UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIANGULO MINEIRO - UFTM

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

Estudo sobre o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio

Sérgio Alex Sander Silva

Uberaba - Minas Gerais

13 de Dezembro de 2019

Estudo sobre o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio

Sérgio Alex Sander Silva

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFTM como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr.Nelson Fernando Inforzato

Uberaba - Minas Gerais

13 de Dezembro 2019

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

S583 Silva, Sérgio Alex Sander
Estudo sobre o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio / Sérgio Alex Sander Silva. – 2019.
64 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2019
Orientador: Prof. Dr. Nelson Fernando Inforzato

1. Ângulo. 2. Relógios. 3. Modelos matemáticos. I. Inforzato, Nelson Fernando. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III.Título.

CDU 531.742:681.11.033.1

SÉRGIO ALEX SANDER SILVA

ESTUDO SOBRE O MENOR ÂNGULO FORMADO PELOS PONTEIROS DE UM RELÓGIO

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

13 de dezembro de 2019

Banca Examinadora

Prof. Dr. Nelson Fernando Inforzato

Orientador

Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM

Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni

Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM

Prof. Ms. Neilton Vieira da Costa

Faculdade Uberlandense de Núcleos Integrados de Ensino, Serviço Social e Aprendizagem - UNIESSA

Uberaba - Minas Gerais

13 de Dezembro de 2019

Dedico as conquistas deste estudo aos meus pais, JOSUÉ FERREIRA DA SILVA e DIVA VINAUD FERREIRA, que muito me ensinaram sobre determinação e garra com seus exemplos diários de vida, duas virtudes necessárias nesta trajetória. A minha esposa que é fundamental na minha vida JACQUELINE GUIMARÃES DA CRUZ SILVA, que me apoiou em todos os momentos, sem a qual eu não teria conseguido. Aos meus filhos que são a razão da minha existência JÚLIA FAYAD VINAUD, LAURA FAYAD VINAUD, ISABELA GUIMARÃES VINAUD SILVA e HENRIQUE GUIMARÃES VINAUD SILVA, aos quais agradeço pelo companheirismo, incentivo e paciência, pois muitas vezes não pude ouví-los dedicando-me aos estudos do PROFMAT.

Agradecimentos

A minha esposa Jacqueline, que sempre esteve presente em minha vida acadêmica, se abdicando de seus compromissos e se desdobrando para suprir minha falta em função dos meus estudos, para fortalecer-me diante dos obstáculos que surgiram ao longo deste caminho.

Aos meus filhos Júlia, Laura, Isabela e Henrique, que por muitas vezes não pude ficar mais tempo com eles em virtude dos estudos do mestrado. Mesmo assim, de forma direta ou indireta me incentivaram a concluir mais um desafio acadêmico, os quais vinham sempre em minha mente, nos momentos mais difíceis trazendo forças para continuar. Espero que sirva de exemplo para eles, como são exemplos para mim meu pai Josué Ferreira Silva e minha mãe Diva Vinaud Ferreira.

Ao Prof. Dr. Nelson Fernando Inforzato, meu orientador, agradeço a compreensão, sabedoria e o tempo dedicado na elaboração do presente trabalho.

Ao Prof. Dr. Osmar Alécio agradeço a atenção, a enorme dedicação na revisão em latex, com gigantesca paciência que contribuiu para este trabalho.

Ao Prof. Ms. Danilo Adrian Marques, agradeço pelas valiosas contribuições em diversas ocasiões, as quais sempre muito prestativo, trouxe idéias novas ao meu estudo.

Agradeço ao Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni e ao Prof. Ms. Neilton Vieira da Costa, que prontamente aceitaram fazer parte da minha banca examinadora.

Aos meus professores do PROFMAT UFTM, que contribuíram de forma direta ou indireta para meu aprendizado, fortalecendo minha vontade e estimulando minha garra na conclusão deste mestrado, fazendo com que eu aprimorasse cada vez mais meus estudos, levando-me a cruzar obstáculos que pareciam impossíveis, que hoje valorizo muito.

Aos meus colegas do curso do PROFMAT que conviveram comigo, os quais jamais esquecerei, pois, nos momentos mais difíceis estivemos juntos para superar o que parecia muitas vezes impossível. Cada um com suas experiências acrescentaram ensinamentos valiosos, não só de Matemática, mas também de vida nestes últimos dois anos. Sou imensamente grato a cada um deles, inclusive aqueles que não puderam concluir o curso, os quais me acrescentaram valiosos ensinamentos além da Matemática.

Agradeço o convívio com os colegas mais próximos em todo o curso, meus amigos Kleber Gonçalves do Nascimento, e Sérgio Geraldo da Cunha, que foram além das discussões Matemáticas, que muitas vezes começavam em Uberaba as seis horas da manhã, mas também o convívio nos almoços, nos cafés, nos lanches, e nos intervalos, que eu vou sentir muita falta, aos quais estávamos sempre juntos dividindo os momentos difíceis que pareciam intransponíveis. Porém com ajuda dos amigos se tornou possível. Não esquecerei das gargalhadas e dos bons momentos que passamos. Agradeço também a todos que contribuíram de alguma forma para a realização desse trabalho e que me acompanharam nos momentos felizes destes últimos anos.

"A Excelência não é um feito e sim um hábito"
Aristóteles

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo a abordagem do trabalho do professor em sala em um tópico específico da Matemática utilizando o método tradicional e propondo a utilização de uma fórmula para resolução de tais problemas, como mais uma maneira de abordagem do tema, sem a intenção de substituir o método tradicional pela utilização desta fórmula. O trabalho percorre o desenvolvimento utilizado em sala pelo professor, sugerindo um modelo matemático com todas as etapas necessárias para abordagem e análise do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio, utilizando métodos tradicionais que os livros adotam realizados no ensino fundamental e médio com regra de três simples. Em seguida, uma abordagem lógica com questões em graus diferentes de dificuldades. Em busca de uma melhor compreensão do tema, será proposto e construído um modelo matemático que envolve o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio com sua devida demonstração e aplicação, inclusive utilizando as mesmas questões anteriores, bem como resoluções de questões de vestibular e concursos públicos sobre o assunto. Tal fórmula permite chegar ao resultado em poucos passos e um melhor desenvolvimento algébrico, tornando aquela questão que requer mais trabalho, com grau maior de dificuldade, bem mais simples. O que se pretende com esse trabalho é comparar o método tradicional na resolução das questões sobre o assunto e mostrar que existe a possibilidade de utilizar uma fórmula que não consta nos livros de ensino fundamental e médio, facilitando muito a resolução das questões. Não se pretende, entretanto, a substituição do método tradicional para resolução de tais questões pela fórmula, e sim o entendimento do assunto, pesquisando os modelos atuais e ampliando os métodos de resoluções de questões que envolvem o tema.

Palavras-chave: Ângulo, Ponteiro, Relógio, Fórmula

Abstract

This study aims to approach the classroom teacher's work on a specific Mathematics topic using the traditional method and recommend the use of an equation to solve such Mathematical problems as an additional alternative, without the intention of replacing the traditional method. The study discusses the process used in the classroom by the teacher, suggesting a mathematical model with all the necessary steps for analyzing the smallest angle formed by the hands of a clock, using traditional methods that elementary and high school books adopt based on the simple rule of three. Then, a logical approach with Mathematical problems of different degrees of difficulty was presented. Aiming a better understanding of this topic, a mathematical model that involves the smallest angle formed by the hands of a clock with its proper demonstration and application was proposed and constructed using the same Mathematical problems, as well as problems from university entrance exams and civil service examinations on the topic. This equation allows getting the result in few steps and with better algebraic thinking, making difficult and demanding Mathematical problems much more straightforward. This study aimed to compare the traditional method for solving problems on the topic and show that this equation can be used during solving of Mathematical problems, even though it is not found in elementary and high school books. However, it is not intended to replace the traditional method of solving such problems with the proposed equation, but rather understand the subject, research current models and expand the methods of solving problems on the topic.

Keywords: angle, hands of a clock, clock, formula

Sumário

1	**INTRODUÇÃO**	**13**
2	**UMA BREVE EVOLUÇÃO HISTÓRICA**	**19**
2.1	**Do Relógio**	**19**
2.2	**Da Geometria**	**24**
2.2.1	Noções Primitivas da Geometria	25
2.3	**ÂNGULO**	**27**
2.3.1	O Sistema Sexagesimal (Sistema Graus)	28
2.3.2	O Sistema Radianos	29
2.3.3	Tipos de Ângulos	30
2.3.4	Geometria aplicada no problema	32
3	**RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS**	**34**
3.1	**Problema 1**	**36**
3.2	**Problema 2**	**38**
3.3	**Problema 3**	**39**
4	**DESENVOLVIMENTO DA FÓRMULA**	**44**
4.1	**Demonstração da fórmula**	**45**
4.2	**Retomando o Problema 1**	**46**
4.3	**Retomando o Problema 2**	**47**
4.4	**Retomando o Problema 3**	**48**
4.5	**Extra: Problema 4**	**49**
4.5.1	Resolvendo o mesmo problema pelo método tradicional	50
4.6	**Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias - ENEM**	**53**
5	**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:**	**55**
5.1	**Questões Introdutórias**	**55**
5.2	**Questões de vestibulares**	**56**
5.3	**Questões de Concursos Públicos**	**58**
6	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	**62**
	REFERÊNCIAS	**65**

Lista de ilustrações

Figura 1 – Relógio de sol: Gnômon 21
Figura 2 – Alberto Santos Dumont 22
Figura 3 – Relógio raro de 1943: Patek Phillipe 23
Figura 4 – Geometria nas construções antigas 24
Figura 5 – Entes Primitivos 25
Figura 6 – Reta, Semi-reta e Segmento de reta 26
Figura 7 – Semiplano 26
Figura 8 – Região Convexa e Não-convexa 27
Figura 9 – Ângulo, duas semiretas de mesma origem 28
Figura 10 – Um grau 29
Figura 11 – Radianos 29
Figura 12 – Ângulo agudo 30
Figura 13 – Ângulo reto 30
Figura 14 – Ângulo obtuso 30
Figura 15 – Ângulo raso 30
Figura 16 – Ângulos complementares 31
Figura 17 – Ângulos suplementares 31
Figura 18 – Ângulos replementares 31
Figura 19 – Ângulos opostos pelo vértice 32
Figura 20 – Exercício do livro de Gelson IEZZI letra a 34
Figura 21 – Exercício do livro de Gelson IEZZI letras b e c 35
Figura 22 – Relógo 1h20min 36
Figura 23 – Relógio 1h50min 38
Figura 24 – Relógio com ponteiros sobreposotos entre 5 e 6 horas 40
Figura 25 – Ponteiros sobrepostos 42
Figura 26 – Relógio para a demonstração 45
Figura 27 – Relógio 1h20min 47
Figura 28 – Relógio 1h50min 48
Figura 29 – Primeiro caso 50
Figura 30 – Segundo caso 52
Figura 31 – Livro Peruano com descrição da fórmula 61

1 INTRODUÇÃO

Diante dos desafios enfrentados aula a aula pelo professor e na busca diária para melhorar minhas aulas e conseguir manter a atenção dos alunos, deparei-me com a possibilidade de cursar o mestrado profissional em matemática - PROFMAT na UFTM em Uberaba para melhorar minha qualificação e atualizar minha prática de ensino. Além da Graduação em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia, especialização em Educação Matemática, sou Graduado em Direito, Advogado, com especialização em Legislação Trabalhista e também em Legislação Tributária, Professor de disciplinas jurídicas na faculdade UNIESSA, e de Matemática no Colégio Gabarito em Uberlândia, mantendo as duas áreas de atuação, e além disso, sou músico em horas vagas. Em todas estas áreas tenho o envolvimento educacional que requer muito estudo.

Mesmo em áreas diferentes meu foco aqui é educacional. Neste caso, entender os conceitos matemáticos e os aspectos da aprendizagem destes conceitos propondo mais uma possibilidade para o trabalho do professor em sala de aula além do tradicional, diferenciando e acrescentando modelos matemáticos para o tema proposto como indicado na BNCC - Base Nacional Comum Curricular, para ensino fundamental e médio, deste modo contribuindo para a disciplina. Este trabalho tem aplicação direta em sala tanto de ensino fundamental como para ensino médio.

Será abordado um tema muito específico do conteúdo da matemática, porém, será apresentado uma abordagem tradicional e em seguida uma abordagem lógica no intuito de conduzir o aluno na elaboração de um futuro modelo matemático, e posteriormente utilizando a Geometria, a demonstração de uma fórmula para o tema que não é utilizado em sala de aula, pois os livros de ensino fundamental e médio não descrevem esta relação matemática. Serão utilizados os conceitos matemáticos próprios do ensino fundamental e médio como a regra de três simples e conceitos básicos de Geometria, de forma interligada, bem como a abordagem das dificuldades previstas e também uma proposta e orientações para o professor sobre como lidar com os possíveis obstáculos metodológicos que podem ocorrer.

Imensos são os desafios enfrentados pelos professores em sala de aula todos os dias. As reflexões em sua prática pedagógica e metodológica devem ser constantes com atualizações e adaptações para cada tema. Este exercício contínuo acompanha o professor ao longo de sua carreira. Com o fenômeno da internet temos muitas novidades que facilitam o acesso a informação melhorando o trabalho do professor, pois, a velocidade nas comunicações hoje é cada vez mais instantânea. Por outro lado temos o aluno que também navega na internet possuindo acesso também a diversas informações, muitas delas são de redes sociais, e poucas são de pesquisas científicas. O lado ruim é que esse aluno acostuma-se às informações instantâneas com pouco trabalho, bastando acessar a internet, o que mostra um novo perfil de aluno. A questão é como prender a atenção desse aluno? Como chamar a atenção de uma forma geral desse aluno para o tema abordado pelo professor? Ampliar as metodologias de ensino pode ser uma saída, incluir a tecnologia para pesquisas e para gerar experimentos digitais, como neste trabalho um relógio com seus ponteiros em deslocamento, mostrando a variação ângular decorrentes de tais deslocamentos evidenciando a relação entre o tempo e o ângulo deslocado pelos ponteiros do relógio. Tudo isso serve de apoio na construção do modelo matemático que está proposto na BNCC.

Como Álvaro Borges Vieira Pinto(2003,p.48) assegura:

> "O educador deve ser o portador da consciência mais avançada de seu meio, necessita possuir antes de tudo a noção crítica de seu papel, isto é, refletir sobre o significado de sua missão profissional, sobre as circunstâncias que a determinam e a influenciam, e sobre as finalidades de sua ação."(PINTO, 2003)

Neste caso, (na Matemática) o tema desse trabalho é o estudo do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio, e em seguida a proposição de uma fórmula, para junto do método tradicional, mostrar uma outra opção de cálculo para este tema, ampliando as possibilidades de aprendizado desse aluno. Fórmula tal, que facilita muito o cálculo, e não constam nos livros dos ensinos fundamental e médio.

Ciente que muitos fatores afetam o bom andamento de uma aula, como indisciplina e a falta de interesse por parte de muitos alunos, o professor ainda se depara com programas educacionais com base na BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e também conteúdos que a própria escola exige para que o mesmo esteja em dia com sua programação acadêmica. Logo diversas situações acabam afetando o andamento da aula e o tempo para um trabalho próximo do ideal fica cada vez menor, obrigando o professor a ser mais rápido ou mais conciso em suas explicações. O ideal seria mais tempo para o professor trabalhar em sala para poder atender as dúvidas que ocorrem. Isso está intimamente ligado a programação com a devida preparação por parte do professor para realizar o melhor trabalho possível.

Na prática, a realização desse trabalho é bem mais difícil, o que torna extremamente necessário o planejamento de cada aula. O presente estudo tem o escopo de acrescentar ao trabalho do professor, mais uma possibilidade em um tópico específico da matemática para resolução de problemas envolvendo o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio. Ampliando as possibilidades de ferramentas matemáticas que o professor pode utilizar, visando ser mais um suporte que pode facilitar a resolução destas questões, funcionando como um apoio no abismo que se encontra o ensino de uma forma geral, principalmente em Matemática, sem eliminar as abordagens do tema por métodos tradicionais, acrescentando uma estrutura metodológica e construindo um modelo matemático como uma das propostas para resoluções de problemas que envolvam o tema.

Quando o aluno gosta da aula, ele está mais disposto a interagir e participar, devendo estar no planejamento do professor tal interação. Logo conseguir disciplina e atenção desse aluno torna-se fundamental ao desenvolvimento do que foi planejado pelo professor. Diante disto, este tema é muito específico, pois trata-se do estudo do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio. Porém, na contramão da modernidade, poucos são os alunos que utilizam relógio com ponteiros, causando um obstáculo inicial por parte desse aluno, e a tendência é que utilizem apenas relógios digitais que estão em seus celulares. Hoje em uma sala de 9º ano por exemplo é muito difícil encontrar algum aluno que ainda não possua seu celular e muitos, a tendência será praticamente todos, com acesso à internet. Esse é um desafio em todas as áreas educacionais, não é só da matemática, conseguir fazer esse aluno participar do aprendizado em sala diante de tantas atrações do mundo externo no qual ele está inserido. Uma possibilidade é utilizar a tecnologia em sala como apoio, sendo uma forma por exemplo mostrar o deslocamento do ponteiro das horas e dos minutos e a variação do ângulo agudo formado pelos ponteiros do relógio, sendo uma maneira de se quebrar a barreira que o aluno pode apresentar alegando que ninguém utiliza mais relógio com ponteiros.

Este presente trabalho inicia-se com uma breve evolução histórica dessa máquina de medir o tempo chamado relógio, bem como propor e desenvolver questões envolvendo o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio, utilizando os métodos tradicionais e lógicos trabalhados pelo professor em sala de aula. E em seguida, utilizando conteúdos da Álgebra e Geometria, propondo uma fórmula para cálculo desse ângulo formado pelos ponteiros de um relógio, com sua devida demonstração e descrição detalhada e aplicação em questões problema, contribuindo para as resoluções de questões que envolvem o tema, ampliando sua compreensão e facilitando cálculos. Tal fórmula, não consta nos livros de ensino fundamental e médio, o que mostra um caráter inovador apresentando um modelo matemático e seus procedimentos para ser utilizado pelo professor em sua aula, do início ao fim, visando ampliar as possibilidades de se trabalhar esse tema. Em nenhum momento se pretende substituir a abordagem tradicional com as relações entre ângulos e deslocamento dos ponteiros por uma fórmula. E sim, ser mais uma possibilidade de trabalho, com desenvolvimento e dificuldades encontradas no estudo. Após a demonstração da fórmula, ela será utilizada em questões com graus de dificuldades diferentes. A vantagem dessa fórmula aplicada diretamente na questão, é tornar as resoluções das questões com diferentes níveis de dificuldades, de forma simples com poucos passos. Em termos de número de passos, as questões simples e difíceis envolvendo o tema, tornam-se basicamente iguais, com resoluções em 4 a 5 passos apenas. O que facilita muito o cálculo provocando uma menor quantidade de erros uma vez que possui menor número de passos para resolução.

Com a devida apresentação e demonstração desta fórmula, testaremos as questões desenvolvidas pelas abordagens tradicional e lógica com a aplicação da fórmula para resolução e devida comparação. Questões de vestibulares e de concursos públicos também serão resolvidas com o mesmo método, ressaltando mais uma vez que o que se pretende de uma forma geral é ampliar as possibilidades de modos de resolução de questões envolvidas com o tema, sendo mais uma ferramenta que o professor poderá utilizar, diante de tamanho desafio educacional em nosso país. Não se pretende com esse estudo substituir em nenhuma hipótese o raciocínio matemático utilizado, que neste caso, é a regra de três simples com relação angular entre os ponteiros das horas e minutos. O objetivo é realmente apresentar uma possibilidade a mais, uma ferramenta que deve também ser conduzida até chegar ao modelo matemático proposto, sem com isso descartar nenhum dos métodos anteriores, e sim agregar mais uma possibilidade de construção. Tal fórmula é relevante nas resoluções das questões pela facilidade de conclusão, e por não constar nos livros didáticos de Matemática.

Para a demonstração da fórmula que determina o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio, será utilizado a figura do relógio com os ponteiros de horas e minutos, a relação entre o ponteiro das horas e o respectivo grau de deslocamento e também será estudado a relação entre o ponteiro dos minutos com seu respectivo grau de deslocamento. Estes passos também ocorrem na abordagem tradicional utilizada em sala de aula como método de resolução para esse tema. Porém, avançando um pouco mais, utilizaremos a Geometria por meio do estudo de ângulos para mostrar uma relação entre esse menor ângulo entre os ponteiros das horas e minutos. Deste modo, será utilizado conceitos e procedimentos matemáticos nos campos da Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas e a Geometria para interpretar e construir um modelo para resolver esse tipo de problema, analisando os resultados e adequando as possíveis dificuldades que podem ocorrem no trabalho do professor em sala. Neste sentido, consoante a Base Nacional Comum Curricular - BNCC(pág.517):

> "Em relação aos Números, os estudantes do Ensino Fundamental têm a oportunidade de desenvolver habilidades referentes ao pensamento numérico, ampliando a compreensão a respeito dos diferentes campos e significados das operações. Para isso, propõe-se a resolução de problemas envolvendo números naturais,inteiros, racionais e reais, em diferentes contextos (do cotidiano, da própria Matemática e de outras áreas do conhecimento).Os estudantes têm também a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico, tendo em vista as demandas para identificar a relação de dependência entre duas grandezas em contextos significativos e comunicá-la utilizando diferentes escritas algébricas, além de resolver situações-problema por meio de equações e inequações. Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança."(BRASIL, 2018)

O trabalho, caminha no sentido de aproveitar o potencial já construído pelos alunos em anos anteriores como a regra de três simples e conceitos básicos de Geometria, promovendo uma continuação em seu aprendizado, estimulando e provocando processos de reflexão e diante do desafio de criar um modelo matemático que resolva os problemas que envolvem o tema fortalecendo os modos de pensar indutivos, dedutivos e sistêmicos que auxiliem no pensamento não só matemático mas como um todo, como versa a BNCC;(pág.519)

> "Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. Assim, para o desenvolvimento de competências que envolvem o raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar os problemas resolvidos, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todas as habilidades pressuponham a mobilização do raciocínio, nem todas se restringem ao seu desenvolvimento. Assim, por exemplo, a identificação de regularidades e padrões exige, além de raciocínio, a representação e a comunicação para expressar as generalizações, bem como a construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado."(BRASIL, 2018)

E por fim como competências de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio garante a BNCC(pág.523):

> "COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO
> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
> 2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde,sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> 3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas."(BRASIL, 2018)

Tais competências descrevem orientações que devem ser trabalhadas para desenvolvimento das habilidades propostas na BNCC, estalecendo um roteiro a ser seguido para um melhor aproveitamento escolar por parte do aluno. Neste trabalho, é proposto a resolução dos problemas bem como o desenvolvimento do modelo matemático, com a finalidade de propor um estudo que seja suporte para o professor utilizar em sala de aula, de modo a estimular o raciocínio do aluno tanto nas resoluções dos problemas que envolvem o tema, quanto na construção de uma fórmula que determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio.

2 UMA BREVE EVOLUÇÃO HISTÓRICA

2.1 Do Relógio

O homem desde sua origem observa os fenômenos da natureza, pois sua sobrevivência depende de tais observações, como dia, noite, chuva, sol, tempestades, fenômenos climáticos, estações do ano para plantar e colher e outros. Entender o tempo então tornou-se necessário para uma melhor adaptação da humanidade, bem como sua natural curiosidade em querer entender mais do universo, e de suas origens, que é uma busca própria do ser humano. Deste modo, a medida do tempo se tornou uma necessidade, pois, poder planejar o plantio e colheitas tornava-se vital para que as civilizações pudessem prosperar. Além disso, construir um mecanismo que possa dizer o tempo, permite melhor planejamento do presente no dia a dia, com horas, minutos e segundos, bem como poder mapear o tempo futuro, ou ainda tentar entender melhor o passado. O tempo desde sempre é um espetacular adversário para a humanidade. Entendê-lo tornou-se fundamental para o ser humano se entender na busca de suas origens diante de um universo infinito.

Poder então mapear o tempo com um sistema de medidas, tornou-se parte da evolução humana com diversas tentativas de se construir uma máquina que pudesse medir o tempo. Alguns construtores influenciaram a humanidade, mudando hábitos de vida em sociedade. Porém alguns desses registros históricos transcritos pelos autores durante séculos e até milênios levantam algumas controvérsias. Imaginar hoje a vida em sociedade sem uma máquina que diz o tempo seria um retrocesso inimaginável. A humanidade sem marcação de tempo seria o caos. Todos perderiam seus compromissos, não haveria como mapear o dia, nem o futuro, nem o passado. Não teríamos como dizer se já está na hora de começar ou terminar um trabalho, uma aula, um filme, enfim. Seria muito complicado imaginar o que a humanidade faria se não conseguíssemos marcar o tempo. Logo, uma máquina de medir o tempo é uma das mais importantes invenções humanas, comparo aqui com a importância da descoberta do fogo.

A escritora Maria Luiza X. de A. Borges, em sua tradução de G.J. Whitrow; no livro 'O tempo na história: concepções de tempo da pré-histórica aos nossos dias' sobre o nosso sentido do tempo (1993 p.17) registrou:

> "Se admitirmos portanto que o tempo da vida civil é medido de um modo que por acaso nos convém, aqui na Terra, mas não tem qualquer significação absoluta ou universal, que dizer sobre nosso sentido interno de tempo? É dele que deriva nossa intuição da natureza absoluta do tempo? O tempo é certamente uma característica fundamental da experiência humana, mas nada prova que tenhamos um sentido especial do tempo, como temos a visão, audição, o tato, o paladar ou o olfato. Nossa experiência direta do tempo é sempre do presente, e nossa ideia dele surge da reflexão sobre essa experiência. No entanto, enquanto nossa

> atenção está concentrada no presente, tendemos a não ter consciência do tempo. Um 'sentido do tempo' envolve alguma sensação ou consciência de duração, mas isso depende de nossos interesses e do modo como focalizamos nossa atenção. Se o que estamos fazendo nos interessa, o tempo parece curto, e, quanto mais atenção dedicamos ao próprio tempo, isto é, à sua duração, mais longo ele parece. Nunca um minuto parece tão longo como quando olhamos o movimento do ponteiro dos segundos no mostrador de um relógio. É claro, portanto, que nossa crença na natureza absoluta da duração temporal não é uma consequência imediata de nossa experiência, mas, como disse há pouco, deriva de nossa reflexão sobre essa experiência. Nosso sentido de duração é afetado não apenas pelo grau em que concentramos nossa atenção no que estamos fazendo, mas por nosso estado físico geral. Em particular, pode ser distorcido por drogas ou pelo confinamento, por longos períodos, em ambientes frios ou escuros, sem recurso a relógios. Entre os fatores que influenciam nosso sentido de duração, porém, o mais amplamente experimentado é nossa idade, pois há um reconhecimento geral de que, à medida que ficamos mais velhos, o tempo, tal como o registram o relógio e o calendário, parece passar cada vez mais depressa." (BORGES, 1993)

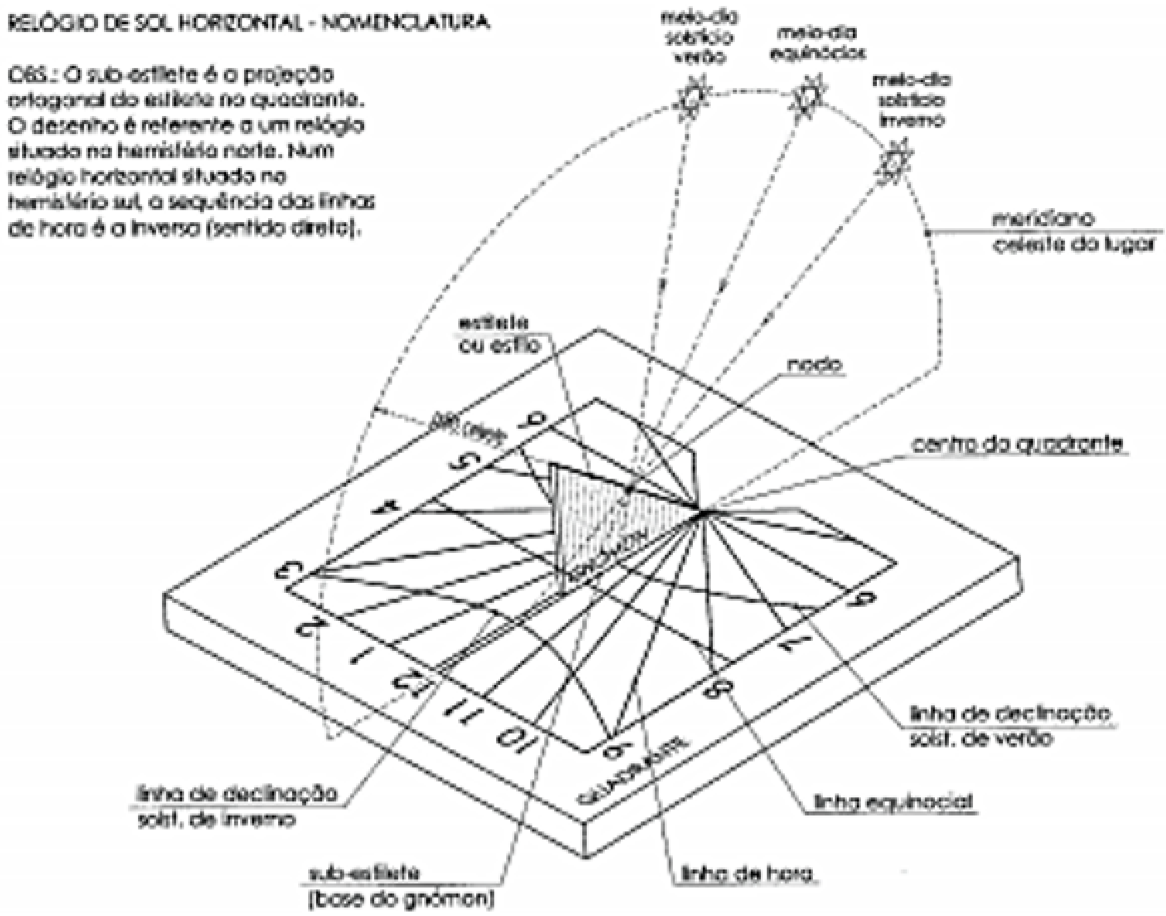
Estudando o tema, segue uma breve evolução histórica desta máquina que ficou conhecida como relógio.

O gnômon, também conhecido como relógio do sol, aparece na história como o primeiro medidor de tempo utilizado pelos babilônicos e egípcios, que marcava as horas por meio de uma projeção da luz do sol que ao incidir na terra determinava uma sombra de uma aste, mostrando uma variação no decorrer do tempo no local geograficamente localizado.

Luis Felipe Marques Pinto, em seu estudo sobre o traçado do relógio de sol (2013) pontuou:

> Geralmente, o relógio de sol tem dois componentes fundamentais: o elemento que produz sombra e a superfície que a recebe. O primeiro é designado de gnómon e a segunda é designada de quadrante (Figura 1). Em Gnomónica, é usual empregar-se indistintamente o termo gnómon para designar um elemento em forma triangular ou em forma tubular, ambos dispostos perpendicularmente ao quadrante. O termo estilete tanto pode designar a aresta do gnómon (de forma triangular), cuja sombra projectada no quadrante assinala a hora solar, como pode designar um componente tubular – ambos dispostos paralelamente ao eixo polar. (MARQUES. . . ,)

Figura 1 – Relógio de sol: Gnômon



Fonte: Marques Pinto, Luís Filipe. Funcionamento e traçado do relógio de sol. Universidade Lusíada. 2013. Disponível em: http://hdl.handle.net/11067/461. Acesso em 09/11/2019.

Após o relógio de sol, há registros de marcadores de tempo na Judéia, mais ou menos 600 a.c., que eram de água (clepsidras) ou de areia (ampulhetas). Historicamente, aparecem registros de marcadores de tempo na China, e em outras partes do mundo. Diversos autores na história, relatam a construção de modelos que medem o tempo, porém, os dados históricos são controversos. Logo o que se propõe neste trabalho é uma breve passagem dessa história. Os primeiros relógios mecânicos com engrenagens aparecem por volta de 850 d.c, existindo controvérsia em relação ao primeiro construtor, o principal nome é Papa Silvestre II.

Aperfeiçoaram os relógios Ricardo de Walinfard (1344); Santigo de Dondis (1344) e o seu filho João de Dondis que ficou conhecido como Horologius e Henrique de Vick (1370). Tendo registro, por volta de 1504, o primeiro relógio de bolso foi construído em Nuremberg, região da Bavária no sul da Alemanha, por Pedro Henlein. Em 1595, Galileu Galilei descobre o isocronismo do pêndulo resultando em relógios de pêndulos, movidos por pesos ou molas.

O primeiro relógio de pulso, em 1814, feito pelo relojoeiro Abraham Louis Breguet, por encomenda de Carolina Murat, princesa de Nápoles e irmã de Napoleão Bonaparte. Porém alguns atribuem a invenção do relógio de pulso, em 1868, a Antoni Patek e Adrien Philippe, modelo que tornou-se popular entre as mulheres utilizado como pulseiras femininas.

Em 1904, o joalheiro Louis Cartier pegou um modelo de bolso e transformou em um relógio de pulso a pedido do brasileiro Alberto Santos Dumont, para que ele pudesse olhar as horas e marcar tempo de vôo de forma mais fácil. Desta forma, Santos Dumont popularizou o relógio de pulso entre os homens, o que inicialmente era considerado como raríssimas jóias.

Figura 2 – Alberto Santos Dumont

Fonte: https://www.oficinadanet.com.br/post/18857-a-historia-de-santos-dumont-o-maior-inventor-brasileiro. Imagem finalizada pela editora Ápice (Dalvo)

Com a Primeira Guerra Mundial, os soldados precisavam saber as horas de forma mais ágil, tornando um marco definitivo o uso do relógio de pulso, e com isso lentamente a população de uma forma geral passou a utilizar relógio de pulso pelas próximas décadas. Hoje, entre os jovens é mais frequente o uso de celular para encontrar as horas, raramente se observa o relógio de pulso, e mais raro ainda o relógio de pulso com marcadores analógicos, ou seja, com ponteiros.

Apenas por curiosidade, segundo o site ISTO É, a notícia é do dia 14/11/2016 às 16h35, em novembro de 2016, um relógio de pulso raro construído em aço inoxidável, datado de 1943, da Patek Phillipe, foi vendido por 11 milhões de francos suíços, mais de 10,2 milhões de euros, tornando-se o mais caro relógio de pulso vendido em um leilão.

Figura 3 – Relógio raro de 1943: Patek Phillipe

Fonte: Foto cedida em 14 de novembro de 2016 pela casa Phillips mostra o relógio Patek Philippe que foi comprado por 10,2 milhões de euros, em Genebra - PHILLIPS/AFP

2.2 Da Geometria

Desde a origem das civilizações o homem vem mostrando que é capaz de construir grandes monumentos, e os vestígios destas obras nos permitem tentar entender um pouco da cultura de cada uma dessas civilizações. Tais monumentos estão espalhados pelo mundo todo, provando a importância da geometria em cada cultura, o qual nos permite perceber além das questões religiosas, a necessidade de sobrevivência de cada uma delas.

Figura 4 – Geometria nas construções antigas

Fonte: https://www.institutodeengenharia.org.br/site/2018/07/04/como-foram-construidas-as-piramides-do-egito/

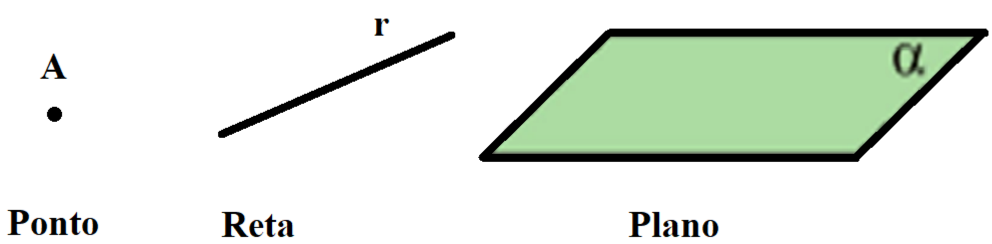
A palavra Geometria significa, em grego, medir a terra. Os agrimensores egípcios (1300 anos a. c.) recorriam à Geometria para determinar a área de seus campos e para delimitar suas terras quando as cheias anuais do Nilo cobriam ou apagavam os marcos anteriores. A construção das pirâmides demonstra que os egípcios dominavam a Geometria. Por volta de 600 a.c., filósofos e matemáticos gregos, entre os quais podemos incluir Tales de Mileto e Pitágoras, passaram a sistematizar os conhecimentos geométricos da época. A geometria antes dos gregos era puramente experimental, ou seja, não havia qualquer cuidado com os princípios matemáticos que regiam os conhecimentos geométricos. Foram, então, os gregos os primeiros a introduzir o raciocínio dedutivo. Foi, porém, com o matemático grego Euclides que esta ciência realmente se desenvolveu, fazendo da cidade egípcia de Alexandria, onde vivia Euclides, o centro mundial da Geometria, por volta de 300 anos a. c. Sistematizando os conhecimentos que outros povos antigos haviam adquirido de forma desordenada através do tempo, Euclides deu-lhes ordem lógica, estudando a fundo as propriedades das figuras geométricas, as áreas e os volumes. Segundo Carl BOYER(p.87):

> Da natureza de seu trabalho, pode-se presumir que Euclides de Alexandria tenha estudado com discípulos de Platão, senão na própria Academia. Há uma estória contada sobre ele que diz que quando um de seus estudantes lhe perguntou para que servia o estudo da geometria, Euclides disse a seu escravo que desse três moedas ao estudante, 'pois ele precisa ter lucro com o que aprende"(BOYER, 1996)

2.2.1 Noções Primitivas da Geometria

Os elementos iniciais da Geometria não foram definidos nas descrições de Euclides, e até os dias atuais permanecem sem definição. Ou seja, os entes primitivos são conceitos primitivos sem definição. Que são: o ponto, a reta, e o plano.

Figura 5 – Entes Primitivos



Fonte: Autor

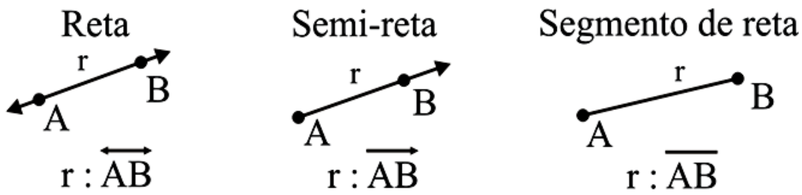
RETA, SEMI-RETA E SEGMENTO DE RETA:

Uma reta, possui infinitos pontos, em que dois deles chamaremos de A e B. Deste modo, uma reta passa pelos dois pontos A e B distintos e não possui fim nos dois sentidos da reta.

Uma semi-reta possui um ponto de origem pré fixado que chamaremos de A, que passa por infinitos outros pontos, inclusive um ponto B, no qual possui origem e não possui fim.

Um segmento de reta possui origem em um ponto A pré fixado e termina em um ponto B distinto de A. Ou seja o segmento de reta tem origem e fim.
Temos então:

Figura 6 – Reta, Semi-reta e Segmento de reta

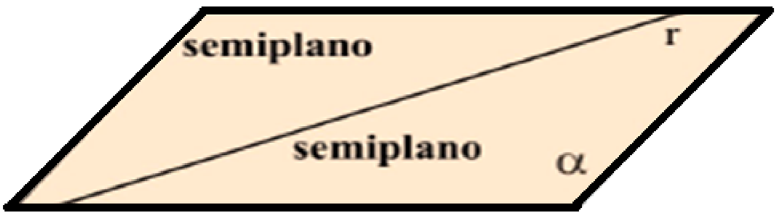


Fonte: Autor

SEMIPLANO:

Plano é ente primitivo, logo não possui definição, porém pode-se descrever suas características, que são superfícies infinitas e ilimitadas que estão em duas dimensões. Tem-se um semiplano quando uma reta pertencente a esse plano divide-o em dois semiplanos, logo cada semiplano terá início que é a reta e não terá fim pois é ilimitado.

Figura 7 – Semiplano



Fonte: Autor

REGIÕES CONVEXAS E NÃO-CONVEXAS

Na geometria, uma região qualquer, que aqui chamaremos de R, será chamada convexa, quando para todo segmento de reta que une dois pontos A e B quaisquer distintos pertencentes a região, estiver inteiramente contido nesta região, ou seja, o segmento de reta que une quaisquer dois pontos internos de R, estará sempre inteiramente dentro da mesma região R, em nenhum momento o segmento de reta passa fora da região. Em linguagem algébrica:

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{R} \text{ e } \forall \mathrm{~B} \in \mathrm{R} \ \Rightarrow \ \overline{\mathrm{AB}} \subset R$$

.

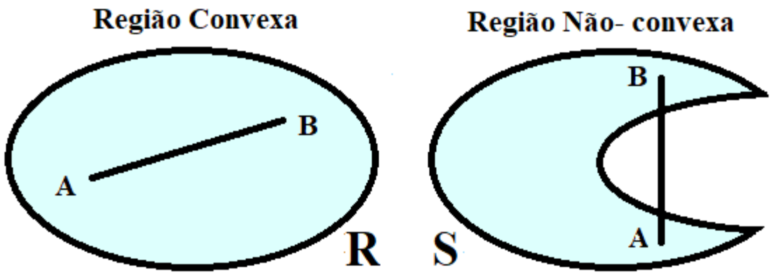
De forma análoga, uma região qualquer, que aqui chamaremos de S, será chamada não-convexa, quando existir algum segmento de reta que une dois pontos A e B quaisquer distintos pertencentes a região S, e o segmento AB não estiver inteiramente contido nesta região. Ou seja, se a reta passar fora da região estando suas extremidades A e B internos a região S, será uma região não convexa. Dizemos de modo informal que a região possui um buraco em seu interior. Ou seja, existe a possibilidade da reta não estar inteiramente contida na região S. Em linguagem algébrica:

$$\exists\ \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{S} \ \Rightarrow\ \overline{\mathrm{AB}}\ \not\subset \mathrm{S}$$

.

Nos diagramas temos:

Figura 8 – Região Convexa e Não-convexa



Fonte: Autor

Observe que na figura acima, na Região Convexa, o segmento de reta AB, está contida inteiramente na região R, o mesmo não ocorre na Região Não Convexa.

2.3 ÂNGULO

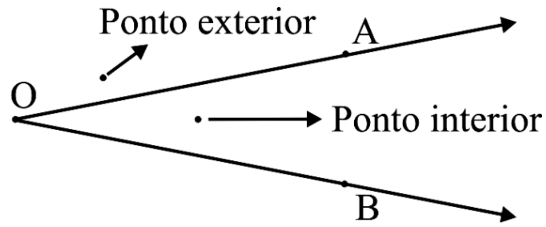
Em relação aos ângulos, Francisco Vera (1960, p. 32-3) traz as seguintes definições:

> Este conceito, tão importante em geometria plana, pode ser introduzido de vários modos: 1º Segundo Euclides, é a mútua inclinição de duas retas; 2º Segundo Sannia, é o resultado da rotação de uma semi-reta em torno de sua origem, com relação a outra semi-reta fixa; 3º Segundo Enriques, é a interferência de dois semi-planos, isto é: nesta acepção, se adota estritamente o conceito de ângulo convexo; 4º Segundo Hilbert, é um par de semi-retas com origem comum; 5º Segundo Veronese, o conceito de ângulo está condicionado ao de setor angular, que ele define assim: sistema unidimensional cujo elemento é o raio, isto é, uma parte limitada de um feixe de raios. Sua magnitude intensiva é o ângulo. Em geometria elementar costuma ser caracterizado do seguinte modo: Cada uma das quatro partes ou regiões que determinam duas retas coplanares AB e CD que se cortam. Lados do ângulo são as bordas retilíneas que o limitam e que são semi-retas de mesma origem. O ponto O, comum às duas retas, é o vértice do ângulo. Esta definição implica o conceito de ângulo como parte do plano compreendida entre duas semi-retas OB e OC, ou seja, aquela situada do mesmo lado de CD que contém a semi-reta OB e do mesmo lado de AB que contém a semi-reta OC, de modo que ângulo é o conjunto dos pontos comuns a dois semi-planos de um mesmo plano cujos contornos se cortam em um ponto. (...) (VERA, 1960)

Para Machado "da Geometria Plana sabemos que um ângulo é caracterizado por um par de semi-retas de origem no mesmo ponto."(MACHADO, 1994)

Ângulo é a região compreendida entre duas semi-retas de mesma origem. Temos duas regiões, convexa chamada de ângulo interno, e a não convexa que é a região externa do ângulo.

Figura 9 – Ângulo, duas semiretas de mesma origem



Fonte: Autor

Na figura acima, o ponto interior está na região convexa do ângulo, e o ponto exterior na região não convexa do ângulo. Lembrando que a soma dos ângulos interno e externo é 360º.

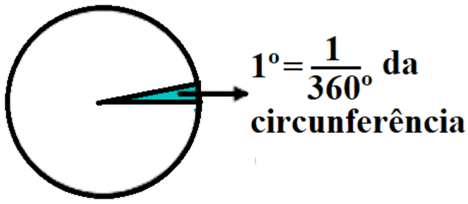
Indica-se: $A\hat{O}B$, ou $\angle AOB$; em que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semiretas de mesma origem, que neste caso é o ponto O, que é o vértice do ângulo;

A união do conjunto dos pontos interiores com as semiretas de mesma origem, constituim-se a região angular.

2.3.1 O Sistema Sexagesimal (Sistema Graus)

A astronomia atingiu o seu ápice em Alexandria com Hiparco, no século 2º a.c. Influenciado pelos Babilônios, Hiparco utilizou a base 60, pois possuía muitos divisores naturais. Utilizando essa base de contagem, Hiparco dividiu uma circunferência em 360 partes iguais. Ou seja 360º.

Figura 10 – Um grau



Fonte: Autor

MÚLTIPLOS E SUBMÚLTIPLOS DO GRAU

Uma unidade de grau pode ser divida em 60 partes que chamaremos de minutos. Ou ainda: 1 grau corresponde a 60 minutos.

$$1^{o} = 60'$$

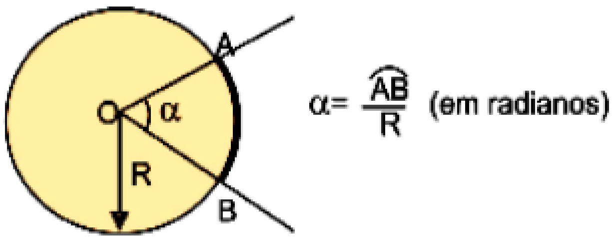
De forma análoga, uma unidade de minuto submúltiplo do grau pode ser divida em 60 partes que chamaremos de segundos. Ou ainda: 1 minuto corresponde a 60 segundos.

$$1' = 60"$$

2.3.2 O Sistema Radianos

A medida de um ângulo no sistema radianos é a razão entre o comprimento do arco que este ângulo determina sobre qualquer circunferência de centro no vértice do ângulo e a medida do raio da referida circunferência.

Figura 11 – Radianos



Fonte: Autor

Utlizaremos para este estudo o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio em graus, embora possa ser usado em radianos também, bastando apenas transformar radianos em graus. Lembrando que π radianos corresponde a 180º.

2.3.3 Tipos de Ângulos

Utilizaremos neste tópico a abertura angular no sentido anti-horário.

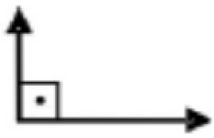
1. Ângulo agudo:
A sua medida está entre 0 e 90°.

Figura 12 – Ângulo agudo

Fonte: Autor

2. Ângulo reto:
A sua medida é igual a 90°.

Figura 13 – Ângulo reto



Fonte: Autor

3. Ângulo obtuso:
A sua medida está entre 90° e 180°.

Figura 14 – Ângulo obtuso

Fonte: Autor

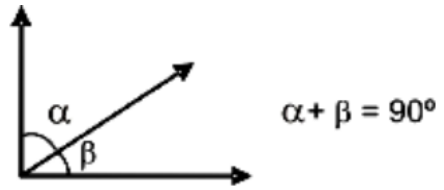
4. Ângulo raso:
A sua medida é igual a 180°.

Figura 15 – Ângulo raso

Fonte: Autor

5. Ângulos complementares:
São dois ângulos cuja soma das medidas é 90º.

Figura 16 – Ângulos complementares

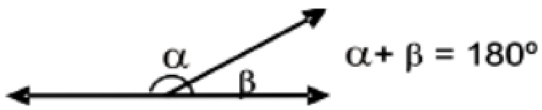


Fonte: Autor

Assim, o complemento de um ângulo de medida x é: 90º – x

6. Ângulos suplementares:
São dois ângulos cuja soma das medidas é 180º.

Figura 17 – Ângulos suplementares

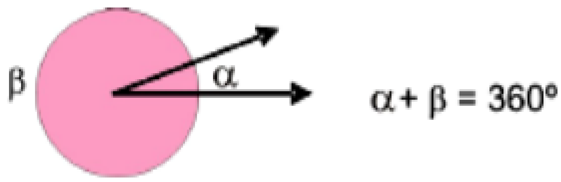


Fonte: Autor

Assim, o suplemento de um ângulo de medida x é: 180º – x

7. Ângulos replementares:
São dois ângulos cuja soma das medidas é 360º.

Figura 18 – Ângulos replementares

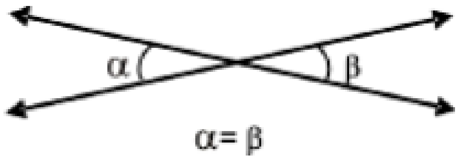


Fonte: Autor

Assim, o replemento de um ângulo de medida x é: 360º – x

8. Ângulos opostos pelo vértice:
São dois ângulos congruentes, em que os lados de um são semi-retas opostas aos lados do outro.

Figura 19 – Ângulos opostos pelo vértice



Fonte: Autor

2.3.4 Geometria aplicada no problema

Será apresentado apenas a introdução da geometria, cujos conceitos básicos são necessários para a abordagem e desenvolvimento da fórmula que mede o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio, como veremos nos capítulos subsequentes.

Diversos autores, como Pavanello (1995), colocam a Geometria como importante ramo da Matemática para o desenvolvimento de capacidades intelectuais, como a percepção espacial, a criatividade, o raciocínio hipotético-dedutivo. Deste modo a autora nos expõe:

> "a Geometria oferece um maior número de situações nas quais o aluno pode exercitar sua criatividade ao interagir com as propriedades dos objetos, ao manipular e construir figuras, ao observar suas características, compará-las, associá-las de diferentes modos, ao conceber maneiras de representá-las."(PAVANELLO, 1995)

Segundo Deguire (1994,p.73) existem muitas razões para que se estude Geometria nas séries iniciais e de Ensino Médio. Uma delas é a oportunidade que a Geometria oferece de "ensinar a resolver problemas" e "ensinar para resolver problemas",

> "...ensinar a resolver problemas ultrapassa a mera resolução de problemas para incluir a reflexão sobre processos de resolução, objetivando coligir estratégias de resolução de problemas que poderão ser úteis posteriormente; ensinar para resolver problemas envolve o ensino do conteúdo de uma maneira significativa, de modo que passe a ser utilizado em outros problemas e aprendizados. Uma maneira, pelo menos, de ensinar para resolver problemas consiste em desenvolver o conteúdo a partir de episódios de resolução de problemas."(DEGUIRE, 1994)

É recomendável também a utilização da tecnologia para promover o melhor entendimento do aluno, neste sentido, Soares (2009) aduz:

> "É necessário criar novos processos e métodos para o trabalho pedagógico, investindo nas tecnologias de informação e comunicação, adequando-as ao atendimento destas necessidades de demanda, utilizando-as especialmente como ferramenta a serviço da formação permanente e continuada das pessoas na busca do conhecimento. A utilização das tecnologias, em especial do computador, exige das instituições de ensino e dos docentes novas posturas frente ao processo de ensino e de aprendizagem. Essa educação necessitará de um professor mediador do processo de interação tecnologia/aprendizagem, que desafie constantemente os seus alunos com experiências de aprendizagem significativas, tanto presenciais como à

> distância. A revolução tecnológica produziu uma geração de alunos que cresceu em ambientes ricos de multimídia, com expectativas e visão de mundo diferente de gerações anteriores. Assim, possivelmente a revisão das práticas educacionais constitui-se como essência para que possamos dar-lhes uma educação apropriada."(SOARES, 2009)

Como observado, a Geometria é um valioso conteúdo matemático servindo de suporte também para outras áreas da matemática, na busca do desenvolvimento do raciocínio construtivo e dedutivo. Como neste trabalho em apresentação.

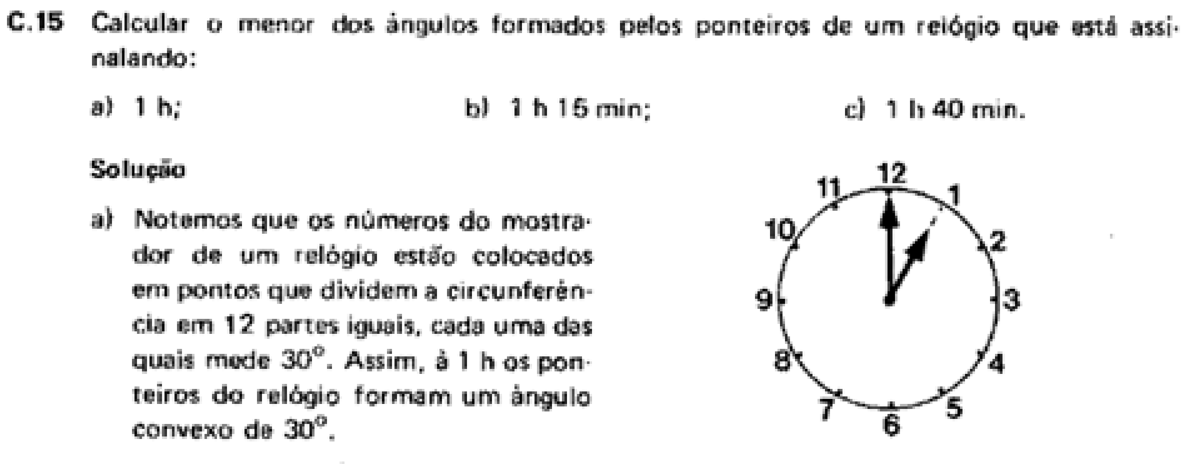
3 RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

Neste capítulo, será trabalhado a resolução de problemas envolvendo o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio, usando abordagens tradicionais com a relação de Grandezas e Medidas por regra de três simples, e em seguida, a abordagem lógica utilizadas como método de resolução sugeridos nos livros didáticos de ensino fundamental e médio sobre o tema.

Tais conhecimentos, servirão como bases para a construção do modelo matemático para resolução dos problemas de modo a favorecer o desenvolvimento do raciocínio matemático. Buscando fortalecer os conceitos que envolvem os problemas em questão, que neste caso, é a utilização de regra de três simples com suas relações com os ponteiros de um relógio e seus respectivos ângulos provocados pelos deslocamentos destes ponteiros. Pretende-se aqui explorar a construção e oferecer ao professor, além do tradicional, um modelo matemático de modo a ampliar as possibilidades para resolução destes problemas que envolvem o tema.

Os livros de ensino fundamental e médio abordam o tema de forma tradicional, utilizando as relações entre o deslocamento dos ponteiros e o ângulo entre eles. Vamos construir tais relações. Conforme afirma IEZZI(1997,p.8,ex.c.15), na questão extraída de seu livro, mesmo com imagem com baixa resolução:

Figura 20 – Exercício do livro de Gelson IEZZI letra a


C.15 Calcular o menor dos ângulos formados pelos ponteiros de um relógio que está assinalando:

a) 1 h; b) 1 h 15 min; c) 1 h 40 min.

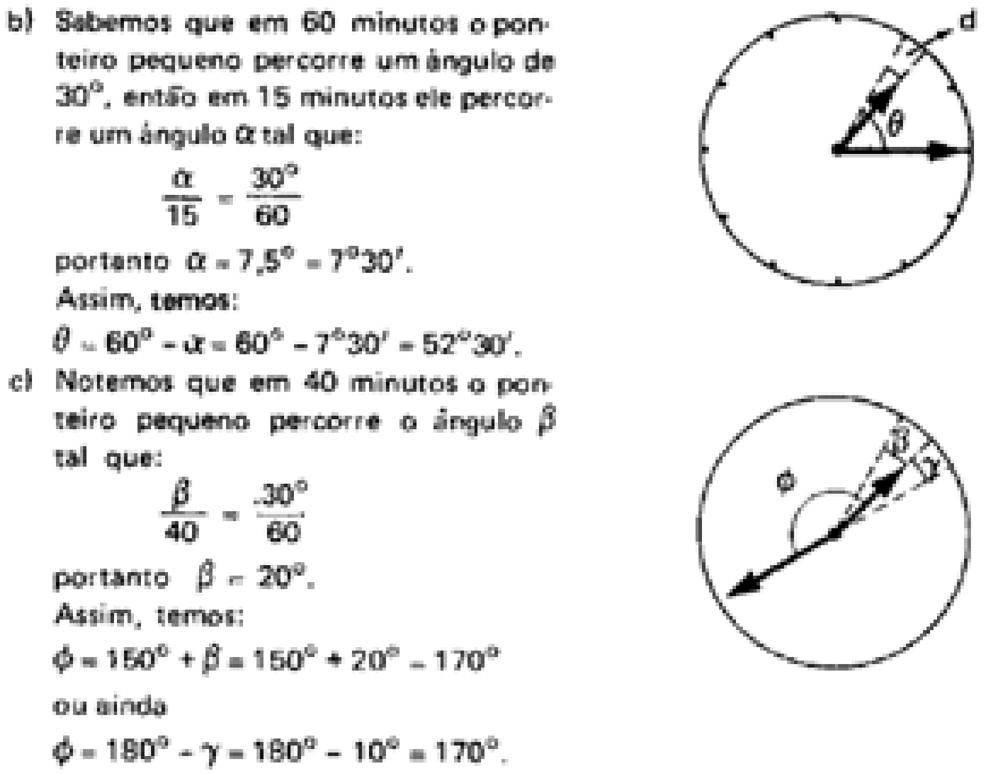
Solução

a) Notemos que os números do mostrador de um relógio estão colocados em pontos que dividem a circunferência em 12 partes iguais, cada uma das quais mede 30°. Assim, à 1 h os ponteiros do relógio formam um ângulo convexo de 30°.

Fonte: IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar-Trigonometria. V.3.2ªedição. São Paulo: Atual, 1977.Exercício c-15.a). p.8) (IEZZI, 1997)

Assim como Gelson IEZZI, neste exemplo anterior da questão 15 na letra a), e nas resoluções, letra b) e c), nos livros didáticos de uma forma geral, os autores tratam o assunto muitas vezes apenas em questões resolvidas e alguns não apresentam teoria. Muitos

Figura 21 – Exercício do livro de Gelson IEZZI letras b e c



b) Sabemos que em 60 minutos o ponteiro pequeno percorre um ângulo de 30°, então em 15 minutos ele percorre um ângulo α tal que:

$$\frac{\alpha}{15} = \frac{30°}{60}$$

portanto $\alpha = 7{,}5° = 7°30'$.
Assim, temos:
$\theta = 60° - \alpha = 60° - 7°30' = 52°30'$.

c) Notemos que em 40 minutos o ponteiro pequeno percorre o ângulo β tal que:

$$\frac{\beta}{40} = \frac{30°}{60}$$

portanto $\beta = 20°$.
Assim, temos:
$\phi = 150° + \beta = 150° + 20° = 170°$
ou ainda
$\phi = 180° - \gamma = 180° - 10° = 170°$.

Fonte: IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar-Trigonometria. V.3.2ªedição. São Paulo: Atual, 1977.Exercício c-15. p. 8-c

autores nacionais, abordam o tema de modo tradicional por regra de três simples, com relações entre os ponteiros do relógio e o ângulo correspondente em graus. Tais como: Luis Roberto Dante; (DANTE, 2014), Manoel Paiva (PAIVA, 2005), Elon Lages Lima; (LIMA, 2007), Osvaldo Dolce (DOLCE, 1993), Giovanni; (GIOVANNI, 1992), Bianchini; (BIANCHINI EDWALDO E PACCOLA, 1990), Bucchi; (BUCCHI, 1998), Do Carmo, Morgado (CARMO MORGADO, 1992), e outros.

Desenvolvendo o tema temos: como o relógio é dividido em 12 partes, ou seja 12 horas, e ainda uma volta completa é 360°, então ao dividirmos 360° por 12 horas teremos 30°. Ou seja:

A cada uma hora o ponteiro das horas desloca-se 30^o.

$$1h - - - - - 30^o$$

O ponteiro dos minutos em uma volta completa(360°) percorre 60 minutos. Temos:

$$60min - - - - - 360^o$$

(dividindo por 60) temos:

$$1min. -----6^o$$

Temos mais uma relação que é transformando as horas em minutos.

Como a cada uma hora o ponteiro das horas desloca-se 30º, e transformando horas para minutos, temos que a cada 60 min. equivale a 30º. ou seja:

$$1hora -----30^o$$

$$60min -----30^o$$

(dividindo por 60) temos:

$$1min -----0,5^o$$

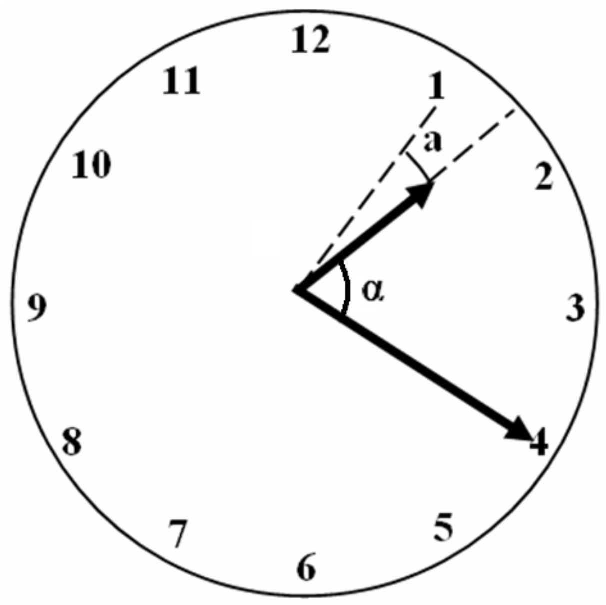
Ou seja a cada um minuto o ponteiro das horas desloca-se 0,5º.

Observe então a construção do nosso primeiro exemplo no qual será utilizado esta última relação (1 min —— 0,5º)

3.1 Problema 1

Qual é o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando marca 1h20min?
A abordagem tradicional:
Resolução:

Figura 22 – Relógo 1h20min



Fonte: o autor

Analisando a figura anterior que representa o relógio, e utilizando os conceitos básicos de Geometria, podemos observar que o ponteiro dos minutos encontra-se no número 4 e o das horas, que inicialmente estava sobre o número 1, deslocou-se para a direita, pois passaram 20 minutos. Chamaremos este deslocamento para a direita dos ponteiros como deslocamento no sentido horário. Lembrando que como é um sistema de engrenagens, o deslocamento do ponteiro dos minutos provoca o deslocamento do ponteiro das horas. Deste modo do número 1 ao 4 no relógio temos uma abertura angular igual a 90º. Logo:

A soma dos ângulos $a + \alpha = 90^o$.

Recordando então, no ponteiro das horas temos que uma hora corresponde a um deslocamento de 30º, então podemos dizer que em 60 minutos o ponteiro das horas desloca-se 30º, e simplificando essa expressão temos a seguinte relação: 1 minuto equivale a 0,5º, veja algebricamente:

$$1hora - - - - - 30^o$$

$$60min - - - - - 30^o$$

(dividindo por 60) temos:

$$1min - - - - - 0,5^o$$

Logo, se 1 minuto desloca o ponteiro das horas em 0,5º, quanto deslocará em 20 minutos?

$$1min - - - - - 0,5^o$$

$$20min - - - - - a$$

Utilizando a regra de três simples obtemos:

$$a.1min. = 0,5^o.20min.$$

$$a = 10^o$$

Com o valor de a calculado, e pela interpretação geométrica dos ponteiros desse relógio, com relação ao ângulo agudo formado pelos ponteiros das horas e minutos, podemos afirmar que:

$$a + \alpha = 90^o$$

$$\alpha = 90^o - a$$

$$\alpha = 90^o - 10^o$$

$$\alpha = 80^o$$

Logo, o ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio ao marcar 1h20min. é 80º.

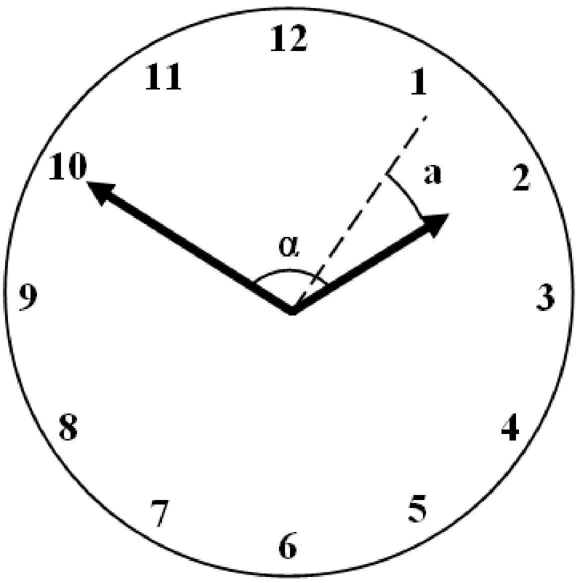
A abordagem lógica:

Com a abordagem lógica, é possível trabalhar este exemplo apenas raciocinando com as relações existentes entre os ponteiros e o ângulo de deslocamento. É sempre recomendado este tipo de análise com o aluno, para que possa interpretar e construir seu raciocínio para resolver as questões de forma lógica. Observe que 20 minutos é 1/3 da hora, então o ponteiro das horas desloca-se 1/3 de 30^o, que é 10^o. Daí teremos, pela interpretação geométrica, observando o menor ângulo entre os ponteiros do relógio, que $10^o + \alpha = 90^o$. Logo, $\alpha = 80^o$. Resposta: $\alpha = 80^o$.

3.2 Problema 2

Qual é o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando marca 1h50min?
A abordagem tradicional:

Figura 23 – Relógio 1h50min



Fonte: o autor

Fazendo a mesma análise que do problema 1, para o ponteiro das horas teremos sempre a relação que 1 minuto equivale a um deslocamento de 0,5°, então em 50 minutos, utilizando regra de três simples qual será o deslocamento angular?

$$1min - - - - - 0,5^o$$

$$50min - - - - - a$$

Obtemos:

$$a.1min. = 0,5^o.50min.$$

$$a = 25^o$$

Pela interpretação geométrica dos ponteiros desse relógio, podemos afirmar que:

$$\alpha - a = 90^o$$
$$\alpha = 90^o + a$$
$$\alpha = 90^o + 25^o$$
$$\alpha = 115^o$$

Logo, o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio ao marcar 1h50min. é 115^o.

A abordagem lógica:

Observe que 50 minutos é 5/6 da hora, então o ponteiro das horas desloca 5/6 de 30^o, que é 25^o. Daí teremos o menor ângulo observado na figura deste exemplo que: $\alpha = 90^o + 25^o$.
Resposta: $\alpha = 115^o$.

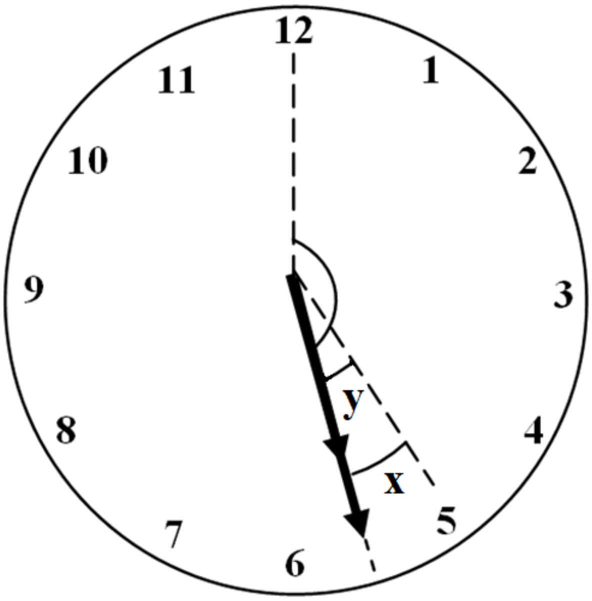
Os exemplos 1 e 2, mais simples, são introdutórios para o tema, e o método de resolução pela regra de três ou abordagem lógica tornam-se ferramentas comuns para resolver estes problemas de forma relativamente simples, claro que requer bom entendimento por parte do aluno. Porém as questões mais complexas exigem bem mais do aluno para a resolução. O próximo exemplo foi o que me levou a estudar o modelo matemático que será demonstrado no próximo capítulo.

3.3 Problema 3

Que horas são quando os ponteiros de um relógio estão sobrepostos entre 5 e 6 horas?

A abordagem tradicional:
Resolução:
Considere as variáveis x e y a seguir:
. y o ângulo do deslocamento do ponteiro das horas em graus.
. x o deslocamento em minutos.

Figura 24 – Relógio com ponteiros sobreposotos entre 5 e 6 horas



Fonte: o autor

No ponteiro das horas (primeira equação), temos:

$$1min - - - - - - 0,5^o$$

$$(25+x)min - - - - y$$

$$y = 0,5^o.(25+x)$$

$$(25+x) = y/0,5^o$$

No ponteiro dos minutos, como já mostrado anteriormente, utilizaremos a relação: quando o ponteiro dos minutos completa uma volta temos: 60 minutos equivalendo a 360º. Simplificando por 60 em ambos os lados encontramos:

$$1min - - - - - - 6^{\text{o}}$$

Deste modo, (segunda equação) temos:

$$1min - - - - - - 6^o$$

$$(25+x)min - - - - 150^o + y$$

$$150^o + y = 6^o.(25+x)$$

(segunda equação)

Substituindo o valor de $(25 + x)$ da primeira equação na segunda equação, temos:

$$150^o + y = 6^o.(25+x)$$

$$150^o + y = 6^o.y/0,5^o$$

lembrando que 6º.y/0,5º = 6º. y/(1/2) = 6º.y.2 = 12º.y, logo:

$$150^o + y = 12^o.y$$

$$11.y = 150^o$$

$$y = 150^o/11$$

Voltando na primeira equação, temos:

$$25 + x = y/0,5^o$$

$$25 + x = 2.y$$

Substituindo o valor de y, temos:

$$25 + x = 2.(150^o/11)$$

multiplicando ambos os membros por 11 temos:

$$275 + 11.x = 300^o$$

$$x = 25/11$$

$$x = 2,2727272...min.$$

em minutos, transformando 0,2727272 ... para segundo, temos: x = 2min e 16seg. aproximadamente. Como o ponteiro dos minutos deslocou 25 + x minutos, logo são aproximadamente 5h27min16seg.

Resposta: 5h27min16seg.

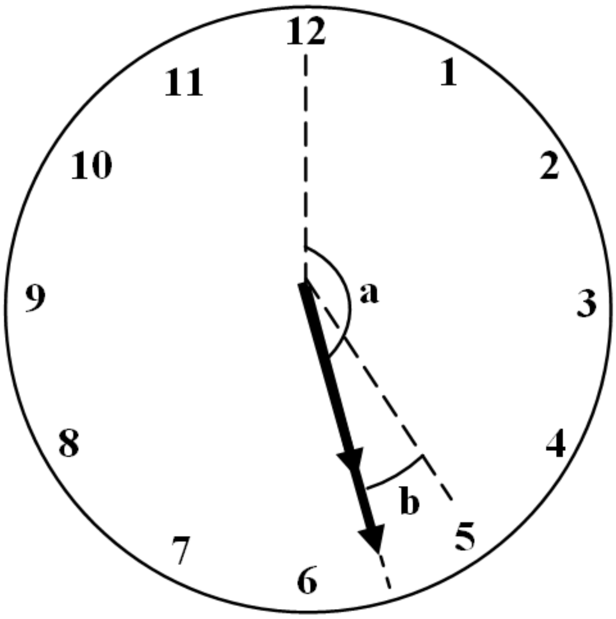
A abordagem lógica:

Neste caso, a abordagem lógica é um pouco mais trabalhosa. Sigam os passos:

Sejam:

a: o ângulo do deslocamento do ponteiro dos minutos.
b: o ângulo do deslocamento do ponteiro das horas.
m: o deslocamento em minutos.

Figura 25 – Ponteiros sobrepostos



Fonte: o autor

Já vimos que 1 minuto corresponde a 6º, no ponteiro dos minutos, então temos:

$$1min ------ 6^o$$

$$(m)min ---- a$$

logo

$$a = 6^o.m$$

Em que, m é o número de minutos que desloca o ponteiro dos minutos, e a é o grau deslocado pelo ponteiro dos minutos, que neste caso é maior que 150º.

Já vimos também a relação para o ponteiro das horas: 1 minutos corresponde a 0,5º, logo para cada grau (b) deslocado do ponteiro das horas, temos:

$$1min ------ 0,5^o$$

$$(m)min ---- b$$

logo

$$b = 0,5^o.m$$

Em que, m é o número de minutos que desloca o ponteiro das horas, e b é o grau deslocado pelo ponteiro das horas.

E ainda, o ângulo formado pelo deslocamento do ponteiro dos minutos menos o ângulo formado pelo deslocamento do ponteiro das horas é 150º (como podemos observar na figura anterior), então temos:

$$a - b = 150^o$$

$$6^o.m - 0,5^o.m = 150^o$$

$$5,5^o.m = 150^o$$

$$m = 150^o/5,5^o$$

$$m = 27min16seg.$$

Resposta: 5h27min16seg

Este problema resolvido anteriormente é bem mais interessante do que os dois primeiros, e aqui foi abordado de duas maneiras, em que uma abordagem completa a outra. Após este problema, veremos a construção de um modelo matemático para determinar o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio. A grande vantagem desta fórmula é que facilita muito o cálculo mesmo nas questões mais complexas. Ao mesmo tempo que esse método, que ainda será abordado, é muito mais simples. Porém, os livros de ensino fundamental e médio não abordam essa fórmula. O fato é que após a demonstração, será testado a fórmula em questões fáceis, médias e difíceis. Serão resolvidas as questões anteriores com a fórmula e a devida comparação com os métodos anteriores, e também questões de vestibulares e de concursos públicos sobre o tema.

4 DESENVOLVIMENTO DA FÓRMULA

Neste capítulo, será apresentado o desenvolvimento para o modelo matemático que é abordado desde o início deste trabalho, após já serem apresentadas duas abordagens para resolução das questões, sendo uma tradicional e outra lógica, ambas utilizando conceitos matemáticos que foram trabalhados pelos alunos em anos anteriores em que, após a releitura destes problemas, recomenda-se a abordagem do tema de forma a conduzir a construção da fórmula proposta e posteriormente o teste nas questões evidenciando uma maneira a mais para resolução dos problemas sobre o assunto.

No teste com a fórmula, as questões serão geralmente escritas e resolvidas em 4 ou 5 passos, mostrando uma grande vantagem em resolver as questões com sua aplicação. Lembrando que o que se pretende neste estudo é apresentar uma forma a mais e não a substituição de um método por outro. É recomendado então, as abordagens iniciais conduzindo o aluno para o modelo matemático e pelo menos uma questão mais difícil deste assunto deve ser feito com a regra de três e abordagem lógica.

Este processo utiliza conceitos e procedimentos da Álgebra e da Aritmética, Grandezas e Medidas e ainda a Geometria, para interpretar e construir o modelo proposto para resolver os problemas que envolvem ângulo entre ponteiros de um relógio e permite analisar os resultados em comparação com métodos diferentes, abordando suas competências e habilidades recomendadas na BNCC.

A Matemática ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, estimulando a forma de pensamento nos diversos desafios e construções dos modelos matemáticos para resolução de problemas, além de ser uma ferramenta para tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. Assim, a BNCC, recomenda:

> Em seu papel formativo, a matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e cientifica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 1999)

Deste modo, o estudo da Matemática pode preparar o estudante para diversos desafios diários, que vão além da própria Matemática, melhorando a capacidade para tomada de decisões importantes em sua vida.

4.1 Demonstração da fórmula

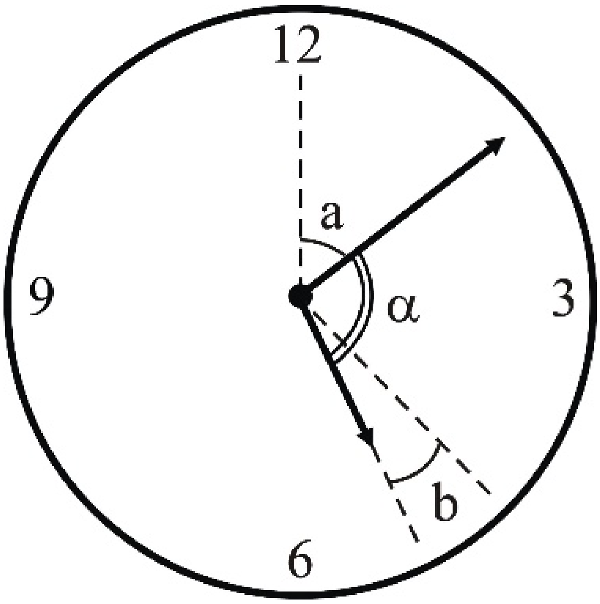
Utilizaremos a Geometria para elaborar a equação que resultará no modelo proposto:

Considere os ponteiros de um relógio marcando uma hora qualquer. Com a análise dos deslocamentos dos ponteiros podemos observar relações entre os ponteiros e o menor ângulo formado. A construção a seguir utiliza as abordagens expostas neste trabalho anteriormente.

Sejam as variáveis:

h: nº de horas; para h = 0, 1, 2, ... , 11;
m: nº de minutos, para m = 0, 1, 2, ... , 59;
a: deslocamento do ponteiro dos minutos em graus: $(1min --- 6^o)$;
b: deslocamento do ponteiro das horas em graus: $(1min --- 0,5^o)$;

Figura 26 – Relógio para a demonstração



Fonte: o autor

Temos que para cada hora deslocada, o ponteiro das horas percorre 30º, então o deslocamento angular do ponteiro das horas, desde a origem (12horas), será representado como $30^o.h$. Na mesma relação (1h corresponde a 30º), ao transformarmos a hora em minutos, 60 minutos correspondendo a 30º, ou ainda, dividindo por 60 temos: 1min para cada 0,5º no ponteiro das horas, logo a relação: $b = 0{,}5^o.m$. Analisando o ponteiro dos minutos, ou seja 60 minutos corresponde a 360º, e dividindo por 60 temos: 1min para cada 6º no ponteiro dos minutos, logo a relação: $a = 6^o.m$.

Na figura acima temos a relação geométrica dos ângulos, que são congruentes:

$$30^o.h + b = \alpha + a$$

$$30^o.h + 0,5^o.m = \alpha + 6^o.m$$

$$30^o.h + 0,5^o.m - 6^o.m = \alpha$$

$$\alpha = 30^o.h - 5,5^o.m$$

Em valor absoluto temos:

$$\alpha = |30^o.h - 5,5^o.m|$$

Para $h = 0$, 1, 2, ... , 11 e $m = 0$, 1, 2, ... , 59

Com o desenvolvimento do trabalho até aqui, ao qual já se propôs métodos de resolução para tais questões sem este método recém demonstrado acima, deve-se ressaltar que a fórmula que mede o menor ângulo dos ponteiros do relógio, torna a resolução bem mais simples, igualando em termos de passos a serem realizados as questões fáceis e difíceis. De modo que testaremos as questões anteriores já resolvidas e suas devidas comparações com os três métodos utilizados, evidenciando como fica mais simples a aplicação com esta fórmula, e ressaltando mais uma vez que o trabalho não propõe a substituição e sim acrescentar mais uma alternativa ao trabalho do professor.

4.2 Retomando o Problema 1

Os próximos exemplos retomaremos as mesmas questões já abordadas neste estudo. Porém agora utilizaremos o modelo proposto que é a fórmula para determinar o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio. Tal aplicação é que motivou o estudo para este trabalho, pois além de tornar a resolução mais rápida, não consta nos livros. Vejamos o primeiro exemplo:

Qual é o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando marca 1h20min?
Utilizando a fórmula teremos:

$$\alpha = |30^o.h - 5,5.m|$$

$$\alpha = |30^o.1 - 5,5.20|$$

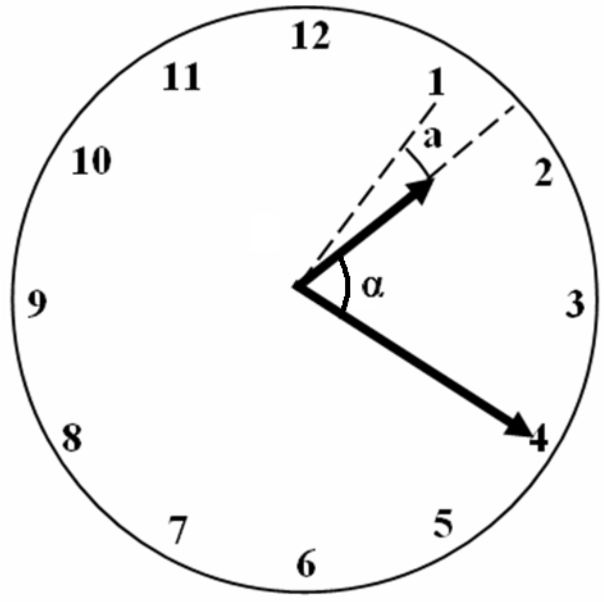
$$\alpha = |30^o - 110^o|$$

$$\alpha = |-80^o|$$

portanto $\alpha = 80^o$, Resposta: 80^o

Na figura a seguir temos a representação:

Figura 27 – Relógio 1h20min



Fonte: o autor

4.3 Retomando o Problema 2

Qual é o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando marca 1h50min?

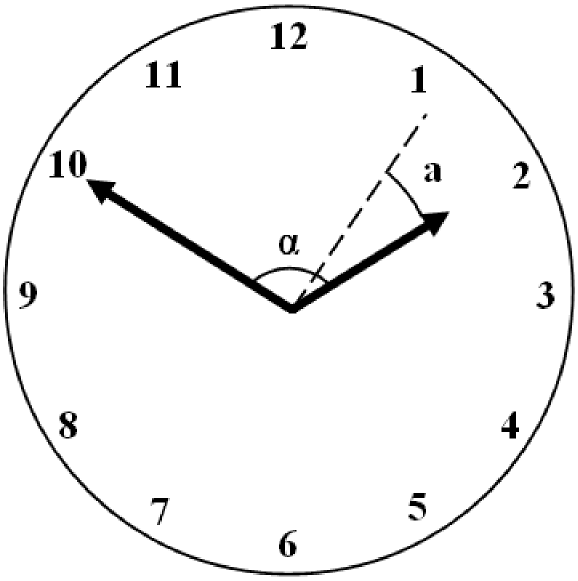
Utilizando a fórmula teremos:

Como a fórmula envolve o deslocamento do ponteiro dos minutos e das horas, então o resultado pela fórmula neste caso, é o replemento de α, ou seja, o resultado será o ângulo de deslocamento formado pelos ponteiros ou *varredura*, por isso escrever o ângulo como 360º - α. Como foi pedido o ângulo menor, usaremos então $360^o - \alpha$ que é o replemento de α.

Podendo também pela fórmula calcular o ângulo e posteriormente utilizar seu replemento, pois o que se busca na questão é o menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio. Aqui utilizaremos 360º – α.

Logo o ângulo α é o menor ângulo procurado. Então:

Figura 28 – Relógio 1h50min



Fonte: o autor

$$360^o - \alpha = |30^o.h - 5,5.m|$$

$$360^o - \alpha = |30^o.1 - 5,5.50|$$

$$360^o - \alpha = |30^o - 275^o|$$

$$360^o - \alpha = 245^o$$

$$-\alpha = 245^o - 360^o$$

portanto $\alpha = 115^o$, Resposta: $\alpha = 115^o$.

4.4 Retomando o Problema 3

Que horas são quando os ponteiros de um relógio estão sobrepostos entre 5 e 6 horas?

Utilizando a fórmula, com o ângulo dos ponteiros igual a zero pois estão sobrepostos, teremos:

$$\alpha = |30^o.h - 5,5.m|$$

$$\alpha = |30^o.5 - 5,5.m|$$

$$0 = |150^o - 5,5.m|$$

$$5,5.m = 150^o$$

$$m = 150^o/5,5$$

$$m = 27,272727...$$

Aproximadamente:

$$m = 27min16seg$$

Resp: $5h27min16seg$

Pelos exemplos anteriores, fica claro que a utilização desta fórmula facilita encontrar o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio. Embora tal fato aconteça o aluno deve saber encontrar o resultado também pela regra de três, ou até nos casos mais simples pela "abordagem lógica" apresentada. Utilizando a fórmula podemos resolver as questões que seriam mais trabalhosas com a regra de três simples. Segue um exemplo Extra resolvido com a fórmula, e em seguida pela abordagem tradicional para devida comparação:

4.5 Extra: Problema 4

Entre as 15h e 16h, os ponteiros de um relógio formam um ângulo de 25°. Pede(m) – se o(s) horário(s) exato(s) indicado(s) pelo relógio.

Aplicando a fórmula, com o ângulo dos ponteiros igual a 25°, e ainda transformando 15 e 16h para 3 e 4 horas respectivamente, teremos duas possibilidades, pois a relação é modular:

$$\alpha = |30^o.h - 5,5^o.m|$$

$$25^o = |30^o.3 - 5,5^o.m|$$

$$25^o = |90^o - 5,5^o.m|$$

temos duas possibilidades, a primeira, vamos considerar o valor do módulo positivo, então:

$$25^o = 90^o - 5,5^o.m$$

$$5,5^o.m = 90^o - 25^o$$

$$m = 65^o/5,5^o$$

$$m = 11,818181...$$

Transformando 0,818181... minutos para segundos bastando multiplicar por 60, teremos: 0,818181 ... = 49,09 seg. Logo a primeira possibilidade é 3h11min49seg aproximadamente, ou como proposto no problema aproximadamente 15h11min49seg.

Na segunda possibilidade, como a equação é modular devemos analisar o valor negativo para o resultado do módulo, que é:

$$-25^o = 90^o - 5,5^o.m$$

$$5,5^o.m = 90^o + 25^o$$

$$m = 115^o/5,5^o$$

$$m = 20,909090...$$

Transformando 0,909090... minutos para segundos teremos: 0,909090 ... = 54,54 seg. Logo a segunda possibilidade é 3h20min54seg aproximadamente.

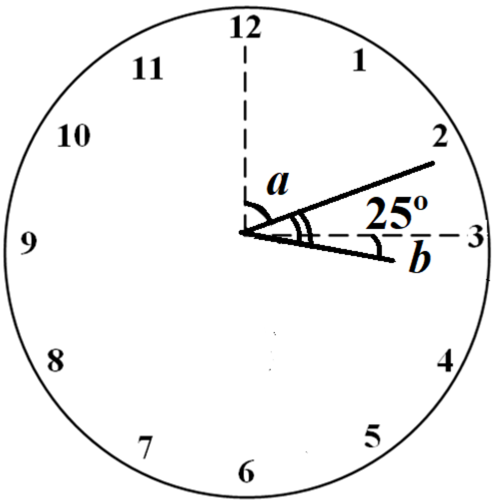
Responta: 15h11min49seg ou 15h20min54seg

4.5.1 Resolvendo o mesmo problema pelo método tradicional

Entre as 15h e 16h, os ponteiros de um relógio formam um ângulo de 25º. Pede(m) – se o(s) horário(s) exato(s) indicado(s) pelo relógio.

Pelo enunciado temos duas possibilidades para formar um ângulo de 25º entre os ponteiros das horas e minutos, a primeira quando o ponteiro dos minutos está antes dos ponteiros das horas e a segunda quando o ponteiro dos minutos está depois do ponteiro das horas. É necessário a interpretação nos dois casos utilizando a Geometria. Na primeira possibilidade podemos observar o relógio a seguir para construir as relações:

Figura 29 – Primeiro caso



Fonte: o autor

Na figura acima, considere:

a: deslocamento angular do ponteiro dos minutos;

25º: ângulo entre os ponteiros;

b: deslocamento angular do ponteiro das horas após as 15 horas.

No ponteiro das horas temos:

$$1h - - - - - - - - - - 30^o$$

$$60min. - - - - - - - - -30^o$$

ou seja:

$$1min. - - - - - - 0,5^o$$

$$xmin. - - - - - - - b$$

Logo b = 0,5º.x, com x em minutos.
No ponteiro dos minutos temos:

$$60min. - - - - - - - - - - 360^o$$

$$1min. - - - - - - - - - - 6^o$$

ou seja:

$$1min. - - - - - - - 6^o$$

$$xmin. - - - - - - - a$$

Logo a = 6º.x, com x em minutos.

Neste caso, observando a figura 29, temos a relação angular:

$$a + 25^o = 90^o + b$$

substituindo os valores de a e b temos:

$$6^o.x + 25^o = 90^o + 0,5^o.x$$

$$6^o.x - 0,5^o.x = 90^o - 25^o$$

$$5,5^o.x = 90^o - 25^o$$

$$x = 65^o/5,5^o$$

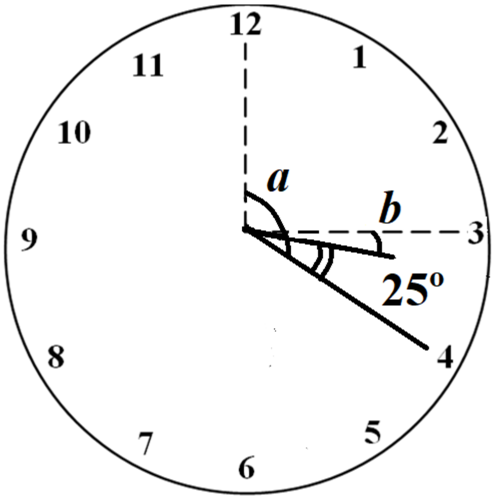
$$x = 11,818181...$$

x em minutos.

Aqui em diante, transformando 0,818181... minutos para segundos (multiplicando por 60) teremos: 0,818181 ... = 49,09 seg. Logo a primeira possibilidade é 3h11min49seg aproximadamente, ou como proposto no problema aproximadamente 15h11min49seg.

Na segunda possibilidade temos:

Figura 30 – Segundo caso



Fonte: o autor

Observando a figura acima temos a relação:

$$a = 90^o + b + 25^o$$

$$a = 115^o + b$$

$$a - b = 115^o$$

substituindo os valores de a e b temos:

$$6^o.x - 0,5^o.x = 115^o$$

$$5,5^o.x = 115^o$$

$$x = 115^o/5,5^o$$

$$x = 20,909090...$$

x em minutos.

Transformando 0,909090 ... minutos para segundos teremos: 0,909090 ... = 54,54... seg, aproximadamente.

Logo a segunda possibilidade é 3h20min54seg aproximadamente.

Responta: 15h11min49seg ou 15h20min54seg

Na comparação com os métodos existentes podemos observar que com o utilização da fórmula, não é necessário o entendimento prévio da localização dos ponteiros do relógio, uma vez que a fórmula já está pronta e basta uma substituição das variáveis para a resolução. Nesta questão, para a resolução da equação modular é necessário análise dos valores positivos e negativos ao retirar o módulo. Ou seja, é seguir a fórmula e o devido cálculo algébrico.

Na utilização do método tradicional, com a regra de três simples, a resolução da questão depende da correta interpretação das relações existentes entre os ponteiros e o deslocamento angular, bem como a devida resolução. Os dois modelos devem ser abordados. Porém como comparação entre os métodos, fica claro que a utilização da fórmula é mais rápida e mais simples.

Ressaltando que um dos motivos do presente estudo é o fato desta relação não constar nos livros. Não se trata de um modelo inédito, é sabido por muitos colegas professores. Porém, por não constar nos livros de ensino fundamental e médio, a tendência é o professor não saber desta forma de abordagem, que neste caso é muito util após todo o procedimento para o modelo matemático.

4.6 Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias - ENEM

De acordo com a Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP, do Ministério da Educação. Estão presentes nste estudo, a abordagem das competências nas áreas 2, 3, 4 e 5 nas Habilidades 7, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22 e 23, que estão listadas a seguir conforme as normas do INEP:

> Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
>
> H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.
>
> Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
>
> H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
>
> H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
>
> H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
>
> H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.
>
> Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
>
> H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.
>
> H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
>
> H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
>
> H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.
>
> Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

> H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
>
> H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
>
> H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
>
> H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos. (INEP, 2019)

Todas as competências e habilidades descritas se aplicam neste trabalho mesmo sendo em um tema muito específico, que é o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio, desde abordagens tradicionais, lógicas e dedutivas, e ainda a condução para a demosntração da fórmula que resolve problemas envolvendo o tema.

Os conhecimentos adquiridos pelo aluno no ensino fundamental fornecem a base para o trabalho do professor neste assunto. O aluno deverá conhecer os tipos de ângulos, utilizar transferidor e compasso se for necessário o desenho, regra de três simples, sistema de medidas com horas, minutos e segundos e o sistema em graus com seus respectivos submúltiplos, bem como identificar as horas em um relógio. Neste sentido, espera-se que o aluno possa entender e elaborar modelos matemáticos com ângulo e deslocamento de seus ponteiros, resolver os problemas propostos por abordagens tradicionais e lógicas, aplicar o modelo matemático e responder as horas com ou sem a fórmula proposta neste estudo.

5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:

Neste capítulo, estão propostos exercícios introdutórios comuns, alguns de Vestibulares e outros de Concursos Públicos com sua devida resolução pela fórmula proposta pelo trabalho. Tais resoluções serão apenas pelo modelo matemático proposto, pois possibilita a resolução de forma mais simples e com isso, diminuindo prováveis erros que poderiam ocorrer, uma vez que em poucos passos normalmente o problema é resolvido. Lembrando que tal fórmula deve ser considerada como mais uma possibilidade para o professor trabalhar em suas aulas.

5.1 Questões Introdutórias

QUESTÃO 01
Determine o menor ângulo formado entre os dois ponteiros de um relógio que marca 4h 06 min.
Resolução:
$\alpha = |30^o.h – 5,5.m|$
$\alpha = |30^o.4 – 5,5.6|$
$\alpha = |120^o – 33^o|$
$\alpha = |87^o|$
portanto $\quad \alpha = 87^o$

QUESTÃO 02
Entre as 15h e 16h, os ponteiros de um relógio estão sobrepostos. Qual o horário aproximado marcado pelo relógio?
Resolução:
Como os ponteiros do relógio apresentam apenas valores de 1 a 12, consequentemente temos que 15h são 3 horas da tarde e 16h são 4 horas da tarde. Logo: $\alpha = |30^o.3 – 5,5.m|$
$0 = |90^o – 5,5.m|$
$0 = 90^o – 5,5.m$
$5,5.m = 90^o$
temos: $m = 16,363636....min.$
Em que: 0,36 minutos é 21,6 segundos por regra de três simples. Portanto, desprezando os décimos de segundo, temos aproximadamente 3 horas 16 minutos e 21 segundos.

Resposta: Aproximadamente: 15h16min21seg

QUESTÃO 03

Um homem inicia viagem quando os ponteiros das horas e dos minutos coincidem entre 8 h e 9 h e termina a viagem, no mesmo dia, quando os ponteiros coincidem entre 14 h e 15 h. Quanto tempo durou essa viagem?

Resolução:

No início da viagem temos: $\alpha = |30^o.h – 5,5.m|$

$0 = |30^o.8 – 5,5.m|$

$0 = 240^o – 5,5.m$

$5,5.m = 240^o$

$temos : m = 43,636363....min.$

Em que: 0,63 minutos é 37,8 segundos por regra de três simples. Portanto, temos aproximadamente 8 horas 43 minutos e 38 segundos

No término da viagem, transformando 14h para 2h e 15h para 3h temos: $\alpha = |30^o.h – 5,5.m|$

$0 = |30^o.2 – 5,5.m|$

$0 = 60^o – 5,5.m$

$5,5.m = 60^o$

$temos : m = 10,909090....min.$

Em que: 0,90 minutos é 54 segundos por regra de três simples. Portanto, temos aproximadamente 14 horas 10 minutos e 54 segundos

Logo, o tempo de viagem é dado pelo horário do término menos o horário do início:

14h10min54seg - 8h43min38seg = 5h27min16seg aproximadamente.

Resposta: 5h27min16seg.

5.2 Questões de vestibulares

QUESTÃO 04

(FUVEST-SP-1977) O ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos é:

a) 27º b) 30º c) 36º d) 42º e) 72º

Resolução:

$\alpha = |30^o.h – 5,5.m|$

$\alpha = |30^o.1 – 5,5.12|$

$\alpha = |30^o – 66^o|$

$\alpha = |–36^o|$

$\therefore \alpha = 36^o$

Resposta: Letra c

QUESTÃO 05 (ITA - 1973)

Entre 4 e 5 horas o ponteiro das horas de um relógio fica duas vezes em ângulo reto com o ponteiro dos minutos. Os momentos destas ocorrências serão:

a) 4h 5.(2/11)min e 4h 38.(5/11)min

b) 4h 5(5/11)min e 4h 38(2/11) min

c) 4h 5(5/11)min e 4h 38(5/12)min

d) 4h 5(3/11)min e 4h 38(7/11)min

e) n.d.a

Resolução:

Pela fórmula: $\alpha = |30^o.h – 5,5.m|$

$90^o = |30^o.4 – 5,5.m|$

Temos duas possibilidades:

A primeira:

$$90^o = 120^o – 5,5.m$$

$$5,5.m = 30^o$$

temos:

$$m = 5,454545....min.$$

Em que: 0,45... = 45/99 = 5/11

Portanto, temos aproximadamente 4 horas 5(5/11) min.

A segunda:

$$-90^o = 120^o – 5,5.m$$

$$5,5.m = 210^o$$

Temos: m = 38,181818.... min. Em que: 0,18... = 18/99 = 2/11

Portanto, temos aproximadamente 4 horas 38(2/11) minutos. Resposta: letra b

QUESTÃO 06 (UFMG)

Calcule a diferença: medida do ângulo dos ponteiros de um relógio que marca 2h30min menos a medida do ângulo dos ponteiros de um relógio que marca 1h.

Resolução:

Primeiramente faremos 2h30min:

$\alpha = |30^o.h – 5,5^o.m|$

$\alpha = |30^o.2 – 5,5^o.30|$

$\alpha = |60^o – 165^o|$

$\alpha = |–105^o|$

$\therefore \alpha = 105^o$

Agora, para uma hora temos exatamente 30º.

Logo, resposta: 105º - 30º = 75º

5.3 Questões de Concursos Públicos

QUESTÃO 07 (Companhia Docas do Estado de São Paulo 2010/FGV)
Em um relógio de ponteiros, o ponteiro dos minutos dá uma volta completa em 60 minutos. Nesse mesmo período, o ponteiro das horas gira 30^o. O menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio às 7 horas e 20 minutos é:
a) 90^o
b) 100^o
c) 110^o
d) 80^o
e) 70^o
Resolução: Temos h = 7 horas e m = 20 minutos, logo aplicando a fórmula:

$$\alpha = |30^o.h – 5,5.m|$$

$$\alpha = |30^o.7 – 5,5.20|$$

$$\alpha = |210^o – 110^o|$$

$$\alpha = 100^o$$

Resposta: letra b

QUESTÃO 08 (Assistente Legislativo – Câmara Municipal de Registro-SP 2016/VUNESP)
Quando um relógio de ponteiros marca 4 horas, o menor ângulo formado entre os ponteiros dos minutos e das horas é 120º. O tempo que irá se passar até que o ângulo formado entre esses ponteiros seja igual a 180º é, aproximadamente,
a) 30 min
b) 36 min 30s.
c) 42 min
d) 54 min 30s
e) 60 min
Resolução:
Observe que realmente é menos trabalhoso a utilização do modelo demonstrado neste trabalho. Tais questões se fossem resolvidas de modo tradicional, teriam uma quantidade maior de passos, o que poderia provacar algum erro. Nesta questão, quando o relógio marca 4 horas, o ponteiro dos minutos está sobre o 12 e o das horas está sobre o 4, realmente formando ângulo menor de 120º. Para o ponteiro das horas e minutos realizarem ângulo de 180º, o ponteiro dos minutos deve se deslocar para a direita passando pelo ponteiro das horas para depois realizar ângulo de 180º com ponteiro das horas. Neste caso então temos:

$$180^o = |30^o.h – 5,5.m|$$

$$180^o = |30^o.4 – 5,5.m|$$

Analisando o módulo para o valor positivo temos:

$$180^o = 120^o – 5,5m$$

$$5,5m = -60^o,$$

isso resulta em m = - 10,9090... o que não ocorre pois não podemos ter uma medida de tempo negativa para este tema.
Analisando o módulo para o valor negativo temos:

$$-180^o = 120^o – 5,5m$$

$$5,5m = 120^o + 180^o$$

$$5,5m = 300^o,$$

isso resulta em m = 54,5454... minutos.
Transformando 0,5454... minutos em segundos temos:
Se um minuto corresponde a sessenta segundos, então 0,5454... minutos com uma regra de três simples corresponde aproximadamente a 32,72 segundos.
Logo, quando o ângulo formado entre os ponteiros for 180º o relógio marcará 4h 54min. 32seg. aproximadamente.
Resposta: alternativa de letra d.

QUESTÃO 09
(Engenheiro – TCM-RJ 2011/FJG)
Os ponteiros de um relógio se superpõem várias vezes ao dia. O intervalo de tempo entre duas superposições consecutivas é de aproximadamente:
a) 1 h 5 min 27 s
b) 1 h 6 min 12 s
c) 1 h 7 min 31 s
d) 1 h 8 min 24 s
e) 1 h 12 min 11 s
Resolução: Considerando a primeira sobreposição ao meio dia (12:00h) a próxima sobreposição será quando o ponteiro das horas e minutos marcar 13 horas e m minutos e s segundos. Transformando 13:00 horas para 1 hora, temos:

$$\alpha = |30^o.h – 5,5^o.m|$$

$$0 = |30^o.1 – 5,5^o.m|$$

$$0 = 30^o – 5,5^o.m$$

$$5,5^o.m = 30^o\ temos : m = 5,4545....min.$$

Transformando 0,4545... minutos em segundos temos: Se um minuto corresponde a sessenta segundos, então 0,4545... minutos com uma regra de três simples corresponde aproximadamente a 27,27 segundos.
logo temos: 1h 5min. 27seg. aproximadamente.
Resposta: letra a

Observação: O livro Razonamiento Matemático - Propedéutica para las ciencias da editora Lumbreras-2012 "Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú"em sua sexta edição trouxe a fórmula descrita sem o módulo e com mais de 40 exercícios resolvidos sobre o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio, em seu capítulo VIII como na imagem a seguir da página 310:

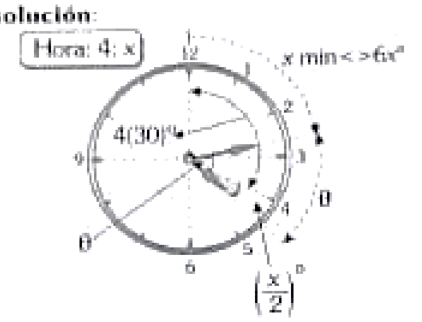
Figura 31 – Livro Peruano com descrição da fórmula

Lumbreras Editores — Razonamiento Matemático

Ejemplo 8

Hallar el ángulo formado por las agujas de un reloj a las 4:x si el minutero está antes que el horario; es decir, todavía no lo pasa.

Resolución:



Se observa: $4(30°) + \left(\frac{x}{2}\right)° = 6x° + \theta$

$$4(30°) + \frac{x}{2} - 6x° = \theta$$

$$4(30°) - \frac{11}{2}(x°) = \theta$$

$$\therefore\ \theta = 30(4) - \frac{11}{2}(x)$$

Además, podemos notar lo siguiente:

$$\theta = 30(\underbrace{4}_{\text{La hora del dato}}) - \frac{11}{2}\underbrace{m}_{\text{Los minutos del dato}}$$

En general: si nos dan la hora $\boxed{h:m}$, entonces el ángulo formado por el horario y el minutero es :

$$\boxed{\theta = 30\,h - \frac{11}{2}m}$$

Esto es, cuando el minutero aún no pasa al horario.

De forma análoga se puede obtener una relación similar; pero cuando el minutero ya pasó al horario, entonces el ángulo se calcula así :

$$\boxed{\theta = \frac{11}{2}m - 30\,h}$$

Ejemplo 9

Hallar el ángulo formado por las agujas de un reloj en cada caso:

- 4:12
- 10:44

Resolución.

Se puede deducir que en ambas horas el minutero aún no pasa al horario, entonces aplicaremos la primera relación.

Así:

- $\boxed{4:12}$

$$\theta = 30(4) - \frac{11}{2}(12) = 54$$

$$\therefore\ \theta = 54°$$

- $\boxed{10:44}$

$$\theta = 30(10) - \frac{11}{2}(44) = 58$$

$$\therefore\ \theta = 58°$$

Ejemplo 10

Hallar el ángulo formado por las agujas de un reloj en los siguientes casos:

- 4:40
- 2:26

Resolución:

Ahora, viendo las horas indicadas en un reloj de manecillas se puede apreciar que el minutero ya pasó al horario; entonces aplicaremos la segunda relación.

Así:

- $\boxed{4:40}$

$$\theta = \frac{11}{2}(40) - 30(4) = 100$$

$$\therefore\ \theta = 100°$$

- $\boxed{2:26}$

$$\theta = \frac{11}{2}(26) - 30(2) = 83$$

$$\therefore\ \theta = 83°$$

Fonte: Livro:Razonamiento Matemático - Propedéutica para las ciencias da editora Lumbreras-2012:Lima-PERU, Capítulo VIII-Relación Del Ângulo formado por las manecillas de un reloj (horario-Minuetro)p.310.

(ASOCIACION, 2012)

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através desse trabalho, conduzido parte a parte, desde a ideia inicial, utilizando minha própria experiência em sala e a de colegas em mais de duas décadas de trabalho como professor de ensino médio de Matemática, consegui realizar uma abordagem teórica metodológica utilizando a *priori* uma breve evolução histórica dessa máquina de medir o tempo chamada relógio, e também de conceitos introdutórios de Geometria, que serviram de bases para o estudo. Em seguida, foram apresentadas e desenvolvidas as abordagens tradicionais, com as relações existentes entre os ponteiros das horas e minutos com os respectivos graus relacionados aos seus deslocamentos, utilizando grandezas e medidas em regra de três simples. Em um terceiro momento a abordagem lógica que estimula o raciocínio lógico conduzindo o trabalho do professor com interação com os alunos de modo a estimular o pensamento matemático crítico desenvolvendo habilidades e modelos matemáticos que estão presentes nas Bases Curriculares Nacionais-BNCC.

Confirmando deste modo, o trabalho que normalmente já é realizado em sala de aula pelos professores, pois constam nos livros de ensino fundamental e médio esta abordagem que chamo aqui de tradicional. E em seguida, o estudo de ângulos em Geometria que permitiu a construção do modelo matemático utilizado neste estudo, que é a fórmula que determina o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio. Tal construção permitiu análise dos métodos abordados e propondo uma ampliação ao trabalho do professor neste tema específico, e produzindo resultados como o modelo matemático, bem como as possíveis dificuldades enfrentadas que podem surgir e como trabalhá-las de modo a incentivar o raciocínio crítico voltado para o tema com utilização da Álgebra, Aritmética, Grandezas e Medidas, e ainda Geometria, além de conceitos básicos.

O Tema chama atenção por dois motivos. O primeiro é desenvolver um modelo que possibilita encontrar a resolução das questões em um único padrão estruturado, que não está nos livros didáticos, e cuja resolução é encadeada com maior facilidade que o método tradicional ensinado nas escolas de ensino fundamental e médio. Poder então apresentar uma fórmula que, embora não conste nos livros, tornou o estudo interessante para mim. O segundo é a forma bem mais tranquila de tratar a questão, basta substituir os dados na fórmula e realizar os cálculos. Estes dois aspectos me alertaram para o presente estudo, que me levou a estudar o modelo matemático e propor toda essa abordagem sobre o assunto, que mesmo sendo específico, é importante para complementar o trabalho do professor ampliando as opções para a resolução de tais problemas, que neste caso é mais rápido e mais fácil, e por não constar nos livros chama mais atenção ainda. Espero ter contribuído, assim, para o estudo deste tema na matemática.

As dificuldades inerentes ao trabalho em sala, pode estar em uma inicial rejeição ao assunto por parte dos alunos, pois, não é comum o uso de relógios com ponteiros hoje em dia. Porém, normalmente, observo em minha prática pedagógica que tal rejeição em relação ao estudo, é de forma geral, não só em Matemática, ocorre também em outras disciplinas. A metodologia de abordagem deste assunto deve ser programada e recomenda-se até a utilização de tecnologias que mostrem o relógio analógico com o deslocamento dos ponteiros, bem como a variação angular formada entre esses ponteiros. Este é um meio de prender a atenção, mas o tema é como qualquer outro que para acontecer de forma produtiva depende muito do modo de trabalhar do professor, bem como todos os outros assuntos. Cabe ao professor diminuir as dificuldades e desinteresses por parte dos alunos, como em qualquer tema. Um professor com a metodologia apurada, desenvolvida para cada aula, consegue sucesso se conseguir prender a atenção desse aluno, ou seja, é um trabalho extremamente difícil. Na prática, um desafio diário.

Reforçando que o tema do trabalho, mesmo muito específico, não tem a pretensão de ser uma proposta pedagógica no qual vá se substituir uma abordagem tradicional por uma fórmula, e sim, uma abordagem a mais, que mesmo com muito esforço e exemplos descritos neste estudo, não finalizam o tema. Embora tal abordagem deve contribuir com a prática do professor de matemática em sala de aula, o estudo não está finalizado, ou seja, pode ser ainda mais ampliado, por pesquisadores que queiram contribuir para o tema para o ensino fundamental e médio. Ressalto ainda que aprendi com colegas de profissão tal fórmula a mais de duas décadas, em que observo que os colegas professores mais novos não conhecem esta relação, pois, realmente não constam nos livros do ensino fundamental e médio. Aprendendo com colegas que compartilharam conhecimento, é o que me levou a descobrir esta fórmula, que por ser de fácil manuseio, deve fazer parte do trabalho do professor, sendo valiosa ferramenta principalmente para os alunos que vão prestar vestibular ou ainda concursos públicos.

O estudo da Matemática requer muita dedicação por parte do professor na atualização de sua prática pedagógica, que deve ser constantemente revista e ampliada. E na pesquisa, pode-se contribuir muito com o trabalho em sala, detectando e apontando caminhos que favoreçam mais o ensino de Matemática como um todo. Existe um campo infinito de possibilidades para se trabalhar com modelos matemáticos, influenciando cada vez mais o aprendizado, favorecendo o desenvolvimento do pensamento algébrico, deste modo promovendo ações que estimulem e provoquem processos de reflexão da prática da Matemática como um todo, com o aluno e professor, fortalecendo o pensamento crítico, criativo, analítico, indutivo, metodológico, provocando o desenvolvimento de habilidades nos processos de investigação e de construção de modelos na resolução de problemas, como é o caso deste presente trabalho.

Aprende-se muito com o estudo na teoria e claro também com a prática. O trabalho aqui realizado além de exercitar meus estudos e habilidades como professor, ainda me estimulou a continuar na investigação de matemática, no qual tenho muito orgulho de concluir esta passagem pelo PROFMAT-UFTM. Aprendi muito com meus colegas com ensinamentos valiosos em cada encontro, cada discussão em sala e fora dela, cada desafio, cada obstáculo, cada semestre, aprendi até com a minha própria ausência em casa, pois não tinha tempo para ficar com meus filhos. Foi com muito esforço, me levando cada vez mais adiante em terrenos que antes não eram nem percebidos por mim, que consegui vencer mais esse obstáculo gigantesco. Sinto-me honrado por concluir esta jornada com meus colegas do curso de mestrado. Espero com este estudo, ter contribuído com a prática pedagógica em Matematica.

Referências

ASOCIACION, F. d. I. y. E. *Razonamiento Matemático - Propedéutica para las ciencias-Capítulo VIII-Relación Del Ângulo formado por las manecillas de un reloj (horario-Minuetro).* 6ª. ed. [S.l.]: editora:Lumbreras-Lima:Peru, 2012. v. 1. 305–330 p.

BIANCHINI EDWALDO E PACCOLA, H. *Matemática.* 1. ed. [S.l.]: MODERNA:São Paulo, 1990. v. 1.

BORGES, M. L. X. d. A. *O tempo na história: concepções de tempo da pré-histórica aos nossos dias/G.J. Whitrow; tradução, Maria Luiza X. de A. Borges.* 1. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed. Coleção Ciência e Cultura., 1993. v. 1.

BOYER, C. *História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomide.* 1. ed. [S.l.]: São Paulo: Editora E. Blücher Ltda e Editora da Universidade de São Paulo, 1996. v. 1.

BRASIL. *Parâmetros Nacionais para o Ensino Médio.* [S.l.]: Brasília: MEC/Ministério da Educação Básica, 1999.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular:Ensino Médio.* [S.l.]: Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BUCCHI, P. *Curso Prático de Matemática.* [S.l.]: MODERNA:São Paulo, 1998. v. 1.

DO CARMO MORGADO, M. P. E. W. A. C. e. W. E. *Trigonometria e Números Complexos.* [S.l.]: Coleção do Professor-SBM:Rio de Janeiro, 1992. v. 1.

DANTE, L. R. *Matemática contexto & aplicações.* 2. ed. [S.l.]: Ática, 2014. v. 1. 40–203 p.

DEGUIRE, L. *Geometria: um caminho para o ensino da resolução de problemas do jardim de infância a nona série.* 1. ed. [S.l.]: Atual, São Paulo, 1994. v. 1.

DOLCE, O. *Fundamentos de Matemática Elementar.* 7. ed. [S.l.]: Atual:São Paulo, 1993. v. 3.

GIOVANNI, J. R. *Matemática.* 1. ed. [S.l.]: FTD:São Paulo, 1992. v. 1.

IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar-Trigonometria.* 2ª. ed. [S.l.]: Atual:São Paulo, 1997. v. 3. 36–199 p.

INEP, E. N. d. E. M. *Matriz de Referência ENEM.* 1. ed. [S.l.]: Brasília: MEC/Ministério da Educação-ENEM, 2019. v. 1.

LIMA, E. L. *A Matemática do Ensino Médio.* 1. ed. [S.l.]: SBM, 2007.

MACHADO, A. D. S. *Matemática na escola do segundo grau.* 1. ed. [S.l.]: Atual, São Paulo, 1994. v. 1.

MARQUES PINTO. Funcionamento e traçado do relógio de sol. Universidade Lusíada. ⟨http://hdl.handle.net/11067/461.⟩ Acesso em 09/11/2019.

PAIVA, M. *Matemática.* 1. ed. [S.l.]: Moderna, 2005. Único. 83–183 p.

PAVANELLO, R. *Formação de possibilidades cognitivas em noções geométricas*. 1. ed. [S.l.]: Universidade Estadual de Campinas-Campinas-SP, 1995. v. 1.

PINTO, A. B. V. *Sete lições sobre educação de adultos*. 13ª. ed. [S.l.]: São Paulo:Autores Associados:Cortez, 2003. v. 1.

SOARES, L. H. *Aprendizagem Significativa na Educação Matemática: uma proposta para a aprendizagem de Geometria Básica*. http://www.fisica.ufpb.br/ romero/pdf/dissertacaohavelange.pdf.acesso em: 09/10/2019. [S.l.]: Universidade Federal da Paraíba, 2009. v. 1.

VERA, F. *Lexicon:Matemática*. 1. ed. [S.l.]: CAPELUSZ, 1960. v. 1.