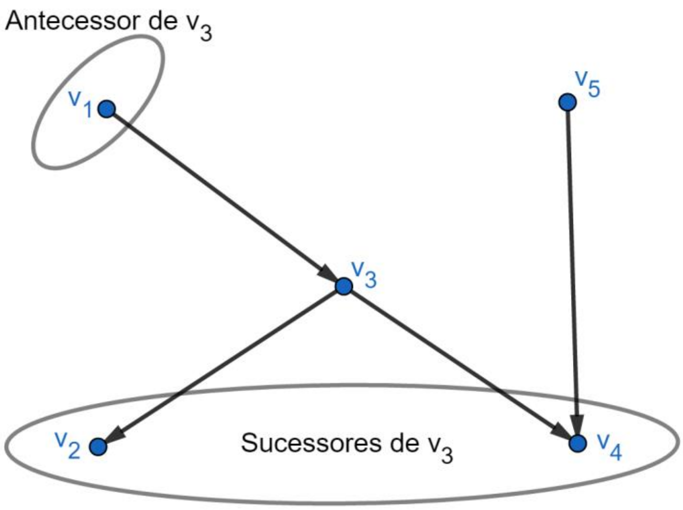


Fonte: Do autor, 2019.

A partir desse ponto, as definições, a menos de menção contrária, foram retiradas das obras de Goldbarg e Luna (2005) e Goldbarg e Goldbarg E. (2012). No grafo não orientado da Figura 6 podemos ver que os vértices 2 e 4 estão conectados por uma aresta, assim são chamados de *vizinhos*. Dados dois vértices v_1 e v_2, dizemos que eles são *vizinhos* quando existir pelo menos uma aresta que os conecta. Esse conceito só pode ser aplicado em grafos não orientados, pois nos dígrafos as conexões são feitas por vetores, o que muda a interpretação dessa relação.

Para os grafos orientados temos o conceito de *sucessor* e *antecessor*. Sejam v_1 e v_2 vértices de um grafo orientado. Dizemos que v_2 é *sucessor* de v_1 se existe ao menos um arco ligando v_1 a v_2, em que a extremidade do segmento orientado que os conecta incide sobre v_2. A Figura 7 nos mostra exemplos desse conceito.

Figura 7 − Antecessor e sucessor de um vértice



Fonte: Do autor, 2019

Pode-se observar que o vértice v_3 é sucessor de v_1, afinal a extremidade do vetor incide sobre v_3. Considerando agora os vértices v_4 e v_5, observa-se que v_4 é o sucessor enquanto v_5 o antecessor. Quando analisado em relação ao vértice v_4, v_3 se torna antecessor.

Com exceção dos grafos das Figuras 2 e 7, apresentamos os vértices dos grafos por números, com o objetivo de simplificar os exemplos que foram dados. É importante dizer que a natureza desses elementos podem sofrer variações, podendo considerar esses vértices como cidades, endereços que devem ser visitados, tarefas que devem ser concluídas e outros, sendo assim, o rótulo desses vértices podem ser trocados por letras ou o que for mais conveniente para o problema.

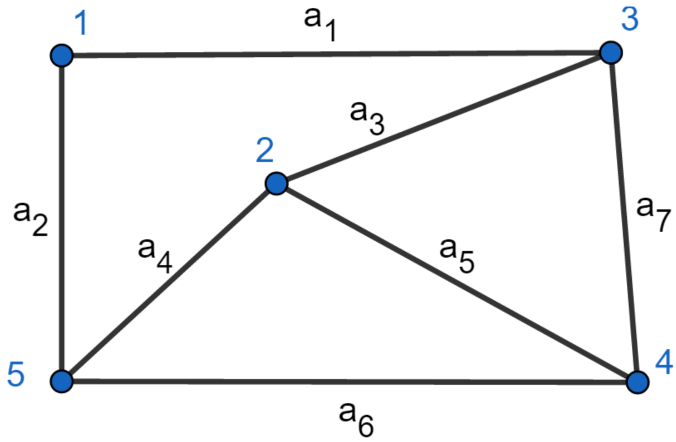
Sabemos que os nós de um grafo podem apresentar quantidades diferentes de arestas incidindo sobre eles. Em um grafo não orientado, o *grau* de um vértice é dado pelo número de arestas distintas que incidem sobre ele. Para cada laço de um nó será contabilizado duas unidades além das arestas comuns. Isso significa que se um vértice possuir um único laço e ainda outras duas arestas distintas incidindo sobre ele, então seu grau será 4 e escrevemos $d(i) = 4$, em que i é o vértice em questão. Para os grafos orientados devemos contar todos os vetores distintos que tem sua extremidade ou origem no vértice. É possível mostrar que em um grafo não orientado, a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas.

De fato, dada uma aresta de uma grafo não orientado, ela contribui com 1 unidade no grau em cada um dos seus dois vértices. Assim, cada aresta (elemento) do conjunto A contabiliza duas unidades na soma total dos graus dos vértices. Concluímos que a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas.

2.4 CAMINHO, CADEIA, CICLO E CIRCUITO

Vamos agora definir algumas trajetórias importantes que podem ser feitas em um grafo. Vamos considerar um grafo $G = (V, A)$ não orientado. Um *caminho* é uma sequência de arestas em que todos os nós visitados são distintos. Como consequência, em um caminho nenhuma aresta ou nó é visitado mais de uma vez. Na Figura 8 podemos observar alguns exemplos de caminhos em um grafo não orientado.

Figura 8 – Caminhos em um grafo não orientado

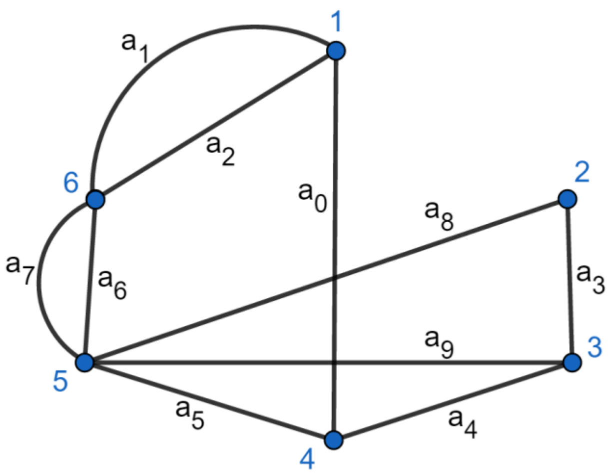


Fonte: Do autor, 2019.

Neste grafo, podemos determinar uma variedade de caminhos do vértice 1 ao 4, entre eles temos: a_1, a_7 ou a_2, a_4, a_5 ou a_2, a_4, a_3, a_7. Os caminhos atentem a condição de ter arestas distintas e nós distintos, mas às vezes basta que as arestas da sequência sejam distintas. Quando isso ocorre temos uma *cadeia de arestas*, ou simplesmente *cadeia*, caracterizada por uma sequência de arestas em que todas são distintas.

Concluímos que a única diferença entre caminho e cadeia, é que no segundo caso pode haver a passagem por algum nó mais de uma vez, porém nenhuma aresta deve ser repetida. Sendo assim podemos dizer que todo caminho é uma cadeia, mas nem toda cadeia é um caminho. A Figura 9 permite extrair algumas cadeias de arestas.

Figura 9 − Grafo com diferentes cadeias de arestas



Fonte: Do autor, 2019.

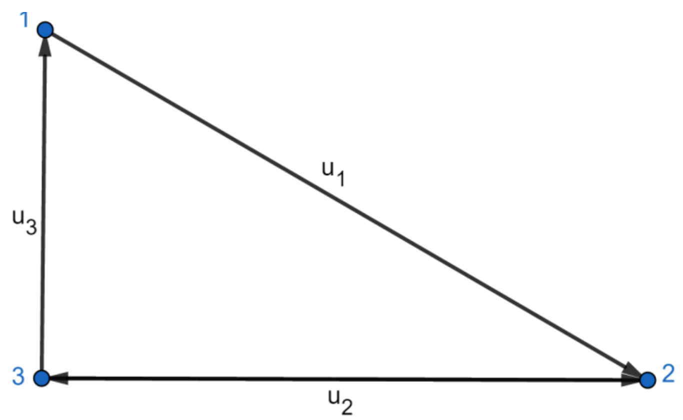
Tomando os nós 1 e 2 como exemplo, podemos construir as cadeias de arestas a_3, a_9, a_6, a_2 ou a_3, a_9, a_5, a_0 ou a_3, a_4, a_5, a_7, a_1, em que todas essas sequências são ao mesmo tempo caminho. Porém a sequência $a_8, a_9, a_4, a_5, a_6, a_1$ é apenas uma cadeia de arestas, não é caminho porque o nó 5 é visitado em dois momentos.

São comuns os problemas em que devemos sair de um ponto, passar por um conjunto de lugares específicos e retornar ao final do trajeto a origem, são os chamados ciclos ou circuitos de um grafo. Chamamos de *ciclo* toda cadeia de arestas fechada, ou seja, uma sequência de arestas distintas que inicia e termina no mesmo vértice. Considerando ainda a Figura 9, as sequências $a_8, a_6, a_2, a_1, a_7, a_9, a_3$ e a_8, a_9, a_3 são exemplos de ciclos do nó 2.

Existem dois ciclos especiais na teoria de grafos e que vão caracterizar os problemas abordados no próximo capítulo desse trabalho: o *ciclo euleriano* e o *ciclo hamiltoniano*. O primeiro, em homenagem ao matemático *Leonard Euler*, caracteriza-se por ser um ciclo que passar por todas as arestas de um grafo. O segundo trata-se de um ciclo que passa por todos os vértices de um grafo.

É possível em grafos orientados encontrar rotas que iniciam e terminam no mesmo nó, são os denominados *circuitos*. Portanto, apenas para o caso de dígrafos, chamamos de *circuito* toda sequência de arcos distintos que inicia e termina no mesmo vértice. Na Figura 10, tomando como exemplo o vértice 3, a sequência a_3, a_1, a_2 é um exemplo de circuito.

Figura 10 − Circuito em um dígrafo



Fonte: Do autor, 2019.

É importante dizer que a teoria de grafos é uma área muito rica em conceitos, e por isso muitos deles não foram e não serão mencionados por não ter relação com o que será trabalhado mais adiante. Os itens apresentados constituem uma introdução simples sobre o tema. Caso o leitor precise aprofundar no assunto, aconselha-se a consulta às obras descritas no sumário desse trabalho.

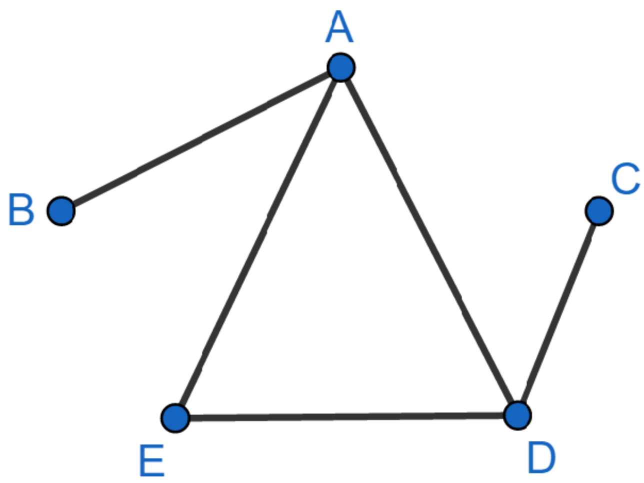
2.5 CLASSIFICAÇÕES DOS GRAFOS

Como são diversos os problemas abordados pela pesquisa operacional é necessária uma quantidade significante de modelos que possam representá-los. Os grafos são classificados de acordo com suas características, veremos agora algumas dessas classificações.

I. *Grafo Simples*: É o grafo que não possui arestas paralelas nem laço.

II. *Grafo Conexo*: É o grafo em que para todo par de vértices existe ao menos uma cadeia de arestas entre eles. Caso o grafo não seja conexo ele será chamado de *desconexo*.

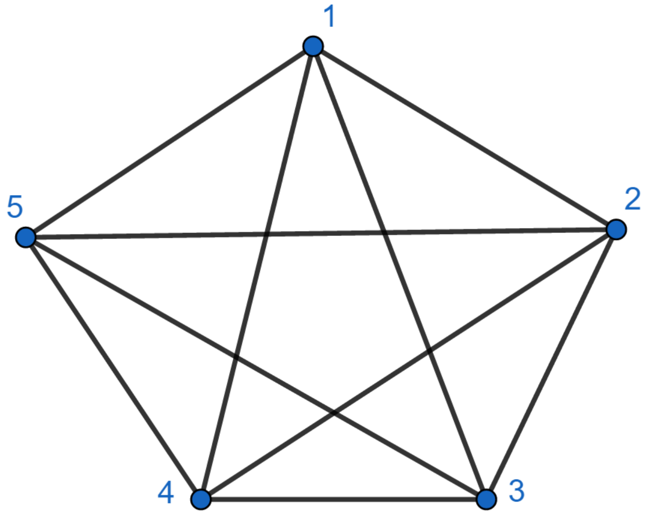
Figura 11 – Grafo simples e conexo



Fonte: Do autor, 2019.

III. *Grafo Completo*: É um grafo em que existe uma aresta associada a cada par de vértices, sendo assim cada nó é vizinho dos demais.

Figura 12 − Grafo completo

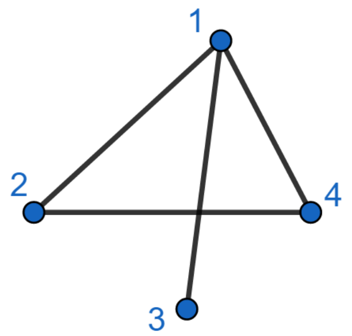


Fonte: Do autor, 2019.

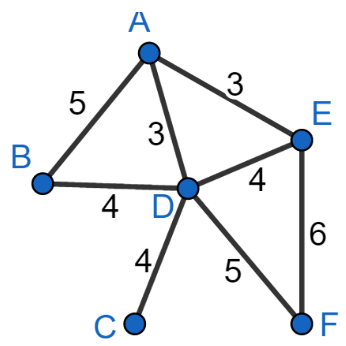
IV. *Grafo Ponderado*: É o grafo que possui valores numéricos associados as suas arestas ou arcos.

V. *Grafo Rotulado*: É um grafo que possui atribuições associados aos seus nós ou vértices, podendo ser números ou letras alfabéticas.

Figura 13 − Grafo rotulado e grafo ponderado



Grafo Rotulado

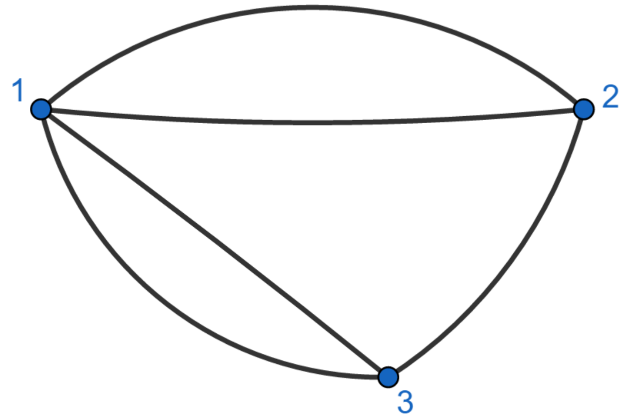


Grafo Ponderado

Fonte: Do autor, 2019.

VI. *Multigrafo*: É um grafo em que existe mais de uma aresta ligando um mesmo par de vértices, ou seja, é um grafo que possui arestas paralelas.

Figura 14 – Multigrafo



Fonte: Do autor, 2019.

2.6 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

Além da representação geométrica, existem outros tipos de representações importantes para os grafos, entre elas a matricial. É comum na área de pesquisa operacional trabalhar com problemas que envolvem a maximização ou minimização de alguma grandeza, sendo usados neste processo algoritmos computacionais que podem encontrar uma *solução ótima* para o problema analisado. Para que isso ocorra é necessária uma representação matricial para que os computadores reconheçam a estrutura de um grafo e possa armazená-lo.

Sobre esse tipo de representação, Arenales et al. (2015) diz que:

> Uma representação adequada de redes pode influenciar o tempo que um algoritmo requer para resolver o problema em um computador. Assim, existem outras representações de grafos (redes) em computadores que economizam espaço da memória e recuperam rapidamente informações de adjacência entre nós. (ARENALES et al., 2015, p. 362).

2.6.1 Representação através da matriz de adjacência

Neste tipo de representação, o grafo é expresso através de uma matriz $A = [a_{ij}]$, em que as linhas e as colunas dessa matriz estão associadas diretamente aos nós do grafo. Seus elementos quase sempre serão representados por 0 ou 1, mas há a exceção para os grafos com arestas paralelas, neste caso o elemento a_{ij} será igual ao número de arestas paralelas que ligam os vértices v_i e v_j. Em geral, é uma matriz que representa de maneira eficiente qualquer grafo, seja orientado ou não.

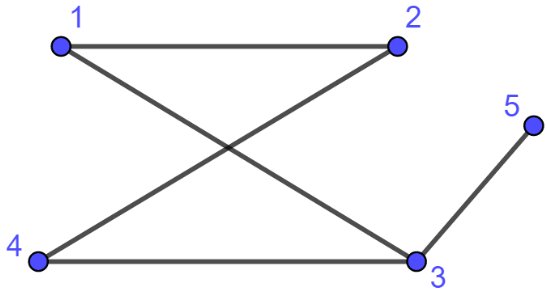
Definição: Uma matriz $(n \times n)$ $A = [a_{ij}]$ é denominada como de adjacência do grafo $G = (V, A)$ se:

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \leftrightarrow \quad \exists\, relação\ (i,j) \\ a_{ij} = 0 & \leftrightarrow \quad \nexists\, relação\ (i,j) \end{cases}$$

Tomando como exemplo um grafo $G = (V, A)$ tal que $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A = \{(1,2), (1,3), (2,4), (3,4), (3,5)\}$, sua matriz de adjacência juntamente com sua representação geométrica são dadas a seguir.

Figura 15 – Grafo não orientado e sua matriz de adjacência

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

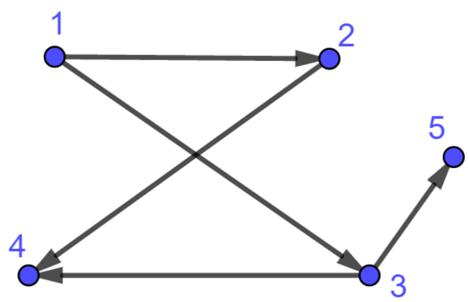


Fonte: Do autor, 2019.

Se existisse em A mais um elemento $(1,2)$, ou seja, se houvesse arestas paralelas entre vértices 1 e 2, então na matriz de adjacência A, o elemento a_{12} assumiria o valor 2 . É importante notar que para grafos não orientados toda matriz de adjacências é simétrica, logo $A = A^t$. Considerando agora um grafo parecido com o da Figura 11, porém orientado, sua matriz de adjacências e sua representação geométrica são dadas na figura a seguir.

Figura 16 – Grafo orientado e sua matriz de adjacência

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



Fonte: Do autor, 2019.

Note que ao contrário dos grafos não orientados, a simetria na matriz desses grafos não acontecerá. Ainda no grafo da Figura 16, percebe-se que o vértice 3 é sucessor de 1, logo o par ordenado $(1,3)$ pertence ao conjunto das relações. Porém $(3,1)$ não é elemento desse conjunto, e como consequência, os elementos a_{13} e a_{31} na matriz de adjacência assumiram, respectivamente, os números 1 e 0. No exemplo descrito, a matriz de adjacência é ao mesmo tempo uma matriz triangular inferior, mas isso ocorreu por coincidência, assim os demais casos não apresentaram necessariamente essa característica na matriz.

De forma geral, essa matriz sempre será quadrada. Para que não ocorram erros na sua construção é importante manter a mesma ordem dos vértices na linha e coluna da matriz, isso significa que se um vértice v_0 está representado na linha k da matriz, ele deverá estar representado também na coluna k. Dada uma matriz de adjacência, é fácil determinar se ela representa um grafo não orientado ou um dígrafo. Caso a matriz de adjacência não seja simétrica, sabemos que se trata de um dígrafo. Para saber a orientação dos seguimentos que conectam os nós, basta olhar as linhas da matriz, ela indica a origem do segmento orientado e a coluna indica a extremidade.

2.6.2 Representação através da matriz de incidência

Nesta representação, as linhas e as colunas dessa matriz correspondem respectivamente aos vértices e arestas de um determinado grafo. Esta matriz não será necessariamente quadrada e será formada pelos números 0, 1 ou -1. É uma representação muito utilizada e que também pode representar qualquer tipo de grafo.

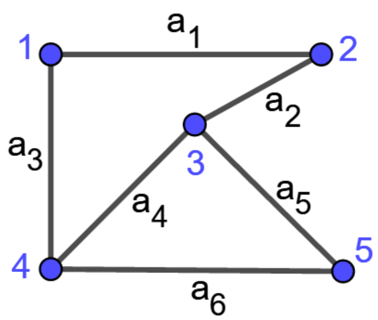
Definição: Uma matriz $(n \times m)\, A = [a_{ij}]$ é denominada de incidência do grafo $G = (V, A)$ se, para todo arco j que liga o nó k ao nó p temos:

$$\begin{cases} a_{ij} = +1 \quad \leftrightarrow \quad i = k \\ a_{ij} = -1 \quad \leftrightarrow \quad i = p \\ a_{ij} = 0 \;\; para\ os\ demais\ casos \end{cases}$$

Segundo a lei de formação definida para essa matriz, os vértices são dispostos sobre as linhas da matriz e as arestas nas colunas. Será atribuído 1 à a_{ij} toda vez que a aresta j incidir sobre o nó i, caso contrário o elemento valerá 0. Na Figura 17, pode-se analisar a matriz de incidência de um grafo não orientado de ordem 5.

Figura 17 – Grafo e sua matriz de incidência

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



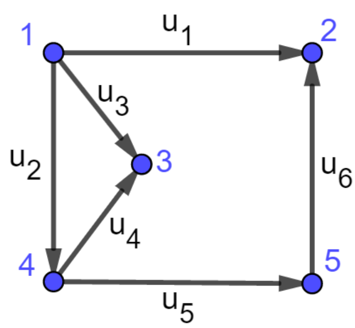
Fonte: Do autor, 2019.

É importante notar que para o caso de grafos não orientados, não teremos a presença do -1 na matriz de adjacência, afinal para este caso o sentido da ligação entre os nós não é importante. Em cada coluna da matriz existirão apenas dois elementos que serão diferentes de 0, pois cada arco do grafo está ligando apenas um par de nós.

Vamos analisar agora como fica a representação de grafos orientados utilizando a matriz de incidência. Neste caso, haverá a presença do número -1 como elemento da matriz. Toda vez que o nó i for origem do arco j, atribuiremos 1 ao elemento a_{ij}, mas se esse vértice é extremidade do arco, então $a_{ij} = -1$. Para os demais casos $a_{ij} = 0$. A Figura 18 apresenta uma matriz de incidência e a representação geométrica de um dígrafo de ordem 5.

Figura 18 − Grafo orientado e sua matriz de incidência

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



Fonte: Do autor, 2019.

Tomando como exemplo o arco u_3, podemos ver no grafo que a origem e a extremidade desse arco são respectivamente os nós 1 e 3. A terceira coluna representa o arco u_3, logo os elementos a_{13} e a_{33} receberam respectivamente os valores 1 e -1. Todos os outros elementos da coluna receberam o valor 0, afinal o arco u_3 só pode relacionar dois nós desse grafo.

Munido apenas de uma dessas matrizes apresentadas (adjacência ou incidência) e observando suas características é possível determinar o tipo de grafo que está sendo representado e a representação que está sendo usada. Por exemplo, a única matriz que pode ter elementos negativos é a de incidência, e isso apenas acontecerá caso o grafo representado seja orientado. Caso todos os elementos da matriz sejam 0 ou 1, devemos olhar para a ordem da matriz, pois se não for quadrada, então será de incidência de um grafo não orientado. Se a matriz for quadrada e seus elementos 0 ou 1, devemos observar a simetria da matriz, pois só a matriz de adjacência de um grafo não orientado é simétrica. Por último, se ela ainda for quadrada, com elementos 0 ou 1, e ainda não-simétrica, podemos ter a matriz de incidência de um grafo não orientado ou a matriz de adjacência de um dígrafo, mas só a primeira tem exatamente dois elementos 1 em cada coluna.

3 PROBLEMAS CLÁSSICOS

3.1 O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

Esse problema é um dos mais clássicos entre os problemas de roteamento em nós. De modo geral, o problema do caixeiro viajante envolve um conjunto de cidades em que um viajante deve encontrar uma rota que passe por todas elas, sendo que, durante o percurso, a única cidade visitada mais de uma vez é a de origem, ou seja, de onde o viajante partiu.

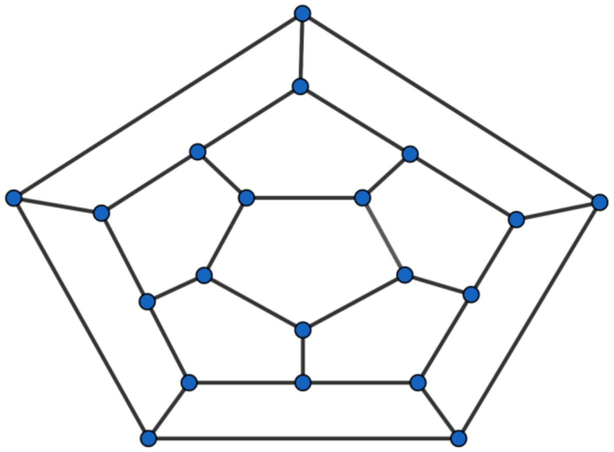
Otimizar alguma grandeza durante o percurso do viajante é o grande objetivo neste tipo de problema. Podem ser consideradas a distância percorrida, custos de viagem, tempo e outros. Para Arenales et al. (2015),

> Este é um dos problemas combinatórios mais conhecidos e pesquisados devido à sua aplicação em diversas áreas, tais como manufatura de circuitos, programação da produção, telecomunicações e sequenciamento de DNA. (ARENALES et al. 2015, p. 250)

Segundo Goldbarg e Luna (2005, p. 331), “Modernamente, a primeira menção conhecida do problema é devida a Hassler Whitney em 1934 em um trabalho na Princeton University”. O uso da teoria de grafos é fundamental para representar esse tipo problema. Os nós representam os pontos visitados e as arestas os possíveis trajetos para o viajante. Caso o viajante encontre um percurso que satisfaça as condições do problema, o mesmo será chamado de *ciclo hamiltoniano*.

Este ciclo especial – que já foi definido no primeiro capítulo – ganhou esse nome em homenagem a Willian Rowan Hamilton. Em 1857 ele propôs um jogo composto por um dodecaedro, sendo que cada um de seus vértices representava uma cidade relevante daquela época. Ele denominou o jogo de *Around the World*, e o desafio que os jogadores enfrentavam era de encontrar uma trajetória que iniciasse e terminasse no mesmo nó, passando por todos os outros somente uma vez. A Figura 19 é uma representação desse jogo.

Figura 19 – Grafo para o jogo de Hamilton



Fonte: Do autor, 2019

Encontram-se diversas situações práticas que tem relação com as condições desse problema, podemos citar os problemas de sequenciamento de tarefas, roteamento de entrega postal, manipulação de itens em estoque e outros. Em sua obra, Goldbarg e Luna (2005) determinam três características importantes do PCV, são elas:

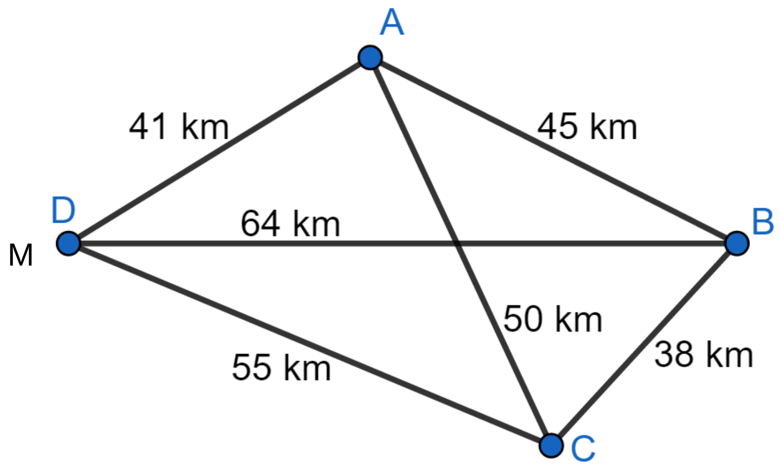
I. Grande aplicação prática
II. Enorme relação com outros modelos
III. Grande dificuldade de solução exata.

Encontra-se na teoria de grafos alguns teoremas que apresentam as condições necessárias para a existência de um ciclo hamiltoniano em um grafo, entre eles destacamos o teorema de Dirac. Esse teorema diz que dado um grafo $G = (V, A)$ em que $|V| \geq 3$ e $d(i) \geq \frac{n}{2}$ para todo $i \in V$, então G possui um ciclo hamiltoniano. Para uma demonstração formal desse teorema recomendamos (MELO, 2014). Também recomendamos (GOLDBARG, GOLDBARG, E. 2012) para outros teoremas que indicam se existe um ciclo hamiltoniano em um grafo.

3.1.1 Técnicas e algoritmos para solução do problema

Analisaremos neste momento técnicas e algoritmos que podem gerar a solução ótima para o PCV. O termo "solução ótima" é dado a melhor solução dentre as possíveis. Neste caso, essa solução corresponde ao ciclo hamiltoniano de menor custo. Vamos considerar o caso mais comum do PCV, em que um grafo $G = (V, A)$ é completo, sendo V um conjunto de cidades e A o conjunto das estradas que as conecta. Por ser completo, teremos uma estrada ligando qualquer par de cidades. O objetivo do problema será encontrar o ciclo hamiltoniano com a menor distância percorrida, ou seja, encontrar a rota mais curta que permite sair e retornar para a mesma cidade, passando uma única vez pelas cidades intermediárias. A Figura 20 contém o grafo completo que será analisado.

Figura 20 - Grafo completo e ponderado



Fonte: Do autor, 2019.

As cidades que devem ser visitadas pelo caixeiro viajante estão representadas pelos pontos A, B, C e D, já os segmentos expressão as estradas que conectam esses municípios. Este grafo além de completo é ponderado, pois foram associados pesos as suas arestas, neste caso a distância em quilômetros.

Considerando o ponto A como ponto de partida, uma das primeiras estratégias é gerar todos os possíveis ciclos, calculando em seguida o custo de cada um, possibilitando determinar o melhor caminho. Esse método é chamado de *enumeração explícita* ou *método da enumeração completa*. Analisando o problema, é necessário calcular a distância em todos os $3!$ ciclos possíveis que iniciam no ponto A. A Tabela 1 apresenta esses ciclos e os respectivos custos de cada um.

Em um grafo completo, determinar o número total de rotas que satisfazem ao problema PCV consiste em calcular uma permutação sem repetição dos nós, ou seja, é um problema de análise combinatória. Já generalizando, se o conjunto V é composto de n cidades, e fixando uma delas como origem da partida, então teremos $(n-1)!$ ciclos hamiltonianos. Mas desse total, metade correspondem aos ciclos inversos, que geralmente possuem o mesmo custo. Temos como exemplo os ciclos inversos A – B – C – D – A e A – D – C – B – A. Já em relação ao número de arestas, em um grafo completo cada nó e vizinho dos demais, assim o total de ligações do grafo é dada por $\frac{n(n-1)}{2}$, que é o equivalente ao total de subconjunto de dois elementos de V.

Tabela 1 − Ciclos hamiltonianos do grafo e seus custos

Ciclos	Distância Total
A – B – C – D – A	$45 + 35 + 55 + 40 = 175$km
A – B – D – C – A	$45 + 68 + 55 + 60 = 228$km
A – D – B – C – A	$40 + 68 + 38 + 60 = 206$km
A – D – C – B – A	$40 + 55 + 35 + 45 = 175$km
A – C – B – D – A	$60 + 38 + 68 + 40 = 206$km
A – C – D – B – A	$60 + 55 + 68 + 45 = 228$km

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019

Observando a tabela, podemos perceber que a solução ótima para o problema está na primeira e quarta linha, onde o ciclo A – B – C – D – A e A – D – C – B – A produzem um trajeto com 175 km, o menor custo de todos. O problema de se usar o método da enumeração completa é que aumentando em poucas unidades o número de cidades, as possibilidades de trajetos crescem ao ponto de inviabilizar esse método.

Se aumentássemos mais cinco cidades nesse mesmo grafo completo, teríamos que analisar as distâncias dos $8! = 40.320$ ciclos possíveis presentes no grafo, o que tornaria esse método inviável para este caso, mesmo usando um computador para geração das rotas. Em seu trabalho, Monteiro (2015) analisando um problema análogo, porém com 15 cidades, diz que:

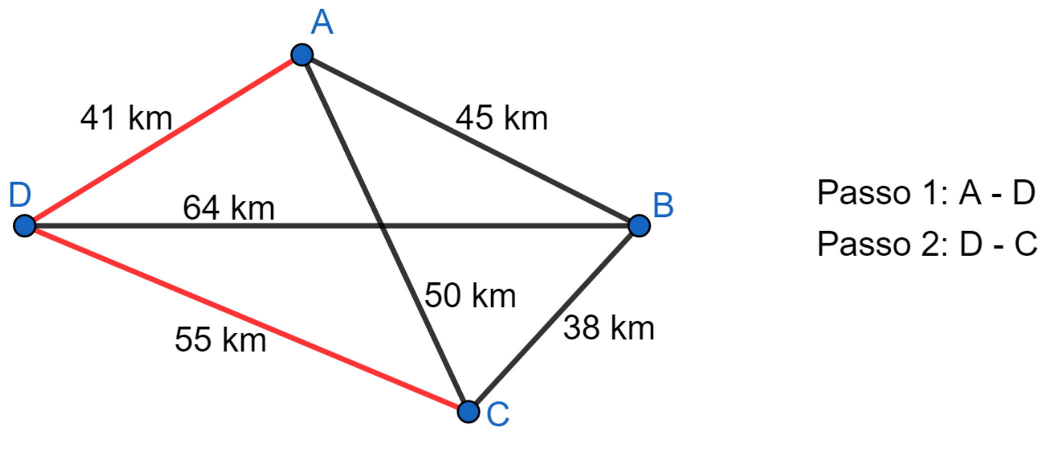
> Supondo (uma vez que cada computador pode ter um tempo de processamento diferente) que tenhamos um computador que consiga fazer 1.000 análises a cada um milissegundo. Logo teríamos 1.307.674.368 milissegundos para resolver o problema. Isso corresponde a aproximadamente 1.307.674 segundos, ou aproximadamente 21.794 minutos. Ou ainda 363 horas. Em número de dias teríamos um problema que gastaria aproximadamente 15 dias para ser resolvido. O que significa que não é possível encontrar uma solução ótima em um tempo hábil. (MONTEIRO, 2015, pag. 33).

Para os casos que em que o número de cidades inviabiliza a utilização da enumeração explícita, existem os métodos heurísticos. Para Silvia (2014), esses métodos buscam soluções em um tempo viável, porém não garantem a melhor solução para o problema. Segundo Goldbarg e Goldbarg, E. (2012), vários algoritmos foram criados para solucionar o problema do caixeiro viajante.

Um método heurístico interessante e que pode ser aplicado manualmente nesses problemas é chamado de *heurística gulosa* ou *método do vizinho mais próximo*. Partindo de um determinado nó do grafo, o algoritmo consiste em analisar e escolher dentre os nós restantes aquele mais próximo. Estando nesse segundo vértice, escolhe-se novamente outro nó, aquele mais próximo ao segundo, levando em conta que o vértice anterior não seja visitado novamente. O processo é repetido até que todos os vértices tenham sido visitados e o ciclo hamiltoniano esteja formado.

Tomando como exemplo o grafo da Figura 20, e partindo do vértice A, temos três opções de nós e devemos escolher o mais próximo, que neste caso é o D. Analisando a partir dele, podemos ir para os nós C ou B. Devemos escolher o nó C, pois ele é o mais próximo (55 km). A Figura 21 mostra as duas primeiras iterações utilizando esse algoritmo.

Figura 21 – Primeiros passos usando a heurística gulosa



Fonte: Do autor, 2019.

Estando no vértice C, a única opção é ir para B – que é o vértice mais próximo – e em seguida retornar para o vértice A. Para este caso, o método do vizinho mais próximo determinou a solução ótima para o problema, porém esse algoritmo não garante sempre a melhor solução, podendo gerar soluções ruins quando comparadas com a ótima. Percebe-se que o processo desse algoritmo é simples para se aplicar manualmente, por isso ele é importante nos grafos com muitos nós, onde a enumeração completa é ineficiente.

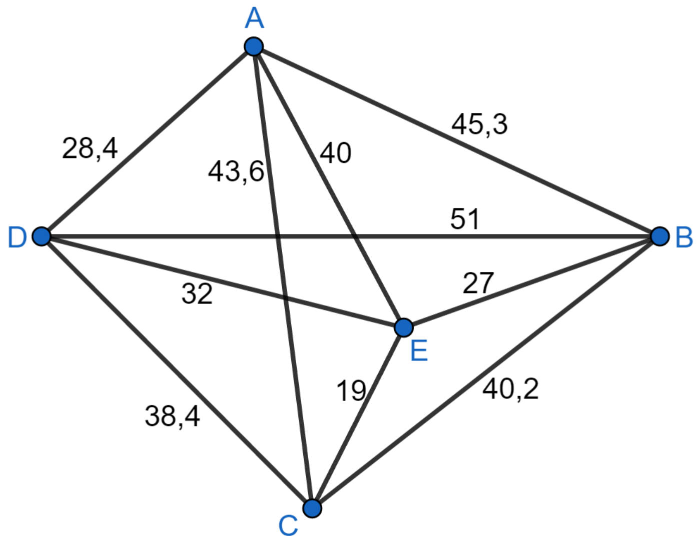
Em seu trabalho, Souza (2014) descreve outro algoritmo que pode gerar uma solução para esse problema, ele é chamado de *algoritmo de Kruskal*. Esse método se baseia em escolhas sucessivas das arestas com o menor peso, porém duas regras devem ser seguidas a cada iteração:

i) Até que se encontre um ciclo hamiltoniano para o grafo, não é permitido formar ciclos;

ii) Entre as arestas já escolhidas, não pode haver três delas incidentes em um mesmo nó.

A segunda regra desse processo é necessária para garantir a formação de uma trajetória sem repetir nenhum nó, já a primeira garante a passagem por todos eles. Para compreender como esse algoritmo funciona vamos considerar um grafo $G = (V, A)$ completo e ponderado com cinco vértices. A Figura 22 corresponde a representação geométrica desse grafo. Novamente, os vértices representam cidades e as arestas estradas. O custo de cada estrada está destacado ao lado dos segmentos.

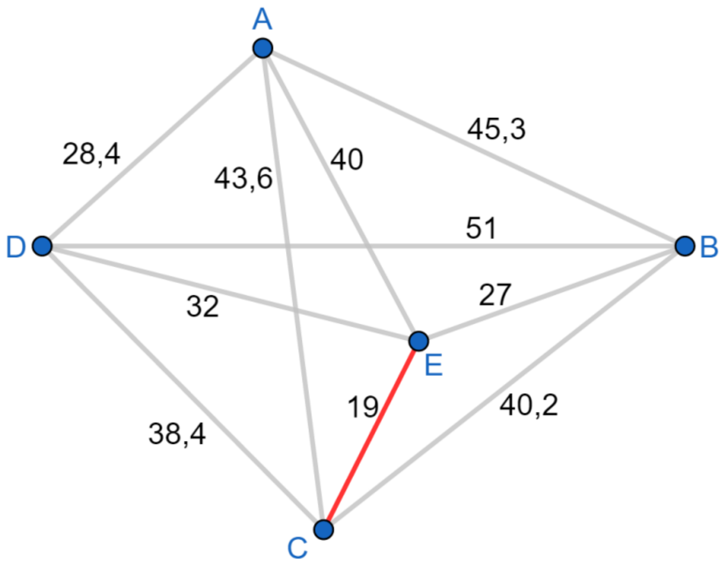
Figura 22 – Grafo para aplicação do algoritmo de Kruskal



Fonte: Do autor, 2019.

Para aplicar o algoritmo, devemos imaginar o grafo sem nenhuma de suas arestas. A partir daí, escolhemos e destacamos as arestas de menor custo, obedecendo a todo o momento as condições do algoritmo, até que ele construa a rota desejada. Analisando o grafo da Figura 22, a primeira aresta escolhida deve ser C-E, pois ela possui o menor custo (19 km) entre todas as outras.

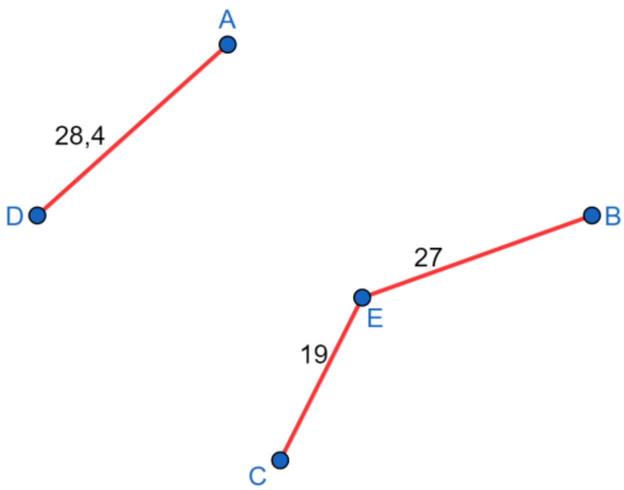
Figura 23 – Primeira aresta escolhida segundo o algoritmo



Fonte: Do autor, 2019.

Após a primeira escolha, as duas arestas que devem ser escolhidas em seguida são E-B e D-A, nesta ordem, pois são a de menor custo dentre todas as restantes. A Figura 24 apresenta as três primeiras escolhas que devem ser feitas segundo o algoritmo, elas são válidas porque as condições impostas pelo método não foram desobedecidas.

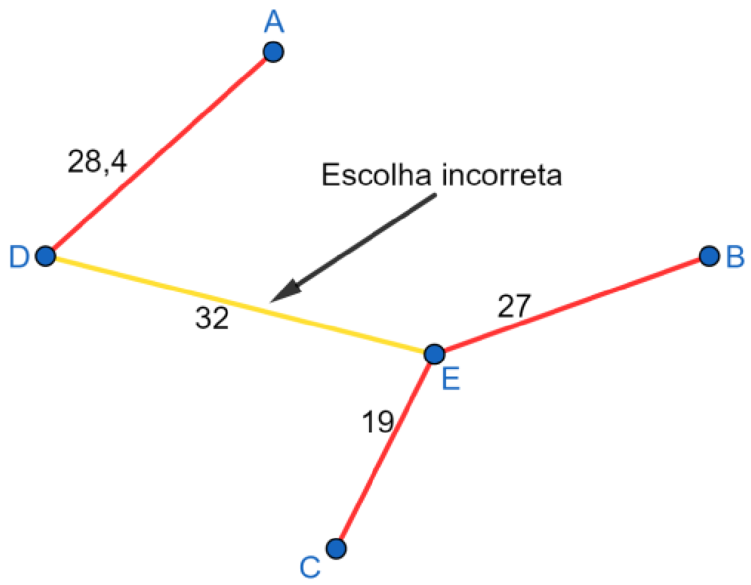
Figura 24 – As três primeiras escolhas segundo o algoritmo de Kruskal



Fonte: Do autor, 2019.

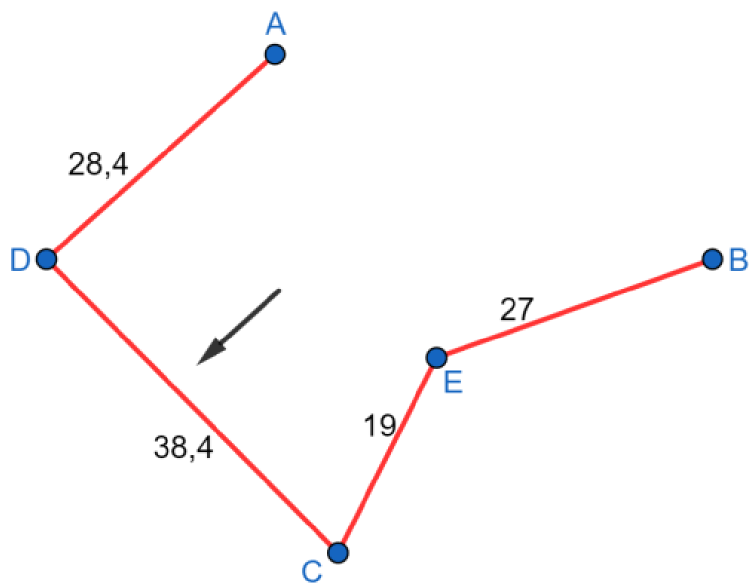
Neste momento devemos ficar atentos, pois a menor aresta das restantes é D-E (32 km), mas ao escolhê-la estaríamos contrariando a segunda regra (um nó com três arestas incidentes), pois o vértice E terá três arestas incidentes. Logo, devemos descartar essa escolha e tomar a aresta D-C (38,4 km), que é a menor depois de D-E. A Figura 25 apresenta a escolha indevida da aresta D-E, já a Figura 26 mostra a escolha correta.

Figura 25 – Aresta que não deve ser escolhida



Fonte: Do autor, 2019.

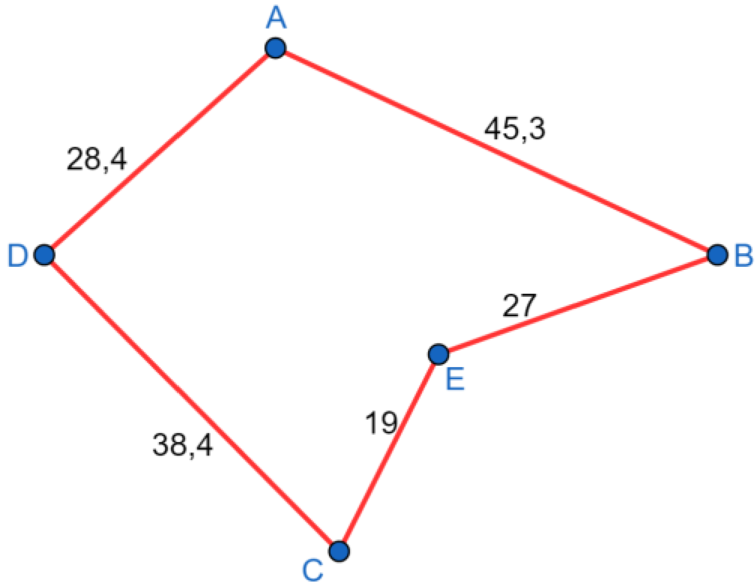
Figura 26 – Quarta aresta segundo o algoritmo



Fonte: Do autor, 2019.

A quinta e última escolha das arestas deve ser B-A (45,3 km), formando então o ciclo hamiltoniano A-D-C-E-B-A de custo total igual a 158,1 km. Havia outras escolhas de menor custo que B-A, mas todas elas iriam contra alguma das regras do algoritmo, por isso foram descartadas. Este ciclo encontrado não é a solução ótima para o problema, pois através da enumeração completa encontraríamos os caminhos A-E-B-C-D-A ou A-D-C-B-E-A (inverso) com um custo menor e equivalente a 154 km.

Figura 27 – Solução encontrada pelo algoritmo de Kruskal



Fonte: Do autor, 2019.

3.2 O PROBLEMA DO CARTEIRO CHINÊS

Apresentaremos agora outro problema clássico abordado pela teoria de grafos, chamado de Problema do Carteiro Chinês (PCC). O problema recebeu esse nome devido ao seu criador, um matemático chinês chamado Guan, que o propôs no início da década de 60, durante a revolução cultural chinesa. Segundo Arenales et al. (2015),

> Guan anunciou este problema da seguinte maneira: Um carteiro tem de cobrir seu segmento designado antes de retornar ao posto de correio. O problema é encontrar o caminho mais curto para o carteiro. (ARENALES et al., 2015, p. 257).

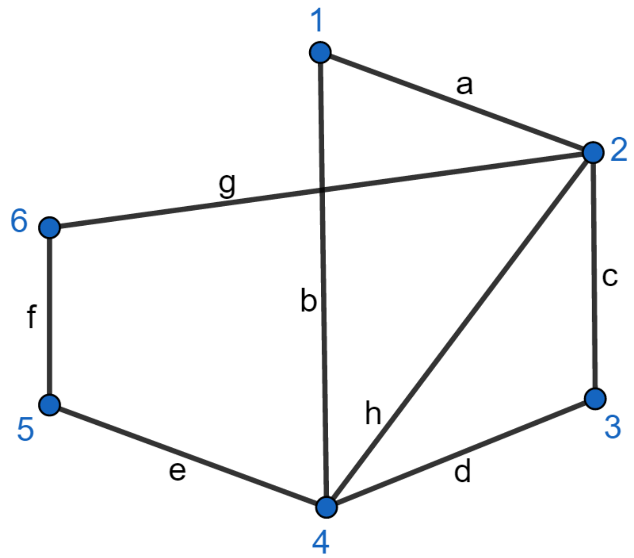
É um problema definido em grafos orientados ou não, e pertencente à classe dos problemas de roteamento em arcos. Podemos encontrar outros contextos e situações que tem relação com o problema do carteiro chinês: na coleta de lixo, patrulhamento de ruas, processamento de produtos, logística de entregas e outros. Para o grafo que representar esse problema, o objetivo é encontrar o percurso de custo mínimo que inicie e termine no mesmo vértice, passando no mínimo uma vez por todas as arestas.

Considerando um grafo $G = (V, A)$ conexo, analisaremos inicialmente o caso particular desse problema, que consiste na passagem por todas as arestas uma única vez. Quando isso é possível, dizemos que o grafo possui um ciclo euleriano. Neste caso, todos esses ciclos especiais encontrados tem o mesmo custo, afinal passam por todas as arestas uma única vez, constituindo a solução ótima para o problema.

Segundo Arenales et al. (2005), o primeiro resultado importante da teoria de grafos que tem relação com este problema foi proposto por Euler em 1736, enquanto investigava o problema das pontes de Königsberg. Euler provou que não havia solução para o problema e foi mais além, demonstrou as condições necessárias para que tal ciclo seja encontrado em um grafo conexo. Sua demonstração mostrou que um ciclo euleriano poderá ser encontrado em grafos conexos se, e somente se, o número de arestas incidentes em cada vértice é par, ou seja, todo nó tem grau par.

A ideia de que todo nó deve ter grau par justifica-se no fato de que um nó que aparece n vezes no ciclo euclidiano, conterá $2n$ arestas incidentes (n entradas e n saídas). Para uma demonstração formal desse teorema recomendamos (MELO, 2014). Na Figura 28 podemos ver um grafo que satisfaz a essas condições.

Figura 28 – Grafo com apenas vértices de grau par



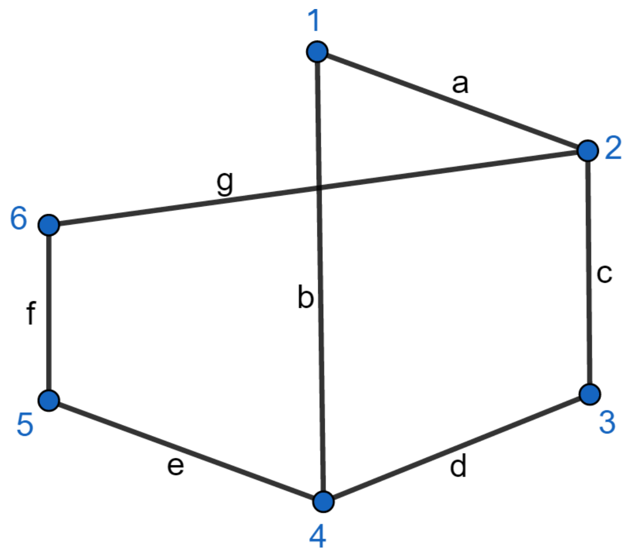
Fonte: Do autor, 2019.

Tomando como exemplo o vértice 1, podemos determinar os ciclos eulerianos: *b, e, f, g, c, d, h, a* ou *a, c, d, h ,g, f, e, b*. Considerando agora o vértice 5, podemos determinar as soluções *f, g, c, d, h, a, b, e* ou *e, d, c, a, b, h, g, f*. Não foram associadas medidas as arestas do grafo, mas todas as soluções determinadas apresentam o mesmo custo, calculado a partir da soma dos custos de cada aresta. Se retirássemos qualquer aresta desse grafo não seria mais possível encontrar um ciclo euleriano.

Quando um grafo apresenta um vértice de grau ímpar, impedindo assim a determinação de um ciclo euleriano, o problema do carteiro viajante corresponde à determinação da rota de menor custo que passe no mínimo uma vez em cada uma das arestas do grafo. Arenales et al. (2015) explica que Guan analisando esse caso, percebeu que adicionando arestas com o mesmo custo aos nós de grau ímpar, transformava todos os nós em grau par, possibilitando encontrar um ciclo euleriano. Assim, Arenales et al. (2015, p. 257) conclui que para este caso, “O problema do carteiro chinês consiste em determinar quais arestas devem ser duplicadas de forma a obter um ciclo euleriano de custo mínimo”.

Para compreender melhor esse processo, consideremos um grafo semelhante ao da Figura 28, porém excluiremos a aresta h para que não seja possível a determinação de um ciclo euleriano, afinal os vértices 2 e 4 terão grau ímpar. A Figura 29 apresenta este grafo.

Figura 29 – Grafo com nós de grau ímpar



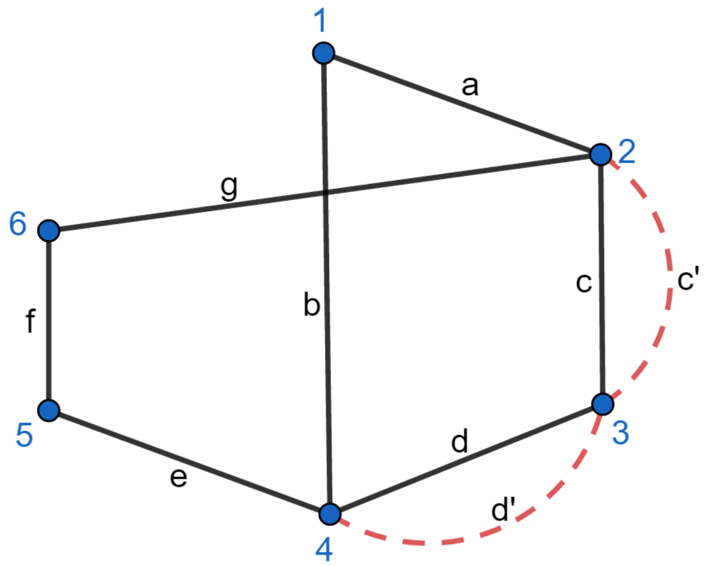
Fonte: Do autor, 2019.

Pode-se observar que é possível encontrar cadeias que atravessam por todas as arestas do grafo uma única vez, são elas: *a, b, e, f, g, c, d* ou *d, c, a, b, e, f, g*. Na primeira, a rota tem o vértice 2 como saída e o vérice 4 como chegada. Já no segundo trajeto construído acontece o contrário. Ambos os percursos tem o mesmo custo, porém não são soluções para o problema do carteiro chinês porque a rota não inicia e termina no mesmo nó. Esse caminho é possível graças a um teorema da teoria de grafos que afirma que se um grafo conexo tem exatamente dois vértices v_1 e v_2, ambos com grau ímpar, então existe um caminho entre v_1 e v_2. A ideia para demonstração dessa propriedade é imaginar uma aresta que conecta v_1 a v_2. Com isso, o grau desses vértices passa a ser par e um ciclo euleriano pode ser formado. Assim, basta criar um ciclo que saia de um deles e que o penúltimo vértice a ser visitado corresponde ao outro.

Analisaremos agora algumas arestas que podem ser replicadas para determinação de alguma solução. É importante dizer que as arestas não podem ser replicadas em qualquer par de vértices ou ter um custo diferente das já observadas no grafo. Assim, as arestas criadas só poderão ser adicionadas em vértices que já estão relacionadas, replicando o mesmo custo observado na relação entre eles.

Esse processo não tem o objetivo de criar novas arestas e consequentemente mudar a estrutura do grafo, elas servirão para determinar quais arestas serão repetidas durante o percurso. Na Figura 30, foram replicadas as arestas *c* e *d*, equivalentes a respectivamente, *c’* e *d’*. Neste grafo não foram associados custos as arestas, porém as arestas replicadas devem ter a mesma medida (custo) em relação as suas originais.

Figura 30 – Grafo com arestas replicadas



Fonte: Do autor, 2019.

Neste momento o grafo atende as condições demonstradas por Euler, afinal todos os nós tem grau par, assim é possível encontrar um ciclo euleriano. Partindo do vértice 1, temos o seguinte percurso: *a, c, d, e, f, g, c’, d’, b*. Lembrando que c’ e d’ não são “novas arestas”, elas apenas nos dizem que as arestas c e d foram repetidas durante o trajeto. A rota apresentada não é a solução ótima para o problema, afinal não foram associados custos as arestas. Esse exemplo apenas mostra como funciona esse processo. A cada conjunto de arestas replicadas obtém-se um ciclo euleriano diferente, assim a solução ótima para o problema corresponde ao ciclo especial com o menor custo.

4 ROTEIRO DE AULA

O início desse capítulo será dedicado à discussão sobre o papel do professor durante as aulas de modelagem matemática na escola. Em seguida serão apresentadas atividades adaptadas para alunos do 8º ano do ensino fundamental, abordando conceitos da teoria de grafos e alguns de seus problemas mais comuns. As atividades foram criadas observando-se as competências específicas da matemática na formação do aluno, além de habilidades que devem ser desenvolvidas no ensino fundamental. No apêndice desse trabalho encontram-se os planos de aula relativos a cada uma dessas atividades.

4.1 MODELAGEM MATEMÁTICA E O PAPEL DO PROFESSOR

Entre os dez objetivos do ensino fundamental presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN – Matemática), destaca-se:

> Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação. (PCN – Matemática, 1997, p. 6).

Para alcançar esses objetivos, o currículo de matemática e as práticas pedagógicas são discutidos e alterados frequentemente, buscando promover melhorias no ensino. Este trabalho propõe a inclusão do conceito de grafo no currículo dos alunos, onde através de atividades adaptadas, eles possam utilizá-lo na representação e solução de problemas.

As atividades propostas nesse trabalho visam inserir o aluno em um contexto de modelagem matemática, onde os grafos serão uma importante ferramenta na análise dos problemas. Para Almeida, Silva e Vertuan (2013),

> Uma atividade de modelagem matemática, nesse contexto, envolve fases relativas ao conjunto de procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema as quais caracterizamos como: inteiração, matematização, resolução, interpretação dos resultados e validação. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p.15).

Na primeira etapa deste processo, a inteiração, o aluno deve inteirar-se sobre o problema, compreendendo seu contexto e reunindo as informações que acha relevante (dados quantitativos e qualitativos). Já na fase de matematização, buscará meios de transformar a linguagem natural do problema em uma linguagem matemática, relacionando as características do problema com conceitos, técnicas ou procedimentos matemáticos que conhece.

Durante a resolução, é nesta fase que o aluno construirá o modelo matemático que julga ser coerente com o problema abordado, sendo à base desse modelo os conceitos reunidos na fase anterior. Munidos dos resultados apresentados pelo modelo, entramos na última fase desse processo, onde os resultados obtidos serão analisados e validados. A validação corresponde à comparação entre os resultados obtidos e as informações iniciais do problema, verificando então a capacidade do modelo em representá-lo.

Atualmente discute-se muito sobre o papel do professor durante atividades de modelagem matemática em sala de aula. Por se tratar de uma situação que envolve investigação, análise e criatividade por parte do aluno, o professor não pode simplesmente entregar as respostas a todos os questionamentos dos estudantes.

Sobre o papel do professor, o PCN – Matemática diz que,

> Outra de suas funções é como mediador, ao promover a confrontação das propostas dos alunos, ao disciplinar as condições em que cada aluno pode intervir para expor sua solução, questionar, contestar. Neste papel, o professor é responsável por arrolar os procedimentos empregados e as diferenças encontradas, promover o debate sobre resultados e métodos, orientar as reformulações e valorizar as soluções mais adequadas. (PCN – Matemática, 1997, p. 31).

Sob essa perspectiva, o professor deve atuar em conjunto com o aluno para que ele seja o protagonista das suas soluções, apontando caminhos que podem ser adotados e questionando os resultados já alcançados. Para Almeida, Silva e Vertuan (2013), a postura do professor durante as atividades de modelagem matemática deve ser como orientador. Dessa forma, afirmam que:

> [...] a) orientar é indicar caminhos, é fazer perguntas, é não aceitar o que não está bom, e sugerir procedimentos; b) orientar não é dar respostas prontas e acabadas, orientar não é sinalizar que "vale tudo"; c) orientar não é esperar que o aluno simplesmente siga exemplos [...]. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p.24).

4.2 PROPOSTAS DE ATIVIDADES E RECOMENDAÇÕES

Nesse trabalho são propostas cinco atividades relacionadas à teoria de grafos. Essas atividades foram elaboradas com foco nos alunos do 8º ano do ensino fundamental. O objetivo das atividades é apresentar uma nova ferramenta (grafos) na resolução de problemas, além de desenvolver e consolidar habilidades dessa etapa do ensino. Sabe-se que a resolução de problemas é um recurso importante no ensino da matemática, mas que deve ser analisado e discutido com cautela. Segundo o PCN – matemática, “os problemas estão se distanciando cada vez mais da sua função no ensino, sendo utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos adquiridos durante as aulas”. (PCN – Matemática, 1997, p. 28). Durante a construção das atividades, houve a preocupação de seguir algumas recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), que lista alguns princípios a serem seguidos, dentre eles:

> O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
>
> A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (PCN – Matemática, 1997, p.32).

A primeira atividade proposta é denominada “*Construindo um mapa”* e ela traz um problema relacionado à construção de um mapa. É dado aos alunos um conjunto de cidades e um conjunto de estradas distintas que as conectam. É importante que o conjunto de estradas não represente, pelo menos nesse primeiro momento, as estradas reais entre as cidades. A seguir, a atividade pode ser visualizada.

ATIVIDADE 1 – Construindo um mapa

Problema Proposto

Os municípios de Franca (SP), Batatais (SP), São Tomás de Aquino (MG), São Sebastião do Paraíso (MG), Cássia (MG) e Patrocínio Paulista (SP) são cidades próximas uma da outra e que possuem estradas que as conectam. Use as informações a seguir para construir um mapa que represente as cidades mencionadas e os caminhos entre elas.

- *Há duas estradas de Franca para Batatais*
- *Há duas estradas de Franca para Patrocínio Paulista*
- *Há uma estrada de Batatais para Patrocínio Paulista*
- *Há uma estrada de Patrocínio Paulista para São Tomás de Aquino*

- *Há uma estrada de Franca para Cássia*
- *Há duas estradas de Batatais para São Sebastião do Paraíso*
- *Há uma estrada de Cássia para São Sebastião do Paraíso*
- *Há uma estrada de São Tomás de Aquino para São Sebastião do Paraíso*
- *Todas as estradas mencionadas acima são distintas uma da outra.*

O professor não deve comentar ou explicar nada previamente sobre a teoria dos grafos, apenas solicitar aos alunos que usem sua própria criatividade na construção desse mapa. O objetivo é desenvolver algum tipo de representação para as cidades e as estradas mencionadas no problema, levando em conta o número exato de caminhos especificados. Na sua aplicação, o professor deve atuar apenas como um mediador, deixando os alunos à vontade para escolher os elementos presentes no mapa.

É importante que o professor explique aos alunos que as estradas construídas não podem se interceptar em qualquer ponto, deixando claro que elas só se conectam nas cidades. O motivo dessa observação é que se espera que os grupos se preocupem em analisar as posições das cidades no mapa. Por estar trabalhando em conjunto na busca de uma solução, o oitavo objetivo das competências específicas de matemática está sendo trabalhado:

> Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BNCC, 2017, p. 265).

Ao final da atividade é importante que o professor promova uma discussão dos resultados apresentados pelos alunos. É importante que os grupos apresentem suas ideias para os demais. Para finalização dessa tarefa, o professor pode preparar uma aula expositiva para resolver o mesmo problema, mas agora usando os grafos para modelagem. Dessa forma os alunos podem constatar a simplicidade e eficiência dessa estrutura. Nesta aula, pode-se também apresentar outros grafos e definir os conceitos de vértice, aresta, caminho, cadeia, ciclo, grau de um vértice e o for necessário para as atividades que serão trabalhadas. Em seguida, o professor pode comparar os grafos aos mapas que foram criados, a fim de determinar os grupos que usaram a representação geométrica da teoria mesmo sem conhecê-la.

Espera-se que a atividade seja concluída em uma aula de 50 minutos, além de mais uma aula para comparação dos resultados e apresentação do conceito de grafo.

A segunda atividade proposta foi planejada para ser uma continuidade da primeira, portanto, os alunos construirão um novo mapa fazendo o uso dos grafos e atribuindo custos as suas arestas. O professor utilizará o recurso do computador e da internet para ensinar os alunos como usar a ferramenta online Google Maps. É importante que sejam mantidos os grupos. A atividade proposta pode ser visualizada a seguir.

ATIVIDADE 2 – Um mapa real

Problema Proposto

Utilizando algum software no computador ou celular, construa um grafo que represente de maneira real as cidades e estradas da ATIVIDADE 1 (já realizada). Represente também os comprimentos das estradas na unidade de medida km. Após a construção desse mapa, responda as perguntas:

A - Liste algumas rotas de Franca (SP) a Batatais (SP) e a distância de cada um desses trajetos. Determine qual o melhor e o pior caminho entre as rotas determinadas.

B - Liste algumas rotas de Franca (SP) a São Sebastião do Paraíso (MG) e a distância de cada um desses trajetos. Determine o melhor e o pior caminho entre as rotas determinadas.

C - Existe alguma rota saindo de Franca que passe por todas as outras cidades somente uma vez e retorne para a cidade da partida? Se sim, liste os caminhos que você encontrou e determine aquele com a menor distância.

O objetivo é construir um novo mapa, usando agora a representação geométrica dos grafos. Pesos e rótulos serão atribuídos aos elementos do grafo, promovendo a criação de um grafo rotulado e ponderado. Através do aplicativo Google Maps, espera-se que os alunos visualizem as estradas reais entre as cidades e determinem seus custos, ou seja, a distância de cada estrada. Após o grafo ser finalizado, três itens devem ser respondidos. Os dois primeiros consistem em uma tarefa simples de determinar rotas entre dois pontos do grafo, analisando o custo total (distância) de cada rota. É importante que uma tabela seja disponibilizada para que os alunos possam construir esses trajetos.

O item c destaca-se por caracterizar-se como o problema do caixeiro viajante, e para solucioná-lo, deverão encontrar o ciclo hamiltoniano de menor custo para o grafo. O uso do termo ciclo hamiltoniano não é importante nesse momento, o professor apenas deve deixar claro aos alunos as condições para solução desse item. Espera-se que os alunos encontrem ciclos usando a estratégia do método da enumeração completa, ou seja, determinar empiricamente rotas que satisfaçam as condições do item, escolhendo no final aquela de menor custo. Espera-se que a atividade seja concluída em suas aulas de 50 minutos.

A atividade foi pensada seguindo as orientações do PCN – matemática, que diz:

> O computador pode ser usado como elemento de apoio para o ensino (banco de dados, elementos visuais), mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades. O trabalho com o computador pode ensinar o aluno a aprender com seus erros e a aprender junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as.” (PCN - Matemática, 1997, p. 35).

Espera-se que os alunos compreendam a importância do computador e seus softwares para obtenção de informação, assim como sua utilidade na solução de problemas do dia a dia. O fato de os alunos estarem usando o computador para solução de um problema implica no desenvolvimento do seguinte objetivo:

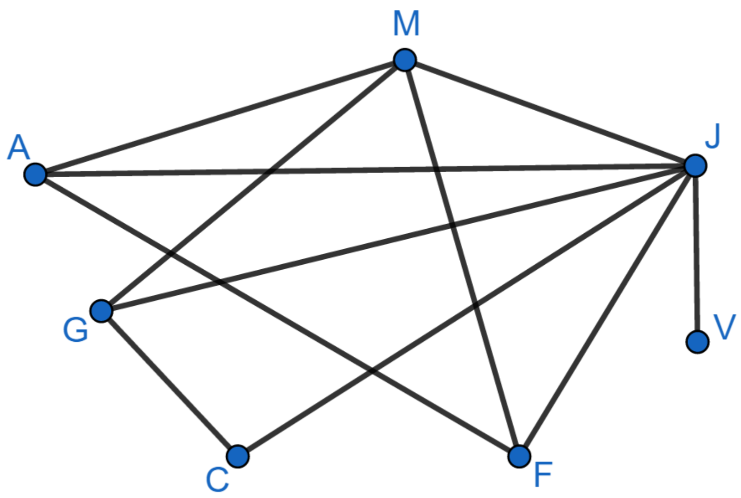
> Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. (BNCC, 2017, p. 267).

A terceira atividade, denominada os “*amigos de um grupo”,* apresenta um grafo já pronto, expressando as pessoas de uma determinada rua e a relação de amizade entre elas. O objetivo inicial é analisar o grafo, identificar a relação entre seus elementos e extrair informações que possam responder as perguntas dos itens. Espera-se que os alunos identifiquem a relação entre os elementos do grafo e os dados do problema, percebendo que os nós representam as pessoas, e as arestas a relação de amizade entre elas. Depois que os grupos compreenderem a atividade, é importante que o professor chame a atenção dos alunos para a flexibilidade dos grafos em representar situações de diferentes contextos, não limitada apenas a mapas. A atividade pode ser analisada logo a seguir:

ATIVIDADE 3 – Os amigos de um grupo

Problema Proposto

Os moradores de uma rua decidiram criar um grupo de whatsApp para se comunicar e avisar qualquer suspeita de furto. As pessoas que formam o grupo são: Maria, Carlos, João, Vitor, Antônio, Flávio e Glauco. O administrador do grupo construiu um grafo para representar as pessoas que se conhecem.



A – Quem é o administrador desse grupo, sabendo que ele conhece todos os moradores da rua?

B – Existe alguma pessoa que conhece apenas uma do grupo? Depois do administrador, quem conhece mais pessoas?

C – Construa uma tabela para representar o grafo do administrador.

Os dois itens iniciais constituem uma tarefa simples, pois observando os elementos do grafo é possível respondê-los. Por último, terão que construir uma tabela que represente o grafo do administrador do grupo. O professor deve propor aos grupos uma análise de como a tabela pode ser construída, questionando quais os elementos que devem ser distribuídos nas linhas e colunas. Espera-se que os alunos distribuam as pessoas do grafo pelas linhas e colunas da tabela. Ela deve ser preenchida de acordo com a notação escolhida pelo grupo, e ao final da atividade, terão desenvolvido uma representação que lembra a matriz de adjacência de um grafo. Espera-se que a atividade seja concluída em uma aula de 50 minutos.

A quarta atividade trabalha especificamente com o problema do caixeiro viajante. Nela, um professor necessita visitar três estabelecimentos comercias antes de retornar a sua casa. A atividade é composta por três itens correlacionados, ou seja, a solução de um deles passa pela solução dos anteriores. Ela foi planejada seguindo uma orientação do Currículo Referência de Minas Gerais (2019), que diz:

> É essencial que a Matemática, no Ensino Fundamental, garanta aos alunos a capacidade de relacionar objetos empíricos do mundo real com suas representações em tabelas, figuras e esquemas, de maneira a associar essas representações a conceitos e propriedades matemáticas que levem a induções e conjecturas. (Currículo Referência de Minas Gerais, 2019, p. 650).

ATIVIDADE 4 – A tarefa de Marcos

Problema Proposto

Marcos é professor e possui as sextas-feiras como seu dia de folga. É justamente nesses dias que ele deixa pra fazer certas atividades, como ir ao supermercado, pagar contas ou comprar algum tipo de produto. Hoje é sexta, e ele necessita ir ao supermercado, a lotérica e a farmácia, para só depois retornar para casa. Sabe-se que a distância de sua casa até esses estabelecimentos é de respectivamente 4,2 km, 3,7 km e 4,7 km. Por um aplicativo no celular, Marcos analisou a distância entre os lugares que deve visitar e fez a seguinte anotação:

I – Supermercado até a Lotérica: 5 km
II – Lotérica até a Farmácia: 5,1 km
III – Farmácia até o Supermercado: 4,8 km

A) Construa um grafo que represente a casa, os destinos de Marcos e a distância entre esses pontos.

B) Usando o princípio multiplicativo, determine o total de trajetos possíveis que ele pode optar. Faça uma lista com todas essas possibilidades.

C) Ajude Marcos a encontrar a melhor rota para cumprir seus objetivos e percorrer a menor distância possível. Faça uma lista, da melhor rota até a pior, usando a distância como critério de classificação.

O objetivo inicial é fazer os alunos interpretarem o problema construindo um grafo para visualizar a situação descrita no enunciado. Este grafo deve conter as distâncias especificadas no texto. Depois de construído, é importante que o professor chame atenção para as características desse grafo, pois nele há uma aresta ligando qualquer par de estabelecimentos, ou seja, é completo. Com o grafo pronto, os alunos devem determinar o número máximo de caminhos que satisfazem as condições do problema.

Espera-se que os alunos apliquem com êxito o princípio multiplicativo, calculando assim o total de trajetos que podem ser construídos. É importante que o professor chame atenção dos alunos para o fato de que só é possível usar o princípio multiplicativo para os grafos completos. Com esse número em mãos, deverão listar explicitamente as possíveis rotas. Espera-se que os alunos notem que algumas rotas tem relação com outras, sendo uma o caminho inverso da outra e ambas com o mesmo custo. Por último, com os trajetos já listados, os alunos deverão analisar o custo de cada um, somando as distâncias a serem percorridas durante o deslocamento do professor, classificando ao final da atividade o melhor e o pior caminho. Durante a determinação dos custos, os alunos estarão trabalhando números racionais. Espera-se que a atividade seja concluída em uma aula de 50 minutos.

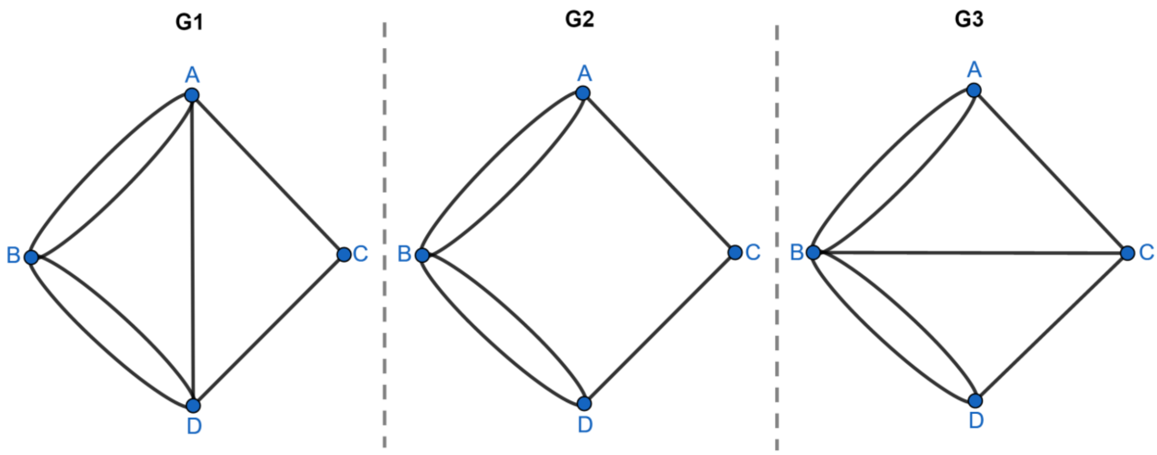
Em outra aula, também de 50 minutos, o professor pode chamar a atenção dos alunos para o fato de ser um problema simples e de fácil enumeração dos casos. Porém, quando esse número de vértices aumenta o método usado por eles não será mais eficiente. Dessa forma, o professor pode ensinar o algoritmo do vizinho mais próximo ao ainda o algoritmo de Kruskal, mostrando a eles que são processos que só devem ser usados em grafos completos e que as soluções apresentadas por eles não são necessariamente as melhores.

A última atividade criada está relacionada com o problema do carteiro chinês. São disponibilizados três grafos para serem analisados pelos alunos, cada um representa um arquipélago de ilhas e um conjunto de rotas entre elas, imaginadas por uma pessoa que está visitando o lugar. A atividade pode ser analisada a seguir:

ATIVIDADE 5 – Caminhos entre as ilhas

Problema Proposto

Em suas férias, Letícia viajou para o exterior para conhecer um conjunto de ilhas muito famosa, composta por quatro ilhas próximas uma da outra. Utilizando o mapa dessa região, Letícia imaginou alguns caminhos entre essas ilhas e construiu os seguintes grafos:



A) *Em quais dos grafos construídos por Letícia é possível encontrar uma rota que passe por todas as arestas (caminhos) do grafo, sem repetir nenhuma delas? Fique atento, pois é permitido passar por uma ilha mais de uma vez.*

B) *Utilize uma tabela para comparar os grafos G1, G2 e G3. O que você observa em relação ao número de arestas por vértice (pontos do grafo)?*

C) *Faça uma conjectura (regra) sobre quando é possível passar por todas as arestas de um grafo (sem repeti-las), ou seja, quais as condições para que esse tipo de passeio exista.*

No primeiro item, os alunos devem analisar cada um dos grafos e buscar possíveis rotas que passem por todas as arestas, ou seja, vão determinar cadeias de arestas ou ciclos eulerianos, caso existam. Espera-se que os alunos percebam que apenas nos grafos $G1$ e $G2$ é possível realizar essa tarefa, e ainda, que apenas no grafo $G1$ podemos passar em todas as arestas, retornando ao final ao vértice de partida.

O objetivo do segundo item é promover uma análise do número de arestas por vértice em cada grafo, observando a característica desses números. Espera-se que os grupos construam uma tabela que contenha essas informações. Depois de pronta, os alunos devem analisá-la, percebendo a relação entre os números pares ou ímpares dos vértices com os grafos em que houve solução no primeiro item.

Através das observações feitas na tabela, espera-se que os alunos criem uma conjectura sobre quando é possível passar por todas as arestas do grafo, sem repetir nenhuma delas, retornando ou não ao mesmo ponto de partida. Espera-se que a atividade seja concluída em uma aula de 50 minutos. Essa atividade trabalha dois objetivos importantes da matemática para ensino fundamental:

> Comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas. (PCN – matemática, 1997, p. 37).
>
> Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). (BNCC, 2017, p.256).

Essas foram as atividades criadas para se trabalhar conceitos da teoria de grafos com alunos do 8º ano do ensino fundamental. Os resultados apresentados nessas atividades e os acontecimentos durante as aulas serão tratados no próximo capítulo.

5 RESULTADOS

Todas as atividades propostas por este trabalho foram aplicadas a duas turmas do 8º ano do ensino fundamental. Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos por esses alunos durante as soluções dos problemas. Vale ressaltar que a maioria das recomendações feitas no capítulo anterior foram seguidas pelo professor responsável pelas salas. Serão relatados os principais acontecimentos durante a resolução das atividades.

5.1 PERFIS DAS SALAS

São Sebastião do Paraíso é uma cidade mineira fundada em 1821 e composta por aproximadamente 70.000 habitantes. Há várias escolas estaduais, entre elas a E.E Coronel José Cândido, onde foram aplicadas as atividades desse trabalho para duas turmas do 8º ano do ensino fundamental. A sala 8ªA é formada por 25 alunos, dos quais 68% possuem média na disciplina de matemática.

Já o 8ªB é uma sala menos numerosa, formada apenas por 20 alunos, dos quais aproximadamente 60% possuem média na disciplina de matemática. O autor desse trabalho é o professor responsável pelo ensino de matemática nas duas salas descritas.

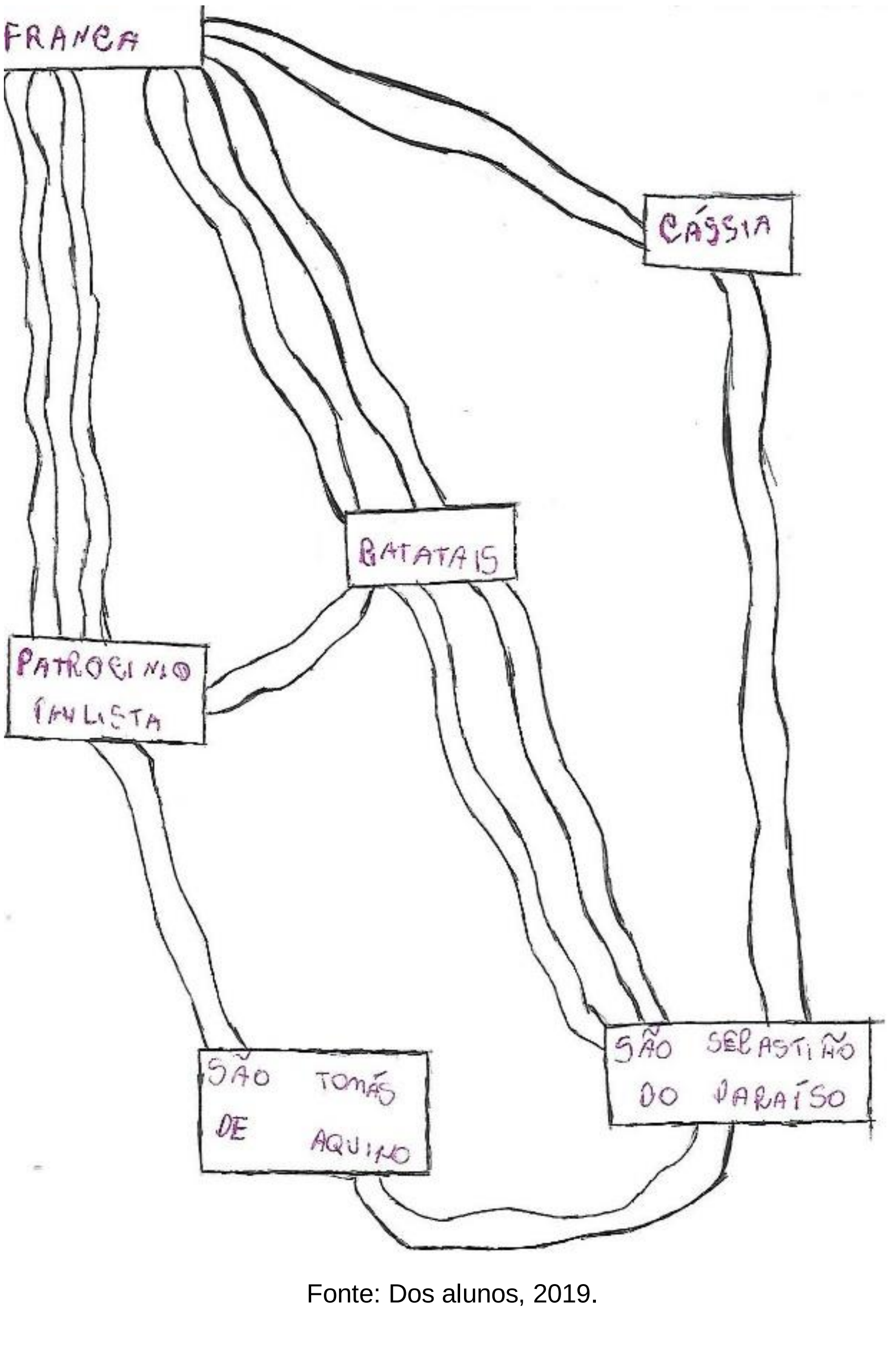
5.2 DESEMPRENHO DOS ALUNOS E RESULTADOS DOS TRABALHOS

Apresentaremos agora os resultados alcançados pelos alunos durante as soluções das atividades propostas em sala de aula. Durante o processo de investigação e solução dos problemas não houve nenhum episódio que pudesse atrapalhar o andamento dos trabalhos. Algumas soluções entregues pelos alunos ao final das aulas estão disponíveis nesse trabalho.

I. Construindo um mapa

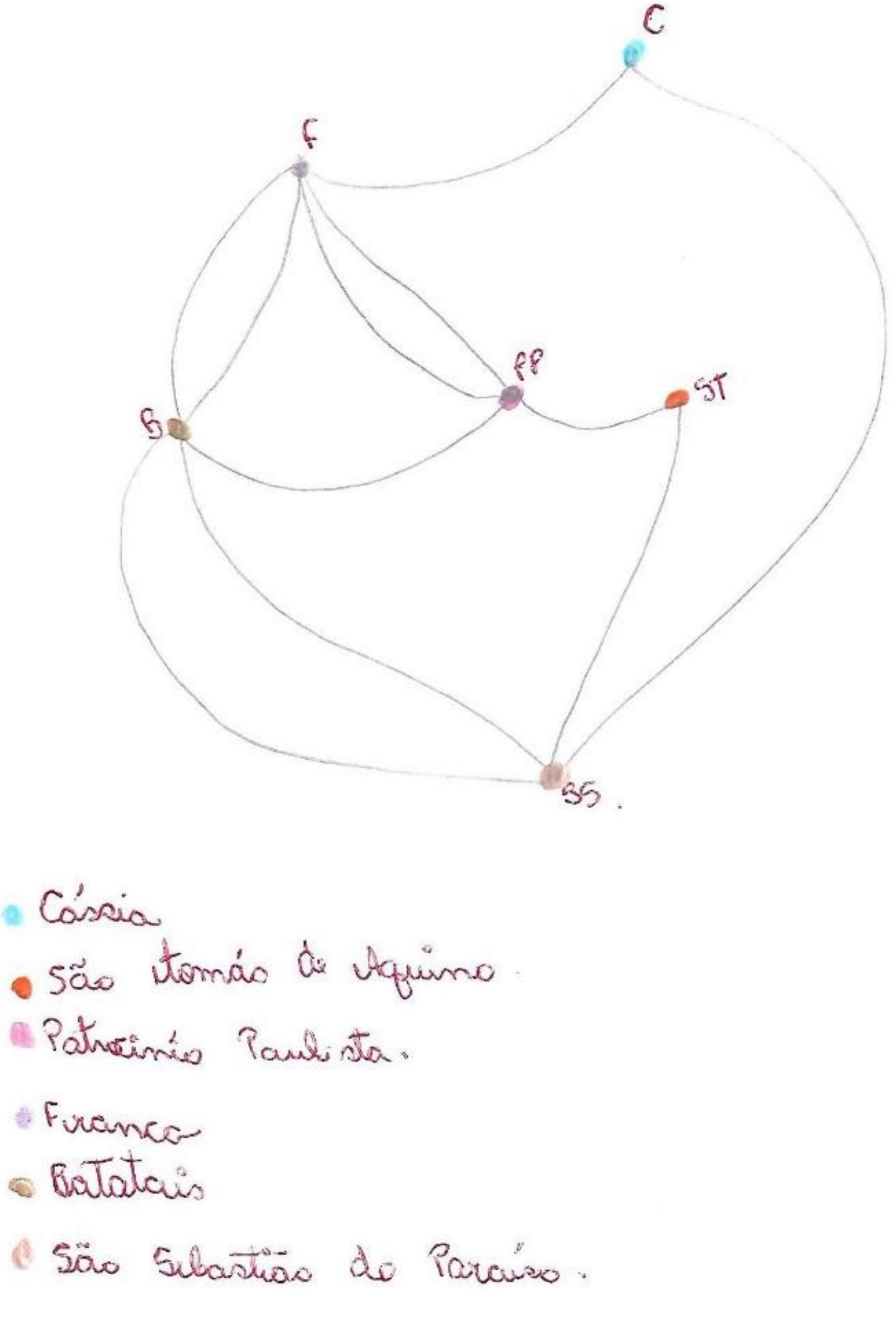
No geral, os alunos tiveram um desempenho satisfatório nesta atividade, pois todos os grupos formados entregaram uma solução para o problema. As cidades trazidas pelo problema ficam próximas ao município que os alunos residem, assim boa parte das turmas já conheciam esses lugares. Houve muitas variações de representações para as cidades e as estradas mencionadas no problema. Para as cidades, os grupos variaram entre casas normais, pontos, símbolos e outros. Já para as estradas, utilizaram retas, outros tipos de curvas e até desenhos normais. A seguir podemos ver algumas soluções propostas:

Figura 31 – Solução proposta por um dos grupos



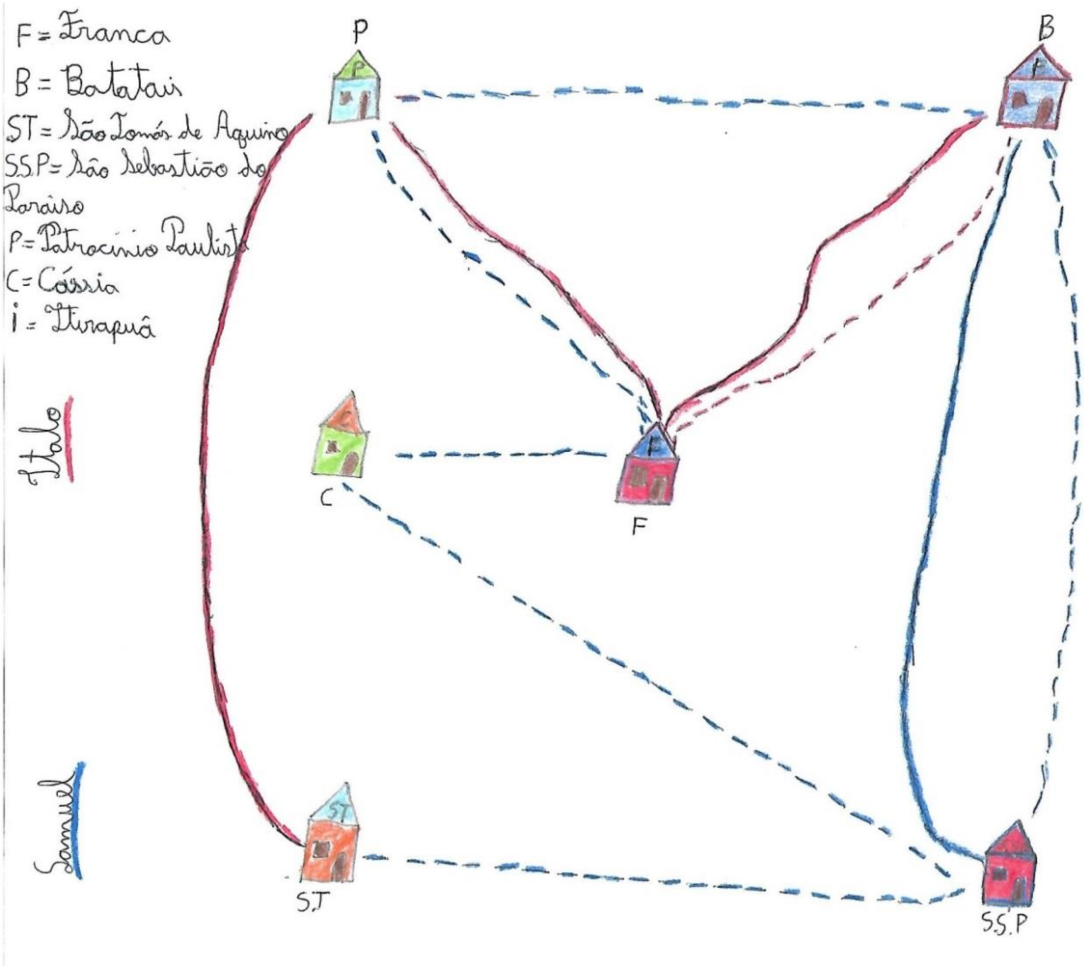
Fonte: Dos alunos, 2019.

Figura 32 – Solução proposta por outro grupo



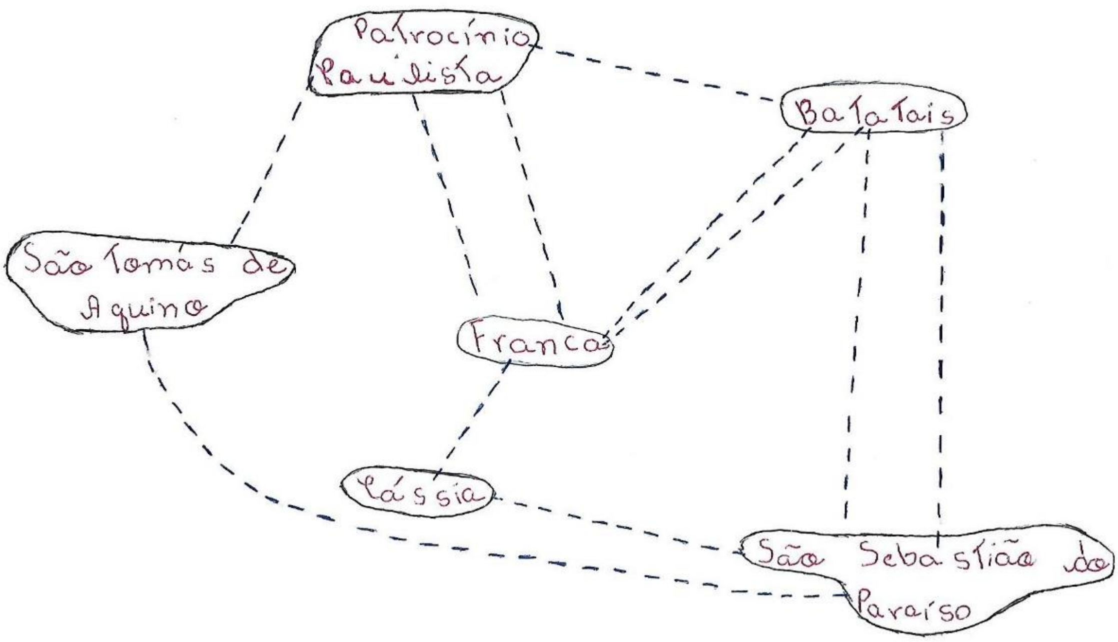
Fonte: Dos alunos, 2019.

Figura 33 – Solução com diferentes elementos



Fonte: Dos alunos, 2019.

Figura 34 – Solução em que as arestas são representadas por pontilhados



Fonte: Dos alunos, 2019.

O professor acompanhou todos os grupos e percebeu que alguns cometeram o erro de representar a mais ou a menos, o número de estradas totais que o problema propôs. Com exceção disso, os alunos não tiveram problemas em criar uma simbologia própria para o mapa. Percebe-se que alguns grupos mesmo não conhecendo a representação padrão dos grafos a utilizou em sua solução. Os alunos utilizarão exatamente uma aula para completar a tarefa. Na aula seguinte os grupos apresentaram suas soluções para os demais alunos e, em seguida, o professor resolveu o mesmo problema apresentando o conceito de grafo aos alunos. Nesta aula foram apresentados outros exemplos de grafos e eles foram usados para definir os conceitos de vértice, aresta, grau de um vértice, caminhos, cadeia e ciclo. Aproximadamente 85% dos grupos entregaram resultados satisfatórios, os restantes entregaram seus trabalhos faltando elementos ou simplesmente não fizeram as correções indicadas pelo professor.

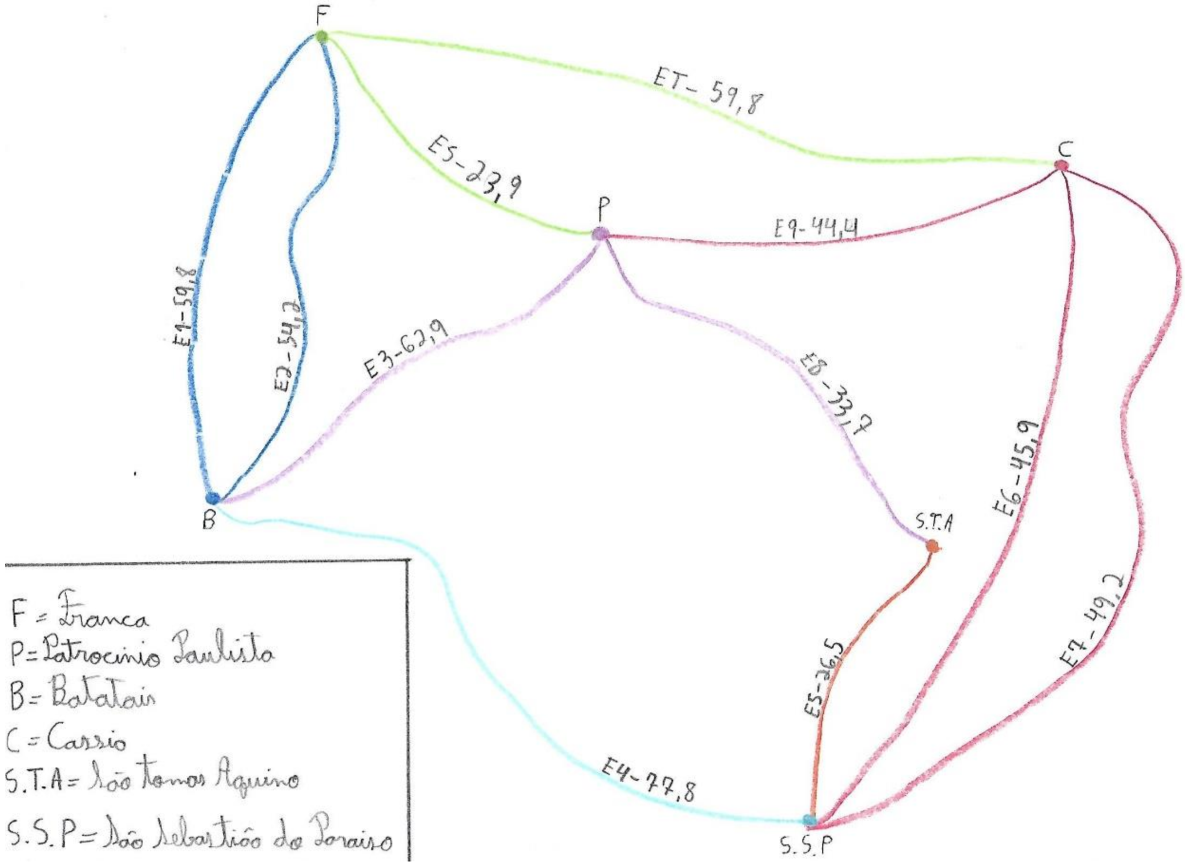
II. Um mapa real

Para realização desta tarefa, o professor havia previamente utilizado uma aula para discutir os resultados alcançados na atividade anterior, apresentando de forma expositiva o conceito de grafo e sua importância. Logo, no momento da aplicação dessa segunda tarefa os alunos já estavam familiarizados com os grafos. Com a ajuda do software Google Maps eles tiveram acesso a uma vista panorâmica das cidades da primeira atividade, o que possibilitou determinar não só o número real de estradas entre elas, mas também a distância total desses caminhos.

Alguns alunos já conheciam a ferramenta e sabiam como calcular distâncias por ela, mas grande parte não conhecia ou não sabia utilizá-la. O professor disponibilizou seu próprio computador para que os alunos pudessem utilizar o Google Maps na sala. Outros grupos preferiram usar o aplicativo pelo celular. A sala de recurso da escola possui computadores, mas o espaço físico e as condições das máquinas impediram que a atividade fosse realizada nesse ambiente.

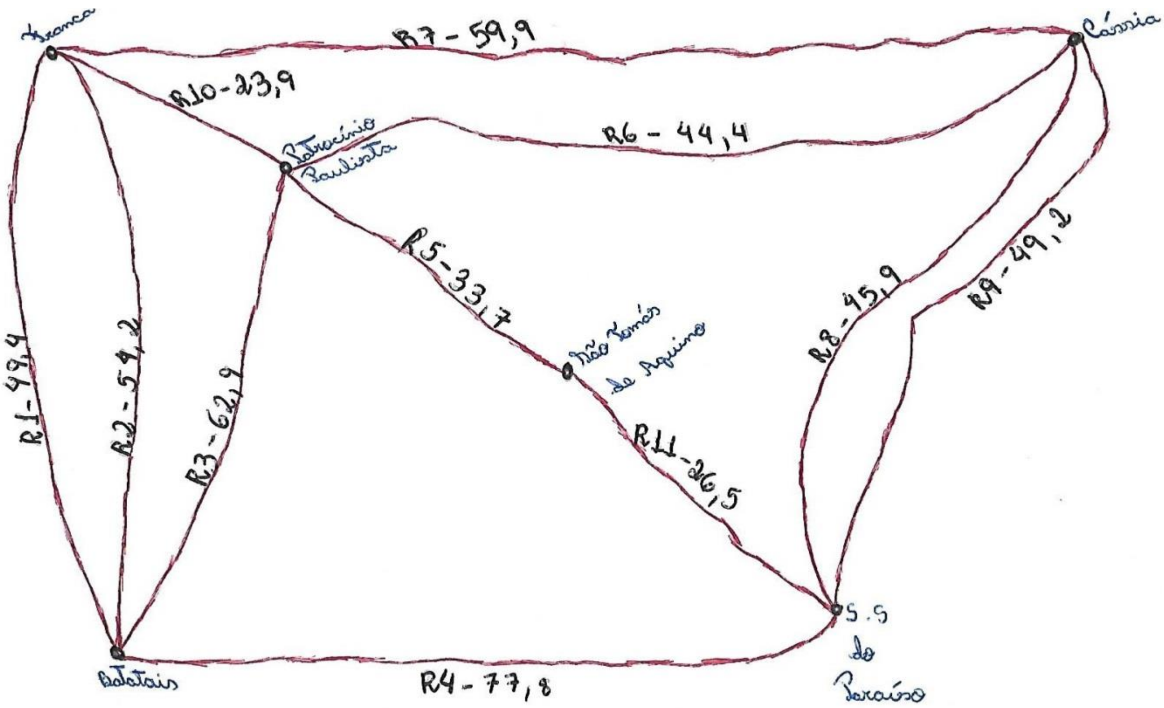
Muitos grupos conseguiram construir o novo mapa, já utilizando a representação geométrica de um grafo, além de atribuir rótulos aos nós e pesos as arestas. O professor solicitou que atribuíssem nomes as estradas, pois isso ajudaria no momento de determinar rotas entre as cidades. As figuras a seguir apresentam as soluções de alguns grupos.

Figura 35 – Grafo ponderado e rotulado construído por um dos grupos



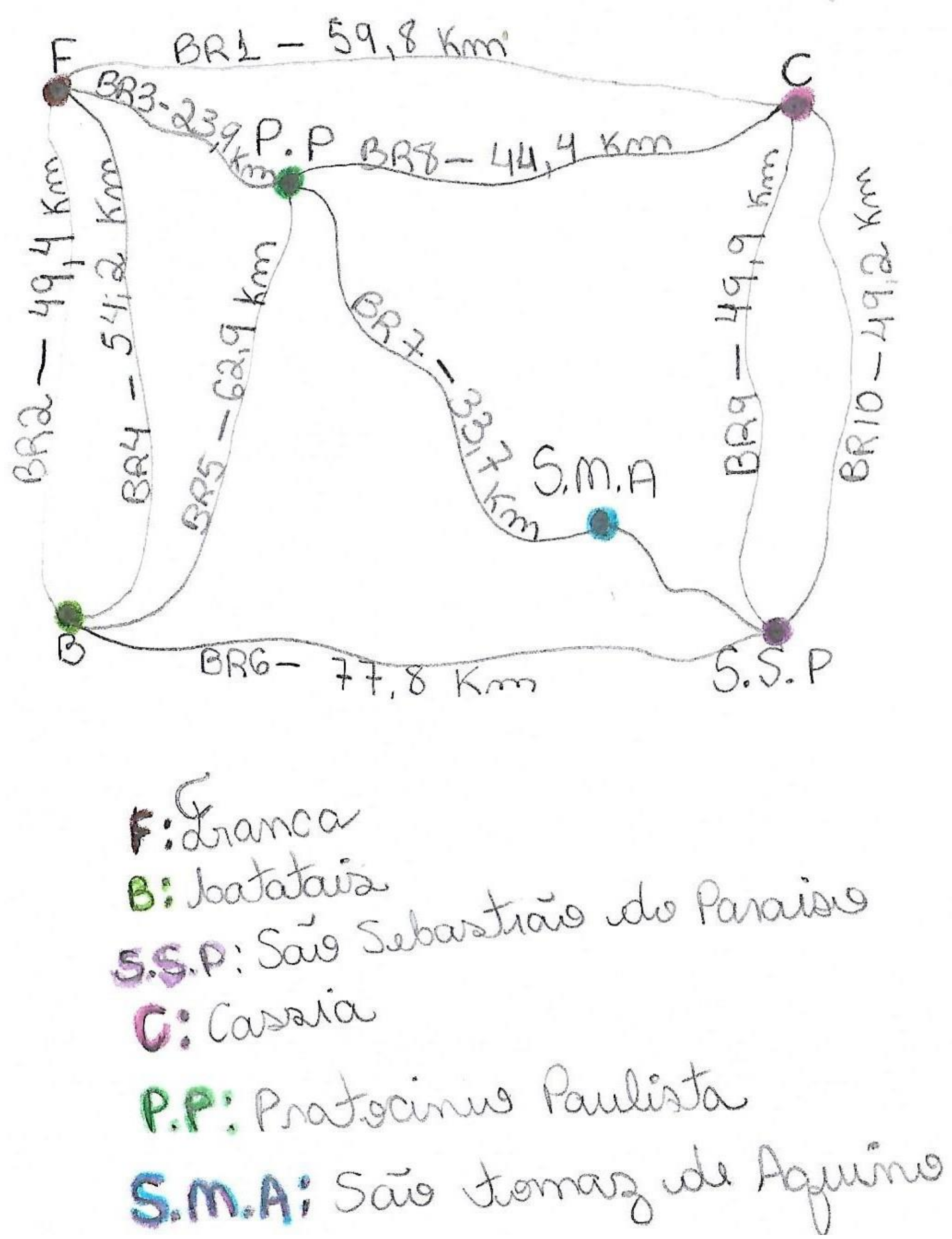
Fonte: Dos alunos, 2019.

Figura 36 – Outra solução proposta



Fonte: Dos alunos, 2019.

Figura 37 – Outro grafo proposto por um dos grupos de trabalho



Fonte: Dos alunos, 2019.

Observa-se que os grupos utilizaram a posição das cidades observadas no aplicativo. Já com o grafo pronto, partiram para solucionar os itens da atividade, cada uma com um propósito. Como os dois primeiros itens pediam para que os alunos construíssem caminhos entre duas determinadas cidades, os alunos não tiveram dificuldades em respondê-la. Houve algumas perguntas sobre o preenchimento correto da tabela e o número mínimo de rotas que deveriam ser emboçadas em cada item. Durante o cálculo das somas das distâncias, alguns grupos cometeram erros, porém o professor pediu que todos conferissem seus resultados, a fim de detectar os problemas e corrigi-los.

No último item (relacionado ao problema do caixeiro viajante) alguns grupos determinaram rotas que passaram por uma cidade intermediária mais de uma vez. Assim o professor analisou as rotas que cada grupo propôs e indicou os erros encontrados. A atividade foi finalizada em aproximadamente duas aulas e meia, porém alguns grupos conseguiram concluí-la em duas aulas. O tempo extra justifica-se no fato de um único computador estar à disposição dos alunos. Estima-se que 78% dos grupos entregaram resultados satisfatórios, os restantes não se interessaram pela atividade ou não fizeram as correções indicadas pelo professor. As figuras a seguir mostram as tabelas usadas por dois grupos diferentes no registro das rotas criadas por eles.

Figura 38 – Tabela utilizada por um dos grupos

Item A

ORIGEM	DESTINO	ESTRADAS UTILIZADAS	SOMA DAS DISTÂNCIAS	DISTÂNCIA TOTAL
Franco	Batatais	R10, R5, R11, R4	23,9 + 33,7 + 26,5 + 77,8	161,9 Km
Franco	Batatais	R10, R3	23,9 + 62,9	86,8 Km
Franco	Batatais	R1	49,4	49,4 Km
Franco	Batatais	R7, R9, R4	59,9 + 49,2 + 77,8	186,9 Km
Franco	Batatais	R10, R6, R8, R4	23,9 + 44,4 + 45,9 + 77,8	192,0 Km
Franco	Batatais	R2	54,2	

Item B

ORIGEM	DESTINO	ESTRADAS UTILIZADAS	SOMA DAS DISTÂNCIAS	DISTÂNCIA TOTAL
Franco	S.S do Paraíso	R2, 24	54,2 + 77,8	132 Km
Franco	S.S do Paraíso	R10, R3, R4	23,9 + 62,9 + 77,8	164,6 Km
Franco	S.S do Paraíso	R7, R9	59,9 + 49,2	109,1 Km
Franco	S.S do Paraíso	R1, R4	49,9 + 77,8	127,7 Km
Franco	S.S do Paraíso	R10, R5, R11	23,9 + 33,7 + 26,5	84,1 Km
Franco	S.S do Paraíso	R2, R3, R5, R11	54,2 + 62,9 + 33,7 + 26,5	177,3 Km

Item C

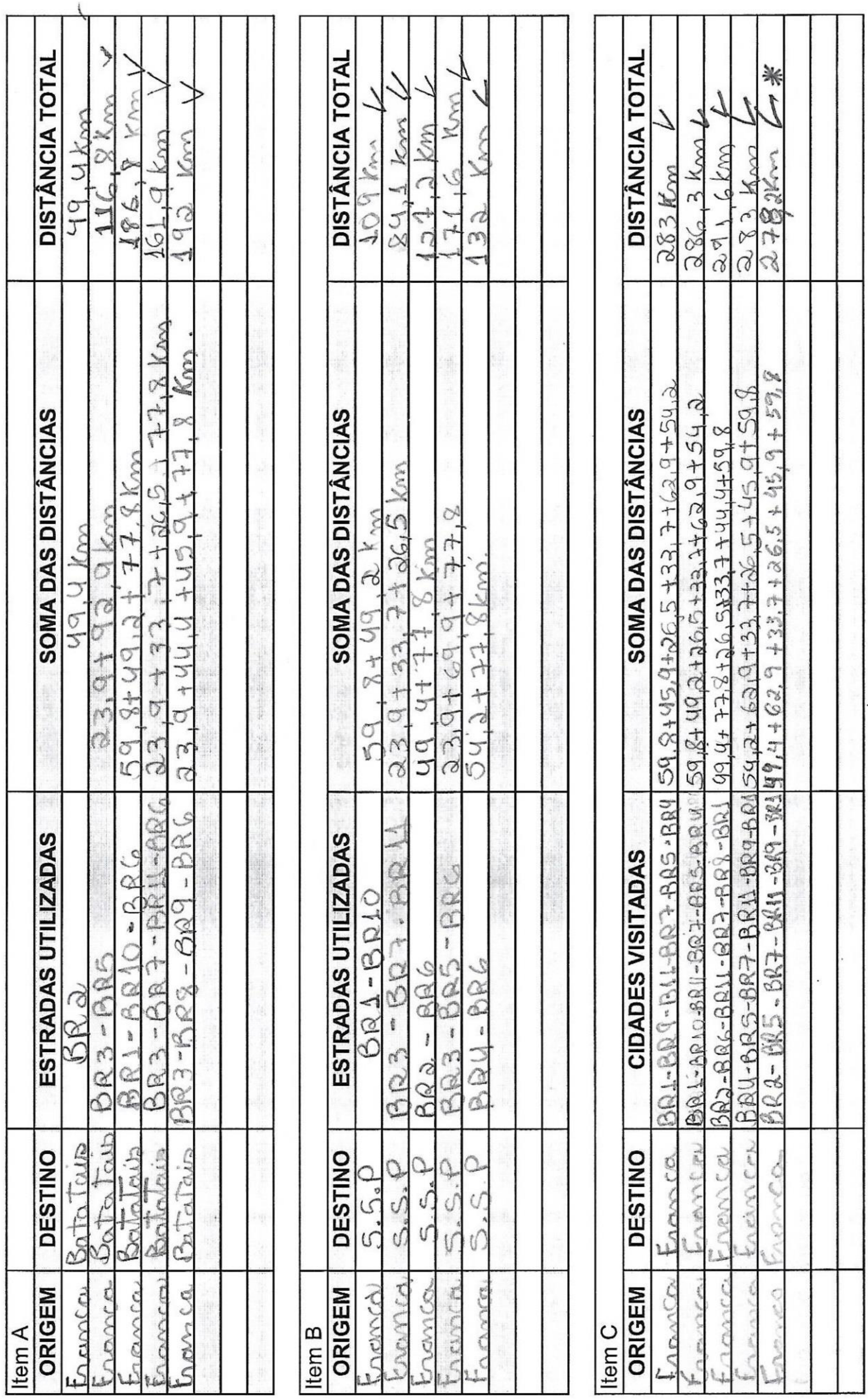
ORIGEM	DESTINO	CIDADES VISITADAS	SOMA DAS DISTÂNCIAS	DISTÂNCIA TOTAL
Franco	Franco	R1, R3, R5, R11, R8, R7	49,4 + 62,9 + 33,7 + 26,5 + 45,9 + 59,9	278,3 Km
Franco	Franco	R7, R6, R5, R11, R4, R2	59,9 + 44,4 + 33,7 + 77,8 + 54,9 + 26,5	297,8 Km
Franco	Franco	R2, R3, R5, R11, R8, R7	54,2 + 62,9 + 33,7 + 45,9 + 59,9 + 26,5	283,1 Km
Franco	Franco	R7, R9, R11, R5, R3, R1	59,9 + 49,2 + 26,5 + 33,7 + 62,9 + 49,4	281,6 Km

melhor rota

pior rota

Fonte: Dos alunos 2019.

Figura 39 – Outra tabela usada pelos alunos



Item A

ORIGEM	DESTINO	ESTRADAS UTILIZADAS	SOMA DAS DISTÂNCIAS	DISTÂNCIA TOTAL
Franca	Batatais	BR2	49,4 Km	49,4Km
Franca	Batatais	BR3-BR5	23,9+92,9km	116,8Km
Franca	Batatais	BR1-BR10-BR6	59,8+49,2+77,8Km	186,8 Km
Franca	Batatais	BR3-BR7-BR11-BR6	23,9+33,7+26,5+77,8Km	161,9 Km
Franca	Batatais	BR3-BR8-BR9-BR6	23,9+44,4+45,9+77,8 Km.	192 Km

Item B

ORIGEM	DESTINO	ESTRADAS UTILIZADAS	SOMA DAS DISTÂNCIAS	DISTÂNCIA TOTAL
Franca	S.S.P	BR1-BR10	59,8+49,2 km	109 Km
Franca	S.S.P	BR3-BR7-BR11	23,9+33,7+26,5 km	84,1 km
Franca	S.S.P	BR2-BR6	49,4+77,8 km	127,2 km
Franca	S.S.P	BR3-BR5-BR6	23,9+69,9+77,8	171,6 km
Franca	S.S.P	BR4-BR6	54,2+77,8km.	132 Km

Item C

ORIGEM	DESTINO	CIDADES VISITADAS	SOMA DAS DISTÂNCIAS	DISTÂNCIA TOTAL
Franca	Franca	BR1-BR9-B11-BR7-BR5-BR4	59,8+45,9+26,5+33,7+62,9+54,2	283 Km
Franca	Franca	BR1-BR10-BR11-BR7-BR5-BR4	59,8+49,2+26,5+33,7+62,9+54,2	286,3 km
Franca	Franca	BR2-BR6-BR11-BR7-BR8-BR1	99,4+77,8+26,5+33,7+44,4+59,8	291,6 km
Franca	Franca	BR4-BR5-BR7-BR11-BR9-BR1	54,2+62,9+33,7+26,5+45,9+59,8	283 km
Franca	Franca	BR2-BR5-BR7-BR11-BR9-BR1	49,4+62,9+33,7+26,5+45,9+59,8	278,2km

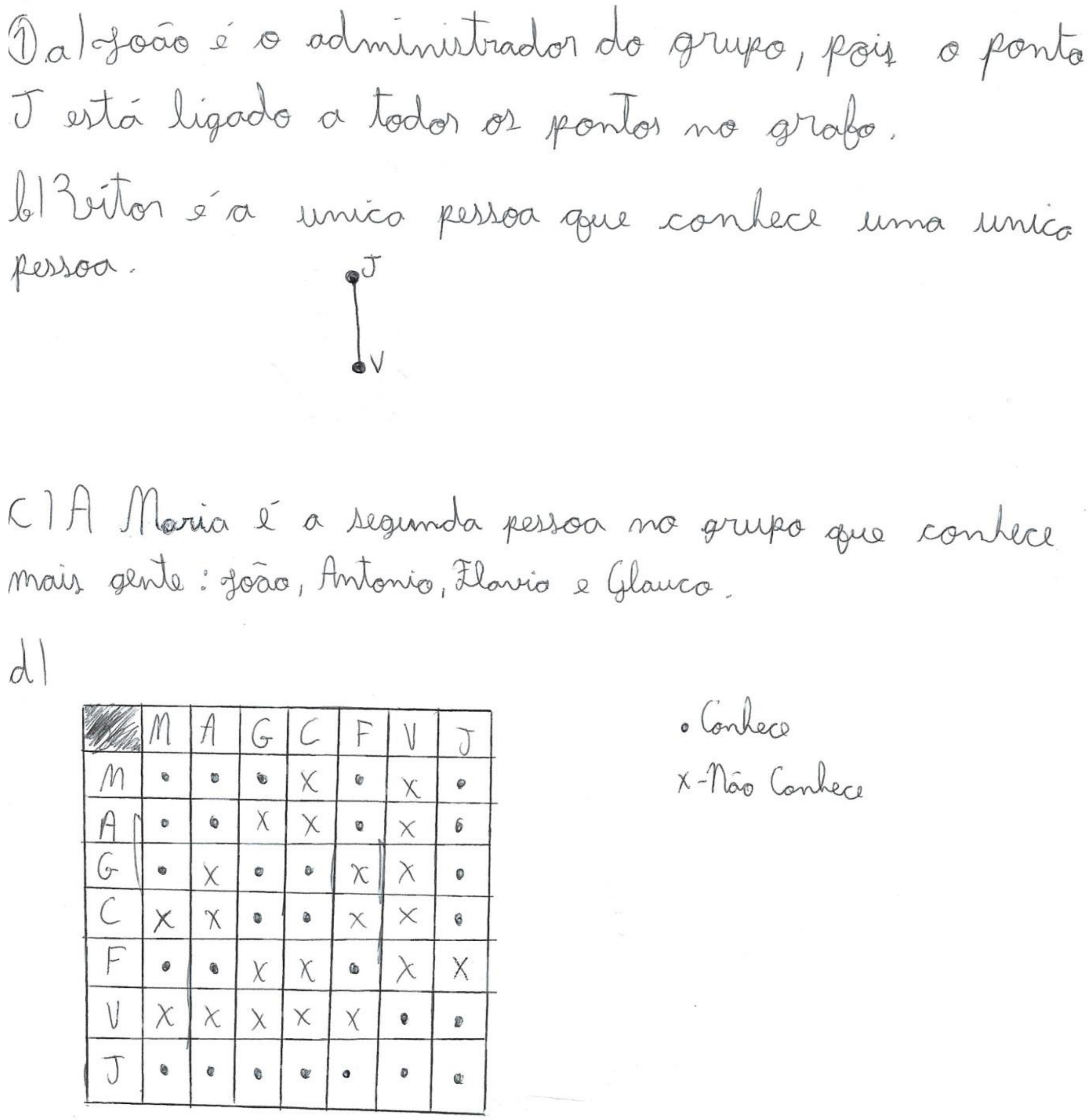
Fonte: Dos alunos, 2019.

III. Os amigos de um grupo

Na realização dessa atividade os alunos não gastaram mais que 45 minutos, e no geral não houve muitas dúvidas para sua solução. Depois que os alunos compreenderam o grafo, os dois itens iniciais foram respondidos rapidamente, pois bastava observar o número de arestas que incidia em cada vértice.

No último item, os alunos ficaram com dúvidas na construção da tabela, então o professor questionou os grupos sobre qual a melhor forma para apresentar as informações do grafo, de modo a olhar para a tabela e saber quais pessoas se conheciam. Depois que perceberam que as pessoas seriam distribuídas entre as linhas e colunas, o professor orientou que a tabela fosse preenchida por uma notação escolhida pelo próprio grupo, indicando quando duas pessoas se conheciam ou não. Alguns alunos se surpreenderam com esse tipo de tabela, pois estavam acostumados com outros tipos de elementos e diferentes contextos. Algumas soluções apresentadas pelos grupos estão disponíveis a seguir:

Figura 40 – Solução proposta por um dos grupos



1) a) João é o administrador do grupo, pois o ponto J está ligado a todos os pontos no grafo.

b) Vitor é a unica pessoa que conhece uma unica pessoa.

c) A Maria é a segunda pessoa no grupo que conhece mais gente: João, Antonio, Flavio e Glauco.

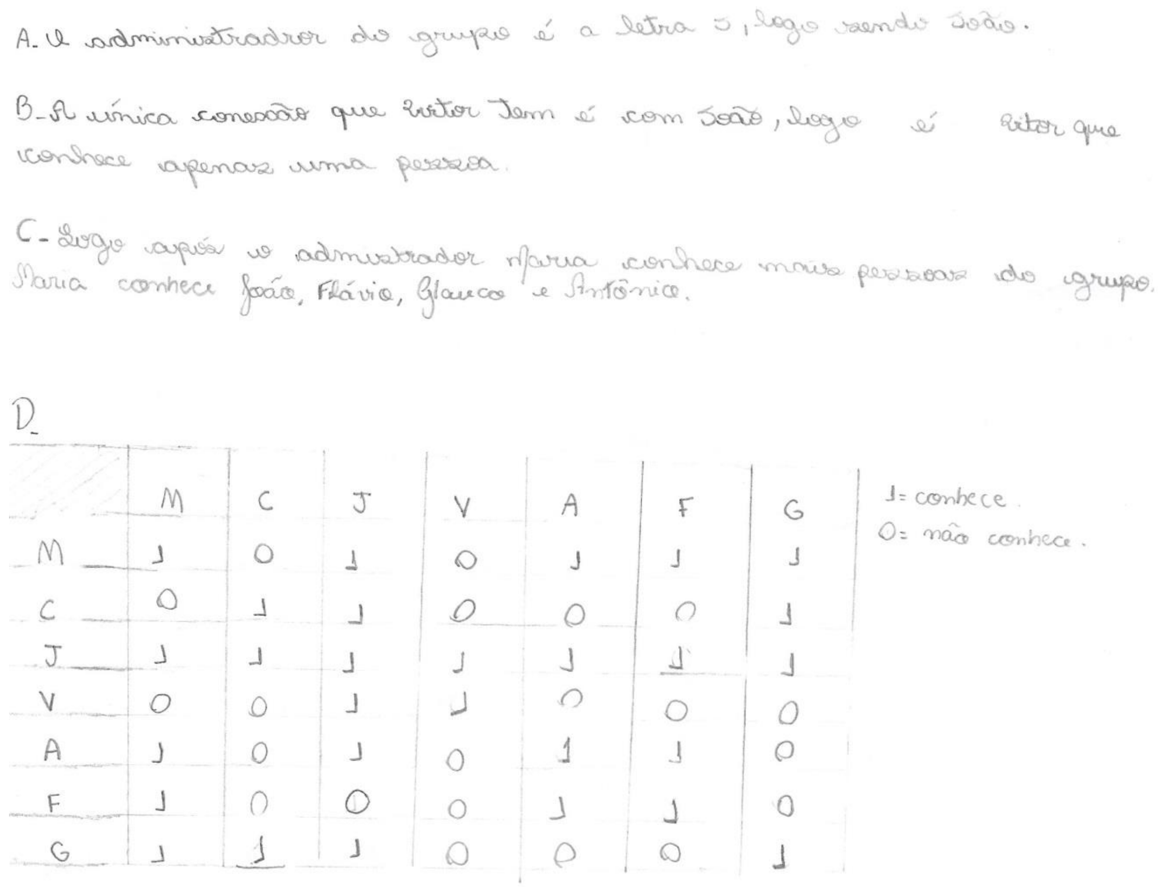
d)

	M	A	G	C	F	V	J
M	•	•	•	X	•	X	•
A	•	•	X	X	•	X	•
G	•	X	•	•	X	X	•
C	X	X	•	•	X	X	•
F	•	•	X	X	•	X	X
V	X	X	X	X	X	•	•
J	•	•	•	•	•	•	•

• Conhece
X - Não Conhece

Fonte: Dos alunos, 2019.

Figura 41 – Solução com os elementos de uma matriz de adjacência



A. O administrador do grupo é a letra J, logo sendo João.

B. A única conexão que Vitor tem é com João, logo é Vitor que conhece apenas uma pessoa.

C. Logo após o administrador Maria conhece mais pessoas do grupo. Maria conhece João, Flávio, Glauco e Antônio.

D.

	M	C	J	V	A	F	G
M	1	0	1	0	1	1	1
C	0	1	1	0	0	0	1
J	1	1	1	1	1	1	1
V	0	0	1	1	0	0	0
A	1	0	1	0	1	1	0
F	1	0	0	0	1	1	0
G	1	1	1	0	0	0	1

1= conhece.
0= não conhece.

Fonte: Dos alunos, 2019.

Podemos ver diferentes tipos de notação, alguns optaram por símbolos e outros por números. Alguns grupos se esqueceram de apresentar uma legenda para leitura da tabela, assim o professor os orientou a inseri-la ao lado ou abaixo. Não houve nenhum acontecimento que pudesse atrapalhar o andamento da aula, e boa parte dos grupos trabalharam de forma organizada e com disciplina. O professor estima que 90% dos grupos entregaram um resultado satisfatório, os outros não se interessaram pela aula e não quiseram participar.

IV. A tarefa de Marcos

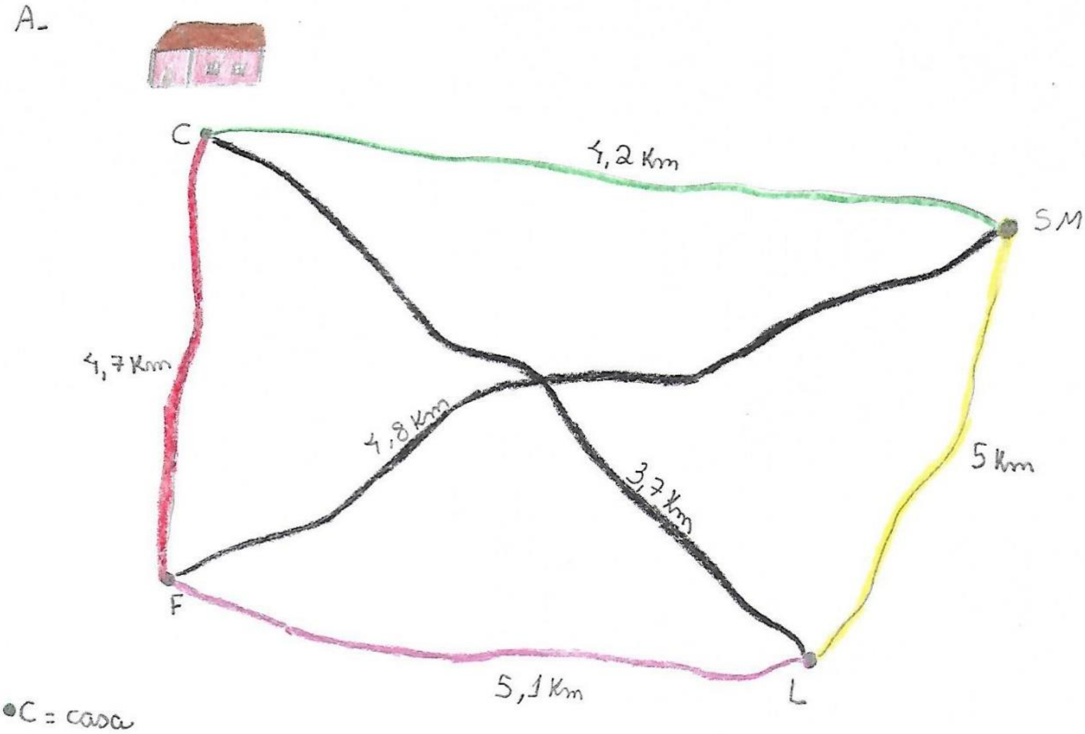
O professor inicialmente ajudou os alunos a compreender a atividade e conversou sobre como os grafos ajudariam na sua solução. Assim, os alunos perceberam que era necessária a construção de um grafo para representar os estabelecimentos do problema. Durante a construção, alguns grupos confundiram as distâncias e acabaram atribuindo pesos diferentes as arestas, mas isso foi facilmente corrigido.

Com o grafo em mãos, começaram a determinar todas as rotas que satisfaziam as condições do problema, listando cada uma delas e indicando seu custo. Inicialmente os alunos ficaram com dúvidas se teriam de analisar muitas possibilidades, porém o professor os orientou a usar o princípio multiplicativo para o cálculo desse número. Como os alunos haviam estudado recentemente essa teoria e resolvido problemas parecidos, eles recorreram ao caderno de sala para fazer o cálculo desejado.

O professor percebeu que não foi necessário pedir aos alunos que usassem a representação padrão dos grafos, pois durante a resolução do problema os grupos já a aplicaram. Alguns alunos questionaram se novamente era pra evitar que as arestas se tocassem. Então o professor explicou que não havia problema, apenas era para considerar que a interseção entre arestas não forma uma possibilidade de rota. Aproximadamente 70% dos grupos entregaram resultados satisfatórios, os restantes não participaram ou não se importaram em resolver todas as tarefas propostas. A atividade foi concluída em uma aula. As figuras a seguir mostram algumas soluções apresentadas.

Figura 42 – Uma solução correta apresentada por um dos grupos

A.



C = casa

SM = super mercado

L = lotérica

F = farmácia.

B. 1º CASO = C - SM - L - F - C – 4,2 + 5 + 5,1 + 4,7 = 19 Km – P.

2º CASO = C - F - L - SM - C – 4,7 + 5,1 + 5 + 4,2 = 19 Km – P

3º CASO = C - SM - F - L - C – 4,2 + 4,8 + 5,1 + 3,7 = 17,8 Km – M

4º CASO = C - F - SM - L - C – 4,7 + 4,8 + 5 + 3,7 = 18,2 Km.

5º CASO = C - L - F - SM - C. – 3,7 + 5,1 + 4,8 + 4,2 = 17,8 Km – M

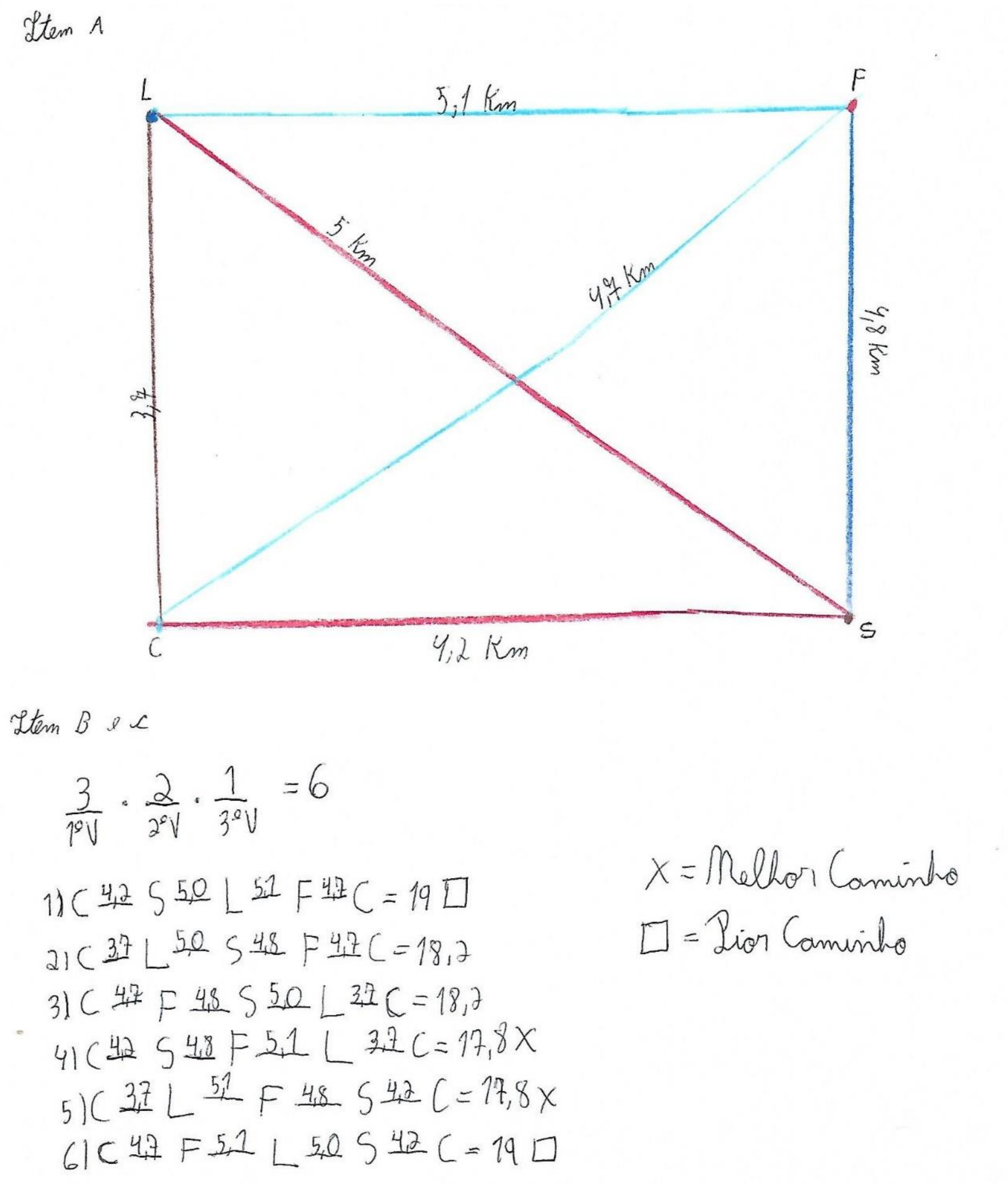
6º CASO = C - L - SM - F - C – 3,7 + 5,1 + 4,8 + 4,7 = 18,2 Km.

C - As duas melhores rotas = 17,8 Km

As duas piores rotas = 19 Km

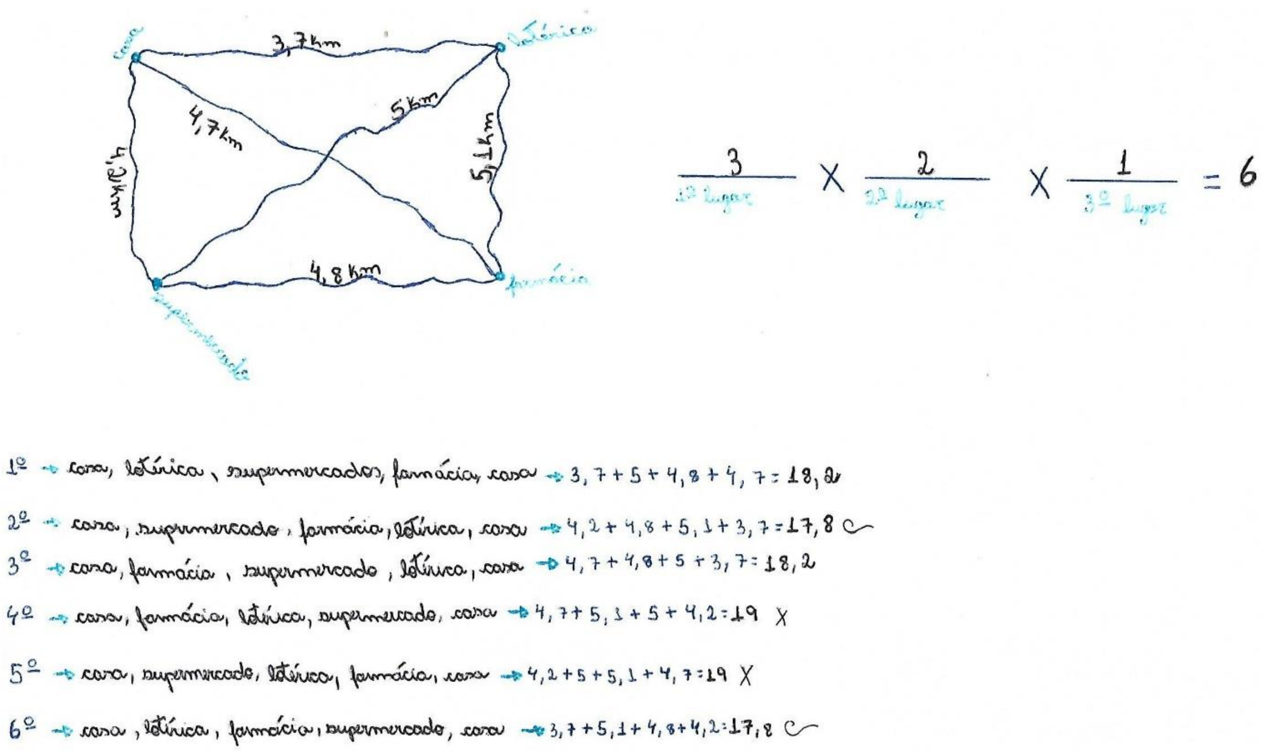
Fonte: Dos alunos, 2019.

Figura 43 – Uso de um retângulo na construção do grafo completo da atividade



Fonte: Dos alunos, 2019.

Figura 44 – Solução correta apresentada por outro grupo de trabalho



Fonte: Dos alunos, 2019.

V. Caminho entre as ilhas

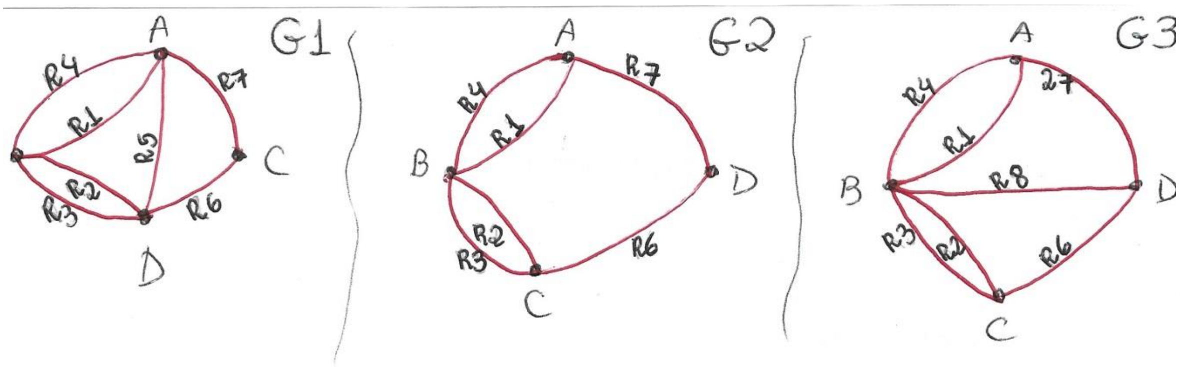
Depois de compreender o problema, os grupos partiram para solução do primeiro item. O professor pediu que eles encontrassem no máximo três rotas diferentes que satisfaziam a condição do primeiro item. Também foi falado que poderiam encontrar rotas que começassem e terminassem no mesmo vértice, levando em conta que cada aresta poderia ser percorrida somente uma vez.

Depois de analisar e determinar os grafos em que era possível tal trajeto, os alunos começaram a discutir sobre como construir uma tabela. A maioria dos grupos ficaram com dúvida nessa construção, pensando que ela deveria ser feita como a tabela da atividade dos amigos (atividade 3). Assim o professor mostrou a diferença entre os problemas e os orientou a construir uma que permitisse comparar os grafos e o número de arestas por vértice.

Munidos da tabela, o professor pediu para que analisassem e comparecem os grafos em que era possível um percurso especial e os números que ele apresentava. Os alunos mais habilidosos na matemática conseguiram compreender o padrão que a tabela apresentava. Era possível uma cadeia de arestas – passando por todas e sem repeti-las – nos grafos em que todo nó tinha grau par. No grafo G2 também era possível passar por todas as arestas uma sem repeti-las, porém esse caminho só era possível saindo de um dos nós de grau ímpar e finalizando no outro nó de grau ímpar. Alguns alunos perceberam que apenas no primeiro grafo era possível partir e retornar ao mesmo nó, passando por todas as arestas do grafo somente uma vez. O professor então explicou que esse trajeto era especial e denominado ciclo euleriano.

No momento de escrever a conjectura do terceiro item, os alunos apresentaram dificuldade em descrever o padrão encontrado na tabela construída. Tomando o grafo G2, por exemplo, alguns escreveram que o problema tinha solução quando havia exatamente dois vértices com grau par e dois com grau ímpar. Outro grupo sugeriu que um ciclo euleriano só era possível se os vértices tivessem um grau igual a alguma potência do número dois. Outro grupo sugeriu que era possível passar por todas as arestas quando existem dois vértices com o mesmo de grau ímpar e os restantes com grau par. Para mostrar aos alunos a invalidade desses argumentos o professor apresentou grafos que não atendiam as condições apresentadas pelos alunos, mas que tinham solução para o problema. Depois das análises feitas junto aos alunos, o professor os auxiliou na escrita, mostrando as falhas no texto proposto. Depois que concluíram a atividade o professor explicou o conceito de conjectura, alertando que a validade de uma afirmação matemática só vale mediante uma demonstração formal, porém não era o objetivo da aula trazer esse conteúdo. Analisando os trabalhos, o professor estima que 65% entregaram resultados satisfatórios, os outros grupos não participaram ou não fizeram as correções indicadas pelo professor. As figuras a seguir mostram os resultados apresentados por alguns dos grupos.

Figura 45 – Solução contendo todos os itens da atividade



A - R7, R6, R5, R4, R3, R2, R1 é possível em G1.

R6, R7, R4, R3, R2, R1 é possível em G2.

Não é possível em G3

B -

	A	B	C	D
G1	4	4	4	2
G2	3	4	3	2
G3	3	5	3	3

G1 → Todos são par.

G2 → temos dois caminhos par e dois ímpar.

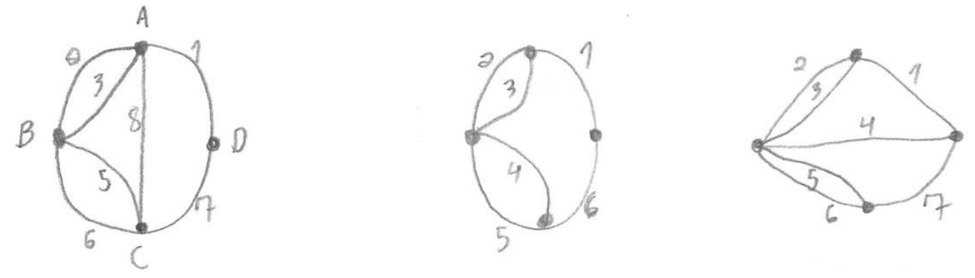
G3 → todos são ímpar.

C - Esse ciclo é possível quando todos são par.

Esse caminho é possível quando temos um número par de arestas em alguns pontos e exatamente dois pontos com o mesmo número ímpar de arestas.

Fonte: Dos alunos, 2019.

Figura 46 – Outra solução para o problema



G 1- Partindo do D temos um seguinte caminho: 1,2,3,8,5,6,7
G 2- Partindo do A temos um seguinte caminho: 2,3,1,6,4,5
G 3- não tem jeito

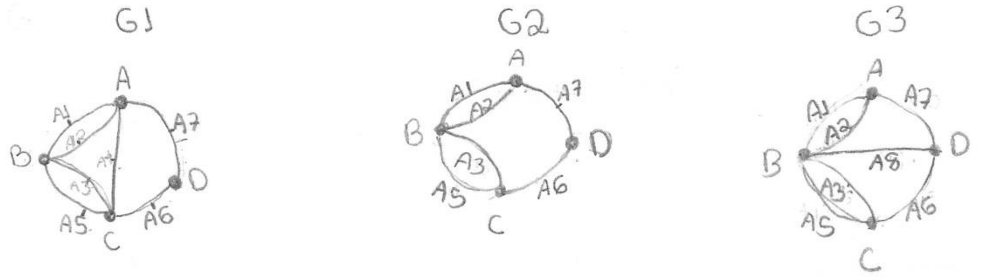
	A	B	C	D
G1	4	4	4	2
G2	3	4	3	2
G3	3	5	3	2

Quando um grafo tem numeros pares em cada vertice o ciclo é possivel

O caminho só é possivel quando tem dois pontos que contém um números ímpar de arestas e todos os restantes pares.

Fonte: Dos alunos, 2019.

Figura 47 – Outra solução correta apresentada por um dos grupos



A. G1 = partindo de A = A1, A5, A6, A7, A4, A3, A2.

G2 = A2, A3, A6, A7, A1, A5.

G3 = não é possível determinar este caminho.

B.

	A	B	C	D	
G1	4	4	4	2	√
G2	3	4	3	2	√
G3	3	5	3	3	x

G1 = todos os números são pares.

G2 = dois deles são ímpares e dois pares.

G3: três ímpares e um par.

C. Quando temos um número par de arestas em cada ponto é possível fazer este ciclo.

É possível formar este caminho quando temos pontos com um número par de arestas e exatamente dois pontos com um número ímpar de arestas.

Fonte: Dos alunos, 2019.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dos princípios a serem seguidos pela área da matemática no ensino fundamental, podemos destacar: “A Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente” (PCN – Matemática, 1997, p. 19). Neste sentido, espera-se que o professor incentive e desperte no aluno a curiosidade e a motivação pelo estudo da matemática. Um dos caminhos para que isso ocorra pode estar relacionada à resolução de problemas, sendo que, se trabalhado da maneira certa, pode mostrar ao aluno a importância da matemática no seu dia a dia.

A chamada “aula tradicional” onde o professor apresenta determinada teoria, e em seguida, aplica exercícios para fixação dos conceitos, está cada vez mais afastando o interesse dos alunos pela matemática. Ouve-se frequentemente durante as aulas: “professor, onde vou usar isso na minha vida?”, ou ainda, “isso aí a gente só vai usar na escola!”.

Visando melhorar esse tipo de entendimento por parte dos alunos, fala-se muito sobre planejamento reverso. Nessa metodologia o problema é apresentado antes de tudo, e em seguida desenvolve os conceitos necessários para sua solução, demonstrando então a validade do seu estudo. Dado que a matemática é uma ciência lógico-dedutiva, é inegável que essa metodologia faça mais sentido durante o processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Este trabalho sugeriu um conjunto de atividades adaptadas que seguem justamente esse método, trazendo problemas contextualizados e apresentando os grafos como uma ferramenta no processo de solução. Apesar de elas estarem direcionadas a alunos do 8º ano, nada impede de que adaptações sejam feitas para possibilitar sua aplicação em outras etapas do ensino fundamental.

Considerando o contexto da primeira atividade, não há nenhum problema em aplicá-la em outra etapa do ensino. No 6º ano, por exemplo, a BNCC (2017) destaca que o aluno deve interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas (habilidade EF06MA28). O professor pode fazer adaptações em relação às cidades apresentadas, trabalhando então com aquelas que fazem da região onde o grupo de alunos reside.

Em relação à segunda atividade, o professor pode fazer mudanças nos itens propostos, alterando a origem e destino das rotas que serão criadas. Pode-se trabalhar também outros tipos de custo, como por exemplo, o tempo de viagem em cada uma das rodovias. Sobre o uso do aplicativo durante as aulas, é aconselhável que seja trabalhado para os alunos a partir do 7º ano, sendo que para o 6º ano pode-se informar os dados ou mesmo apresentá-los em uma tabela.

Como os números racionais são estudados em todos os anos do ensino fundamental, a atividade pode desenvolver a habilidade de resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais (habilidades EF06MA11 e EF07MA12). Depois de criados rotas pelas arestas do grafo, pode-se incluir um item para que os alunos expressem os custos em outras unidades de medida, como o metro ou decímetro.

A motivação para a aplicação da terceira atividade é mostrar aos alunos que os grafos podem representar diferentes situações, não limitado apenas a representação de mapas. Caso seja necessário, o professor pode realizar mudanças no grupo das pessoas citadas. Pode-se incluir um item em que os alunos devem ranquear os envolvidos em relação ao número de pessoas que elas conhecem, criando assim uma tabela. A atividade apresenta um grafo e pede que os alunos o representem em uma tabela, porém pode-se trabalhar informando as pessoas que se conhecem e propondo a construção do grafo.

Em relação à atividade sobre os destinos de marcos, é importante que não se aumente o número de estabelecimentos, pois assim o número de arestas distintas pode crescer muito. O professor pode incluir um obstáculo antes dos alunos procurarem as rotas, representando os custos em diferentes unidades de medida, fazendo com que inicialmente padronizem as medidas usando conversões.

Como foi dito anteriormente, os custos envolvidos podem ser trocados pelo tempo de deslocamento entre os estabelecimentos, ou ainda a quantidade de combustível necessário para percorrer a distância entre dois determinados estabelecimentos. No contexto do 9º ano, muitos algoritmos são trabalhados nessa etapa do ensino. Assim, para a solução do problema pode-se ensinar os algoritmos citados nesse trabalho, como o método do vizinho mais próximo ou o algoritmo de Kruskal, consolidando neles a ideia de que um algoritmo é um processo ou sequência de etapas que, depois de concluídas, apresentam uma solução.

No contexto da atividade "*caminho entre as ilhas*" pode-se trabalhar de forma separada o caso em que não foi possível passar por todas as arestas do grafo. O professor pode analisar com os alunos o conceito de replicar arestas, mostrando a eles o significado de “construir novas arestas” no grafo, e assim aplicar as conjecturas já feitas pelos alunos.

Existem outras mudanças que podem ser feitas nas atividades desse trabalho e que não foram mencionadas, assim fica a critério do professor responsável usá-las da maneira que achar mais conveniente e interessante para seus alunos. Desde o início, um dos objetivos desse trabalho foi mostrar que os grafos podem ser uma alternativa interessante para inserir o aluno no contexto de uma modelagem matemática.

Pensando no contexto de avaliação dos alunos, as atividades podem ser usadas como uma forma alternativa para avaliação, diminuindo o protagonismo das provas individuais nesse processo. Neste trabalho, as atividades realizadas em grupo pelos alunos das duas turmas (8° ano) substituíram a avaliação mensal do 3º bimestre de 2019, sendo que cada uma tinha peso de dois pontos, totalizando dez pontos. Durante o processo de solução, o professor responsável utilizou um instrumento chamado de “*fichas para o mapeamento do desenvolvimento de atitudes”*, uma para cada atividade.

Dessa forma, o professor avaliou os seguintes conceitos: O grupo agiu em conjunto para compreensão e solução do problema? Usaram sua própria criatividade durante a atividade? Fizeram perguntas pertinentes sobre o problema investigado? Apresentou suas respostas com clareza? O grupo participou e colaborou com o andamento da atividade? Cada tópico recebeu um peso equivalente a 0,4 pontos da nota total de cada atividade, totalizando 2 pontos caso os grupos apresentassem todos os critérios estabelecidos na avaliação.

É importante ressaltar que esse modelo de avaliação produziu resultados interessantes na média das notas das salas. No ensino público de Minas Gerais, os alunos podem conquistar no máximo 25 pontos em cada bimestre, sendo a nota mínima 15 pontos. Considerando todos os alunos avaliados, dos alunos que não tiveram nota superior à média necessária no bimestre anterior, 85% conseguiram no mínimo 15 pontos. Alguns desses alunos relataram que, pelo fato de ser avaliados em conjunto, se sentiram mais confiantes e motivados durante a solução dos problemas, o que não acontecia caso fossem aplicadas provas individuais. Além dos trabalhos feitos na sala, conceitos como o comportamento, caderno de sala e os exercícios resolvidos em casa, fazem parte da composição da nota final.

Em resumo, os alunos gostaram de realizar as atividades sobre grafos. Nos problemas em que deviam determinar rotas eles trabalharam de forma conjunta e se concentraram na busca por soluções. Concluímos ao final das atividades que houve um maior interesse dos alunos nas aulas de matemática. Notamos que a participação dos discentes nas aulas foi mais intensa, principalmente daqueles alunos com maior dificuldade nessa disciplina. Fica então a sugestão para que os docentes utilizem os grafos como acharem melhor durante as aulas de matemática, além de utilizar as sugestões dadas neste trabalho. Usando os conceitos de grafos podem ser construídos outros problemas contextualizados que vão desafiar os alunos na busca de soluções criativas, e que podem desenvolver habilidades importantes de cada etapa do ensino fundamental.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Werle; SILVA, Karina Pessôa; Vertuan, Rodolfo Eduardo. **Modelagem matemática na educação básica**. 1. ed. São Paulo: Contexto, 2013.

ARENALES, Marcos; ARMENTANO, Vinícius; MORABITO, Reinaldo; YANASSE, Horacio. **Pesquisa Operacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

BRASIL. Ministério da educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. 599p. Brasília – DF, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. 142p. Brasília: MEC/SEF, 1998.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências**: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 5. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GOLDBARG, Marco Cesar; GOLDBARG, Elizabeth. **Grafos**: conceitos, algoritmos e aplicações. 1. ed. Rio de janeiro: Elsevier, 2012.

GOLDBARG, Marco Cesar; LUNA, Henrique Pacca L. **Otimização combinatória e programação linear**: modelos e algoritmos. 2. ed. Rio de janeiro: Elsevier, 2005.

LOZANO, Daniele. **Modelagem matemática e aplicações do problema de coloração em grafos**. 2007. 79f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, SP, 2007. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/95823. Acesso em 13 de julho de 2019.

MELO, Gildson Soares. **Introdução à teoria dos grafos**. 2014. 35 f. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7549/5/arquivototal.pdf. Acesso em 20 de junho de 2019.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação e União dos Dirigentes Municipais de Educação de Minas Gerais. **Currículo Referência de Minas Gerais**. Belo Horizonte, 2019. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1ac2_Bg9oDsYet5WhxzMIreNtzy719UMz/view.

MONTEIRO, Sílvia Helena da Gama. **Modelagem matemática e recursos computacionais**: uma proposta para a teoria dos grafos no ensino médio. 2015. 92 f. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2015. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3589980. Acesso em 29 de junho 2019.

SOUZA, Renato Fonseca. **Resolução de problemas via teoria dos grafos**. 2014. 48 f. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional) –

Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2014. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-06072015-103319/ptbr.php. Acesso em 15 de setembro de 2019.

APÊNDICE A – Atividade 1

Plano de aula

Tema: Modelagem matemática.

Conteúdos a serem trabalhados: Conceitos sobre grafos.

Habilidades envolvidas: Criatividade na representação de problemas. Uso de conceitos matemáticos na modelagem de problemas. Raciocínio lógico.

Recursos didáticos: Material impresso, lousa e giz.

Cronograma: 2 aulas.

Metodologia: Inicialmente o professor irá separar os alunos em grupos de até três pessoas. Depois da explicação sobre a atividade é importante dizer aos alunos que eles têm liberdade de escolher os elementos que farão parte da sua solução. Oriente que as estradas não se interceptam em qualquer comento, apenas pelas cidades. Após a conclusão da atividade, já com as correções feitas, o professor deve propor uma discussão sobre as resultados apresentados, chamando os grupos para que os alunos façam uma apresentação da sua solução. Em seguida, o professor deve resolver o mesmo problema apresentando os grafos como uma ferramenta simples e eficaz na representação do problema.

ATIVIDADE 1 – Construindo um mapa

Problema Proposto

Os municípios de Franca (SP), Batatais (SP), São Tomás de Aquino (MG), São Sebastião do Paraíso (MG), Cássia (MG) e Patrocínio Paulista (SP) são cidades próximas uma da outra e que possuem estradas que as conectam. Use as informações a seguir para construir um mapa que represente as cidades mencionadas e os caminhos entre elas.

- *Há duas estradas de Franca para Batatais*
- *Há duas estradas de Franca para Patrocínio Paulista*
- *Há uma estrada de Batatais para Patrocínio Paulista*
- *Há uma estrada de Patrocínio Paulista para São Tomás de Aquino*
- *Há uma estrada de Franca para Cássia*
- *Há duas estradas de Batatais para São Sebastião do Paraíso*
- *Há uma estrada de Cássia para São Sebastião do Paraíso*
- *Há uma estrada de São Tomás de Aquino para São Sebastião do Paraíso*
- *Todas as estradas mencionadas acima são distintas uma da outra.*

APÊNDICE B – Atividade 2

Plano de aula

Tema: Modelagem matemática.

Conteúdos a serem trabalhados: Conceitos sobre grafos, uso de softwares online, problema do caixeiro viajante, operação de adição com números racionais.

Habilidades envolvidas: Modelagem a partir de grafos. Uso de ferramentas digitais para obtenção de informação. Construção de mapas e vistas aéreas.

Recursos didáticos: Material impresso, computador, projetor de imagem, lousa e giz.

Cronograma: 2 aulas.

Metodologia: É importante manter os mesmos grupos de alunos da primeira atividade. Depois da explicação inicial, o professor deve apresentar as funcionalidades e possíveis aplicações da ferramenta online Google Maps. Através dela, os alunos construirão um novo mapa usando os grafos como base. Com o aplicativo também será possível determinar a distâncias de cada uma das estradas representadas no grafo, promovendo então a construção de uma estrutura rotulada e ponderada. Para solução dos itens da atividade os alunos terão como base o grafo criado.

ATIVIDADE 2 – Um mapa real

Problema Proposto

Utilizando algum software no computador ou celular, construa um grafo que represente de maneira real as cidades e estradas da ATIVIDADE 1 (já realizada). Represente também os comprimentos das estradas na unidade de medida km. Após a construção desse mapa, responda as perguntas:

A - Liste algumas rotas de Franca (SP) a Batatais (SP) e a distância de cada um desses trajetos. Determine qual o melhor e o pior caminho entre as rotas determinadas.

B - Liste algumas rotas de Franca (SP) a São Sebastião do Paraíso (MG) e a distância de cada um desses trajetos. Determine o melhor e o pior caminho entre as rotas determinadas.

C - Existe alguma rota saindo de Franca que passe por todas as outras cidades somente uma vez e retorne para a cidade da partida? Se sim, liste os caminhos que você encontrou e determine aquele com a menor distância.

APÊNDICE C – Atividade 3

Plano de aula

Tema: Modelagem matemática.

Conteúdos a serem trabalhados: Interpretação de grafos, tratamento de informação.

Habilidades envolvidas: Construção e interpretação de tabelas. Raciocínio lógico. Leitura e extração de informações de um grafo.

Recursos didáticos: Material impresso, lousa e giz.

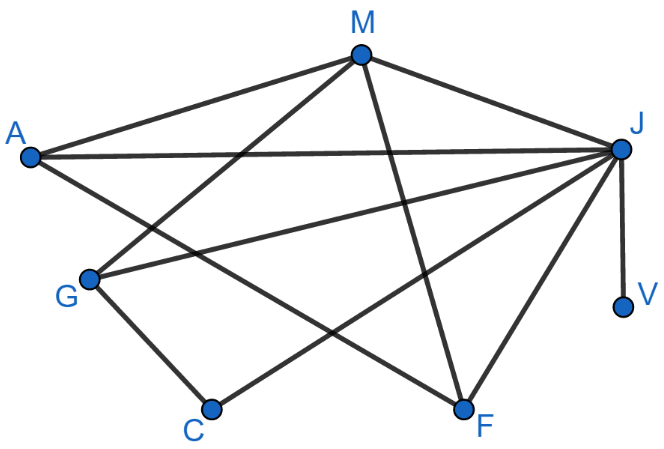
Cronograma: 1 aula.

Metodologia: Para realização da atividade o professor pode criar grupos com dois alunos. Durante a explicação, o docente deve chamar a atenção dos alunos de que os grafos não servem apenas para criação de mapas, mas que podem ser utilizados em muitas outras situações. É importante discutir com os alunos o que os elementos do grafo representam, pois isso os ajudará na solução dos primeiros itens. Durante a construção da tabela o professor deve orientar os discentes que ela deve conter as mesmas informações que podem ser extraídas do grafo, ou seja, a partir de um individuo determinar quem e quantas pessoas ele conhece. Durante o preenchimento da tabela os alunos devem ter liberdade na construção da legenda, porém o professor deve deixar claro que em matemática é comum o uso de números.

ATIVIDADE 3 – Os amigos de um grupo

Problema Proposto

Os moradores de uma rua decidiram criar um grupo de whatsApp para se comunicar e avisar qualquer suspeita de furto. As pessoas que formam o grupo são: Maria, Carlos, João, Vitor, Antônio, Flávio e Glauco. O administrador do grupo construiu um grafo para representar as pessoas que se conhecem.



A – Quem é o administrador desse grupo, sabendo que ele conhece todos os moradores da rua?

B – Existe alguma pessoa que conhece apenas uma do grupo? Depois do administrador, quem conhece mais pessoas?

C – Construa uma tabela para representar o grafo do administrador.

APÊNDICE D – Atividade 4

Plano de aula

<u>Tema</u>: Modelagem matemática.

<u>Conteúdos a serem trabalhados</u>: Grafos, Princípio multiplicativo, operações com números racionais, problema do caixeiro viajante.

<u>Habilidades envolvidas</u>: Cálculo com números decimais, modelagem de problemas via grafos, uso do princípio multiplicativo como técnica de contagem.

<u>Recursos didáticos</u>: Material impresso, lousa e giz.

<u>Cronograma</u>: 1 aula.

<u>Metodologia</u>: Inicialmente o docente interpretará o problema junto aos alunos, mostrando a eles que e é uma situação comum no cotidiano das pessoas. Dado que os discentes já estão familiarizados com os grafos, o professor deve pedir que eles construam um grafo para modelar do problema. Em seguida, o professor deve auxiliar os alunos no cálculo do número total de rotas que o grafo possui e alertá-los de que esse método pode ser utilizado quando o grafo for completo. Com o grafo pronto e o número de rotas em mãos, os alunos devem expressar essas rotas determinando o custo de cada uma. Com esses resultados, o professor deve solicitar que tomem a decisão sobre a melhor e a pior rota para o problema.

ATIVIDADE 4 – A tarefa de Marcos

Problema Proposto

Marcos é professor e possui as sextas-feiras como seu dia de folga. É justamente nesses dias que ele deixa pra fazer certas atividades, como ir ao supermercado, pagar contas ou comprar algum tipo de produto. Hoje é sexta, e ele necessita ir ao supermercado, a lotérica e a farmácia, para só depois retornar para casa. Sabe-se que a distância de sua casa até esses estabelecimentos é de respectivamente 4,2 km, 3,7 km e 4,7 km. Por um aplicativo no celular, Marcos analisou a distância entre os lugares que deve visitar e fez a seguinte anotação:

I – Supermercado até a Lotérica: 5 km
II – Lotérica até a Farmácia: 5,1 km
III – Farmácia até o Supermercado: 4,8 km

D) Construa um grafo que represente a casa, os destinos de Marcos e a distância entre esses pontos.

E) *Usando o princípio multiplicativo, determine o total de trajetos possíveis que ele pode optar. Faça uma lista com todas essas possibilidades.*

F) *Ajude Marcos a encontrar a melhor rota para cumprir seus objetivos e percorrer a menor distância possível. Faça uma lista, da melhor rota até a pior, usando a distância como critério de classificação.*

APÊNDICE E – Atividade 5

Plano de aula

Tema: Modelagem matemática.

Conteúdos a serem trabalhados: Grafos, problema do carteiro chinês, desenvolvimento de conjecturas.

Habilidades envolvidas: Concentração e raciocínio lógico, construção e análise de tabelas, análise de padrões e formulação de conjecturas.

Recursos didáticos: Material impresso, lousa e giz.

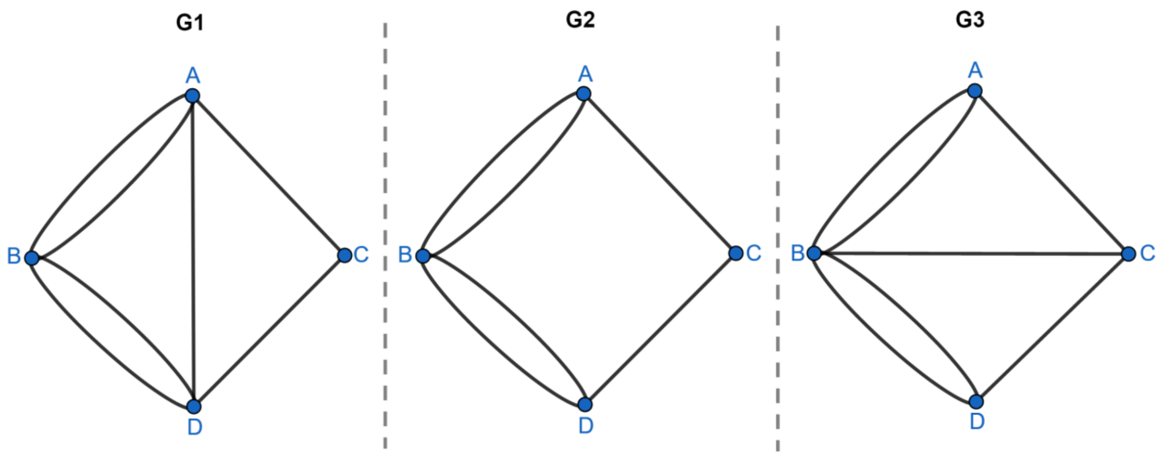
Cronograma: 1 aula.

Metodologia: Inicialmente o professor deve discutir com os alunos o problema apresentado pela atividade. Depois de entendido, os discentes devem investigar em quais grafos é possível atender as condições do primeiro item. Caso os alunos não percebam, é importante que o professor chame a atenção para o grafo G1, onde é possível sair e retornar ao mesmo ponto, passando por todas as arestas uma única vez. Depois que os alunos analisarem os grafos, eles devem construir uma tabela que permita analisar o número de arestas por vértice em cada grafo. Depois de construída, é importante que o docente acompanhe os alunos na análise e busca por padrões nos grafos que em houve solução. Em seguida, os alunos devem formular uma conjectura sobre quando é possível realizar o passeio especial pelos elementos do grafo. Durante a sua elaboração é importante que o docente auxilie os alunos na escrita.

ATIVIDADE 5 – Caminhos entre as ilhas

Problema Proposto

Em suas férias, Letícia viajou para o exterior para conhecer um conjunto de ilhas muito famosa, composta por quatro ilhas próximas uma da outra. Utilizando o mapa dessa região, Letícia imaginou alguns caminhos entre essas ilhas e construiu os seguintes grafos:



A) *Em quais dos grafos construídos por Letícia é possível encontrar uma rota que passe por todas as arestas (caminhos) do grafo, sem repetir nenhuma delas? Fique atento, pois é permitido passar por uma ilha mais de uma vez.*

B) *Utilize uma tabela para comparar os grafos G1, G2 e G3. O que você observa em relação ao número de arestas por vértice (pontos do grafo)?*

C) *Faça uma conjectura (regra) sobre quando é possível passar por todas as arestas de um grafo (sem repeti-las), ou seja, quais as condições para que esse tipo de passeio exista.*