Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM
Instituto de Ciências Exatas, Naturais e Educação

ueslei ferreira costa

Equações Algébricas: do Papiro de Ahmes até Évariste Galois

Uberaba - Minas Gerais
Fevereiro de 2020

UESLEI FERREIRA COSTA

Equações Algébricas: do Papiro de Ahmes até Évariste Galois

Dissertação apresentada à Comissão Acadêmica do Instituto de Ciências Exatas, Naturais e Educação da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira.

Uberaba - Minas Gerais
Fevereiro de 2020

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

C876e

Costa, Ueslei Ferreira
Equações algébricas: do Papiro de Ahmes até Évariste Galois / Ueslei Ferreira Costa. -- 2020.
132 f. : il., graf., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2020
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira

1. Álgebra - Equações. 2. Matemática - História. 3. Matemática antiga. 4. Manuscritos (Papiros) - Ahmes. 5. Fórmulas resolutivas. 6. Matemática - Estudo e ensino. 7. al-khuwãrizmi, Muhammad ibn Musã. 8. Tartaglia, Niccolò, m. 1557. 9. Galois, Teoria de. I. Ferreira, Marcelo. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III.Título.

CDU 51(091)

UESLEI FERREIRA COSTA

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS: DO PAPIRO DE AHMES ATÉ ÉVARISTE GALOIS

Dissertação apresentada à Comissão Acadêmica do Instituto de Ciências Exatas, Naturais e Educação da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.
Número de Matrícula: 2017020

Esta dissertação foi APROVADA em reunião pública realizada na Sala T07, Térreo, Centro Educacional da UFTM nº 159, em 27 de Fevereiro de 2020, às 14h00min, pela seguinte Banca Examindadora:

Prof. Dr. Marcelo Ferreira
UFTM - Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Prof. Dr. Antônio Carlos Nogueira
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Rafael Peixoto
UFTM - Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Uberaba - Minas Gerais
27 de Fevereiro de 2020

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha mãe Hilda, ao meu pai Nildo e ao meu irmão e afilhado Eliezer.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre me monstrar uma direção quando já não vejo nenhuma.

Agradeço aos meus pais Hilda e Nildo, por serem os melhores pais do mundo. Também lhes agradeço pelo apoio e compreensão ao meu pouco tempo disponível para visitas.

Ao meu irmão Eliezer, pela ajuda com formatações em meu notebook.

Aos meus avós maternos Maria de Lourdes Ferreira e Ilídio José Ferreira (*in memoriam*). Aos meus avós paternos Ana Maria de Jesus e Joaquim Machado Costa.

Ao meu tio Vanderlei, pela amizade e ajuda com moradia em Uberlândia. A Nilza Márcia pela amizade e incentivo.

Aos meus primos e primas, tios e tias, padrinhos e madrinhas das famílias Ferreira e Costa.

Ao amigo e futuro grande algebrista do país Augusto Duarte Pena, pela leitura prévia e sugestões de melhoria deste trabalho.

Aos amigos: Alexandre, Cinara, Clóvis, Danilo, Ênio, Eriberto, Fidel Chipana, Leonardo e Paulo Victor.

Aos amigos da minha turma do PROFMAT - UFTM, em especial ao piloto de kart nas horas vagas Diogo Henrique da Silva.

Aos meus professores de graduação da UFU. Em especial os professores Antônio Carlos Nogueira e Valdair Bonfim, pelo incentivo, pela amizade e pelo aprendizado durante o curso.

Ao IMPA e a SBM pela iniciativa de criação do PROFMAT, que trouxe novas oportunidades.

Aos professores do PROFMAT - UFTM, em especial ao Danilo Adrian Marques.

Aos professores Antônio Carlos Nogueira, Rafael Peixoto, Marcela Vilela, Neiton Pereira e o orientador Marcelo Ferreira, por fazerem parte da banca de avaliação.

Aos meus colegas, amigos e alunos da Escola Municipal Professor Mário Godoy Castanho. Em especial Adriana, Ana Cristina, Cinara, Elaine, Guilherme, Luciana, Mara, Nilmara, Valdinei, Weligton e os alunos Diego, João Victor, Olívia e Thaíslane.

E a quem mais tenha contribuído direta ou indiretamente para a conclusão deste trabalho.

"Deus dá as batalhas mais difíceis aos seus melhores soldados." - Papa Francisco

Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar equações algébricas e as fórmulas resolutivas das equações de 1º até 4º grau. Buscamos fazer um resgate histórico-matemático de alguns personagens importantes no desenvolvimento das fórmulas resolutivas, como: Ahmes, Brahmagupta, Bhaskara, Al-Khwarizmi, del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Lagrange, Ruffini, Abel e Galois. Além do resgate histórico da solução por radicais das equações de grau um até quatro, fazemos o desenvolvimento de cada fórmula e sua aplicabilidade em exemplos. Também apresentamos algumas sugestões didático-pedagógicas sobre equações de 1º e 2º grau, que podem ser utilizadas por um docente em suas aulas, visando um melhor aprendizados de seus alunos. Este trabalho encerra-se com os jovens gênios Abel e Galois, cujas publicações contribuíram para mostrar que, em geral, equações de grau maior ou igual que cinco não podem ser resolvidas por meio de radicais.

Palavras-chave: equações algébricas, história da matemática, Papiro de Ahmes, fórmulas resolutivas, ensino de matemática, Al-Khwarizmi, Tartaglia, Galois.

Abstract

This work aims to study algebraic equations and the solving formulas of the equations of degree 1 to 4. We seek to make a historical-mathematical rescue of some important personages in the development of resolutive formulas, such as: Ahmes, Brahmagupta, Bhaskara, Al-Khwarizmi, del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Lagrange, Ruffini, Abel and Galois. In addition to the historical rescue of the radical solution of equations from degree one to four, we develop each formula and its applicability in examples. We also present some didactic-pedagogical suggestions on equations of degree 1 and 2, which can be used by a teacher in his classes, aiming at a better learning for the students. This work ends with the young geniuses Abel and Galois, whose publications contributed to show that, in general, equations with a degree greater than or equal to five cannot be solved by radicals.

Keywords: algebraic equations, history of mathematics, Papyrus of Ahmes, resolutive formulas, mathematics teaching, Al-Khwarizmi, Tartaglia, Galois.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

INTRODUÇÃO

Este é um trabalho sobre equações algébricas, e em especial, sobre um resgate histórico-matemático e sugestões didáticas-pedagógicas sobre equações de grau um até a insolubilidade das equações de grau maior ou igual que cinco. As vezes, uma aula auxiliada pelo contexto histórico das origens do tema, torna o aprendizado mais interessante, facilitando a compreensão do tema.

Este trabalho é dividido em seis capítulos, sendo os capítulos dois e três os mais explorados no ensino fundamental e médio.

No capítulo um, introduzimos alguns preliminares teóricos, fazendo uma diferenciação entre função polinomial, equação polinomial e polinômios.

No capítulo dois, trazemos um estudo histórico-matemático de equações de grau um. Após um resgate hitórico do Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes, bem como o método da falsa posição, apresentamos outras possibilidades de resolução utilizando proporcionalidade por meio de função de grau um.

No capítulo três, foi feito um estudo sobre função e equação do segundo grau. Na primeira parte do capítulo, são apresentados algumas sugestões de atividades e possibilidades relacionadas principalmente ao gráfico de uma função quadrática, a parábola. Na segunda parte foi feito um resgate histórico da equação do segundo grau, buscando chegar ao descobrimento da fórmula resolutiva conhecida como fórmula de Bhaskara. Foi dado ainda uma atenção especial a metódos de resolução de problemas, bem como problemas envolvendo equações do segundo grau.

No capítulo quatro, buscou-se trazer várias curiosidades sobre a fórmula resolutiva das equações de grau três, tendo como personagens principais os italianos Tartaglia, Cardano e Ferrari, isso após cerca de 700 anos dos avanços de Al-Khwarizmi. No final do capítulo, são apresentados alguns exemplos ilustrativos para mostrar a aplicação da fórmula.

No capítulo cinco não é feito um aprofundamento histórico da fórmula resolutiva de equações de grau quatro, pois está diretamente ligado a fórmula resolutiva de grau três, que foi amplamente discutido no capítulo quatro. Foi feito um resgate da fórmula resolutiva, apresentando ao final do capítulo um exemplo ilustrativo do método.

No capítulo seis, após cerca de 250 anos do surgimento da fórmula resolutiva das equações de grau três e quatro, trazemos um pouco da história dos matemáticos Ruffini, Abel e Galois sobre a insolubilidade por meio de radicais das equações de grau maior ou igual que cinco.

1 Preliminares Teóricos

1.1 Função

Em matemática, existem vários problemas que recaem no uso de polinômios, desde problemas simples, até outros mais elaborados.

Um campo da matemática em que polinômios são amplamente utilizados é em análise numérica. Podemos empregar o uso de polinômios quando uma expressão analítica de f não é conhecida, mas conhecemos seu valor em alguns pontos. Pode-se recorrer ao auxílio de polinômios para obter aproximações de $f(x)$, caso necessite manipular $f(x)$ para calcular uma raiz, seu valor ou sua derivada em um ponto, sua integral em um determinado intervalo, etc. As vezes f é extremamente complicada e difícil de trabalhar. Então, para simplificar os cálculos, pode-se sacrificar a precisão trabalhando com um polinômio que aproxima $f(x)$.

Outro campo em que emprega-se muito o uso de polinômios é a álgebra. É possível verificar se um polinômio tem ou não raiz em determinado corpo estudando sua irredutibilidade. É claro que pode-se utilizar análise numérica para buscar raízes de um polinômio, mas a vantagem de saber *a priori* se um polinômio é ou não irredutível tem a ver com o tempo que é possível economizar nessa procura por raízes. Em matemática aparecem vários tipos de expressões algébricas, cada uma com um significado e aplicação. Mas qual a diferença entre as seguintes expressões?

1. $f(x) = x^2 + 3x + 1, \forall\ x \in \mathbb{R}$

2. $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 3x + 1 = 0$

3. $x^2 + 3x + 1$

As expressões anteriores tratam-se respectivamente, de uma função polinomial, uma equação polinomial e um polinômio. Nota-se que é necessário uma definição precisa de cada uma das expressões acima para diferenciair um objeto de outro, evitando assim alguns equivocos. Logo, faz-se necessário definir o que é uma função, o que é uma equação algébrica e o que é um polinômio. Primeiramente, vamos entender o que vem a ser uma expressão algébrica.

Para generalizar uma situação ou um problema matemático, é conveniente adotar algumas notações, por isto, muitas vezes convém denotar um número arbitrário por uma letra, que mesmo sem saber seu valor seja possível realizar operações com esse número. Se denotarmos um número por x, seu dobro é $2x$, seu quíntuplo é $5x$, sua metade é $\frac{1}{2} \cdot x = \frac{x}{2}$, o dobro de um número adicionado ao seu dois terços é $2x + \frac{2x}{3}$, a área de um quadadro de lado x é dada por $A = x^2$, são alguns exemplos de como podemos recorrer às letras para representarmos números e escrever algumas sentenças usando símbolos. Mais precisamente, utiliza-se esse preocedimento principalmente em generalizações (fórmulas e propriedades) e na busca por solução de problemas que envolvem números desconhecidos (equações e inequações).

Assim, **expressões algébricas** são aquelas formadas por números, letras e um número finito de operações matemáticas (que podem ser adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e/ou radiciação).

Neste ponto é necessário definir função e equação, e saber suas diferenças. Em PAUL HALMOS (1960) (p. 32) temos uma boa ideia do que é uma função.

Sejam A e B dois conjuntos não vazios, uma função $f : A \longrightarrow B$ (lemos **função** de A em B) é uma regra que associa de maneira bem precisa, todo elemento $x \in A$ a um único elemento $y = f(x) \in B$. O conjunto A é chamado de *domínio* da função, que é onde a função está definida. O conjunto B é chamado de *contradomínio* da função, que é onde a função assume ou toma valores. Para cada $x \in A$, o elemento $y = f(x)$ é exatamente a *imagem* (ou o valor) que a função assume ou toma no ponto $x \in A$. Escrevemos $x \mapsto f(x)$ para mostrar que f transforma x no valor $f(x)$. Considere a função $f : A \longrightarrow B$ e o subconjunto $X \subset A$, o subconjunto $f(X) \subset B$ formado por todos os valores de $f(x)$ com $x \in X$ é chamado de *imagem* de X pela função f no subconjunto $f(X)$.

Alguns exemplos especialmente simples são a *função identidade* $f : A \longrightarrow A$, definida como $f(x) = x$ para todo $x \in A$, a *função constante* $f : A \longrightarrow B$, que para $c \in B$ é definida como $f(x) = c$ para todo $x \in A$ e a *função identicamente nula* $f : A \longrightarrow B$, definida como $f(x) = 0$ para todo $x \in A$.

Observação: f e $f(x)$ apresentam uma sutil diferença, f é a função, já $f(x)$ é o valor numérico que a função f assume em um ponto x do seu domínio.

Agora podemos definir o que é uma função polinomial, que será feito na próxima seção.

1.2 Função Polinomial

Vamos a definição de função polinomial.

Definição 1.1. *A função* $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é denominada* ***função polinomial*** *sobre* $\mathbb{R}$ *quando existem números reais* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *tais que*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1.1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

Os números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são denominados *coeficientes* e cada um dos elementos $a_0, a_1x, \ldots, a_nx^n$ são os *termos* da função polinomial. Para $a_n \neq 0$, o coeficiente a_n é chamado de *coeficiente líder* de p. Se $a_n \neq 0$, dizemos que a função polinomial p tem *grau* n. Quando uma função polinomial possui um único termo, ela é chamada de *função monomial* ou simplesmente *monômio*.

Observação: de maneira análoga, define-se função polinomial sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

Vejamos alguns exemplos:

1. $p(x) = x^2 + 3x + 1$: o coeficiente líder 1 e grau 2;
2. $f(x) = 5x^7 - 3x^4 + x^2 + x$: coeficiente líder 5 e grau 7;
3. $g(x) = -12x^4 + 7x^2 - 1$: coeficiente líder -12 e grau 4.

Sejam α um número (real ou complexo) e a função polinomial $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, chamamos de *valor numérico de* p *em* α a imagem de α pela função p, ou seja

$$p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0.$$

Para $p(x) = x^2 + 3x + 1$, temos por exemplo:

1. $p(-1) = (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -1$
2. $p(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 + 1 = 1$
3. $p(3) = 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 19$

De maneira geral, em função, o número x é chamado de *variável*, pois x pode assumir vários valores onde a função está definida.

Em particular, se α é um número (real ou complexo) tal que $p(\alpha) = 0$, dizemos que α é uma *raiz* ou zero de p. Por exemplo, o número 0 é solução real para $f(x) = 5x^7 - 3x^4 + x^2 + x$, pois $f(0) = 5 \cdot 0^7 - 3 \cdot 0^4 + 0^2 + 0 = 0$.

As raízes de $g(x) = -12x^4 + 7x^2 - 1$ são os números $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{1}{\sqrt{3}}$. De fato:

1. $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -12 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 + 7 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$

2. $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = -12 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 + 7 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$

3. $g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -12 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + 7 \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 0$

4. $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -12 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + 7 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 0$

Note que, para encontrarmos as raízes de uma função polinomial p, devemos impor $p(x) = 0$, uma vez que as raízes devem anular p.

1.3 Equações Polinomiais

O objetivo principal desta seção é o estudo sobre equações polinomiais, vamos a definição:

Definição 1.2. *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções polinomiais, chamanos de **equação polinomial** ou **equação algébrica** a sentença aberta $f(x) = g(x)$.*

Observe que $f(x) = g(x) \iff f(x) - g(x) = 0$, definindo $f(x) - g(x)$ como $p(x)$, fica possível transformar qualquer equação polinomial $f(x) = g(x)$ em uma equação equivalente $p(x) = f(x) - g(x) = 0$, ou seja, toda **equação polinomial** pode ser colocada na forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1.2}$$

Assim, equações polinomiais são equações da forma $p(x) = 0$, com p sendo uma função polinomial como na definição 1.1

Um dos motivos do estudo e aplicações de equações polinomiais se deve a sua simplicidade e fácil manipulação. Funções polinomiais possuem derivadas de todas as ordens, sendo relativamente fáceis de derivar e integrar. Existem várias aplicações, como por exemplo, na procura de raízes ou soluções para equações polinomiais. Uma vez que sempre podemos recorrer à análise numérica e aproximar basicamente qualquer função por uma função polinomial.

Caso seja possível usar algum programa de computador, encontrar raízes de determinadas equações polinomiais é uma tarefa fácil na atualidade. O problema é quando há raízes irracionais, nesses casos, muitos programas encontram raízes aproximadas da equação. Mas como os antigos matemáticos faziam para encontrar raízes de equações polinomiais?

Dada uma equação polinomial $p(x)$ de grau n, os matemáticos buscavam encontrar expressões para as raízes em termos de seus coeficientes, que envolvia somente as operações algébricas fundamentais e extração de raízes quadradas, cúbicas, quárticas, etc. Chamamos esse método de **resolução por radicais** da equação $p(x) = 0$.

1.4 Polinômios

Em E.L. LIMA. (2006) (p. 178) e HYGINO & IEZZI (2003) (p. 283), os autores comentam sobre uma sutil diferença entre função polinomial e polinômio, mas que podemos nos referir a polinômios e funções polinomiais com o mesmo sentido.

Um **polinômio** é definido por E.L. LIMA. (2006) como sendo uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sendo números reais (ou complexos) e X é um símbolo denominado indeterminda.

Uma expressão formal (polinômio) é basicamente uma lista ordenada de seus coeficientes $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ em que podemos somar e multiplicar seus monômios semelhantes, sendo válida a adição do expoente na multiplicação, ou seja, $X^\alpha \cdot X^\beta = X^{\alpha+\beta}$.

Todo polinômio

$$p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

corresponde a uma função polinomial $\tilde{p} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\tilde{p}(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0.$$

Assim, a diferença mais sutil entre polinômio e função polinomial é que, em funções polinomiais estaremos interessados na correspondência entre um número x e o valor que a função assume nesse ponto; já no polinômio, estaremos interessados na lista de seus coeficientes e na maneira que realizamos as operações (usuais) de adição e multiplicação de monômios semelhantes.

Sem perda de generalidade, podemos escrever um **polinômio** como sendo

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

uma vez que existe uma correspondência biunívoca entre funções polinomiais e polinômios.

Em resumo, podemos nos referir a um polinômio p ou função polinomial $\tilde{p}$ sem fazer qualquer distinção entre os dois, escrevendo apenas p e chamando de polinômio p ou função polinomial p. É comum ouvirmos termos como "polinômio $p(x)$"ou "função $p(x)$"e não estão errados, uma vez que depende do contexto em que estão inseridos.

2 Equação do 1º grau

2.1 Função e Equação do 1º grau

Definição 2.1. *Uma **função do 1º grau** ou função polinomial do 1º grau é uma aplicação de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *em que cada* $x \in \mathbb{R}$ *fica associado ao elemento* $(ax+b) \in \mathbb{R}$*, com* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$*.*

Assim, uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é uma função do 1º grau. O números a e b são constantes reais e x é chamado de variável.

Exemplo 2.1. *Dada* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = 2x + 2$*, qual é o número* x *tal que* $f(x) = 0$*?*

Note que encontrar um número x tal que $f(x) = 0$, é o mesmo que encontrar uma solução para a equação $2x + 2 = 0$. Equações desse tipo são conhecidas como **equações do 1º grau**, pois o expoente da incógnita é 1. Podemos definir equação do primeiro grau como:

Definição 2.2. *Uma **Equação do** 1º **Grau** é qualquer expressão algébrica que pode ser escrita como* $ax + b = 0$*, com* $a, b, x \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$*. Os números* a *e* b *são constantes chamados de coeficientes e* x *a incógnita da equação.*

Atualmente, a resolução de equações do 1º grau é ensinada no 7º ano, quando os alunos tem em média 12 anos.

Uma maneira interessante de resolver o exemplo anterior é via construção de um gráfico cartesiano da função. Podemos atribuir dois valores distintos para x e calcular os correspondentes valores de $f(x) = y$, obtendo assim dois pontos distintos. Por dois pontos passa uma única reta euclidiana, logo o gráfico de uma função do 1º grau é uma (linha) reta. Depois observamos onde a reta que passa por estes dois pontos intersecta o eixo x, o valor encontrado será a resposta da nossa pergunta inicial. Vamos organizar os dados em uma tabela e depois construir o gráfico cartesiano.

x	$f(x) = y = 2x + 2$	**Par** (x, y)
0	2	$A = (0, 2)$
1	4	$B = (1, 4)$
?	0	$C = (?, 0)$

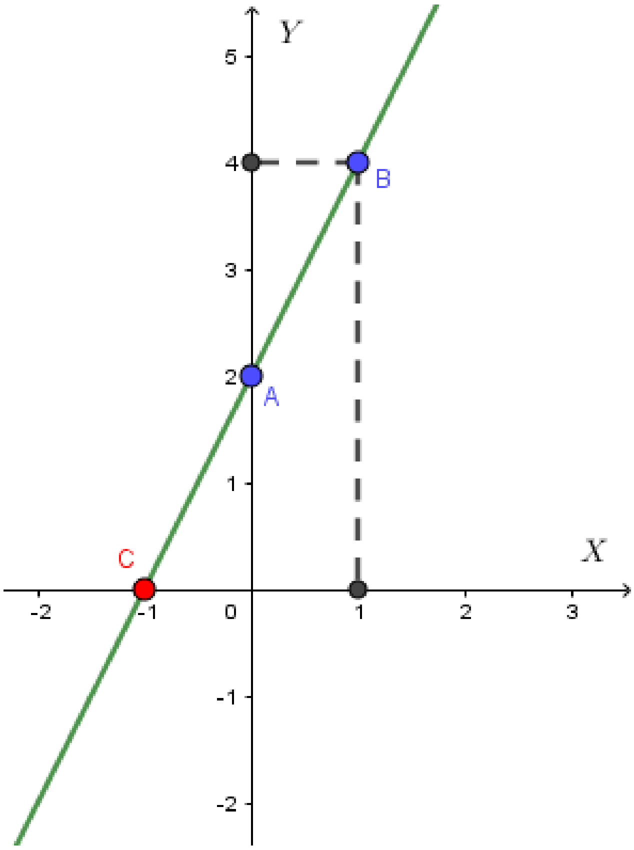


Figura 2.1: Gráfico da função $f(x) = 2x + 2$. *Fonte:* próprio autor.

Pelo gráfico da $f(x) = 2x+2$, observamos que a reta que passa por A e B intersecta o eixo x em $x = -1$. Assim, quando $y = f(x) = 0$, encontramos $x = -1$, ou seja, o ponto $C = (-1, 0)$.

Com a prática torna-se uma tarefa fácil para a maioria dos alunos resolver o problema proposto, mas nos dias atuais temos a álgebra para nos auxiliar, o que nem sempre foi assim. Resolvemos $2x + 2 = 0 \iff 2x = -2 \iff x = -1$. Milhares de anos atrás, resolver equações do 1º grau poderia ser um processo bem trabalhoso, e pouco se fala dos procedimentos empregados no decorrer da história até chegar nos métodos de hoje.

2.2 Nota Histórica - Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes

Exitiam várias maneiras de registrar problemas matemáticos na antiguidade, como por exemplo em ossos de animais, pedras e argilas (escritas cuneiformes), pinturas, papiro e couro animal. No Egito antigo, os egípcios faziam muitos registros em papiros. Segundo BOYER (1968) (p. 9), alguns papiros sobreviveram ao tempo, sendo o *Papiro de Rhind* ou *Papiro de Ahmes* um dos mais famosos. O papiro de Rhind recebe esse nome em refência ao advogado e antiquário escocês *Alexander Henry Rhind* (1833 – 1863). Por questões de saúde, em 1855 Rhind viajou para o Egito, e lá consegui permissão para realizar suas escavações. GILMOUR (2015).

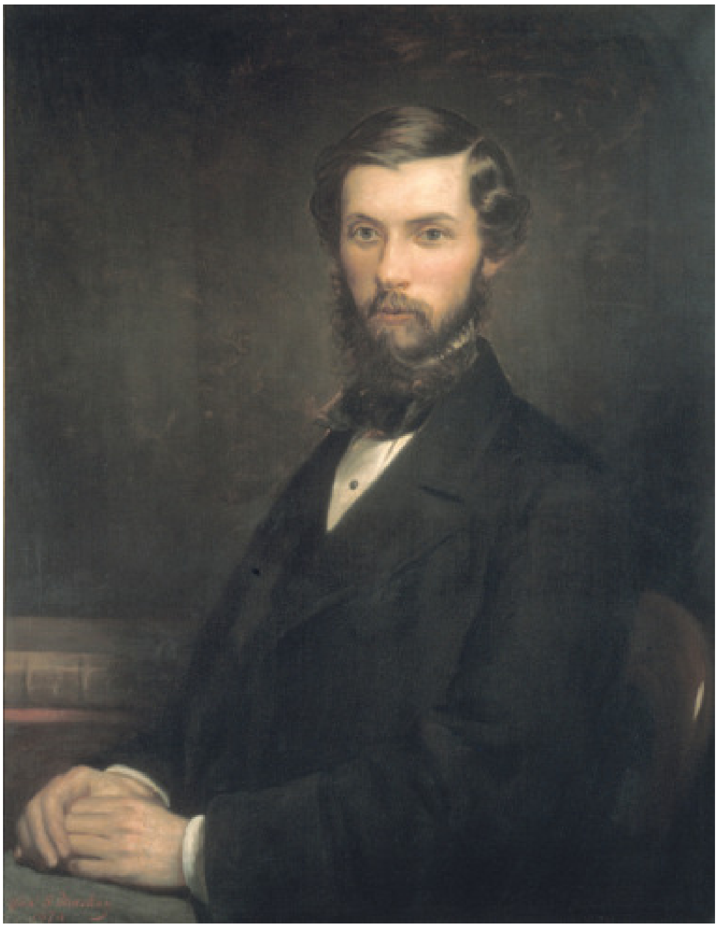


Figura 2.2: Alexander Henry Rhind (1874). *Fonte:* GILMOUR (2015)

Em 1858, Rhind comprou o papiro na cidade Luxor, do americano Edwin Smith (1822 – 1906). Smith foi morar no Egito em 1858, trabalhando com revenda de objetos e emprestador de dinheiro, chegando a possuir quatro dos textos científicos mais importantes já encontrados. O papiro de Rhind, supostamente foi encontrado na antiga cidade de Tebas, em uma ruína próxima ao templo mortuário de Ramsés II.

O Papiro de Rhind também é conhecido como Papiro de Ahmes, que foi o escriba que teria copiado, por volta de 1650 a.C. o mais extenso documento do antigo Egito contendo uma matemática mais significativa. O Papiro de Rhind ou Ahmes é um rolo que mede cerca de $5,5\ m$ de comprimento por $0,32\ m$ de largura, onde encontramos 85 problemas matemáticos e suas soluções, todos copiados por Ahmes.

Rhind faleceu em 1863, cinco anos após ter comprado o papiro. Após sua morte, o British Museum (Museu Britânico de Londres) adquiriu o papiro, mas alguns fragmentos encontram-se no Brooklyn Museum (Museu do Brooklyn - Nova York).

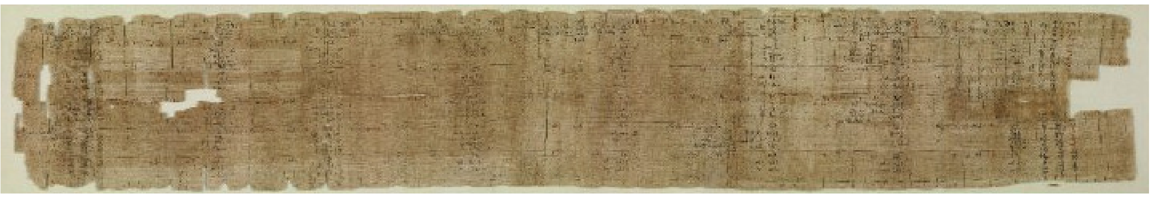


Figura 2.3: Frente do Parpiro de Rhind. *Fonte:* BRITISH MUSEUM (2019)

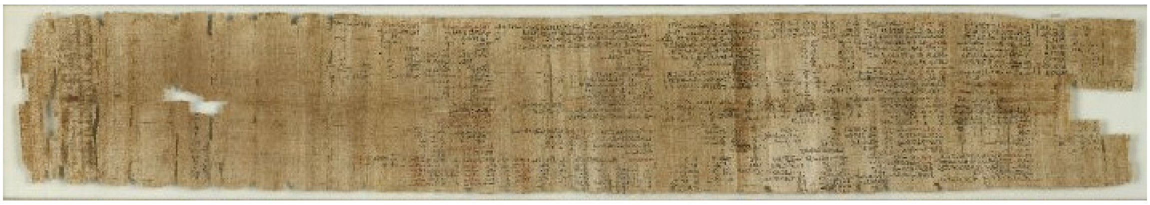


Figura 2.4: Verso do Papiro de Rhind. *Fonte:* BRITISH MUSEUM (2019)

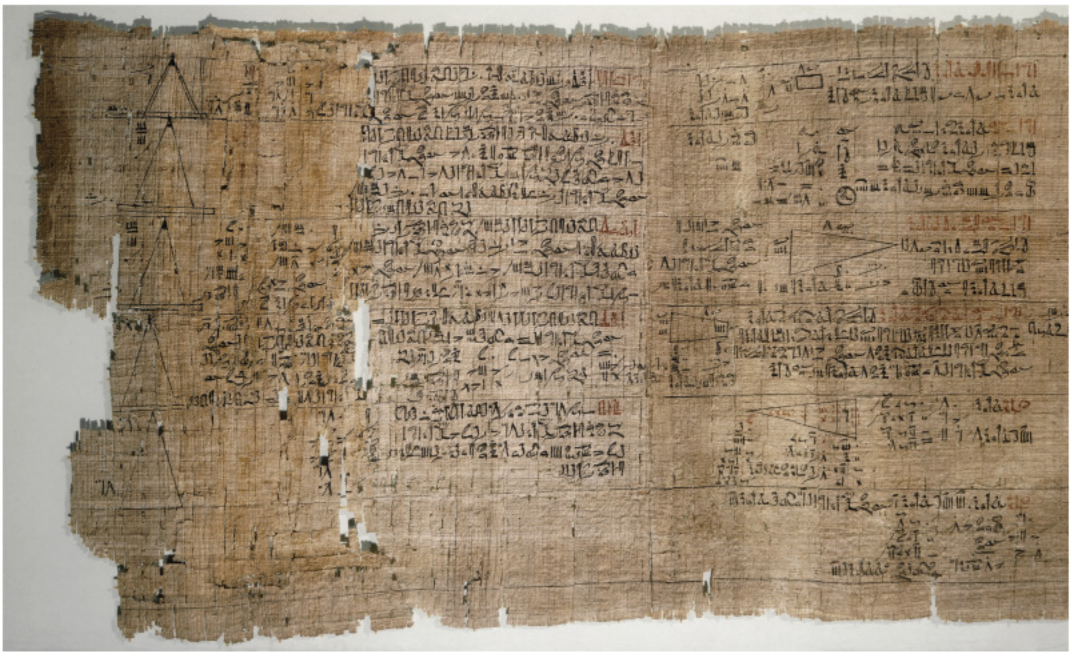


Figura 2.5: Parte do Papiro de Rhind. *Fonte:* GILMOUR (2015)

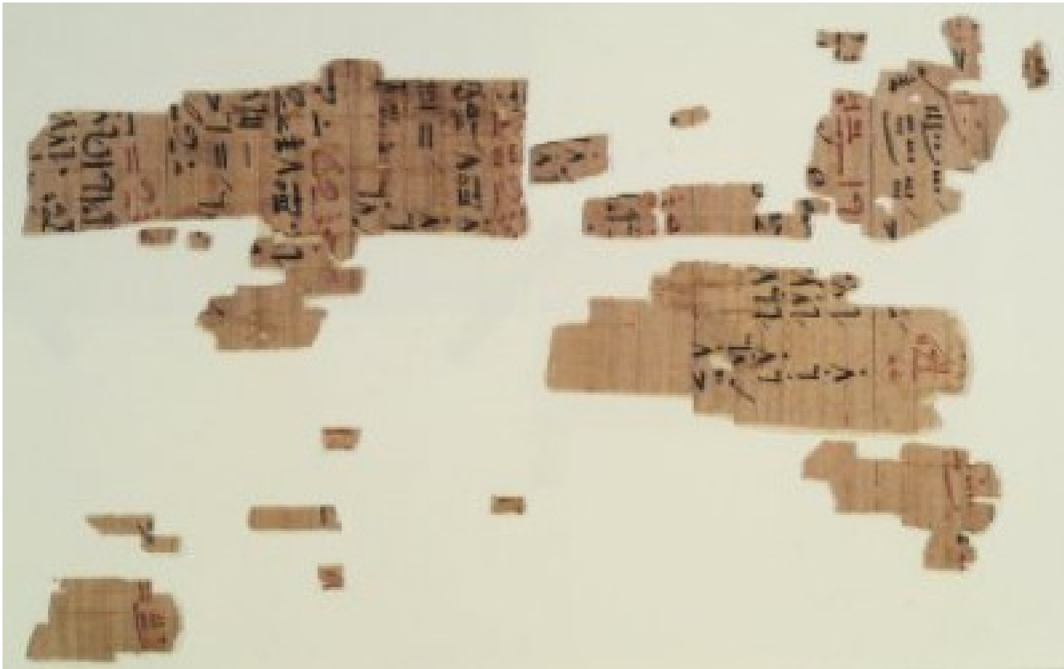


Figura 2.6: Fragmentos do Papiro de Rhind. *Fonte:* BROOKLYN MUSEUM (2019)

Alguns problemas egípcios encontrados no Papiro de Rhind, são equivalentes a encontrar solução para equações do 1º grau. As equações teriam a forma $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$, com a, b e c sendo números conhecidos e x um número desconhecido. Na linguagem atual, chamamos o número x de **incógnita**, já os egípcios chamavam o número x de "**aha**".

A solução apresentada no Papiro de Rhind pelo escriba Ahmes é bem diferente das apresentadas dos livros didáticos com a linguagem atual. O procedimento para encontrar-se uma solução era conhecido como "**método da falsa posição**" ou "regra de falso".

2.3 Multiplicação e Divisão Egípcia

Antes de explorar alguns exemplos do método da falsa posição, uma observação importante é que a adição era a operação aritmética fundamental utilizada pelos egípicios. Nas operações de multiplicação e divisão, Ahmes empregava o uso sucessivo de *duplicações*, com o resultado de cada duplicação sendo o valor anterior somado com ele mesmo. Algo semelhante é ensinado atualmente nas escolas para os anos iniciais, onde ensina-se que $2 \cdot 3 = 3 + 3 = 6$, por isso $2 \cdot 3 = 6$.

Nas frações, os egípcios utilizavam o que para nós, seria equivalente às frações unitárias, do tipo $1/n$. O numerador sempre tinha que ser 1, salvo alguns casos bem específicos, como a fração $2/3$ que era mantida. Por exemplo, a fração $\frac{6}{8}$ deveria ser escrita com as frações unitárias $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Basta observar que $\frac{6}{8} = \frac{4+2}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Os egípcios não resolviam seus problemas de divisão desta maneira, eles transformavam um problema de divisão em um de multiplicação (pois já conheciam).

Para a, b inteiros e $b \neq 0$, temos:

$$\frac{a}{b} = x \Longleftrightarrow a = b \cdot x$$

com x sendo o quociente da divisão. Eles perguntavam quantas vezes b "cabia" em a. Para isso, empregavam duplicações no denominador b até que resultasse no número a, sendo que a quantidade de vezes que aplicavam em b era a solução x.

Os escribas dispunham de várias tabelas com cálculos prontos CHACE (1927) (p. 21), e utilizavam os resultados das tabelas para resolver seus problemas de maneira mais rápida. Talvez alguns resultados, por serem utilizados com frequência, também eram utilizados livremente pelos escribas. Eles não tinham uma preocupação do motivo pelo qual o método funcionava, queriam apenas aplicar o método (semelhante ao que acontece atualmente em muitas escolas no Brasil). No máximo, verificavam se o resultado estava correto, o que já era uma maneira de prova, mas não tinham uma demonstração para seus métodos.

Exemplo 2.2. *(Multiplicação)*

Para multiplicar 19 por 6, os egípcios associavam inicialmente 1 com 19, depois realizavam duplicações com o número 1 e com o número associado a ele, no caso inicial 19. *Primeira duplicação*: o dobro de 1 é 2, e o dobro de 19 é 38. *Segunda duplicação*: o dobro de 2 é 4, e o dobro de 38 é 76. *Terceira duplicação*: o dobro de 4 é 8, e o dobro de 76 é 152. Observe que na 3ª duplicação temos um 8, passando de 6. Devemos considerar apenas até a 2ª duplicação. Como $2 + 4 = 6$, somamos as duplicações associadas aos números 2 e 4, ou seja, $38 + 76 = 114$.

Os egípcios organizavam estes números em duas colunas e utilizavam uma marcação (\ ) na primeira coluna para indicar que os números daquela linha lhes interessava. Neste caso, devemos marcar na primeira coluna os números 2 e 4, pois a soma é 6. Depois da marcação na primeira coluna, somamos os respectivos valores da segunda coluna, obtendo assim o resultado da multiplicação. As informações organizadas em colunas seriam:

Associação Inicial		1	19	
1ª duplicação	\	2	38	
2ª duplicação	\	4	76	
3ª duplicação		8	152	(Desconsiderar, pois $8 > 6$)
	Total:	**6**	**114**	

Observe que $38 + 76 = 2 \cdot 19 + 4 \cdot 19 = (2 + 4) \cdot 19 = 6 \cdot 19$, verificando assim que nosso cálculo está correto, sendo $38 + 76 = 114$.

Como $6 = 4+2 = 2^2+2^1$, os valores destacados por (\ ) são na verdade potências de dois. Os egípcios, talvez por experiência ou intuitivamente, sabiam que qualquer inteiro poderia ser decomposto como soma de potências de base dois.

Exemplo 2.3. *(Multiplicação)*

Vamos multiplicar 9 por 11 pelo método egípcio.

Associação Inicial	\	1	9	
1ª duplicação	\	2	18	
2ª duplicação		4	36	
3ª duplicação	\	8	72	
4ª duplicação		16	144	(Desconsiderar, pois $16 > 11$)
	Total:	**11**	**99**	

Note que $9+18+72 = 1 \cdot 9+2 \cdot 9+8 \cdot 9 = (1+2+8) \cdot 9 = 11 \cdot 9$. A observação do exemplo anterior sobre a decomposição de inteiros em potências de dois, também é válida para inteiros ímpares, basta utilizar a potência 2^0. De fato, $11 = 1+2+8 = 2^0+2^1+2^3$.

Exemplo 2.4. *(Multiplicação)*

Vamos multiplicar 36 por 15.

Associação Inicial	\	1	36	
1ª duplicação	\	2	72	
2ª duplicação	\	4	144	
3ª duplicação	\	8	288	
4ª duplicação		16	576	(Desconsiderar, pois $16 > 15$)
	Total:	**15**	**540**	

$$1 + 2 + 4 + 8 = 15 \Longrightarrow 36 + 72 + 144 + 288 = 540.$$

Em alguns casos, os egípicos tomavam "atalhos". Em vez de tomar duplicações, eles tomavam 10 vezes os valores da linha.

Associação Inicial		1	36
1º Passo	\	10	360
2º Passo	\	5	180
	Total:	**15**	**540**

Do 1º passo para o 2º, os valores da primeira e da segunda colunas foram divididos por 2.

Exemplo 2.5. *(Divisão Exata)*

Dividir 145 por 5.

Associação Inicial	\	1	5	
1ª Duplicação		2	10	
2ª Duplicação	\	4	20	
3ª Duplicação	\	8	40	
4ª Duplicação	\	16	80	
5ª Duplicação		32	160	(Desconsiderar, pois $160 > 145$)
	Total:	**29**	**145**	

Para descobrir o quociente, escolhe-se na segunda coluna um ou mais números que somados resulte no dividendo 145. Uma vez selecionado os números da segunda coluna, somamos seus correspondentes da primeira coluna, tal soma será o quociente procurado. Olhando para a segunda coluna, temos que $80 + 40 + 20 + 5 = 145$. Logo, O quociente será $16 + 8 + 4 + 1 = 29$.

Exemplo 2.6. *(Divisão Exata)*

Dividir 272 por 17.

Associação Inicial		1	17	
1ª Duplicação		2	34	
2ª Duplicação		4	68	
3ª Duplicação		8	136	
4ª Duplicação	\	16	272	(Valor Exato)
	Total:	**16**	**272**	

Observe que na segunda coluna, o número 272 é o próprio dividendo. Segue que o quociente será 16, próprio valor acossiado ao 272.

Exemplo 2.7. *(Divisão não Exata - Dividendo maior que Divisor)*

No problema 24 do Papiro de Rhind, Ahmes precisa dividir 19 por 8. Note que $\frac{19}{8} = x \Longleftrightarrow 19 = 8 \cdot x$, não sendo possível que x (quociente) seja um número inteiro, pois $8 \cdot 2 = 16$ e $8 \cdot 3 = 24$. Necessariamente x será uma fração. De fato:

As. Inicial		1	8	
1º Passo	\	2	16	(Parar duplicação, pois no 2º passo teríamos $32 > 19$)
2º Passo		1/2	4	(Metade da associação inicial)
3º Passo	\	1/4	2	(Metade do 2º passo, ou um quarto da associação inicial)
4º Passo	\	1/8	1	(Metade do 3º passo, ou um oitavo da associação inicial)
	Total:	$\boldsymbol{x}$	**19**	

com $x = 2 + 1/4 + 1/8$. Oberserve que na coluna das frações, ainda temos as potências de base 2, só que agora com expoente negativo. A saber: $2^{-1} = 1/2$, $2^{-2} = 1/4$ e $2^{-3} = 1/8$. Essas frações necessiamente precisam ser dispostas nessa ordem na coluna.

Exemplo 2.8. *(Divisão não Exata - Dividendo menor que Divisor)*

Vamos dividir 2 por 5. Esta divisão encontra-se resolvida no Papiro por Ahmes CHACE (1927) (p. 50). Note que, $\frac{2}{5} = x \Longleftrightarrow 2 = 5 \cdot x$. Ou seja, devo multiplicar 5 por quanto para encontrar 2?

Se formos aplicar o mesmo raciocínio do exemplo anterior não teremos sucesso. O escriba utilizou uma estratégia um pouco diferente, ele multiplicou a associação inicial por 2/3.

Vejamos como ele procedeu:

As. Inicial		1	5
1º Passo		2/3	$3 + 1/3$
2º Passo	\	1/3	$1 + 2/3$
3º Passo	\	1/15	1/3
	Total:	**1/3+1/15**	**2**

Verificando o cálculo de Ahmes, temos: $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{5+1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

Surpreendentemente, nas divisões não exatas, podemos obter várias escolhas distintas resultando o mesmo quociente, o que não ocorre nas multiplicações e divisões exatas.

Se tomarmos outras frações na primeira coluna, por exemplo:

As. Inicial		1	5
1º Passo		1/2	$2+1/2$
2º Passo	\	1/4	$1+1/4$
3º Passo		1/5	1
4º Passo	\	1/10	1/2
5º Passo	\	1/20	1/4
	Total:	**1/4+1/10+1/20**	**2**

Verificando o resultado, obtemos: $\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{5+2+1}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

Em PITOMBEIRA (2012) (p. 28), temos uma exemplificação de como converter uma fração em soma de fração unitárias. No procedimento, deve-se inicialmente descobrir qual é a maior fração de numerador 1 menor do que 2/5, para isso:

1. Inverter 2/5, encontrando 5/2;
2. Tomar o maior inteiro que é mais próximo de 5/2. Basta observar que, $2 < 5/2 < 3$. Logo o inteiro será 3.
3. Conclui-se que $1/3 < 2/5$ é a maior fração com numerador 1 menor do que 2/5;
4. Fazer $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6-5}{15}=\frac{1}{15} \Longleftrightarrow \frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$.

chegando no mesmo resultado que Ahmes.

Exemplo 2.9. *(Divisão não Exata - Dividendo menor que Divisor)*

Vamos dividir 2 por 7 CHACE (1927) (p. 50). Neste exemplo, $\frac{2}{7}=x \Longleftrightarrow 2=7\cdot x$. A pergunta que devemos fazer é: 7 vezes quanto resulta em 2?

As. Inicial		1	7
1º Passo		1/2	$3+1/2$
2º Passo	\	1/4	$1+1/2+1/4$
3º Passo		1/7	1
4º Passo		1/14	1/2
5º Passo	\	1/28	1/4
	Total:	**1/4+1/28**	**2**

De fato: $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}=\frac{7+1}{28}=\frac{2}{7}$.

2.4 Método da Falsa Posição

Este método de resolver equações do 1º grau, era possívelmente a maneira mais simples para aquele período da humanidade. Atualmente, o método da falsa posição pode aparentar ser bem longo e cansativo. Mas é preciso lembrar que estamos falando de algo próximo de 1650 a.C..

A linguagem atual só iria aparecer na segunda metade do século XVI d.C. com o francês *François Viète* $(1540 - 1603)$, que ficou conhecido como o Pai da Álgebra, por ser o responsável em introduzir a primeira notação algébrica utilizando letras do alfabeto como coeficientes numéricos em equações.

No método da falsa posição, escolhemos um valor para ser nossa solução, ou seja, vamos fazer um "*chute*" para nossa solução. Provavelmente o nome de falsa venha deste chute, pois o valor escolhido para *aha* provalmente será falso. Após a escolha inicial do *aha*, realiza-se as operações no 1º membro da equação (esquerda do sinal de igual) com a suposta solução. Para chegar a resposta correta, ainda será preciso utilizar uma regra de razão e proporção (regra de três simples).

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.10. *(Problema 24 do Papiro de Rhind) - Uma quantidade e seus* $1/7$ *somados tornam-se* 19. *Qual é a quantidade?*

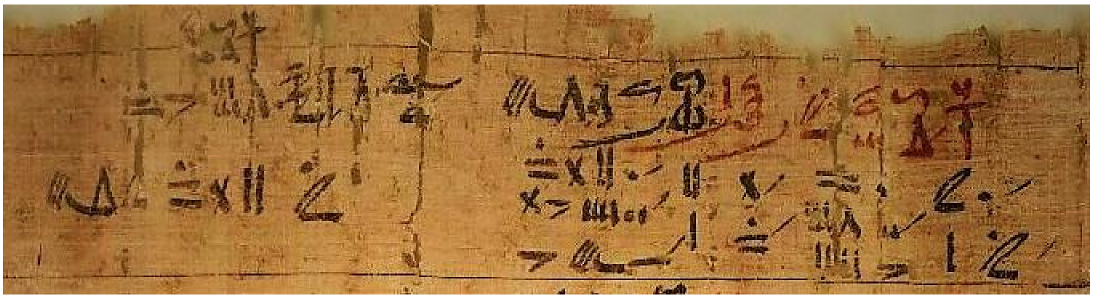


Figura 2.7: Problema 24 do Papiro de Ahmes. *Fonte:* BERTATO (2015)

Resolução:

A quantidade que estamos interessados, nada mais é do que o *aha*. Observe que na linguagem atual teríamos $x + \frac{1}{7} \cdot x = 19$. Pelo método da falsa posição, devemos fazer um *chute* para o *aha*, sendo que o valor 7 é uma boa tentativa, pois simplificaria com o demominador da fração $1/7$. Para $x = 7$, temos $7 + 7/7 = 8$, diferentemente de 19, logo $x = 7$ é um valor falso.

CHACE (1927) (p. 60) Ahmes resolveu o problema assumindo 7 para o *aha*, encontrando 8:

Associação Inicial	\	1	7
1º Passo	\	1/7	1
	Total:		**8**

Próximo passo é dividir 19 por 8:

As. Inicial		1	8
1º Passo	\	2	16
2º Passo		1/2	4
3º Passo	\	1/4	2
4º Passo	\	1/8	1
	Total:	$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	**19**

Próxima etapa é aplicar a proporção. Basta multiplicar o resultado anterior por 7:

As. Inicial	\	1	$2+1/4+1/8$
1º Passo	\	2	$4+1/2+1/4$
2º Passo	\	4	$9+1/2$
	Total:	**7**	$16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$

Resposta final de Ahmes para o problema foi: $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$.

O que Ahmes fez após o *chute*, foi uma espécie de fatoração, esperando encontrar frações unitárias. Uma outra maneira de vizualizar o procedimento de Ahmes é observar que $19 = 16+2+1$, e aplicar uma decomposição:

$$19 = 8\cdot\frac{19}{8} = 8\cdot\left(\frac{16+2+1}{8}\right) = 8\cdot\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right), \tag{2.1}$$

restando agora aplicar uma regra de razão e proporção, para os números entre parênteses em (2.1). Para tal, multiplica-se 7 por $2+1/4+1/8$, resultando em $16+1/2+1/8$ (resultado de Ahmes). De fato,

$$7\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+2\right) = \frac{7}{8}+\frac{7}{4}+14 = \frac{3}{8}+\frac{4}{8}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}+14 =$$

$$= \frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+1+14 = \frac{1}{8}+\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}+15 = 16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8} \tag{2.2}$$

O escriba Ahmes ainda conferiu se seu aha estava correto, ele mostrou que $1/8 + 1/2 + 16$ somado com seu um sétimo $1/8 + 1/4 + 2$, resulta em 19, tirando assim a prova de seu cálculo.

Observação sobre a proporção: Se para resolver o problema pudéssemos utilizar a ideia moderna de função, poderíamos escrever $f(x) = x + \frac{1}{7} \cdot x$, ou seja, $f(x) = \frac{8x}{7}$ e perguntar para qual x teremos $f(x) = 19$. Utilizando $x = 0$ temos $f(0) = 0$, para o valor falso $x = 7$ temos $f(7) = 8$. Com estes valores podemos construir um gráfico e descobrir o valor de x desejado.

Inicialmente, organizando os valores em uma tabela, temos:

x	$f(x) = y = 8x/7$	**Par** (x, y)
0	0	$(0, 0)$
7	8	$(7, 8)$
x	19	$(x, 19)$

Traçando o gráfico com os valores da tabela, encontramos a seguinte reta:

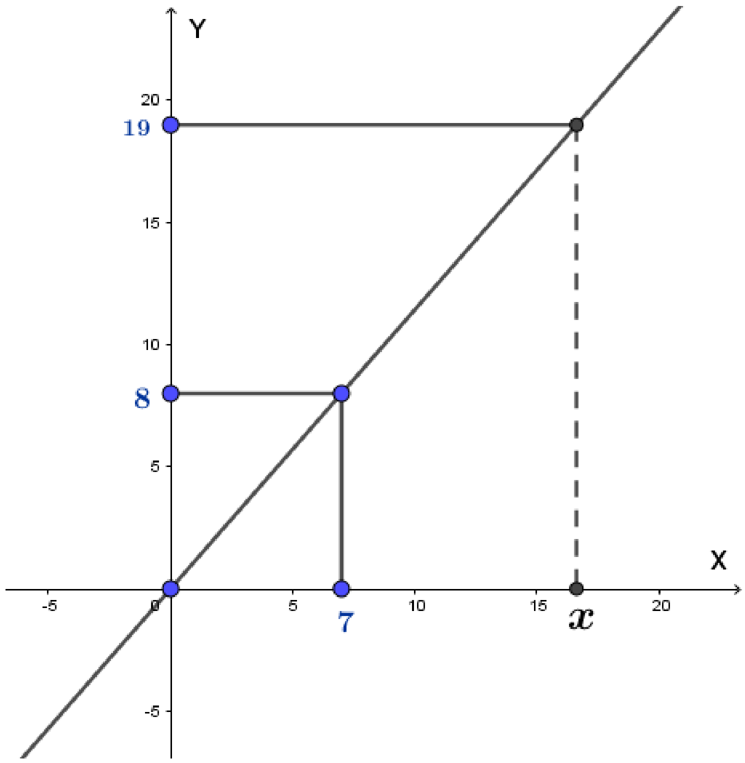


Figura 2.8: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{8x}{7}$. *Fonte:* próprio autor.

Utilizando semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{x}{7} = \frac{19}{8} \iff x = 7 \cdot \frac{19}{8} \iff x = \frac{133}{8}$$

é nossa solução. Para confirmar que nossa solução $x = 133/8$ é a mesma de Ahmes, basta utilizar os dados das equações (2.1) e (2.2)

$$16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 7 \cdot \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 7 \cdot \frac{19}{8} = \frac{133}{8}$$

com $16+1/2+1/8$ sendo a solução do escriba. Outra maneira de verificar se nossa solução está correta é fazer $x = 133/8$ em nossa função, encontrando: $f(\frac{133}{8}) = 19$.

Ensino atual: Ao final do sétimo ano, espera-se que os alunos tenham habilidade em resolver a equação do 1º grau como:

$$x + \frac{1}{7} \cdot x = 19 \Longleftrightarrow \frac{8x}{7} = 19 \Longleftrightarrow 8x = 7 \cdot 19 \Longleftrightarrow x = \frac{133}{8}$$

que obviamente, na linguagem atual, torna-se uma solução muito mais simples se comparado ao método da falsa posição dos antigos egípicios.

Exemplo 2.11. *(Problema 25 do Papiro de Rhind) - Uma quantidade e seu* $1/2$ *somados tornam-se* 16*. Qual é a quantidade?*

Figura 2.9: Problema 25 do Papiro de Ahmes. *Fonte:* BERTATO (2015)

Resolução:

O problema pode ser reescrito como $x + \frac{1}{2} \cdot x = 16$, com x sendo nosso aha. Uma tentativa falsa adequada seria o valor 2, pois simplificaria com o denominador da fração $1/2$. Para $x = 2$, ficamos com $2 + 2/2 = 3$, que é diferente do valor desejado 16.

Ahmes resolveu o problema 25 tomando aha igual à 2, encontrou 3. De fato:

Associação Inicial	\	1	2
1º Passo	\	1/2	1
Total:			**3**

Próximo passo é dividir 16 por 3:

As. Inicial	\	1	3	
1º Passo		2	6	
2º Passo	\	4	12	
3º Passo		8	24	(Desconsiderar, pois $24 > 16$)
4º Passo		2/3	2	
5º Passo	\	1/3	1	
Total:		**5+1/3**	**16**	

Resta aplicar a proporção, ou seja, deve-se multiplicar o total anterior por 2:

Associação Inicial		1	$5 + 1/3$
1º Passo	\	2	$10 + 2/3$
Total:			**10+2/3**

O resultado de Ahmes foi $10 + 2/3$.

Para uma abordagem semelhante, observe que $16 = 12+3+1$. Estamos interessados em fazer uma divisão por 3. Assim, partindo de 16, temos:

$$16 = 3 \cdot \frac{16}{3} = 3 \cdot \left(\frac{12 + 3 + 1}{3} \right) = 3 \cdot \left(4 + 1 + \frac{1}{3} \right) = 3 \cdot \left(5 + \frac{1}{3} \right). \tag{2.3}$$

Aplicando a proporção no termo entre parênteses em (2.3), multiplicamos 2 por $5 + 1/3$, encontrando $10 + 2/3$ (resultado de Ahmes). De fato,

$$2 \cdot \left(5 + \frac{1}{3} \right) = 10 + \frac{2}{3} \tag{2.4}$$

Observação sobre a proporção: Usando a ideia de função, temos que $f(x) = x + \frac{x}{2}$, ou seja, $f(x) = \frac{3x}{2}$. Desejamos encontrar o valor de x, tal que $f(x) = 16$. Para $x = 0$ temos $f(0) = 0$, para o valor falso $x = 2$ temos $f(2) = 3$. Montando uma tabela com estes valores e construindo um gráfico, obtemos:

x	$f(x) = y = 3x/2$	**Par** (x, y)
0	0	$(0, 0)$
2	3	$(2, 3)$
x	16	$(x, 16)$

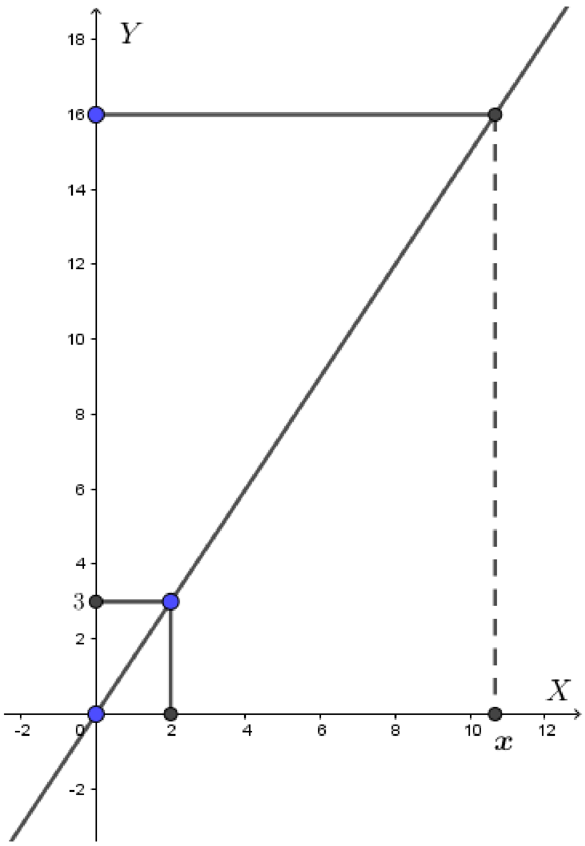


Figura 2.10: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{3x}{2}$. *Fonte:* próprio autor.

Aplicando semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{x}{2} = \frac{16}{3} \Longleftrightarrow x = 2 \cdot \frac{16}{3} \Longleftrightarrow x = \frac{32}{3}$$

é nossa solução. Para confirmar que $x = 32/3$ é a mesma solução que a do escriba, basta observar as equações (2.3) e (2.4), ou seja,

$$10 + \frac{2}{3} = 2 \cdot \left(5 + \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

com $10 + 2/3$ sendo a resposta de Ahmes. Utilizando o valor $x = 32/3$ na função $f(x) = 3x/2$, podemos tirar uma prova do resultado:

$$f\left(\frac{32}{3}\right) = \frac{3 \cdot \frac{32}{3}}{2} = \frac{32}{2} = 16.$$

Exemplo 2.12. *(Problema 26 do Papiro de Rhind) - Uma quantidade e seu* 1/4 *somados tornam-se* 15. *Qual é a quantidade?*

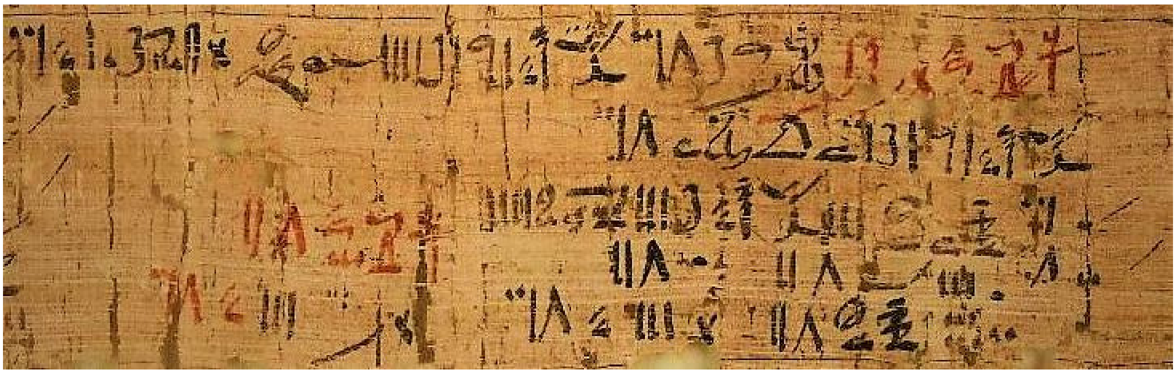


Figura 2.11: Problema 26 do Papiro de Ahmes. *Fonte:* BERTATO (2015)

Resolução:

Utilizando uma notação mais atual, podemos reescrever nosso problema como $x + \frac{1}{4} \cdot x = 15$, com x sendo nosso aha. Para uma tentativa falsa, tomemos o valor 4, pois simplificaria com o denominador da fração 1/4. Para $x = 4$, ficamos com $4 + 4/4 = 5$, que não é o valor desejado 15.

Ahmes inicialmte encontrou o valor falso:

Associação Inicial	\	1	4
1º Passo	\	1/4	1
	Total:		**5**

Deve-se dividir 15 por 5:

Associação Inicial	\	1	5
1º Passo	\	2	10
	Total:	**3**	**15**

Para aplicar a proporção, multiplicamos 3 por 4:

Associação Inicial		1	3
1º Passo		2	6
2º Passo	\	4	12
	Total:	**4**	**12**

O resposta de Ahmes para o problema foi 12.

O que Ahmes fez, pode ser revisto da seguinte maneira: observe que $15 = 10 + 5$, depois faça uma divisão por 5. Assim,

$$15 = 5 \cdot \frac{15}{5} = 5 \cdot \left(\frac{10+5}{5}\right) = 5 \cdot (2+1) = 5 \cdot (3) \, .$$

Pela proporção, multiplicamos 4 por 3, encontrando 12 (resultado de Ahmes).

Observação sobre a proporção: Usando a ideia de função, temos que $f(x) = x + \frac{x}{4}$, ou seja, $f(x) = \frac{5x}{4}$. Queremos encontrar o valor de x, para que $f(x) = 15$. Tomando $x = 0$ temos $f(0) = 0$, para o valor falso $x = 4$ temos $f(4) = 5$. Montando uma tabela com estes valores e construindo um gráfico, obtemos:

x	$f(x) = y = 5x/4$	**Par** (x, y)
0	0	$(0, 0)$
4	5	$(4, 5)$
x	15	$(x, 15)$

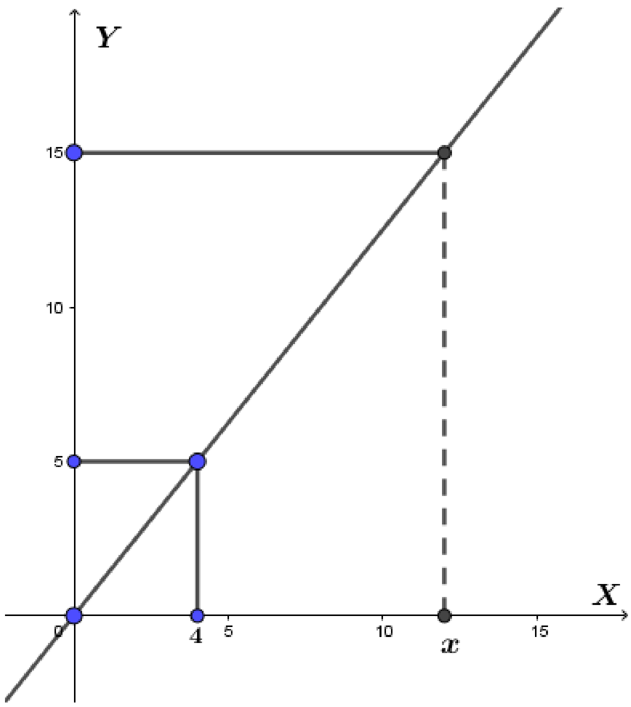


Figura 2.12: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{5x}{4}$. *Fonte:* próprio autor.

Aplicando semelhança de triângulos, segue que:

$$\frac{x}{4} = \frac{15}{5} \Longleftrightarrow x = 4 \cdot 3 \Longleftrightarrow x = 12$$

é nossa solução.

Aplicando o valor $x = 12$ na função $f(x) = 5x/4$, podemos tirar uma prova do resultado:

$$f(12) = 12 + \frac{12}{4} = 12 + 3 = 15.$$

Pelo ensino atual: basta resolver a equação do 1º grau

$$x + \frac{x}{4} = 15 \Longleftrightarrow \frac{5x}{4} = 15 \Longleftrightarrow 5x = 60 \Longleftrightarrow x = 12$$

sendo $x = 12$ o número procurado.

Exemplo 2.13. *(Problema 27 do Papiro de Rhind) - Uma quantidade e seu* $1/5$ *somados tornam-se* 21*. Qual é a quantidade?*

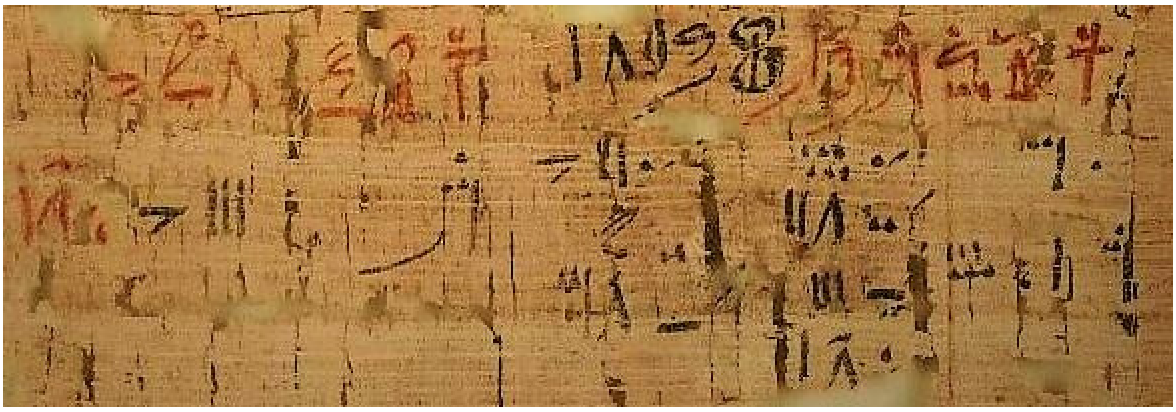


Figura 2.13: Problema 27 do Papiro de Ahmes. *Fonte:* BERTATO (2015)

Resolução:

Empregando uma notação mais atual, podemos reescrever nosso problema como $x + \frac{1}{5} \cdot x = 21$, sendo x nosso aha. Tomemos o valor 5 para nosso valor falso, pois simplificaria com o denominador da fração $1/5$. Para $x = 5$, ficamos com $5 + 5/5 = 6$, que não é o valor desejado 21.

Na solução de Ahmes, tomado 5, encontra-se 6. De fato:

Associação Inicial	\	1	5
1º Passo	\	1/5	1
	Total:		**6**

Próxima etapa é dividir 21 por 6:

Associação Inicial	\	1	6
1º Passo	\	2	12
2º Passo	\	1/2	3
	Total:	**3+1/2**	**21**

Para aplicar a proporção, multiplicamos $3 + 1/2$ por 5:

Associação Inicial	\	1	$3 + 1/2$
1º Passo		2	7
2º Passo	\	4	14
	Total:	**5**	**17+1/2**

A quantidade encontrada por Ahmes foi $17 + 1/2$.

O que Ahmes fez, poderia ser reescrito como: multiplica-se e divida $21 = 12+6+3$ por 6:

$$21 = 6 \cdot \frac{21}{6} = 6 \cdot \left(\frac{12+6+3}{6}\right) = 6 \cdot \left(2 + 1 + \frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \left(3 + \frac{1}{2}\right), \tag{2.5}$$

aplica-se uma proporção, multiplicando 5 por $3 + 1/2$ da equação (2.5), encontrando $15 + 5/2 = 15 + 2 + 1/2 = 17 + 1/2$ (resultado de Ahmes).

Observação sobre a proporção: Usando a ideia moderna de função, pode-se escrever $f(x) = x + \frac{x}{5}$, ou seja, $f(x) = \frac{6x}{5}$. Queremos encontrar o valor de x, tal que $f(x) = 21$. Tomando $x = 0$ temos $f(0) = 0$, para o valor falso $x = 4$ temos $f(5) = 6$. Montando uma tabela com estes valores e construindo um gráfico, obtemos:

x	$f(x) = y = 6x/5$	**Par** (x, y)
0	0	$(0, 0)$
5	6	$(5, 6)$
x	21	$(x, 21)$

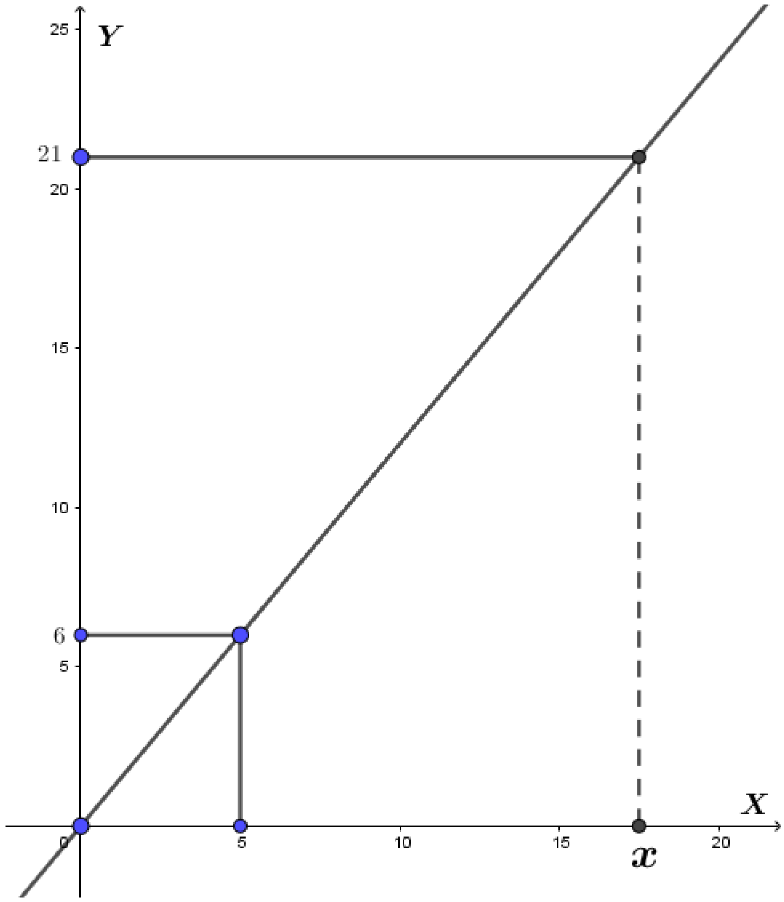


Figura 2.14: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{6x}{5}$. *Fonte:* próprio autor.

Aplicando semelhança de triângulos, segue que:

$$\frac{x}{5} = \frac{21}{6} \Longleftrightarrow x = 5 \cdot \frac{21}{6} \Longleftrightarrow x = \frac{105}{6} = 17 + \frac{1}{2}$$

é nossa solução.

Aplicando o valor $x = 105/6$ na função $f(x) = 6x/5$, podemos tirar uma prova do resultado:

$$f\left(\frac{105}{6}\right) = \frac{6 \cdot \frac{105}{6}}{5} = \frac{105}{5} = 21.$$

Pelo ensino atual: basta resolver a equação do 1º grau

$$x + \frac{x}{5} = 21 \Longleftrightarrow \frac{6x}{5} = 21 \Longleftrightarrow 5x = 105 \Longleftrightarrow x = \frac{105}{5}$$

com $x = 21$ o número procurado.

2.5 Demonstração do Método da Falsa Posição

A resolução dos problemas da seção anterior nos dão pistas de como procedermos para essa demonstração. Qualquer soma de monômios de 1º em uma incógnita, pode ser reduzida à equação do 1º grau

$$ax + b = 0 \Longleftrightarrow ax = -b \tag{2.6}$$

com $a, b, x \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Sendo nosso objetivo, determinar solução para a equação, ou seja, o valor da incógnita x.

Seja $x_1 \neq 0$, um número escolhido como possível solução. Pelos exemplos tratados na seção anterior (problemas $24, 25, 26$ e 27 do Papiro de Rhind), nota-se que x_1 deve ser escolhido de maneira "esperta", de modo a facilitar as contas, principalmente em casos que envolvem frações.

Tendo escolhido x_1, calcula-se $ax_1 := b_1$.

Considere a igualdade

$$ax_1 = b_1. \tag{2.7}$$

Observe que $b_1 \neq 0$, pois $a \neq 0$ e $x_1 \neq 0$.

Inicialmente, em (2.6) tínhamos $-b$ no segundo membro. Para que tenhamos $-b$ no segundo membro da equação (2.7), devemos multiplicar ambos os membros por $-b/b_1$. Fazendo a multiplicação, otemos a igualdade:

$$ax_1 \cdot \left(\frac{-b}{b_1}\right) = b_1 \cdot \left(\frac{-b}{b_1}\right)$$

que de maneira equivalente, pode ser reescrita como:

$$a \cdot \left(-x_1 \cdot \frac{b}{b_1}\right) = -b \tag{2.8}$$

Comparando as equação (2.6) e (2.8), concluímos que:

$$x = -\frac{x_1 \cdot b}{b_1} \tag{2.9}$$

Por (2.7) $b_1 = ax_1$, logo, segue de (2.9) que $x = -b/a$ é solução da equação $ax = -b$.

■

3 Equação do 2º grau

3.1 Função do 2º grau

Antes de abordar o tema principal deste capítulo, faremos algumas considerações sobre **funções do 2º grau**, ou funções quadráticas, ou ainda, funções polinomiais do 2º grau.

Definição 3.1. *Chamamos uma função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de* ***função quadrática*** *quando, para todo* $x \in \mathbb{R}$*, temos* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$.

Em várias situações, pode-se utilizar funções do 2º grau, bem como observar aplicações referentes ao seu gráfico. O gráfico de uma função do 2º grau é chamado de **parábola**.

3.1.1 Parábola - O Gráfico de uma Função do 2º grau

Definição 3.2. *Dados um ponto* F *e uma reta* d *com* $F \notin d$*. Chamamos de* ***parábola*** *de foco* F *e diretriz* d*, o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância de* F *e de* d *é a mesma.*

Observação: é importante considerar $F \notin d$, pois, do contrário, a parábola se degenararia em uma reta.

O *eixo de simetria* ou simplesmente, *eixo* da parábola, é a reta perpendicular à diretriz que passa pelo foco. O *vértice* da parábola é o ponto mais próximo da reta diretriz. O vértice é também o ponto médio do segmento formado pelo foco e pela interseção do eixo de simetria com a reta diretriz.

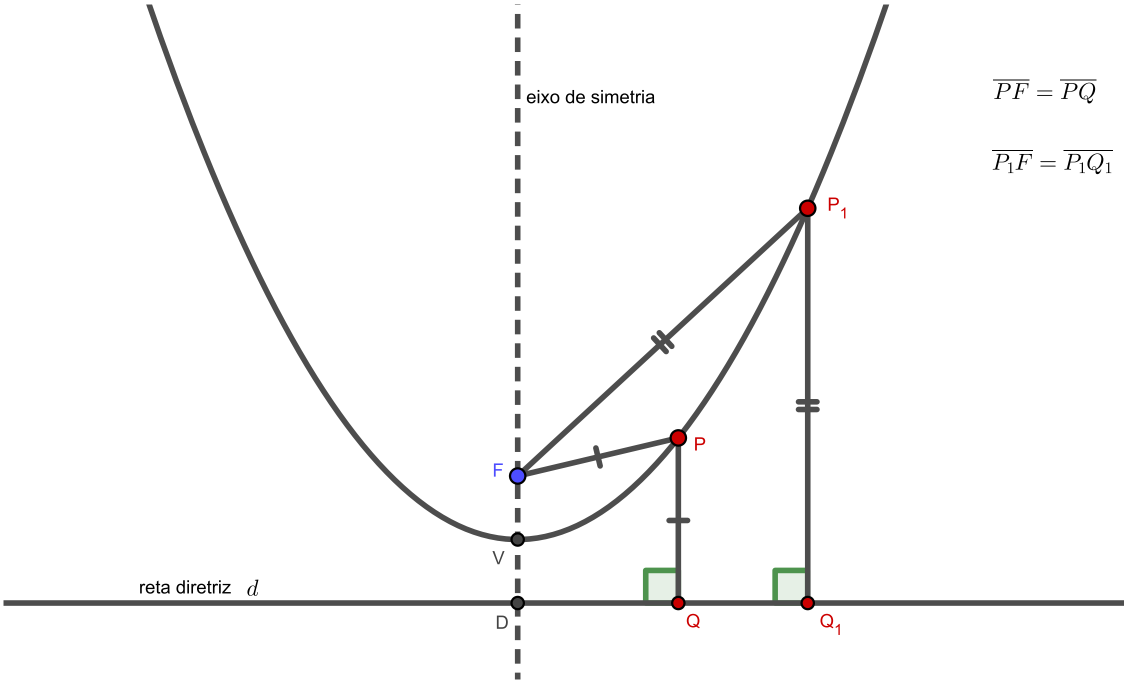


Figura 3.1: Parábola. *Fonte:* próprio autor.

Observe que os segmentos $\overline{FV}$ e $\overline{VD}$ tem a mesma medida. Logo, temos as distâncias $d(F, V) = d(V, D)$, ou ainda, $d(F, d) = 2 \cdot \overline{FV} = 2 \cdot \overline{VD}$.

Exemplo 3.1. *Sabendo que o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ é uma parábola. Encontrar seu foco e sua reta diretriz.*

Resolução: Considere a seguinte figura

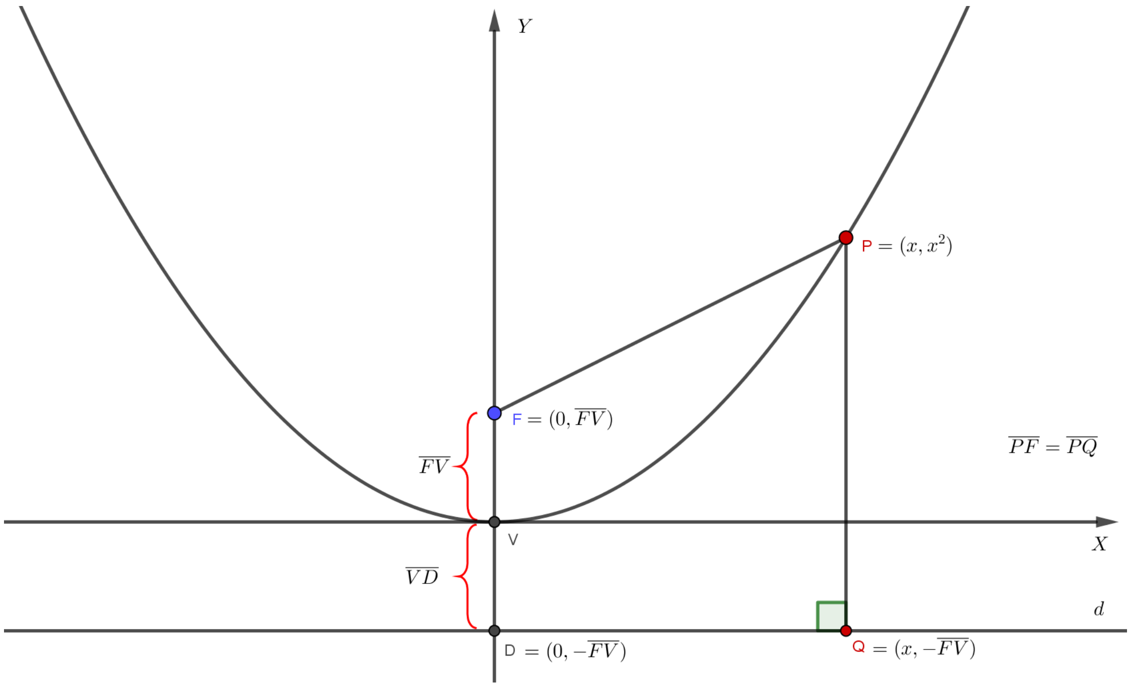


Figura 3.2: Parábola da função $f(x) = x^2$. *Fonte:* próprio autor.

Para facilitar os cálculos, vamos usar $f(x) := y$, logo $y = x^2$. Pela definição 3.2, um ponto P pertence a parábola, se e somente se, tivermos $d(P, F) = d(P, d)$.

Logo, podemos escrever que:

$$
\begin{aligned}
P(x, y) \text{ pertence a parábola} &\iff d(P, F) = d(P, d) \\
&\iff \sqrt{(x-0)^2 + (y - \overline{FV})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y - (-\overline{FV}))^2} \\
&\iff \sqrt{x^2 + (y - \overline{FV})^2} = \sqrt{(y + \overline{FV})^2} \\
&\iff \sqrt{x^2 + (y - \overline{FV})^2} = |y + \overline{FV}| \\
&\iff x^2 + (y - \overline{FV})^2 = (y + \overline{FV})^2 \\
&\iff x^2 + y^2 - 2y\overline{FV} + \overline{FV}^2 = y^2 + 2y\overline{FV} + \overline{FV}^2 \\
&\iff x^2 - 2y\overline{FV} = 2y\overline{FV} \\
&\iff x^2 = 4y\overline{FV} \\
&\iff y = \frac{x^2}{4\overline{FV}}
\end{aligned}
$$

Comparando $y = f(x) = \frac{x^2}{4\overline{FV}}$ com $f(x) = x^2$, necessariamente deve-se ter $\frac{1}{4\overline{FV}} = 1$, assim $\overline{FV} = 1/4$. Conclui-se que o foco é $F = (0, 1/4)$ e a equação da reta diretriz d é dada por $y = -1/4$.

Existem vários outros tipos de parábolas, como as que o eixo de simetria está ao longo do eixo x do plano cartesiano, parábolas que passaram por alguma translação ou rotação. Mais detalhes podem ser encontrados em STEINBRUCH (2006) capítulo 7 e em BOLDRINI (1986) capítulo 11.

3.1.2 Parábolas no Cotidiano

Alguns exemplos que permitem observar o gráfico de uma função do 2º grau são: lançamento de projéteis, arquitetura, jogo para celular Angry Birds, lançamento de uma bola de basquete na cesta, uma bola de futebol que é chutada por um jogador, etc.

A Igreja de São Francisco de Assis, localizada as margens da lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, é uma verdadeira obra de arte utilizando parábolas. Foi projetada por Oscar Niemeyer, sendo construída entre 1942 e 1943. Foi inaugurada em 15 de maio de 1943, data da inauguração oficial do bairro Pampulha, mas a obra na igreja só foi totalmente concluída em 1945.

Hoje a igreja faz parte do Conjunto Moderno da Pampulha, sendo, desde 2016, reconhecido como Patrimônio Mundial. Desde 1947 é reconhecida como Patrimônio Cultural Brasileiro. Devido suas formas modernas em forma de arcos, só foi utilizada 15 anos após a conclusão da obra, no final da década de 1950. O então acerbispo de Belo Horizonte, negou sua utilização, pois a igreja não se encaixava nos padrões da época.

Figura 3.3: Igreja de São Francisco de Assis. *Fonte:* http://portal.iphan.gov.br/noticias/detalhes/5376/igreja-da-pampulha-reabre-suas-portas-totalmente-restaurada (acesso: 09/11/2019).

Jatos de água no parque do Ibirapuera, na cidade de São Paulo, formando arcos de parábolas.

Figura 3.4: Parque do Ibirapuera. *Fonte:* https://www.flickr.com/photos/carloshk/6463360467/ (acesso: 09/11/2019).

O jogo Angry Birds foi lançado no final de 2009. O objetivo do jogo é eliminar porcos que ficam cercados em torno de algumas ou várias estruturas. Para elimina-lós, o jogador lança pássaros utilizando um estilingue. O jogador ganha se eliminar todos os porcos com os pássaros que possui. Existem algumas variações para os pássaros, mas em geral todos têm trajetórias descritas por parábolas. Até 2014, o jogo já havia alcançado a marca de 2 bilhões de downloads.

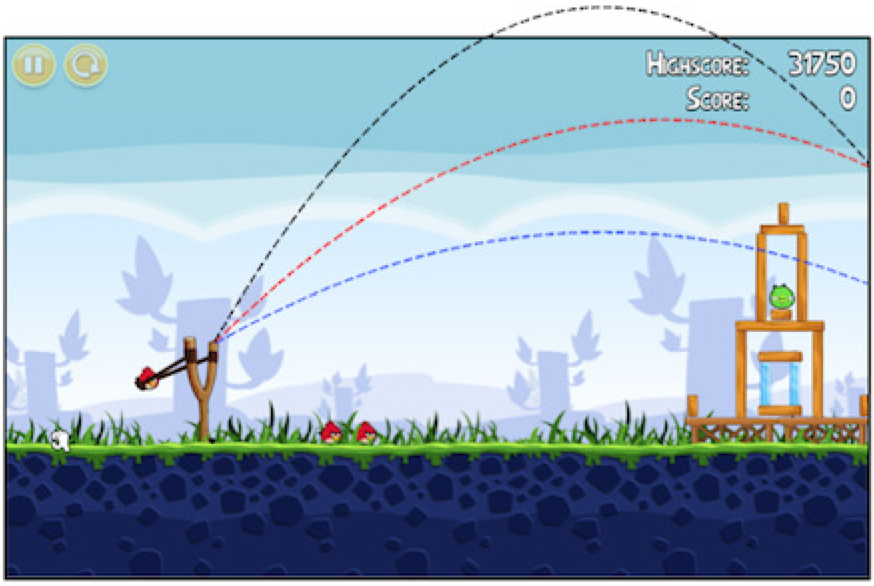


Figura 3.5: Jogo Angry Birds. *Fonte:* https://brilliant.org/problems/projectile-and-kinetic-energy-combined/ (acesso: 09/11/2019).

No lançamento de uma bola de basquete em direção a cesta, ela descreve uma trajetória seguindo um arco de parábola.

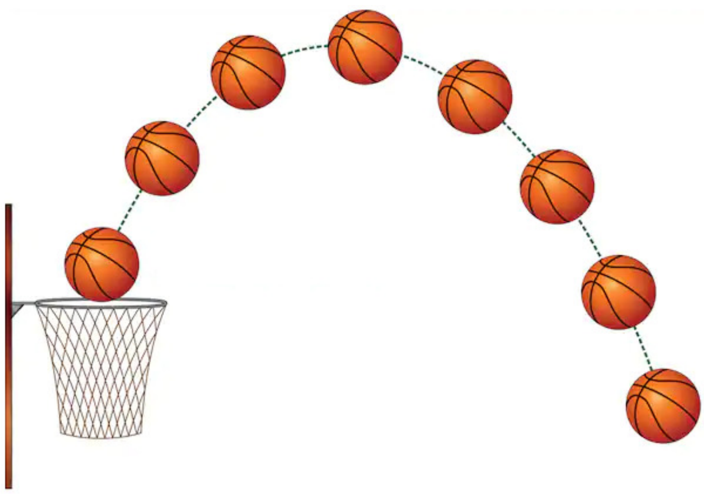


Figura 3.6: Trajetória parabólica da bola de basquete. *Fonte:* https://www.shutterstock.com/es/imege-vector/projectile-motion-path-any-object-thrown-1410089585 (acesso: 09/11/2019).

3.1.3 Parábolas no Ensino Fundamental

No 9º ano do ensino fundamental, um dos tópicos relacionados à álgebra deve contemplar a habilidade **EF09MA06** da BNCC. Tal habilidade se resume em trabalhar com funções quadráticas, com suas representações numéricas, algébricas, gráficas e situações-problema. Neste estudo são abordados seis tipos de gráficos de funções quadráticas.

Uma maneira bem elementar para mostrar para ao aluno como construir o gráfico de uma função do 2º grau consiste em escolher valores para a variável e calcular o valor da função para o valor escolhido. Deve-se fazer este procedimento até se obter uma quantidade razoável de pontos, de tal maneira que seja possível, após ligar o conjunto de pontos obtidos por uma curva, observar que essa curva tenha o formato do que chamamos de parábola.

Observe os seguintes exemplos.

Exemplo 3.2. *Vamos representar graficamente a função do 2º grau definida por* $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Para $x = -4$, temos $f(-4) = (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 3 = 5$
Para $x = -3$, temos $f(-3) = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = 0$
Para $x = -2$, temos $f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 3 = -3$
Para $x = -1$, temos $f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = -4$
Para $x = 0$, temos $f(0) = (0)^2 + 2 \cdot (0) - 3 = -3$
Para $x = 1$, temos $f(1) = (1)^2 + 2 \cdot (1) - 3 = 0$
Para $x = 2$, temos $f(2) = (2)^2 + 2 \cdot (2) - 3 = 5$

Para tornar a notação mais simples, façamos $f(x) = y$. Com os valores calculados acima, podemos montar uma tabela com alguns pontos do gráfico da função e depois, marcamo-los no plano cartesiano, conforme figura 3.7.

x	$y = x^2 + 2x - 3$	**Par** (x, y)
-4	5	$(-4, 5)$
-3	0	$(-3, 0)$
-2	-3	$(-2, -3)$
-1	-4	$(-1, -4)$
0	-3	$(0, -3)$
1	0	$(1, 0)$
2	5	$(2, 5)$

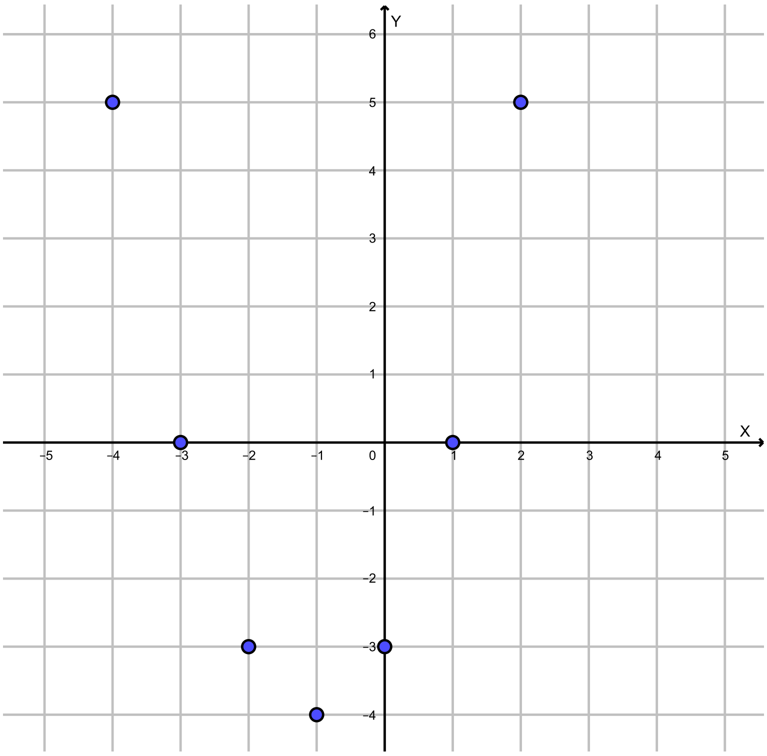


Figura 3.7: Marcação dos pontos encontrados na tabela. *Fonte:* próprio autor.

Desenhando uma curva contínua sobre os pontos no plano cartesiano, vemos que o gráfico da função é uma parábola.

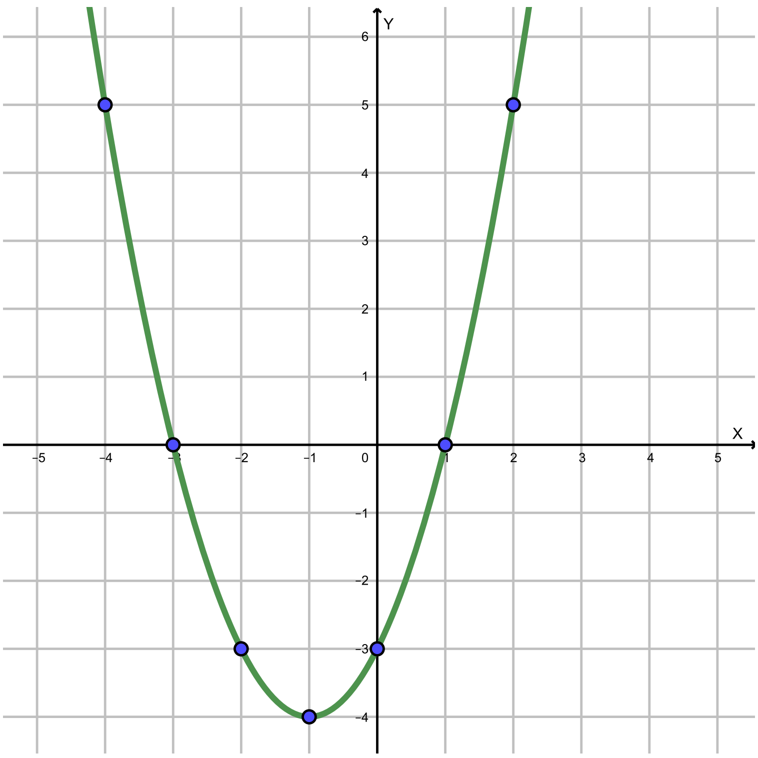


Figura 3.8: Gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$. *Fonte:* próprio autor.

Exemplo 3.3. *Vamos representar graficamente a função do 2º grau dada por* $y = -x^2 + 2x$.

Inicialmente, calculemos alguns valores.

Para $x = -1$, temos $f(-1) = -(-1)^2 + 2 \cdot (-1) = -3$

Para $x = 0$, temos $f(0) = -(0)^2 + 2 \cdot (0) = 0$

Para $x = 1$, temos $f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot (1) = 1$

Para $x = 2$, temos $f(2) = -(2)^2 + 2 \cdot (2) = 0$

Para $x = 3$, temos $f(3) = -(3)^2 + 2 \cdot (3) = -3$

Organizando estes valores em uma tabela, temos:

x	$y = -x^2 + 2x$	**Par** (x, y)
-1	-3	$(-1, -3)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	0	$(2, 0)$
3	-3	$(3, -3)$

Utilizando os pares ordenados da tabela acima, temos a seguinte marcação no plano cartesiano.

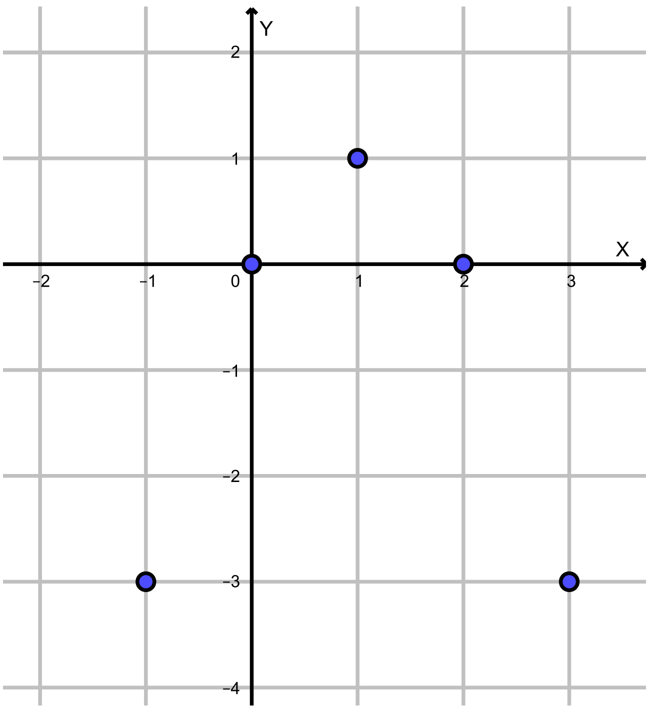


Figura 3.9: Marcação dos pontos encontrados na tabela. *Fonte:* próprio autor.

Novamente, desenhando uma curva contínua sobre os pontos no plano cartesiano, vemos que o gráfico da função é uma parábola cuja concavidade é voltada para baixo.

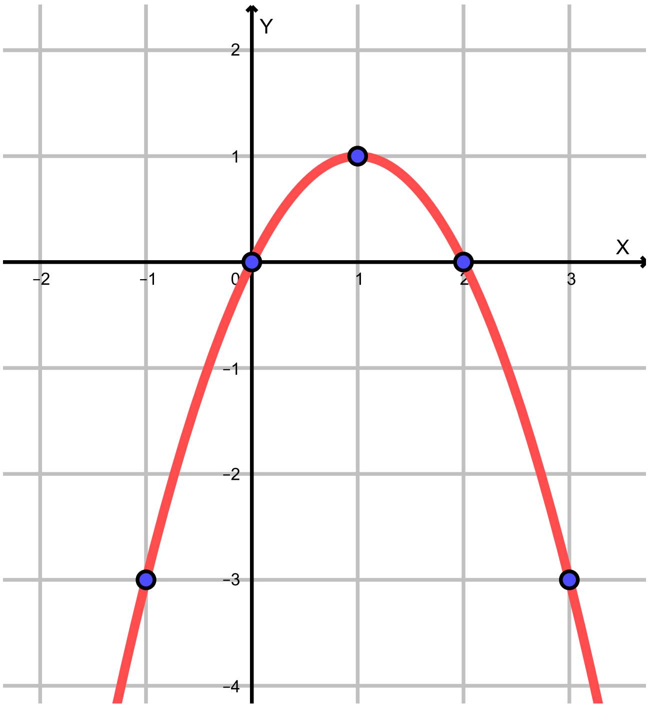


Figura 3.10: Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 2x$. *Fonte:* próprio autor.

Conforme a definição 3.1, para a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos dois casos para serem considerados quanto ao coeficiente a:

- Se $a > 0$, então a parábola tem sua concavidade voltada para cima. Neste caso, a parábola possui um **ponto de mínimo**.
- Se $a < 0$, então a parábola tem sua concavidade voltada para baixo. Neste caso, a parábola possui um **ponto de máximo**.

Na figura 3.8, o vértice da parábola é o ponto $(-1, -4)$, que é um ponto de mínimo. Já na figura 3.10, o vértice da parábola é o ponto $(1, 1)$, que é um ponto de máximo.

3.1.4 Relação entre os coeficentes da função do 2º grau e seu gráfico

Algumas observações podem ser feitas com relação ao gráfico das funções do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O que acontece com o gráfico se, deixarmos dois coeficientes fixos e fizermos o terceiro assumir diferentes valores? Uma sugestão para desenvolver este tópico em sala de aula é a utilização do software livre GeoGebra. Pode-se construir rapidamente vários gráficos e utilizar várias cores, levando a aula para uma direção mais investigativa e dinâmica, com a finalidade que os próprios alunos formulem suas conclusões e façam conjecturas.

A título de ilustração, considere a função genérica $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1º Caso: para facilitar a compreensão, fazer os coeficientes $b = 0$ e $c = 0$ fixos, deixando a variar nos reais positivos. Assim, $f(x) = ax^2 + 0 \cdot x + 0 \Longleftrightarrow f(x) = ax^2$.

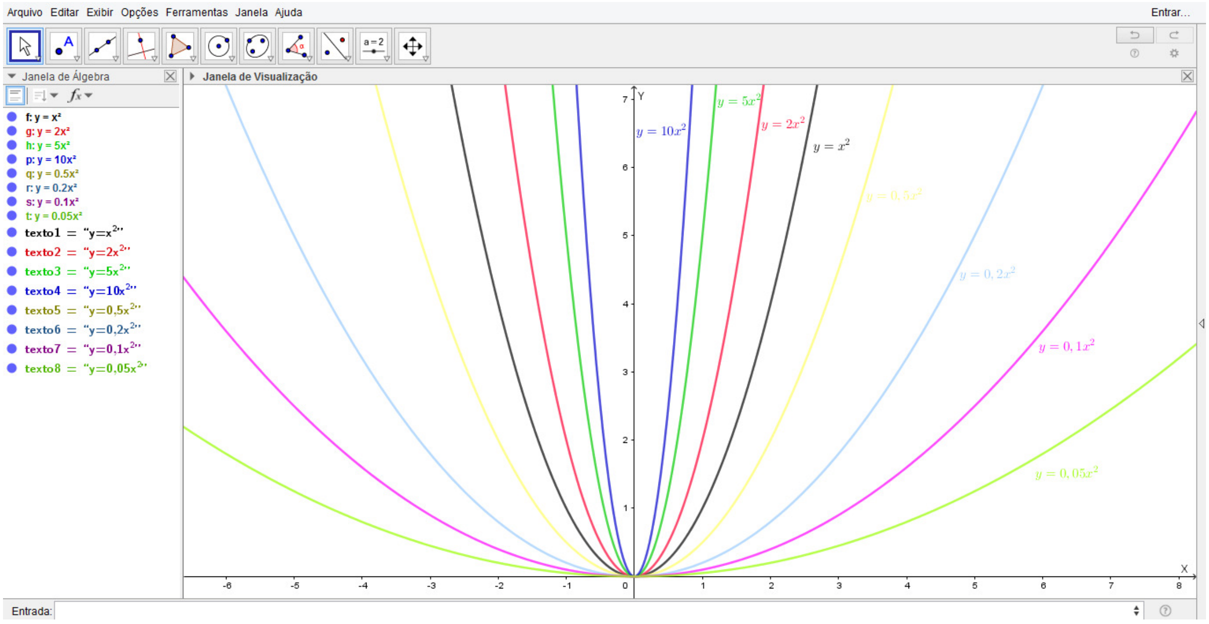


Figura 3.11: Gráficos da função $f(x) = ax^2$ com $a > 0$. *Fonte:* próprio autor.

É possível perceber que, quanto maior o valor de a ($a \longrightarrow +\infty$), mais fechada é a concavidade da prábola; por outro lado, quanto menor o valor de a ($a \longrightarrow 0^+$), a parábola possui concavidade mais aberta.

2º Caso: considerar $a = 1$ e $c = 0$ fixos, deixando b assumir qualquer valor real. Assim, $y = f(x) = x^2 + bx$.

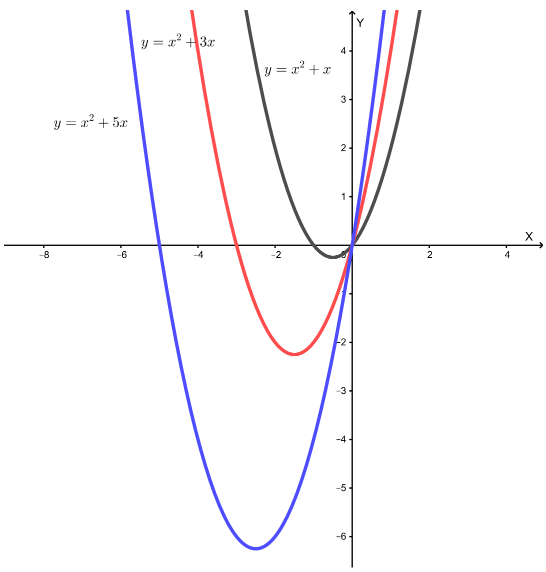


Figura 3.12: Gráficos da função $f(x) = x^2 + bx$ com $b > 0$. *Fonte:* próprio autor.

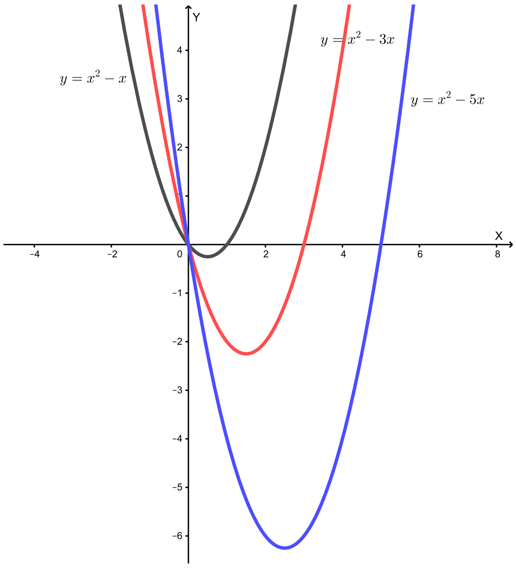


Figura 3.13: Gráficos da função $f(x) = x^2 + bx$ com $b < 0$. *Fonte:* próprio autor.

É possível perceber algumas diferenças ou padrões que se repetem nas duas figuras anteriores (3.12 e 3.13)? Percebe-se que os gráficos sempre passam no eixo x pelo coeficiente $c = 0$ e pelo ponto $(-b, 0)$. Tal fato ocorre, devido estes valores fazerem correspondência à $y = 0$. De fato, $y = f(0) = 0^2 + b \cdot 0 = 0$ e $y = f(-b) = (-b)^2 + b \cdot (-b) = 0$.

3º Caso: tomar $a = 1$ e $b = 0$, deixando c assumir qualquer valor real. Logo, teremos $f(x) = x^2 + c$.

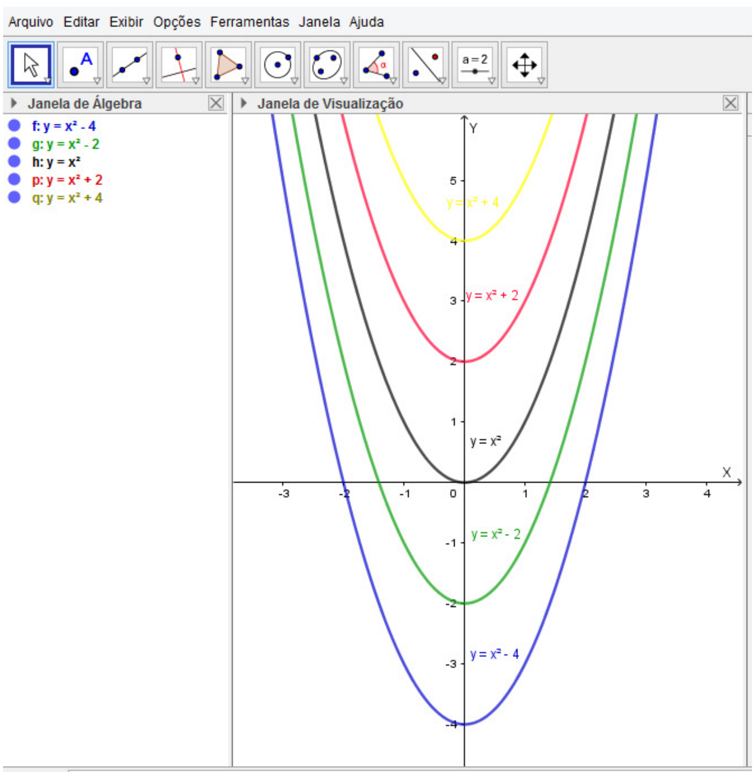


Figura 3.14: Gráficos da função $f(x) = x^2 + c$ com $c \in \mathbb{R}$. *Fonte:* próprio autor.

Percebe-se que está ocorrendo uma translação vertical da parábola, sendo que em cada caso, a parabóla passa no eixo y exatamente no valor do coeficiente c. Isso ocorre, pois o que estamos fazendo sobre o eixo y é o cálculo da função quando $x = 0$. Assim, $y = f(0) = 0^2 + c = c$.

4º Caso: considerar $b = 0$ e $c = 0$, com o coeficiente a do x^2 sendo $a > 0$ ou $a < 0$.

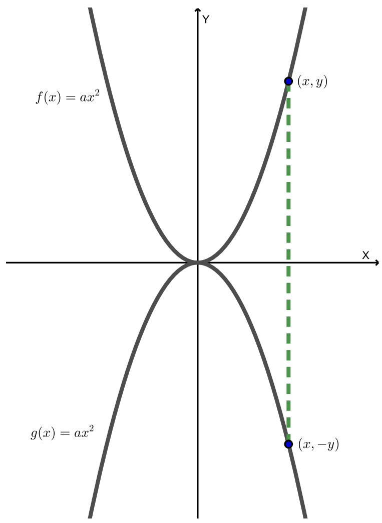


Figura 3.15: Gráfico da função $f(x) = ax^2$ com $a > 0$ e $g(x) = ax^2$ com $a < 0$. *Fonte:* próprio autor.

Nota-se que, dependendo do sinal do coeficiente a, a parábola pode ter concavidade voltada para cima ou para baixo. Nota-se também que, a parábola sofre uma reflexão em relação ao eixo x. Cada coordenada x do gráfico de f e g é a mesma, porém, a coordenada y troca de sinal. Por isso, dizemos que o gráfico de $f(x)$ e $g(x)$ são simétricas em relação ao eixo x.

5º Caso: translação horizontal em quadrado perfeito. Seja $a \neq 0$ e $k \in \mathbb{R}$. O que será possível observar sobre o gráfico de $f(x) = a(x-k)^2$ para $a = 1$ e k um número real qualquer?

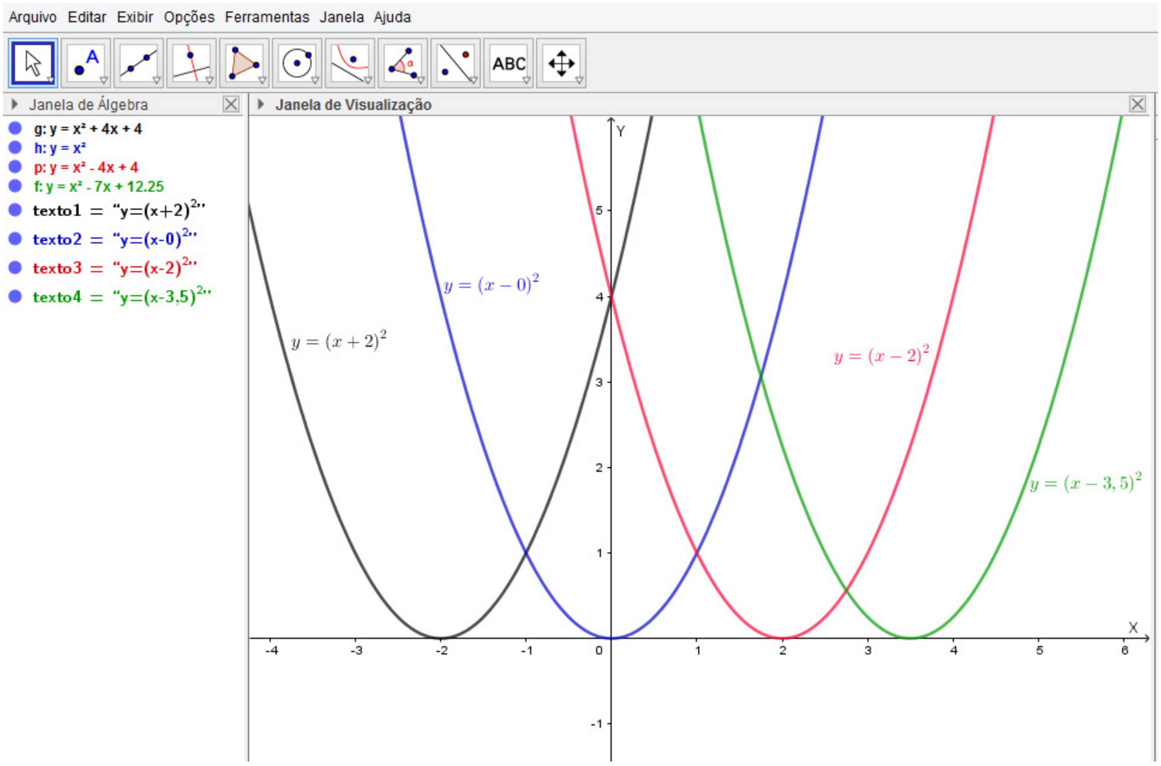


Figura 3.16: Gráfico da função $f(x) = (x-k)^2$ e $k \in \mathbb{R}$. *Fonte:* próprio autor.

Para funções do tipo $f(x) = a(x-k)^2$, com $a \neq 0$ e $k \in \mathbb{R}$, ocorrem translações horizontais. O vértice da parábola fica exatamente sobre o valor escolhido para k (sendo a coordenada x do vértice) e $y = 0$. Por exemplo, para $k = -2$ e $a = 1$, tem-se $f(x) = (x+2)^2$, com $y = f(x) = 0 \iff x = -2$. Logo o vértice será $V = (x, y) = (-2, 0)$.

3.1.5 Coordenadas do vértice da Parábola

Aproveitando a função $f(x) = x^2 + 2x - 3$, já vista na seção 3.1.3. O gráfico correspondente à está função é:

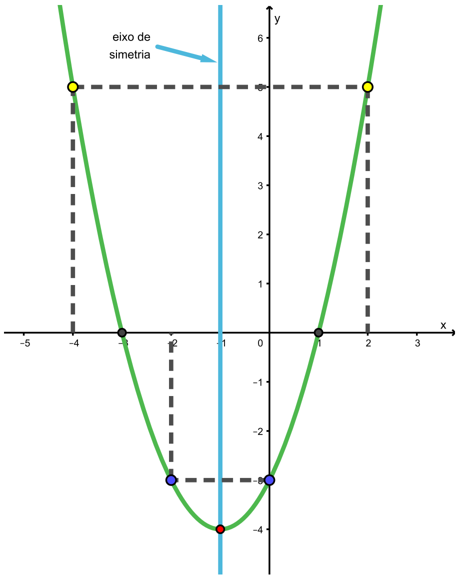


Figura 3.17: Gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$. *Fonte:* próprio autor.

Observe que, os pontos destacados com a mesma cor, estão a uma mesma distância do eixo de simetria da parábola, ou seja, estes pontos são simtétricos em relação ao eixo de simetria. Outra observação é que em $x = -1$ (abscissa do vértice), temos exatamente a metade das coordenadas x (abcissas) dos pontos simetricos em relação ao eixo de simetria da parábola, ou seja, é a média aritmética das coordenadas x. De fato:

- $\dfrac{-2+0}{2} = -1;$
- $\dfrac{-3+1}{2} = -1;$
- $\dfrac{-4+2}{2} = -1.$

Ao substituir a coordenada $x = -1$ do vértice na função e fazer as operações, encontra-se a coordenada y (ordenada) do vértice. Assim:

$$y = f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4.$$

De maneira genérica, pode-se relacionar a coordenada x do vértice, que chamaremos de x_v, com os coeficientes a e b da função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$.

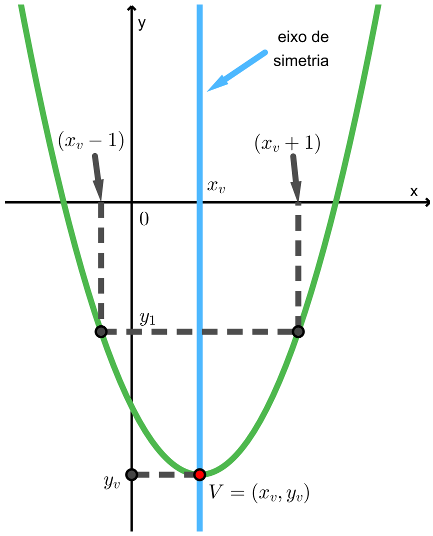


Figura 3.18: Vértice da parábola. *Fonte:* próprio autor.

Devido a simetria do gráfico, tomemos dois valores sobre o eixo x, de tal maneira que tenham a mesma distância de x_v, logo $f(x_v - 1) = f(x_v + 1) = y_1$. Temos que:

$$\begin{aligned}
f(x_v - 1) = f(x_v + 1) &\iff a(x_v - 1)^2 + b(x_v - 1) + c = a(x_v + 1)^2 + b(x_v + 1) + c \\
&\iff a{x_v}^2 - 2ax_v + a + bx_v - b + c = a{x_v}^2 + 2ax_v + a + bx_v + b + c \\
&\iff -2ax_v - b = +2ax_v + b \\
&\iff -4ax_v = 2b \\
&\iff x_v = 2b/-4a \\
&\iff x_v = -b/2a
\end{aligned}$$

assim, $x_v = -\dfrac{b}{2a}$.

Para encontrar a coordenada y do vértice (y_v), basta calcular $f(x_v)$:

$$\begin{aligned}
y_v = f(x_v) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) &= a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\
&= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\
&= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\
&= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \\
&= \frac{-\triangle}{4a}
\end{aligned}$$

com $\triangle = b^2 - 4ac$.

Concluímos que a coordenada y do vértice da parábola pode ser calculada por $y_v = \frac{-\triangle}{4a}$. Assim as coordenadas do vértice de uma parábola são dadas por

$$V = (x_v, y_v) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\triangle}{4a} \right). \tag{3.1}$$

Observação: o símbolo $\triangle$ é uma letra grega (lemos delta), e é chamado de *discriminante*. É comum na matemática utilizar $b^2 - 4ac = \triangle$.

Exemplo 3.4. *Utilizando* (3.1)*, determine as coordenadas do vértice da parábola da função dada por* $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

- $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-6)}{2 \cdot (1)} = \dfrac{6}{2} = 3;$
- $y_v = \dfrac{-\triangle}{4 \cdot (1)} = \dfrac{-((-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8)}{4 \cdot (1)} = \dfrac{-(36 - 32)}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1.$

Lembrando que, outra maneira de calcular o y_v é fazer $f(x_v)$. De fato,

- $y_v = f(x_v) = f(3) = (3)^2 - 6 \cdot (3) + 8 = 9 - 18 + 8 = 17 - 18 = -1.$

Logo, o vértice da parábola é $V = (3, -1)$.

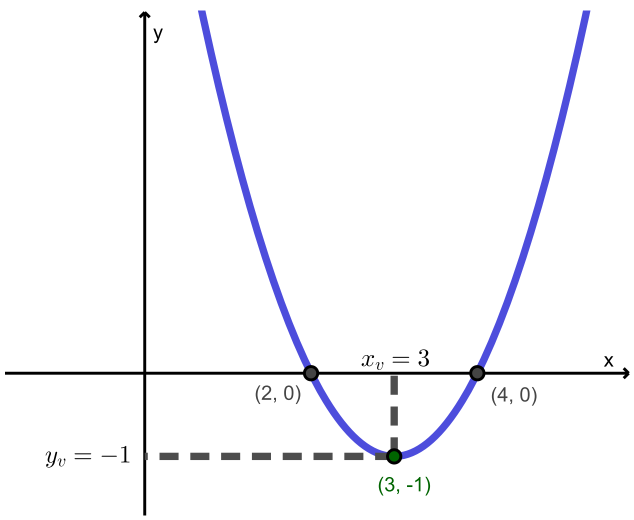


Figura 3.19: Vértice da parábola de $f(x)$. *Fonte:* próprio autor.

Exemplo 3.5. *Utilizando* (3.1)*, determine as coordenadas do vértice da parábola da função dada por* $g(x) = \frac{x^2 - 12x + 63}{18}$.

$$g(x) = \frac{x^2 - 12x + 63}{18} = \frac{x^2}{18} - \frac{12x}{18} + \frac{63}{18} = \frac{1}{18} \cdot x^2 - \frac{2}{3} \cdot x + \frac{7}{2}$$

De (3.1), temos:

- $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-\left(-\frac{2}{3}\right)}{2 \cdot \left(\frac{1}{18}\right)} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{9}{1} = \dfrac{18}{3} = 6;$

- $y_v = \dfrac{-\triangle}{4a} = \dfrac{-\left(\left(\frac{-2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{7}{2}\right)}{4 \cdot \frac{1}{18}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{9}{2} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2} = 1,5.$

O vértice da parábola de $g(x)$ é $V = \left(6, \frac{3}{2}\right)$.

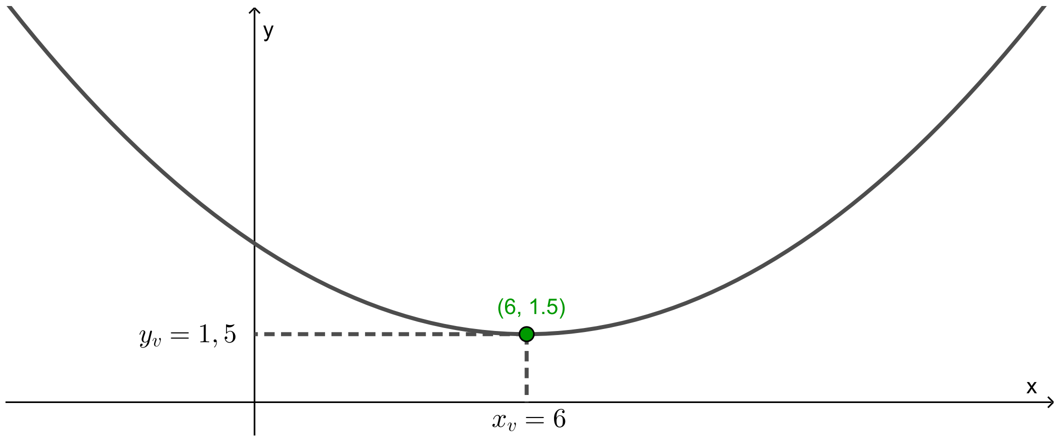


Figura 3.20: Vértice da parábola de $g(x)$. *Fonte:* próprio autor.

3.1.6 Valor máximo e valor mínimo de uma função do 2º grau

No 9º ano do ensino fundamental, os alunos tem uma introdução ao conceito de função quadrática. Para atender a habilidade **EF09MA06** da BNCC, os alunos devem aprender construir o gráfico de função do 2º grau no plano cartesiano. Devem observar que o gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola e que, dependendo da sua concavidade, que pode ser voltada para baixo ou para cima, a respectiva função pode ter valor máximo ou mínimo.

Em um problema modelado, o aluno deve saber analisar o comportamento da função através de sua parábola (seu gráfico) e determinar se ela possui um valor máximo ou um valor mínimo.

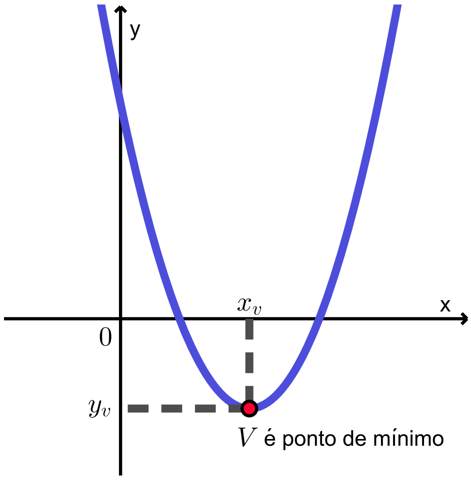


Figura 3.21: Caso $a > 0$: o vértice é ponto de mínimo. *Fonte:* próprio autor.

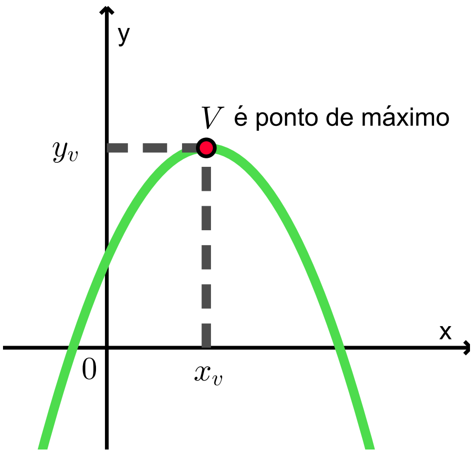


Figura 3.22: Caso $a < 0$: o vértice é ponto de máximo. *Fonte:* próprio autor.

Analisando os gráficos das figuras 3.21 e 3.22, podemos concluir que:

- se $a > 0$, então o vértice da parábola é **ponto de mínimo**, com y_v sendo o **valor mínimo** da função;

- se $a < 0$, então o vértice da parábola é **ponto de máximo**, com y_v sendo o **valor máximo** da função.

Existe uma variedade muito grande de problemas que envolvem máximo e mínimo de funções quadráticas. A título de ilustração, vejamos alguns exemplos simples, que podem ser abordados no 9º ano ou, no ensino médio.

Exemplo 3.6. *Adaptado de BIANCHINI (2018) (p. 256) "Em um quintal, pretende-se construir um galinheiro retangular de modo que consiga ter o melhor aproveitamento possível com* 16 *m de tela de arame. Utilizando o muro do quintal como um dos lados do galinheiro, quais as medidas ideais do galinheiro para que a área seja a maior possível?"*

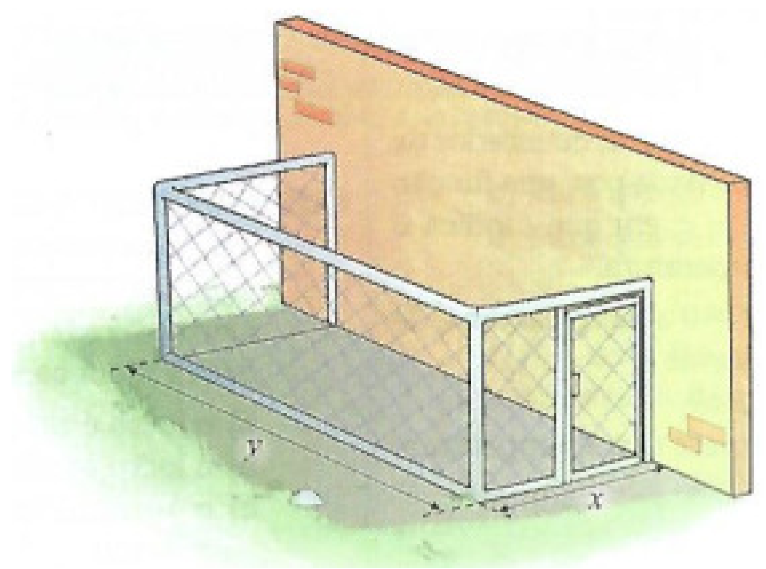


Figura 3.23: Ilustração da situação descrita. *Fonte:* BIANCHINI (2018) (p. 256)

Temos que a área do galinheiro e dada por $A = x \cdot y$ e que o comprimento da total da tela é $y + 2x = 16 \iff y = 16 - 2x$. Substituindo $y = 16 - 2x$ na área do galinheiro, teremos a área em função apenas de x, ou seja, $A(x) = -2x^2 + 16x$. Como o coeficiente $a = -2 < 0$, a função $A(x)$ terá um ponto de máximo em seu vértice $V = (x_v, y_v)$. Para determinarmos as dimensões x e y do galinheiro para que a área seja máxima, basta determinarmos as coordenadas do vértice $V = (v_v, y_v)$, sendo $x_v = x$ (dimensão x do galinheiro para área máxima) e y_v sendo a maior área possível.

Por (3.1), podemos escrever:

- $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-16}{2 \cdot (-2)} = \dfrac{-16}{-4} = 4$

concluindo que, $x = 4\,cm$, deve ser a medida da largura, para que o galinheiro tenha a maior área possível.

Por (3.1), temos que:

- $y_v = -\dfrac{\triangle}{4a} = -\dfrac{16^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0}{4 \cdot (-2)} = \dfrac{-256}{-8} = 32$

ou ainda,

- $A(x_v) = A(4) = -2 \cdot (4)^2 + 16 \cdot 4 = -32 + 64 = 32.$

Como a área máxima é 32 m^2, podemos concluir que as dimensões desse galinheiro para que a área seja a maior possível são:

- Largura: $x = 4\,m$;
- Comprimento: $y = 16 - 2 \cdot 4 \iff y = 8\,m$.

O comprimento da tela era dado por $y + 2x = 16$. Utilizando os valores $x = 4\,m$ e $y = 8\,m$, segue que a igualdade do comprimento é verificada.

Com o auxílio do GeoGebra, o gráfico da função $A(x)$ fica:

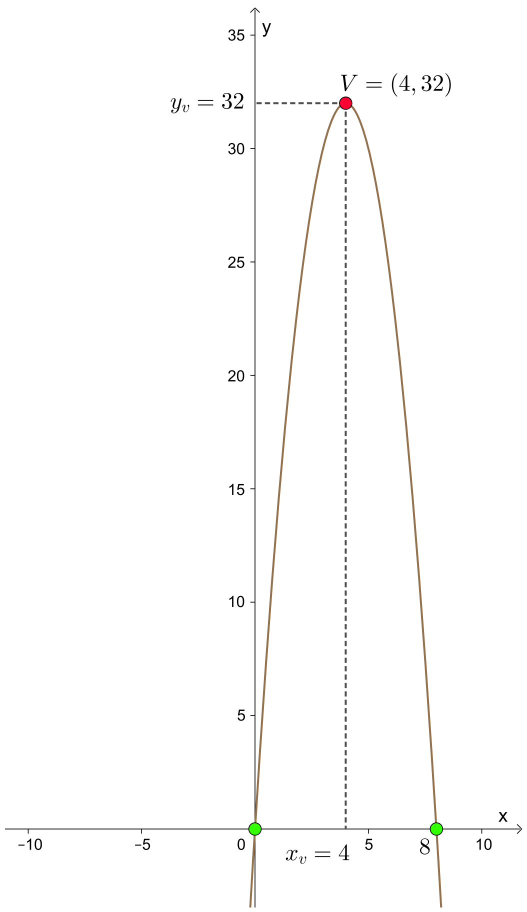


Figura 3.24: Gráfico da função $A(x)$. *Fonte:* próprio autor.

Conforme figura 3.24, a área máxima é $32\,m^2$. Observamos que o ponto de máximo é $V = (4, 32)$, ou seja, $x_v = 4$ e $y_v = 32$.

Exemplo 3.7. ***(Movimento Uniformemente variado)*** *Um móvel realiza um MUV segundo à função $f(t) = 2t^2 - 10t + 8$, com $f(t)$ medido em metros e t em segundos. É possível determinar qual instante o móvel muda de sentido? Se sim, qual o instante?*

Na física, quando a aceleração do movimento de um móvel é constante, o movimento é denominado de *movimento retilíneo uniformemente variado* ou simplesmente de movimento uniformemente variado. A função matemática que modela este tipo de movimento é a função quadrática. Nos livros didáticos de física, o cálculo da distância percorrida por um móvel costuma ser chamada de função horária da posição (ou do espaço), sendo dada por:

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \tag{3.2}$$

com

- t: tempo (instante) final do movimento;
- S: espaço (posição) final no instante t;
- S_0: espaço (posição inicial) no instante t_0 (tempo inicial, normalmente $t_0 = 0$);
- v_0: velocidade inicial no instante t_0;
- a: aceleração (constante).

Observe que S depende do instante t, ou seja, $S = S(t)$. Comparando (3.2) com o que está na definição 3.1, vemos que : $f(x) = S(t)$, $ax^2 = (a \cdot t^2)/2$, $bx = v_0 \cdot t$ e $c = S_0$.

Empregando nosso conhecimento sobre a função quadrática, podemos fazer uma análise sobre o movimento uniformemente variado. Desta maneira, é possível responder a pergunta do exemplo 3.7.

Voltando a pergunta do exemplo 3.7, o gráfico de $f(t)$ será uma parábola com concavidade voltada para cima (logo possui ponto de mínimo), pois o coeficiente do t^2 é positivo. O móvel irá mudar de sentido exatamente no ponto de mínimo da parábola e o instante t da mudança será o x_v. Assim, o instante t da mudança de sentido é

$$\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} \\ x_v &= \frac{-(-10)}{2 \cdot 2} \\ x_v &= \frac{10}{4} \\ x_v &= 2,5\, s \end{aligned}$$

A seguir temos o gráfico da função $f(t)$, confirmando que $t = 2,5\, s$ é o instante em que o móvel muda de sentido.

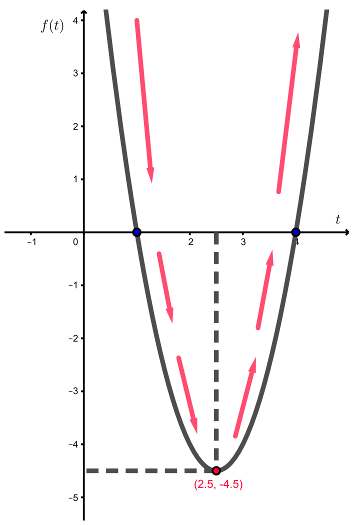


Figura 3.25: Gráfico da função $f(t)$. *Fonte:* próprio autor.

3.1.7 Uma propriedade interessante da Parábola

Através de observações relacionadas a uma propriedade geométrica da parábola, podemos fazer várias aplicações. Quando se gira uma parábola em torno de seu eixo de simetria, o resultado é uma superfície chamada de *parabolóide de revolução* ou *superfície parabólica*.

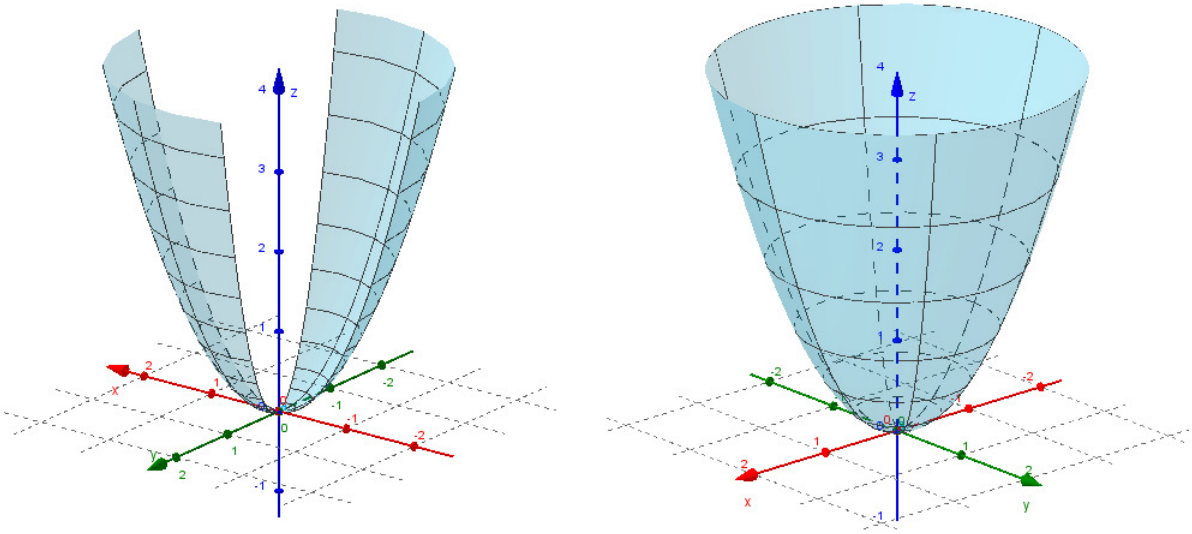


Figura 3.26: Parabolóide de revolução de $f(x) = x^2$. *Fonte:* próprio autor.

A imagem da esquerda da figura 3.26 é uma rotação parcial de $f(x) = x^2$. Na imagem da direita temos uma rotação total de $f(x) = x^2$ gerando o parabolóide de revolução.

Existe uma lenda envolvendo Aquimedes de Siracusa (287 a.C. − 212 a.C.) e a utilização de espelhos parabólicos. O matemático, inventor, físico, astrônomo e engenheiro Arquimedes nasceu cerca de 287 a.C. na colônia grega de Siracusa, na Sicília que pertence atualmente à Itália. Arquimedes teve desde de cedo contato com a ciência. Seu pai era um astrônomo grego, que realizava reuniões em sua casa com cientistas e filósofos da época para trocarem ideias e conversarem sobre seus trabalhos. Arquimedes ainda estudou na famosa escola de Matemática de Alexandria.

Figura 3.27: Aquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.) *Fonte:* https://sites.google.com /site/greciaantigamatematicos/home/arquimedes (acesso: 12/01/2020).

Na lenda, a cidade de Siracusa estava cercada pelos romanos durante a segunda guerra Púnica (218 a.C. – 201 a.C.). Arquimedes teria inventado diversas máquinas de guerra para manter o inimigo longe como catapultas para lançar pedras, uma espécie de guincho que quebrava os navios romanos quando eram guinchados e uma maneira de queimar navios.

Para queimar os navios romanos que cercavam Siracusa, Arquimedes teria utilizados espelhos parabólicos que refletiam os raios do sol para os navios que acabavam pegando fogo devido a concentração dos raios de sol. Para aproveitar ao máximo os raios de sol a superfície parabólica é recomendada, pois os raios tem sua intensidade ampliada quando são concentrados sobre o foco. Como para a época de Arquimedes se tenha uma certa dúvida sobre a capacidade de fabricar espelhos parabólicos, a história acabou tornando uma lenda.

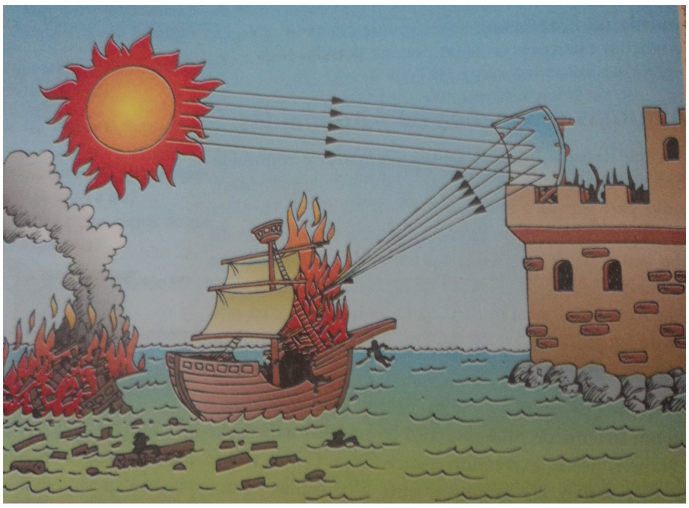


Figura 3.28: Concentração dos raios de sol no foco do espelho parabólico. *Fonte:* http ://professornettao.blogspot.com/2013/02/uma-historia-de-arquimedes-salvando-um.html (acesso: 12/01/2020).

Utilizando a propriedade da concentração dos raios no foco da parabóla, se utilizarmos algo que trabalhe com um princípio inverso, ou seja, algum objeto que dissipe luz do foco, os raios são concentrados paralelos ao eixo de simetria. Tal princípio é utilizado em faróis de automóveis, lanterna de mão e holofotes.

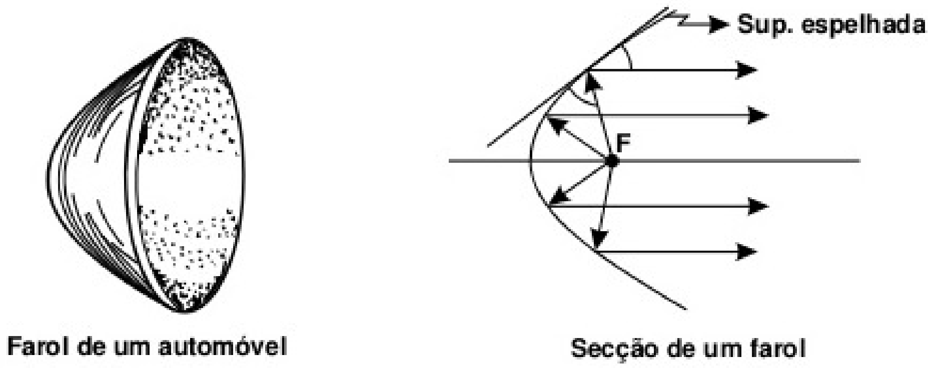


Figura 3.29: Superfície parabólica do farol de um carro. *Fonte:*VENTURI (2019) (p. 46)

Observe que a secção do farol de um carro possui o formato de uma parabóla, logo sua superfície de revolução é um parabolóide, obtendo assim o farol do carro. No farol, a lâmpada fica posicionada no foco, ao acendê-la, os raios de luz incidem no parabolóide e são refletidos paralelos ao eixo de simetria das parabólas (mesmo eixo para todas).

A superfície parabólica também encontra aplicações em antenas parabólicas. O sinal emitido por um satélite incide na superfície da antena que, devido a geometria parabólica da antena, tem o sinal direcionado para o foco (um único ponto), local que fica localizado um receptor de sinal.

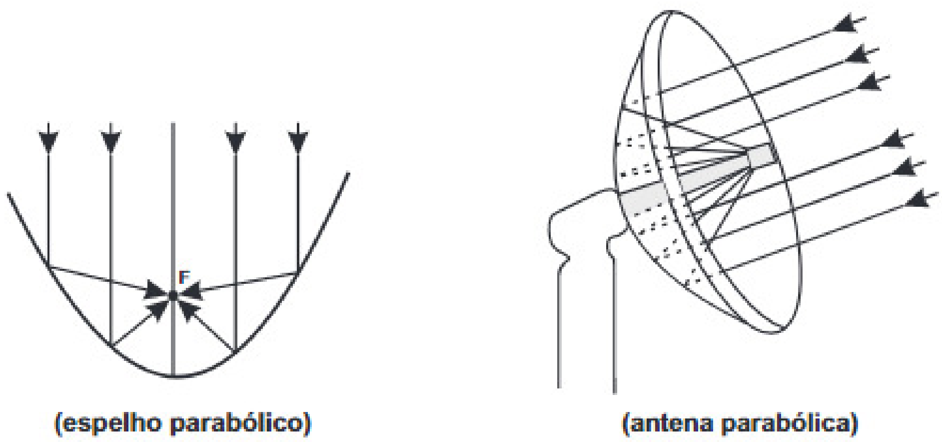


Figura 3.30: Antena parabólica. *Fonte:* VENTURI (2019) (p. 47)

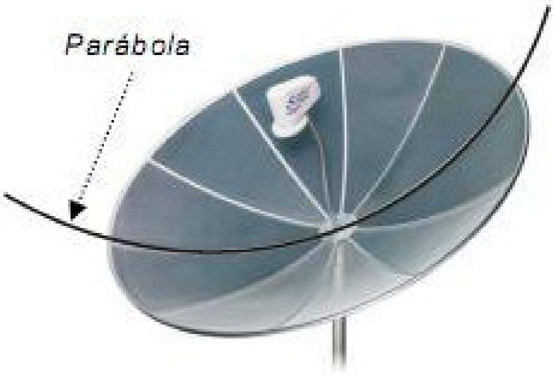


Figura 3.31: Parábola na antena parabólica. *Fonte:* https://www.qconcursos.com/questoes-de-vestibular/questoes/fde6a9cf-49 (acesso: 12/01/2020)

Mais atualmente, os espelhos parabólicos estão sendo utilizado em usinas de energia heliotérmicas.

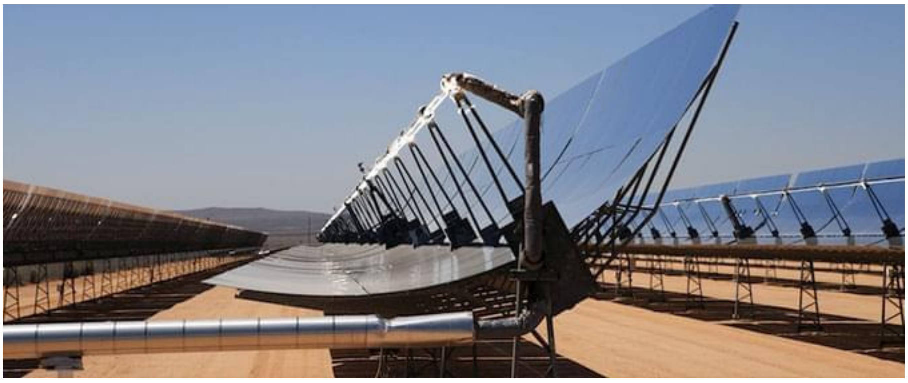


Figura 3.32: Refletores parabólicos. *Fonte:* https://www.aecweb.com.br/cont/m/rev/energia-heliotermica-e-renovavel-mas-incipiente-no-brasil$_1 2417_1 0_0 (acesso: 12/01/2020)$

As usinas são compostas por vários refletores que ficam dispostos em torno de uma torre que contém em seu topo um receptor ligado a um tanque com água. A disposição e inclinação dos espelhos é de tal maneira que, quando os raios incidem nos espelhos, eles são redirecionados para o receptor que transmite o calor para a água, que após aquecida vira vapor e gira turbinas, produzindo energia elétrica.

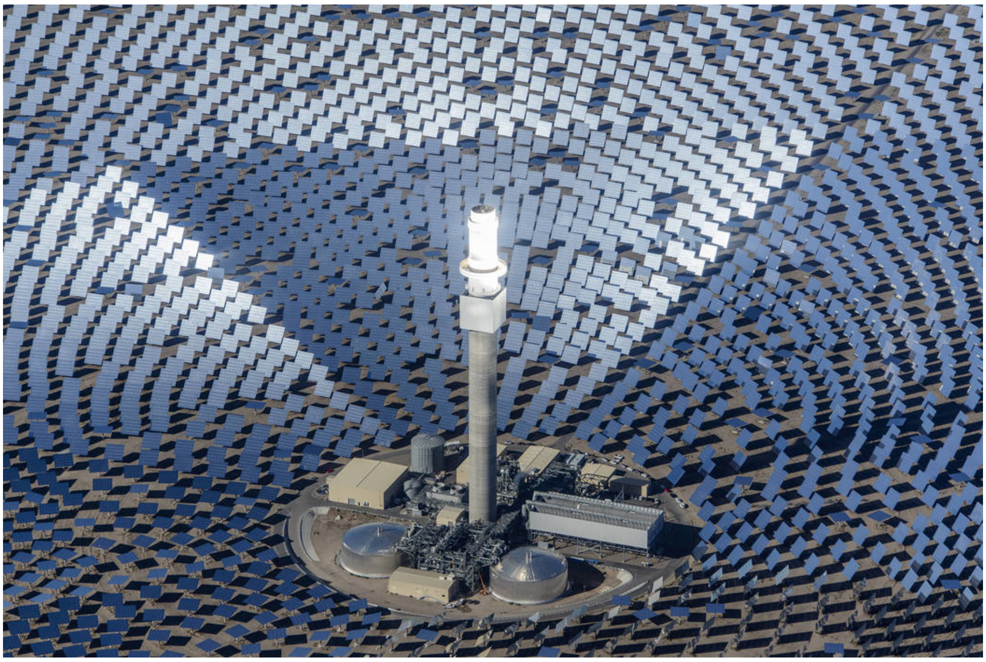


Figura 3.33: Usina heliotérmica Crescent Dunes em Nevada, nos Estados Unidos. *Fonte:* https://smartcitylaguna.com.br/torre-heliotermica-nos-eua-gera-energia-24-horas-por-dia/ (acesso: 12/01/2020)

3.1.8 Zeros ou raízes de uma função do 2º grau

Em 3.1.3 e 3.1.4, vimos vários exemplos de parábolas. É possível perceber que algumas intersectam o eixo x em dois pontos distintos, outras em um único ponto e outras não ocorre intersecção. Existe uma razão bem clara para tais fatos ocorrerem, sendo que, os coeficientes da função quadrática nos dão pistas sobre o comportamento do gráfico das funções quadráticas.

Considere uma função $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ conforme a definição 3.1. Definindo $\triangle = b^2 - 4ac$, podemos ter três possibilidades:

1ª - Se $\triangle > 0$, então a parábola intersectará o eixo x em dois pontos distintos;

2ª - Se $\triangle = 0$, então a parábola intersectará o eixo x em apenas um ponto;

3ª - Se $\triangle < 0$, então a parábola não intersectará o eixo x.

Juntando estas três possibilidades com o fato de $a > 0$ ou $a < 0$, podemos ter um total de seis casos para gráfico de funções do 2º grau.

Observe que, para descobrir a interseção do gráfico de $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ com o eixo x, devemos fazer $y = 0$, ficando com a igualdade (equação) $ax^2 + bx + c = 0$. O valor ou valores (reais e quando existem) que satisfazem $ax^2 + bx + c = 0$ são chamados de ***raízes da equação***, consequentemente, raízes da função do 2º grau.

Em resumo, no esboço do gráfico de uma função do 2º grau podem ocorrer os seguintes casos:

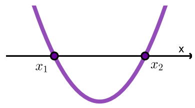
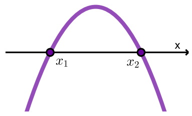
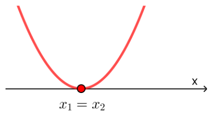
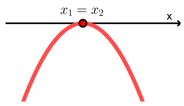
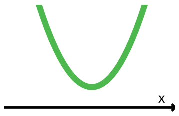
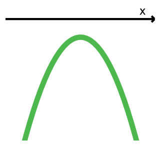
Quadro resumido da relação entre as raízes da função do 2º grau e seu gráfico			
	$a < 0$	$a > 0$	**Número de raízes**
$\triangle > 0$			a equação tem duas raízes reais e distintas, $x_1 \neq x_2$
$\triangle = 0$			a equação tem duas raízes reais e iguais, $x_1 = x_2$
$\triangle < 0$			a equação não tem raízes reais

Tabela 3.1: Quadro resumido dos principais tipos de gráficos de funções do 2º grau. *Fonte:* próprio autor.

3.2 Equação do 2º grau

Vimos na seção 3.1.8 que as raízes de uma função do 2º grau são encontradas observando a intersecção do gráfico da função com o eixo x, ou seja, basta fazer $f(x) = y = 0$ e procurar as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. A letra x na equação é nossa incógnita, ou seja, um valor numérico que ao trocar x por ele torna a igualdade verdadeira, conforme 3.1.8 também é chamado de raiz (ou raízes) da equação do 2º grau. Vejamos uma definição para equação do 2º grau.

Definição 3.3. *Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Dizemos que uma equação na incógnita x é uma **equação do 2º grau** quando pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$.*

Observações:

- As equações desse tipo são assim chamadas porque 2 é o maior grau do termo x;
- É comum chamar equações escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ de **forma reduzida** da equação;
- Os **coeficientes da equação** do 2º grau são os números a, b e c.

Existe uma fórmula geral na atualidade que alunos do 9º ano do ensino fundamental aprendem para encontrar as raízes de uma equação do 2º grau conhecida como **fórmula de Bhaskara**. Sabemos que tal fórmula não foi desenvolvida pelo matemático indiano do século XII Bhaskara, mas ele trabalhou com equações do 2º grau com uma abordagem diferente da atual. Talvez o nome **fórmula de Bhaskara** para resolver equações do 2º grau seja um artifício pedagógico mais aceitável pelos alunos do que um nome próximo do correto que seria **fórmula resolutiva para equações do 2º grau**. Os alunos já demonstrariam desinteresse em aprender só pelo nome extenso do método, por isso o nome fórmula de Bhaskara ajuda no ensino das equações do 2º grau.

3.2.1 A busca por uma fórmula resolutiva

Muitos matemáticos trabalharam com equações do 2º grau em diferentes períodos. Há cerca de quatro mil anos, os babilônios trabalhavam em questões como a de encontrar dois números sendo conhecidos sua soma s e seu produto p. Geometricamente o que desejavam era, conhecendo o semiperímetro (metade do perímetro) s e a área p de um retângulo, determinar seus lados. Se x é um dos lados, o outro será $s - x$. O produto é $p = x(s - x) = sx - x^2 \iff x^2 - sx + p = 0$, ou seja, uma equação do segundo grau. Acontece que os babilônios apresentavam suas soluções por meio de palavras, pois a representação de números por letras ainda não era utilizada.

Na Índia central o matemático *Brahmagupta* (viveu por volta de 628 d.C.) foi um dos mais respeitados matemáticos de sua época. Ele menciona em sua obra *Brahmasphuta Siddhanta* dois valores aproximados para o π, os números 3 e $\sqrt{10}$. Teria sido o primeiro a dar uma solução geral para a equação diofantina $ax + by = c$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Também trabalhou na equação diofantina quadrática $x^2 = 1+py^2$, com Bhaskara resolvendo alguns casos.

Bhaskara (cerca de $1114-1185$ d.C.), o mais importante matemático de seu século, foi o último matemático medieval importante na Índia. Ele completou algumas brechas na obra de Brahmagupta, produziu vários trabalhos sendo as obras *Vija-Ganita* e *Lilavati* (nome de sua filha) as mais conhecidas. Bhaskara se baseava muito em trabalhos anteriores de outros estudiosos e dava suas próprias contribuições. Na equação $x^2 = 1 + py^2$ de Brahmagupta (também conhecida equivocadamente como equação de Pell), Bhaskara apresentou soluções particulares x e y para os cinco casos de $p = 8, 11, 32, 61$ e 67.

O matemático árabe *Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi* (cerca de $780-850$ d.C.) mais conhecido como *Al-Khwarizmi* teve grande importância no estudo das equações do 2º grau. Escreveu dois livros importantes para a matemática, um sobre a aritmética e outro sobre álgebra. Na obra de tradução latina *De numero indorum* (Sobre a arte hindu de calcular) Al-Khwarizmi fez uma exposição completa dos numerais hindus, possívelmente tomou como referência uma tradução árabe de Brahmagupta. Por isso, atualmente costumamos chamar os números que utilizamos de números indo-arábicos. As palavras algarismo e algoritmo derivam originalmente do nome de Al-Khwarizmi.

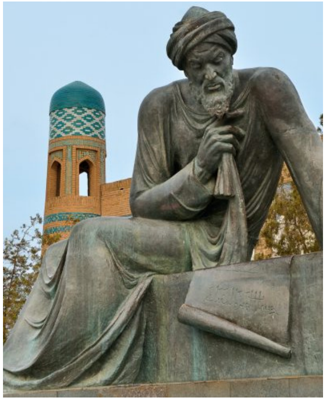


Figura 3.34: Estátua de Al-Khwarizmi em sua cidade natal Khiva, no Uzbequistão. *Fonte:* https://www.infoescola.com/biografias/al-khwarizmi/ (acesso: 12/01/2020)

Seu livro mais famoso e importante é *Hisab al-jabr wa'l muqabalah*, mais conhecido como **Al-Jabr**. A palavra *Al-Jabr* significa *restauração* ou *completação*, indicando que a transposição de termos de um lado para o outro lado da equação devem ser subtraídos. A palavra *muqabalah* significa *redução* ou *equilíbrio*, ou seja, a possibilidade de cancelar termos semelhantes em lados opostos da equação. O título do livro deu origem ao nome *álgebra*, por isso é conhecido por muitos como pai da álgebra.

Al-Khwarizmi trabalhou na resolução de equação do segundo grau utilizando o completamento de quadrados totalmente por meio de palavras, depois ele ainda verificava geometricamente as soluções. Ver BOYER & MERZBACH (2018) (p. 166) e HYGINO & IEZZI (2018) (p. 61). Al-Khwarizmi ainda não tinha desenvolvido uma fórmula para encontrar as raízes, mas sabia encontrar as raízes, cuja solução era obtida seguindo alguns passos por meio de palavras. Al-Khwarizmi só não criou a fórmula que conhecemos atualmente, pelo fato da álgebra ainda não ter se desenvolvido o suficiente sobre a utilização de símbolos e letras. Foi somente com matemáticos como o francês *François Viète* ($1540-1603$), o inglês *Thomas Harriot* ($1560-1621$) e o francês *René Descartes* ($1596-1650$) que tivemos um aperfeiçoamento e criação de símbolos para representar números desconhecidos. Após os trabalhos de Al-Khwarizmi, a álgebra ficaria praticamente sem evolução até ao final do século XV.

Viète	Harriot	Descartes
A área é igual a 50	AA = 50	$x^2 = 50$
A área m̅ A2 é igual a 0	AA − A2 = 0	$x^2 - x \times 2 = 0$
A área m̅ A5 p̅ 6 é igual a 0	AA − A5 + 6 = 0	$x^2 - x \times 5 + 6 = 0$
A área m̅ A2 p̅ 1 é igual a 0	AA − A2 + 1 = 0	$x^2 - x \times 2 + 1 = 0$
B in A área + C in A + + D é igual a 0	**B in AA + C in A + + D = 0**	$\mathbf{x^2 \times A + B \times x + C = 0}$

Figura 3.35: Quadro comparativo dos símbolos. *Fonte:* GUELLI (1996) (p. 40)

Podemos afirmar que a fórmula para a resolução de qualquer equação do 2º grau não foi uma única pessoa ou um único povo que a criou, mas sim, foram trabalhos de matemáticos e várias regiões, em tempos diferentes ou simultâneos.

3.2.2 Dedução da fórmula

A fórmula resolutiva, conhecida como fórmula de Bhaskara, na maioria dos casos não é demonstrada pelos docentes em sala de aula, devido ao baixo desempenho ou interesse dos alunos. Uma sugestão interessante que pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem deste assunto é o docente dividir o quadro em duas partes ou levar um material impresso como na tabela abaixo, mas sem preencher os espaços para os cálculos. O docente pode ir resolvendo os passos de um exemplo e deixar que os alunos repitam a ideia para o caso geral conforme sugestão abaixo.

Dedução através de um exemplo	**Dedução da Fórmula**
$2x^2 - 9x + 10 = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$
Dividir pelo coeficiente de x^2.	
$\frac{2x^2}{2} - \frac{9x}{2} + \frac{10}{2} = 0$	$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$
Simplificar o coeficiente de x^2	
$x^2 - \frac{9x}{2} + \frac{10}{2} = 0$	$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$
Completar quadrado em x	
$\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 + \frac{10}{2} = 0$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$
Isolar o termo quadrático	
$\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{9^2}{4^2} - \frac{10}{2}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$
Deixar com o mesmo denominador (mmc) no 2º membro	
$\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81-80}{16}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$
Extrair a raiz quadrada	
$x - \frac{9}{4} = \pm\sqrt{\frac{1}{16}}$	$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$
Simplificar o denominador	
$x - \frac{9}{4} = \pm\frac{1}{4}$	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Isolar o x	
$x = \frac{9}{4} \pm \frac{1}{4}$	$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Escrever como denominador comum	
$x = \frac{9\pm1}{4}$	$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Tabela 3.2: Sugestão didática para demonstração da fórmula. *Fonte:* próprio autor.

Logo, $x = \dfrac{5}{2}$ ou $x = 2$.

Assim como no estudo de funções do segundo grau, escrevemos $\triangle = b^2 - 4ac$, lembrando que $b^2 - 4ac$ é chamado discriminante e o símbolo $\triangle$ de delta.

Desta maneira, podemos escrever a fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a} \tag{3.3}$$

com $\triangle = b^2 - 4ac$.

3.2.3 Número de raízes de uma equação do 2º grau

Dada a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, por (3.3) as raízes da equação são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} \tag{3.4}$$

Vimos na tabela 3.1 que o discriminante da equação do 2º grau determina o número de raízes reais da equação. Ou seja,

- Se $\triangle > 0$, então a equação terá duas raízes reais e distinta $(x_1 \neq x_2)$;
- Se $\triangle = 0$, então a equação terá duas raízes reais iguais $(x_1 = x_2)$;
- Se $\triangle < 0$, então a equação não terá raízes reais, apenas complexas.

3.2.4 Relação entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 2º grau - Soma e Produto

Em (3.4), vimos que as raízes de uma equação do 2º grau são dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}$$

Se calcularmos a **soma** das raízes, teremos:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-b}{2a} + \frac{-b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Se calcularmos o **produto** das raízes, teremos:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\triangle})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Em resumo, dada uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ com raízes reais x_1 e x_2, a soma s e o produto p dessas raízes são:

$$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{e} \qquad p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \tag{3.5}$$

As expressões acima fornecem uma maneira para encontrar as raízes de uma equação quadrática conhecendo apenas sua soma s e seu produto p. Para isso, inicialmente devemos escrever a equação destacando a soma s e o produto p de suas raízes.

Qualquer equação do 2º grau pode ser escrita como

$$x^2 - sx + p = 0 \tag{3.6}$$

possibilitando resolver (encontrar as raízes) a equação por meio de s e p.

Exemplo 3.8. *Vamos resolver a equação $x^2 - 12x + 32 = 0$ por soma e produto.*

Resolução: Observe que a equação está na forma de (3.6), assim $s = 12$ e $p = 32$. Logo devemos buscar dois números cuja soma seja 12 e o produto seja 32. Temos: $s = 12 \Longrightarrow x_1 + x_2 = 12$ e $p = 32 \Longrightarrow x_1 \cdot x_2 = 32$. Observe que $4 + 8 = 12$ e $4 \cdot 8 = 32$, segue que $x_1 = 4$ e $x_2 = 8$.

Exemplo 3.9. *Vamos resolver a equação $x^2 + 12x + 32 = 0$ por soma e produto.*

Resolução: Observe que a equação não está na forma de (3.6), mas basta escrevermos $x^2+12x+32 = 0 \Longleftrightarrow x^2-(-12)x+32 = 0$, assim $s = -12$ e $p = 32$. Logo devemos buscar dois números cuja soma seja -12 e o produto seja 32. Temos: $s = -12 \Longrightarrow x_1+x_2 = -12$ e $p = 32 \Longrightarrow x_1 \cdot x_2 = 32$. Observe que $-4 - 8 = -12$ e $(-4) \cdot (-8) = 32$, segue que $x_1 = -4$ e $x_2 = -8$.

Nem sempre este método da soma e produto é conveniente, tem casos que é mais vantajoso utilizar a fórmula de Bhaskara (3.3). Vejamos um exemplo onde não é tão imediato pensar em x_1 e x_2 que satisfaça s e p.

Exemplo 3.10. *Encontrar as raízes da equação $2x^2 + 7x - 15 = 0$ por soma e produto.*

Resolução: Primeiramente devemos deixar a equação no formato de (3.6). Observe que:

$$2x^2 + 7x - 15 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + \frac{7x}{2} - \frac{15}{2} = 0 \Longleftrightarrow x^2 - \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot x + \left(-\frac{15}{2}\right) = 0$$

Logo $s = -7/2$ e $p = -15/2$. Queremos encontrar dois números x_1 e x_2 cuja soma seja $-7/2$ e o produto $-15/2$. Poderíamos ter utilizado as equações (3.5) também, basta notar que os coeficientes são $a = 2$, $b = 7$ e $c = 15$, quando substituídos nas equações (3.5) encontramos os mesmos $s = -7/2$ e $p = -15/2$. Veja que os valores das raízes podem não serem tão imediatos mais. Utilizando sistema de equações é possível encontrar as raízes.

Iremos abordar sistema de equações com mais detalhes na seção 3.2.8. Observe que não teremos muito êxito ao abrir mão da fórmula de Bhaskara. Escrevendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} s &= -7/2 \\ p &= -15/2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 &= -7/2 \\ x_1 \cdot x_2 &= -15/2 \end{cases}$$

Logo $x_1 + x_2 = -7/2 \iff x_2 = -7/2 - x_1$. Substituindo na segunda equação do sistema, ficamos com: $x_1 \cdot (-7/2 - x_1) = -15/2 \iff 2x_1^2 + 7x_1 - 15 = 0$, ou seja, voltamos na equação original mas na incógnita x_1. O recurso será utilizar a fórmula de Bhaskara, que resultará nas raízes $x_1 = 3/2$ e $x_2 = -5$.

Com o exemplo anterior (3.10), percebe-se que método da soma e do produto das raízes é mais indicado, em casos que s e p são números inteiros.

3.2.5 Forma fatorada de uma equação do 2º grau

Em alguns casos é possível observar fatorações quase que imediatas de algumas equações. Vejamos os diferentes casos:

- Caso $b = 0$:
  $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3) \cdot (x-3) = 0$, observe que os números $x = -3$ e $x = 3$ são raízes da equação;

- Caso $c = 0$:
  $5x^2 + 11x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (5x + 11) = 0 \Longrightarrow x = 0$, $5x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = -11/5$. Logo as raízes são $x = 0$ e $x = -11/5$;

- Caso $a = 1, b \neq 0$ e $c \neq 0$:
  $x^2 - x - 6 = 0$, pela soma e produto $x_1 + x_2 = 1$ e $x_1 \cdot x_2 = -6$

  $$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 \cdot x_2 &= -6 \end{cases} \Longrightarrow x_1 = -2 \text{ e } x_2 = 3$$

  Note que ao substituir 1 por $x_1 + x_2$ e -6 por $x_1 \cdot x_2$, teremos:
  $x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x \cdot x_1 - x \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$.

  Assim podemos escrever a igualdade $x^2 - x - 6 = (x+2) \cdot (x-3) = 0$;

- Caso $a \neq 1, b \neq 0$ e $c \neq 0$:
  Dada a equação $2x^2 - 2x - 6 = 0$, podemos dividir ambos os membros por 2 ou colocar 2 em evidência. Colocando o 2 em evidência, ficamos com:

$2x^2 - 2x - 6 = 0 \Longleftrightarrow 2 \cdot (x^2 - x - 6) = 0 \Longleftrightarrow 2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) = 0$
Observe que esse exemplo engloba todos os casos anteriores, representando o caso mais geral para equações do 2º grau.

A seguir temos uma proposição, que na verdade é um caso particular da *forma fatorada de um polinômio*, ver HYGINO & IEZZI (2018) (p. 328).

Proposição 3.1. *Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$. Se x_1 e x_2 são raízes da equação, então podemos escreve-lá como $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$*

Demonstração: Por (3.5), temos que $b = -a(x_1 + x_2)$ e $c = ax_1x_2$. Substituindo essas igualdades na equação $ax^2 + bx + c = 0$, ficamos com:

$$\begin{gathered} ax^2 + \big(-a(x_1 + x_2)\big)x + ax_1x_2 = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow ax^2 - axx_1 - ax_2x + ax_1x_2 = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow a \cdot \big[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\big] = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0 \end{gathered}$$

■

Uma das utilidades da proposição acima é que podemos criar equações específicas conhecendo suas raízes, bastando substituir o valor das raízes e aplicar a distributiva.

Exemplo 3.11. *Escrever uma equação do 2º grau que tenha -11 e 23 como raízes.*

Resolução: Podemos considerar $x_1 = -11$ e $x_2 = 23$. Por simplicidade, considere $a = 1$. Pela proposição 3.1, podemos escrever:

$$1 \cdot \big(x - (-11)\big) \cdot (x - 23) = 0 \Longleftrightarrow (x + 11) \cdot (x - 23) = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 12x - 253 = 0$$

Ou seja, uma equação que possui o números -11 e 23 como raízes é $x^2 - 12x - 253 = 0$. Existem várias outras equações equivalentes, basta tomar outros valores para $a \neq 0$.

Exemplo 3.12. *Escrever uma equação que tenha duas raízes iguais.*

Resolução: Tomemos por exemplo $x_1 = x_2 = -7$. Pela proposição 3.1, temos:

$$\big(x - (-7)\big) \cdot \big(x - (-7)\big) = 0 \Longleftrightarrow (x + 7) \cdot (x + 7) = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 14x + 49 = 0$$

Uma possível resposta é $x^2 + 14x + 49 = 0$. O caso geral para a pergunta inicial é dada tomando $x_1 = x_2 = y$ (por exemplo). Assim:

$$(x - y) \cdot (x - y) = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 0$$

3.2.6 Estratégias para resolver um problema

Em muitos casos, uma equação é uma representação matemática (por meio de letras e números) de uma situação real ou fictícia, que é dada por um problema ou situação-problema (por meio de palavras). O processo, para não dizer arte, de transformar problemas da realidade ou fictícios em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando e aplicando suas soluções aos problemas iniciais, é conhecido como ***modelagem matemática***.

Nem sempre é fácil transformar um problema (ou situação-problema) em uma equação e, depois, buscar solução para tal. A principal dificuldade costuma ser exatamente na modelagem inicial do problema. Uma referência clássica na resolução de problemas é o matemático e educador húngaro George Polya (1887-1985), com seu livro *A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático.* Quando era professor na Universidade de Stanford, observou que seus alunos apresentavam certa dificuldade na resolução de problemas. Pensando em uma maneira de ajudar seus alunos, Polya formulou sugestões de resolução de problemas, apresentando vários exemplos com suas soluções e empregando na resolução suas sugestões. Como resultado de seus textos, Polya publicou o livro citado em 1945 pela Princeton University Press. As sugestões de Polya podem auxiliar na modelagem matemática de vários problemas. Em POLYA (1995) (p. XII e XIII) temos um resumo em quatro etapas de sugestões de como resolver um problema.

Outra referêcia que vale citar sobre resolução de problemas é o jovem e notável matemático australiano-estadunidense de origem chinesa Terence Tao (1975 -). Quando tinha apenas 15 anos de idade, escreveu o livro *Como Resolver Problemas - Uma Perspectiva Pessoal*, tendo sua primeira publicação em 1992 pela Oxford University Press. Terence Tao já ganhou diversos prêmios, sendo a medalha Fields em 2006, com seus 30 anos de idade, um de seus grandes prêmios. Assim como Polya, Terence também apresenta sugestões (passos ou etapas) para resolver problemas e diversos exemplos com soluções. As principais sugestões são encontradas em TERENCE TAO (2013) no primeiro capítulo *Estratégias de resolução de problemas* (p. 1).

Não existe uma receita universal que auxilie a resolver todos os problemas da matemática, mas é possível oberservar algumas semelhanças entre as sugestões dos dois autores e também, aproveitando uma certa experiência pessoal, podemos formular quatro etapas básicas para resolver um problema:

- **1ª Etapa:** *É preciso compreender o problema.*
  É preciso estar claro qual é o objetivo do problema. Ou seja, o que o problema quer? Onde queremos chegar? Antes de começar resolver o problema, basicamente devemos nos perguntar: Quais são os dados? Qual é a incógnita? Qual é a con-

dicionante? É possível traçar uma figura e adotar uma notação apropriada? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Que tipo de problema é esse? Ou seja, é um problema de geometria, de contagem, de análise, de álgebra, de teoria dos números, etc., ou a junção de dois ou mais tipos? É um problema do tipo mostre ou calcule alguma coisa? É preciso manipular uma ou mais expressões para chegar ao resultado? É um problema para encontrar alguma fórmula geral ou valor satisfazendo certas condições? É um problema que indica o uso de uma indução ou indução completa? O problema é do tipo existe ou não alguma coisa? É possível provar uma afirmação diretamente ou apresentar um contra-exemplo? Para a última pergunta, caso a resposta seja negativa, é provável que se tenha que utilizar redução ao absurdo (ou prova por contradição, ou prova por absurdo). Nesta etapa é importante escrever separadamente os dados logo abaixo do problema, se possível já com uma notação adequada.

- **2ª Etapa:** *Traçar um plano para resolver o problema.*
  Procure encontrar uma conexão entre dos dados e a incógnita. As vezes, utilizando os dados com um notação conveniente e a incógnita, é possível criar expressões, igualdades ou identidades que podem ser úteis na resolução do problema. É possível que tenha que considerar problemas auxiliares caso não encontre uma conexão imediata entre os dados e a incógnita. Conhece algum problema correlato? Ou seja, se conhece algum problema semelhante que poderia lhe ser útil? Procure problemas mais simples e mais fáceis ou casos particulares com o objetivo de generalizar o problema proposto. É possível observar alguma regularidade ou padrão? É possível pegar algum atalho ou realizar simplificações? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Antes de passar para a próxima etapa é importante fazer uma reflexão sobre a modelagem matemática feita. Veja se não cometeu nenhum equívoco em seu raciocínio e se seu plano está coerente com o objetivo ou objetivos do problema.

- **3ª Etapa:** *Execute seu plano.*
  Ao executar seu plano de resolução, verifique cada passo. O passo é uma implicação ou uma equivalência? É possível verificar claramente se o passo está correto?

- **4ª Etapa:** *Retrospecto.*
  Examine a solução obtida. É possível verificar o resultado? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? Faça uma reflexão sobre o resultado ou resultados. As vezes podemos encontrar até dois resultados distintos, mas nem todos convém, por exemplo, em equações do 2º grau que envolvem medidas (área, comprimento, largura) deve-se considerar apenas valores positivos. Procure interpretar

os resultados de maneira crítica afim de validar todo o processo de resolução do problema.

Estas quatro etapas são sugestões que podem auxiliar na resolução de um problema, mas é preciso ter em mente que podem existir vários caminhos diferentes que levam a mesma conclusão correta e todos os caminhos estarem também corretos. Sempre que possível, busque soluções curtas e elegantes, com a finalidade de economizar tempo nas resoluções. Em todo caso, o importante é apresentar pelo menos uma solução correta, mesmo que seu plano não seja o menor ou melhor possível.

3.2.7 Problemas envolvendo equações do 2º grau

Vejamos como o que foi visto na seção 3.2.6 pode contribuir na resolução de alguns problemas bem interessantes.

Exemplo 3.13. ***(Adaptado de GUELLI (1996) - p. 49)*** *Um pedaço de papel retangular, mede de comprimento,* 10 *cm a mais do que de largura. Cortando quadrados de* 2 *cm de lado em cada canto do papel e dobrando os extremos, formamos uma caixa aberta (sem tampa) de* $1008\ cm^3$ *de volume. Ache as dimensões (comprimento e largura) do papel.*

Resolução: Primeiramente, faça uma figura que represente a situação descrita, adote uma notação sendo x a largura do papel. O comprimento terá $10\ cm$ a mais que a largura, logo o comprimeto será $x + 10$. Como deve-se cortar quadrados de $2\ cm$ em cada canto do papel, o fundo da caixa terá:

- Largura: $x - 2 - 2 = x - 4\ cm$
- Comprimeto: $(x + 10) - 2 - 2 = x + 6\ cm$

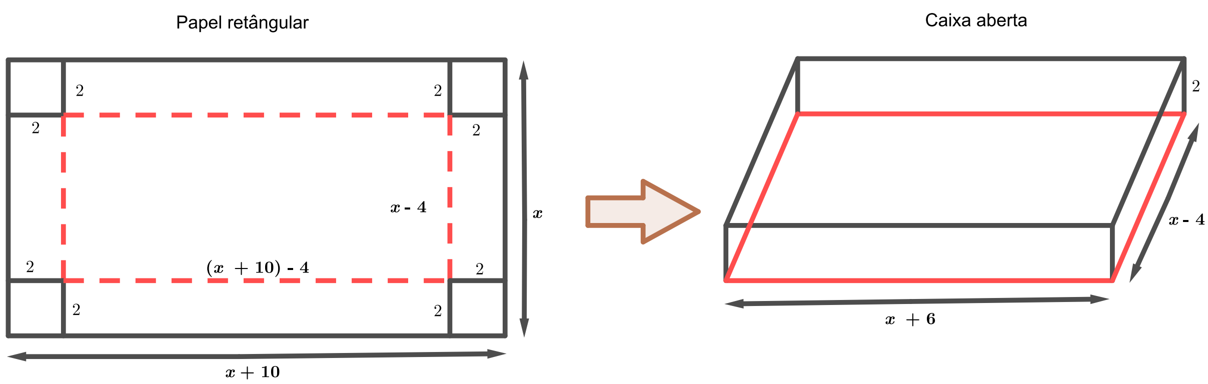


Figura 3.36: Folha de papel e caixa montada. *Fonte:* próprio autor.

Relacionando o volume da caixa com os dados do problema, temos que:

$$(x+6)\cdot(x-4)\cdot 2 = 1008 \Longleftrightarrow x^2+2x-528=0$$

Fazendo os cálculos, encontramos $\Delta = 2116$. Logo $x = \big(-2 \pm \sqrt{2116}\big)/2$, cujas raízes são: $x_1 = 22\ cm$ e $x_2 = -24\ cm$.

Como as medidas do papel são estritamente positivas, devemos ter $x > 0$. Assim, as dimensões do papel são: 22 cm de largura e $22+10=32$ cm de comprimento.

Neste exemplo, fazer uma figura que represente a situação descrita contribui para uma melhor compreensão do problema e assim, buscar o melhor plano possível para sua resolução.

Exemplo 3.14. ***(GUELLI (1996) - Suplemento de trabalho p. 4)*** *Num salão de 54 m^2, a medida do comprimento tem 3 m a mais que a medida da largura. Qual é o perímetro desse salão?*

Resolução: Chamando a largura de x, o comprimento será $x+3$. Na figura abaixo temos uma representação deste salão.

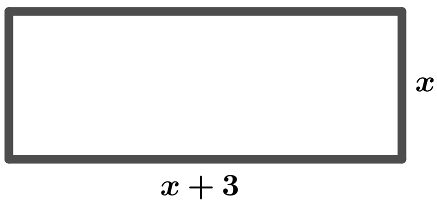


Figura 3.37: Representação do salão com notação. *Fonte:* próprio autor.

Sabendo que a área do salão é de 54 m^2 e pela figura a área é $x\cdot(x+3)$, temos a seguinte relação:

$$x\cdot(x+3) = 54 \Longleftrightarrow x^2+3x-54=0$$

Segue que $\Delta = 225$. Assim $x = (-3 \pm \sqrt{225})/2$, ou seja, $x_1 = 6\ m$ e $x_2 = -9\ m$. Como a largura x é estritamente positiva, necessariamente devemos ter $x = 6$ m. Concluímos que as dimensões do salão devem ser: 6 m de largura e $6+3=9$ m comprimento.

O perímetro será: $2\cdot 6 + 2\cdot 9 = 12+18 = 30\ m$.

Nem sempre é possível fazer uma figura que represente a situação do problema. Mas adotando uma notação adequada e lendo o problema com atenção, anotando as suas informações, é possível criar um bom plano para sua resolução. Vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 3.15. ***(GUELLI (1996) - p. 44)*** *Um grupo de abelhas, cujo número era igual à raiz quadrada da metade de todo o enxame, pousou sobre um jasmim, tendo deixado para trás 8/9 do enxame; apenas uma abelha voava ao redor de um loto, atraída pelo zumbido de uma de suas amigas que caíra imprudentemente na armadilha da florzinha de doce fragrância. Quantas abelhas formavam o enxame?*

Resolução: Vamos chamar o número total de abelhas do enxame de x. Separando as informações, temos:

- Número de abelhas de todo o enxame: x
- Raiz quadrada da metade de todo o enxame: $\sqrt{\frac{x}{2}}$
- Deixou para trás 8/9 do enxame: $\frac{8}{9} \cdot x = \frac{8x}{9}$
- Apenas uma abelha voava ao redor de um loto, atraída pelo zumbido de uma de suas amigas presa: $1 + 1 = 2$

Pela leitura do enunciado e pelas informações anotadas, temos a seguinte igualdade:

$$x = \sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8x}{9} + 2$$

Isolando o radical:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = -\frac{8x}{9} - 2 + x$$

Multiplicando a igualdade por 9:

$$9 \cdot \sqrt{\frac{x}{2}} = -8x - 18 + 9x$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$\left(9 \cdot \sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 = (x - 18)^2$$

$$\frac{81x}{2} = x^2 - 36x + 324$$

Multiplicando a igualdade por 2:

$$81x = 2x^2 - 72x + 648$$

Finalmente, temos a seguinte equação do 2º grau:

$$2x^2 - 153x + 648 = 0 \tag{3.7}$$

Após alguns cálculos, encontramos $\Delta = 18225$. Segue que $x = (153 \pm 135)/4$, ou seja, $x_1 = 72$ e $x_2 = 4,5$. Em se tratando de quantidade de abelhas, devemos ter um número inteiro e estritamente positivo. Concluímos que o enxame era formado por 72 abelhas.

Com os exemplos explorados nestas duas últimas seções, percebe-se que existem problemas com abordagens semelhantes, podendo adaptar algumas ideias já conhecidas. Porém, existem problemas que talvez exijam maior atenção do matemático ou estudante de matemática. É importante abordar diferentes contextos para aprimorar o aprendizado e as técnicas de resolução de exercícios/problemas.

É de suma importância trabalhar com situação-problema, pois a satisfação de resolver não apenas uma equação já montada, mas conseguir extrair as informação de um problema, montar a equação, buscar soluções e analisar os resultados encontrados, facilita a combinação da matemática com o lúdico, potencializando suas aplicações. Às vezes, modelar um problema pode se tornar um trabalho cansativo, mas as sugestões apresentadas na em 3.2.6 podem tornar este processo mais amigável.

3.2.8 Sistema de equações do 2º grau

Vejamos alguns exemplos de onde a busca por soluções recai em sistema de equações.

Exemplo 3.16. ***Exemplo de sistema de equações do*** 1^o ***grau:*** *João comprou uma caneta e uma lapiseira, no total gastou* $7,00$ *reais na papelaria. Maria comprou duas canetas e uma lapiseira da mesma marca que João, gastando* $9,00$ *reais. Qual o preço da caneta e da lapiseira que eles compraram?*

Resolução: Veja que nosso objetivo é descobrir o preço de uma caneta e de uma lapiseira. Temos como informações valores diferentes para duas compras com quantidades diferentes. Devemos adotar uma notação adequada para o preço de uma caneta e o preço de uma lapiseira em cada compra. Seja x o preço de uma caneta e y o preço de uma lapiseira. Utilizando a notação adotada na compra de João, podemos escrever $x + y = 7$. Ou seja, o preço de uma caneta mais o preço de uma lapiseira resulta em $7,00$ reais. Utilizando a notação adotada na compra de Maria, podemos escrever $2x + y = 9$. Como Maria comprou duas canetas, devemos ter $2x$ (duas vezes o preço de uma caneta) mais o preço de uma lapiseira, resultando em $9,00$ reais. Nosso objetivo agora passa a ser determinar o valor de uma caneta e uma lapiseira que satisfaçam as condições $x+y = 7$ e $2x+y = 9$. Ou seja, após adotar uma notação adequada, nosso objetivo inicial se transformou em resolver um sistema de equação de 1º grau com duas incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \implies x = 2 \text{ e } y = 5$$

Após montar e resolver o sistema, encontramos $x = 2$ e $y = 5$. Como é um exemplo relativamente simples, um aluno poderia resolver por tentativa e erro, caso não soubesse resolver o sistema.

Passando agora ao retrospecto, vemos que os valores de x e de y estão coerentes e que satisfazem cada equação do sistema ($2 + 5 = 7$ e $2 \cdot 2 + 5 = 9$). Logo, o preço da caneta é de $2,00$ reais e da lapiseira é de $5,00$ reais.

Caso, ao resolver um sistema, aparecer uma equação do 2º grau, o sistema é chamado de **sistema de equações do 2º grau**.

Exemplo 3.17. *Sabe-se que Luke comprou* 500 *m de arame para utilizar. Seu objetivo é cercar um terreno retângular de* 1 *hectare, dando uma volta e gastando os* 500 *m de arame. Quais as dimensões do terreno?*

Resolução: Neste caso podemos fazer um desenho que represente o terreno e adotar uma notação para suas dimensões: x para o comprimento e y para a largura.

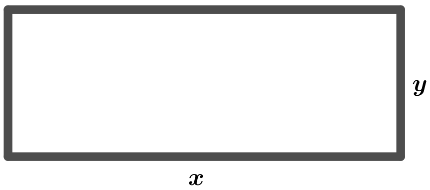


Figura 3.38: Representação do terreno com notação. *Fonte:* próprio autor.

Observe que 500 m de arame deve contornar o terreno uma vez. Logo o perímetro do terreno é 500 m. Pela figura 3.38, temos que o perímetro é $2x + 2y$. Ou seja $2x + 2y = 500$, que simplificadamente fica $x + y = 250$. Quando é falado que o terreno possui uma hectare, essa informação diz que a área do terreno é 1 hectare. Como as dimensões estão em metros, faz-se necessária uma transformação de unidades utilizando o fato de que 1 hectare equivale a 10000 m^2. Assim, $x \cdot y = 10000$.

Com as informações dadas criamos duas equações com duas incógnitas. A busca por uma solução para as duas equações simultaneamente traduz-se em resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 250 \quad (1) \\ xy = 10000 \quad (2) \end{cases} \tag{3.8}$$

Vamos resolver o sistema pelo método da substituição. Vejamos alguns passos:

1º Isolar y na equação (1): $x + y = 250 \iff y = 250 - x$

2º Substituir y por $250-x$ na equação (2): $x \cdot y = 10000 \iff x \cdot (250-x) = 10000 \iff$ $\iff -x^2 + 250x = 10000 \iff x^2 - 250x + 10000 = 0$, ou seja, uma equação do 2º grau

3º Resolver a equação do 2º grau $x^2 - 250x + 10000 = 0$ para encontrar x: fazendo as contas, temos $\Delta = 22500$, logo $x = (250 \pm 150)/2$, ou seja, $x_1 = 200\ m$ e $x_2 = 50\ m$

4º Encontar o valor de y substituindo x_1 e x_2 do passo anterior em $y = 250 - x$ (1º passo):

- para $x_1 = 200 \Longrightarrow y_1 = 250 - 200 \Longrightarrow y_1 = 50\ m$
- para $x_2 = 50 \Longrightarrow y_2 = 250 - 50 \Longrightarrow y_2 = 200\ m$

Neste problema, a solução é dada pelos pares ordenados $(200, 50)$ e $(50, 200)$. É possível verificar que os dois pares ordenados satisfazem o sistema (3.8), mediante substituição e realização das operações, tendo assim duas soluções válidas. Como para nós o comprimento é x e largura é y, com $x > y$. Logo, as dimensões do terreno 200 m de comprimento e 50 m de largura.

Exemplo 3.18. *Sabe-se que a área do campo de futebol (gramado) do Mineirão é de* 7140 m^2 *e seu perímetro é de* 346 m*. Quais são as dimensões (comprimento e largura) desse campo?*

Resolução: Podemos proceder de análoga ao exemplo anterior, basta fazer adequações referente aos valores da área e do perímetro. Adotando a notação x para o comprimento e y para a largura do gramado, podemos fazer uma figura que represente o gramado.

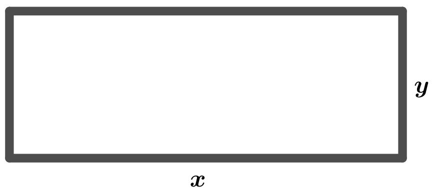


Figura 3.39: Representação do gramado com notação. *Fonte:* próprio autor.

Pela figura 3.39, o perímetro do gramado é $2x + 2y$. Logo $2x + 2y = 346$, que simplificando fica $x + y = 173$. A área do gramado é $x \cdot y = 7140$.

Com as informações dadas, foi possível escrever duas equações com duas incógnitas, cuja solução será a solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y = 173 & (1) \\ xy = 7140 & (2) \end{cases} \tag{3.9}$$

Resolvendo o sistema pelo método da substituição, temos:

1º Isolar y na equação (1): $x + y = 173 \iff y = 173 - x$

2º Substituir y por $173 - x$ na equação (2): $x \cdot y = 7140 \iff x \cdot (173 - x) = 10000 \iff$ $\iff -x^2 + 173x = 7140 \iff x^2 - 173x + 7140 = 0$, ou seja, uma equação do 2º grau

3º Resolver a equação do 2º grau $x^2 - 173x + 7140 = 0$ para encontrar x: fazendo as contas, temos $\Delta = 1369$, logo $x = (173 \pm 37)/2$, ou seja, $x_1 = 105\ m$ e $x_2 = 68\ m$

4º Encontar o valor de y substituindo x_1 e x_2 do passo anterior em $y = 173 - x$ (1º passo):
- para $x_1 = 105 \Longrightarrow y_1 = 173 - 105 \Longrightarrow y_1 = 68\ m$
- para $x_2 = 68 \Longrightarrow y_2 = 173 - 68 \Longrightarrow y_2 = 105\ m$

A solução é dada pelos pares ordenados $(105, 68)$ e $(68, 105)$. É possível verificar que os dois pares ordenados satisfazem o sistema (3.9), mediante substituição e realização das operações, tendo assim duas soluções válidas. Mas a notação adotada para o comprimento foi x e largura foi y, com $x > y$. Logo, as dimensões do gramado do estádio do Mineirão são: 105 m de comprimento e 68 m de largura.

Exemplo 3.19. *Sabe-se que a soma de dois números positivos é* 29*, e a diferença entre o dobro do quadrado do primeiro e o quadrado do segundo é* 343*. Quais são os dois números?*

Resolução: Neste exemplo já não é possível fazer uma figura que represente a situação. Adotando uma notação, chamemos o primeiro número de x e o segundo de y. Como a soma dos dois números é 29, podemos escrever $x + y = 29$. O dobro do quadrado do primeiro número é $2x^2$ e o quadrado do segundo é y^2. Como a diferença entre o dobro do quadrado do primeiro e o quadrado do segundo é 343, podemos escrever $2x^2 - y^2 = 343$. Como os números devem satisfazer ambas as equações, podemos montar um sistema com as duas equações obtidas:

$$\begin{cases} x + y = 29 & (1) \\ 2x^2 - y^2 = 343 & (2) \end{cases} \tag{3.10}$$

O que pode ser feito em termos de figura é o gráfico de cada equação do sistema, verificando se existe interseção entre os gráficos. Caso tenha interseção interseção entre os gráficos, o ponto de interseção será a solução do sistema.

Resolvendo o sistema pelo método da substituição, temos:

1º Isolar y na equação (1): $x + y = 29 \iff y = 29 - x$

2º Substituir y por $29-x$ na equação (2): $2x^2-y^2 = 343 \iff 2x^2-(29-x)^2 = 343 \iff$
$\iff 2x^2 - 841 + 58x - x^2 = 343 \iff x^2 + 58x - 1184 = 0$

3º Resolver a equação do 2º grau $x^2 + 58x - 1184 = 0$ para encontrar x: fazendo as contas, temos $\Delta = 8100$, logo $x = (-58 \pm 90)/2$, ou seja, $x_1 = 16$ e $x_2 = -74$. Como os números x e y devem ser positivos, $x = -74$ não atende as hipóteses do enunciado, mas vejamos qual seria seu valor y associado.

4º Encontar o valor de y substituindo x_1 e x_2 do passo anterior em $y = 29 - x$ (1º passo):

- para $x_1 = 16 \Longrightarrow y_1 = 29 - 16 \Longrightarrow y_1 = 13$
- para $x_2 = -74 \Longrightarrow y_2 = 29 - (-74) \Longrightarrow y_2 = 103$

Temos como solução os pares ordenados $(16, 13)$ e $(-74, 103)$. É possível verificar que os dois pares ordenados satisfazem o sistema (3.10), mediante substituição e realização das operações, tendo assim duas soluções válidas. Mas por hipótese, os números x e y são positivos. Logo, os números procurados são $x = 16$ e $y = 13$.

Podemos fazer uma abordagem gráfica do problema utilizando as equações do sistema. O gráfico da equação $x+y = 29$ é uma reta e o gráfico da equação $2x^2-y^2 = 343$ é uma hipérbole. Utilizando o GeoGebra, temos:

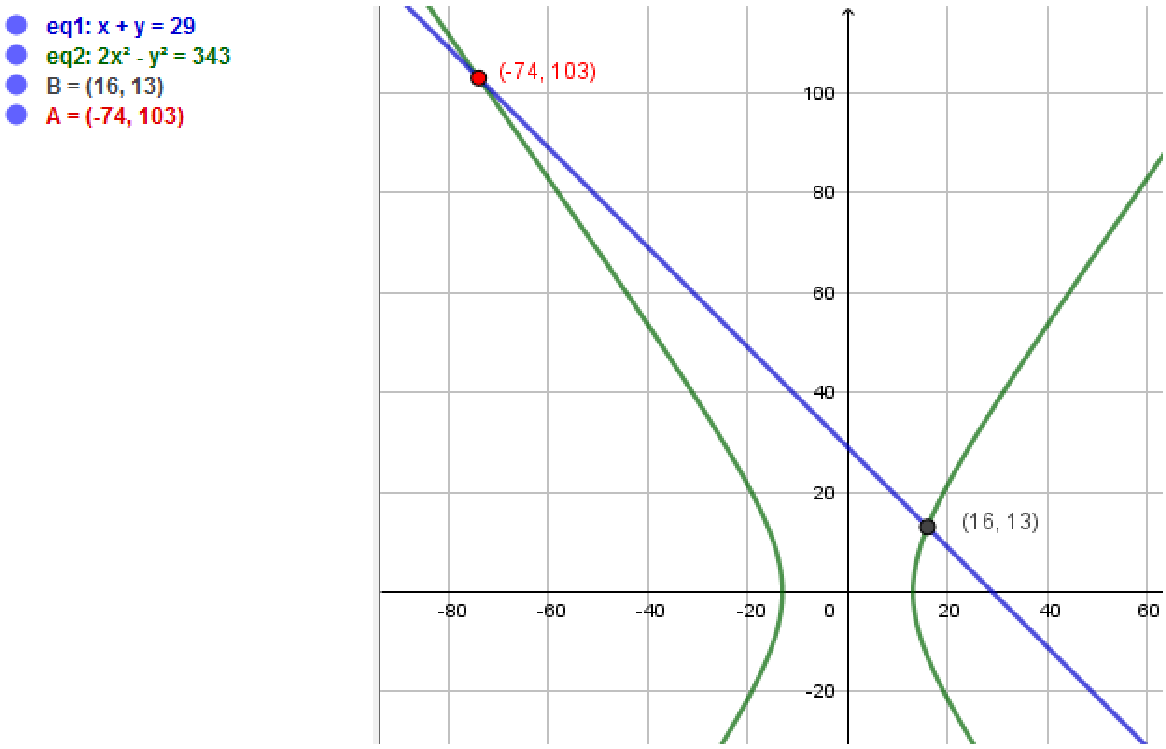


Figura 3.40: Solução gráfica do sistema. *Fonte:* próprio autor.

Podemos observar que a solução gráfica (ponto de encontro entre os gráficos) é exatamente a solução do sistema (3.10).

4 Equação do 3º grau

Podemos definir uma equação do 3º grau completa ou equação cúbica como:

Definição 4.1. *Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. Dizemos que uma equação na incógnita x é uma* ***equação do 3º grau*** *quando pode ser escrita na forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.*

Adotando uma notação um pouco diferente, temos: $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$. Dividindo a igualdade por A, ficamos com: $x^3 + \frac{B}{A} \cdot x^2 + \frac{C}{A} \cdot x + \frac{D}{A} = 0$. Definindo $a = \frac{B}{A}$, $b = \frac{C}{A}$ e $c = \frac{D}{A}$, podemos escrever a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ equivalente a da definição 4.1, porém com uma notação mais simples.

4.1 História de fórmula resolutiva das equações do 3º grau e 4º grau

A álgebra ficou vários anos sem ter algum avanço relevante. Cerca de $1800 - 1700$ a.C. os egípcios e babilônios já tinham algum conhecimento relacionado a álgebra. Sendo que os babilônios tinham uma regra para encontrar raízes de equações do 2º grau do tipo $x^2 - sx + p = 0$, utilizando sua soma s e seu produto p. Já os egípcios, neste mesmo período, dispunham apenas de métodos para resolução de equações do 1º grau (método da falsa posição). Os gregos também teriam dado suas contribuições na resolução de equações utilizando métodos geométricos. Mas com Al-khwarizmi, temos um dos últimos avanços significativos associado às equações, com a solução geral da equação do 2º grau dada por meio de uma fórmula (passos para a solução por meio de palavras).

O frade franciscano *Luca Bartolomeo de Pacioli*, mais conhecido como *Luca Pacioli* $(1445-1515)$, italiano nascido em Sansepolcro, trabalhou principalmente em matemática, teologia e contabilidade. Foi contemporâneo de várias personalidades da época como Leonardo da Vinci $(1452-1519)$, Michelangelo $(1475-1564)$, Nicolau Maquiavel $(1469-1527)$ e Rafael Sanzio $(1483-1520)$. Luca Pacioli, amigo de Leonardo da Vinci, teve a primeira obra de álgebra impressa em 1494, o livro *Summa de arithmetica, geométrica, proportione e proportionalita (Suma de aritmética, geometria, proporções e proporcionalidade).*

Figura 4.1: Luca Pacioli. *Fonte:* http://defesadafecatolica.blogspot.com/2016/12/voce-sabia-que-o-pai-da-contabilidade-e.html (acesso: 15/01/2020)

Em sua obra, Luca abordou problemas envolvendo geometria, contabilidade, cálculo aritmético e radicais. Sobre equações, limita-se em resolver equações de grau um e dois, utilizando regras verbais em exemplos numéricos. O livro *Summa* teve ampla divulgação e alcançou grande prestígio. Talvez uma vantagem em relação de seus predecessores seja a invenção da prensa gráfica de Johannes Gensfleisch zur Laden zum Gutenberg (cerca de $1398 - 1468$), ou simplesmente *Johannes Gutenberg*, pois até então os textos eram feitos manualmente por escribas.

Luca Pacioli não acreditava que alguém poderia criar ou descobrir uma forma geral para encontrar as raízes de uma equação cúbica. Ele termina seu livro dizendo que a solução de uma equação cúbica $x^3 + px + q = 0$ (notação moderna) era tão impossível quanto a quadratuta do círculo. Porém, pouco tempo depois (por volta da virada do século XV para o XVI), aparecera alguém que conseguira tal feito.

Quem cumpriu a tarefa em descobrir uma fórmula para resolver equações cúbicas do tipo $x^3+px = q$ e $x^3 = px+q$ foi o professor da Universidade de Bolonha *Scipione del Ferro* (cerca de $1465 - 1526$). Depois de uma espera de mais ou menos três mil anos, por volta de 1515 Scipione conseguira uma fórmula para resolver algumas equações cúbicas (apenas coeficientes positivos), porém não publicou a solução. Era comum na época ocorrerem competições de matemática em locais públicos como em praças. Talvez Scipione tenha guardado a sua fórmula como um trunfo para uma possível competição. Tais competições eram utilizadas em várias situações como forma de ingresso ou permanência na docência em Universidades, por isso era importante ter um bom desempenho nestas competições.

Figura 4.2: Scipione del Ferro. *Fonte:* https://www.colegioweb.com.br/biografia-letras/scipione-del-ferro.html (acesso: 15/01/2020)

Scipione del Ferro revelou a fórmula apenas para seus discípulos *Annibale Della Nave* (futuro genro e sucessor em Matemática na Universidade de Bolonha) e *Antonio Maria Fiore*. Scipione teria dado apenas a fórmula ou regra para Antonio Fiore, não deu uma prova de seu resultado.

A história da matemática sugere que apareceram rumores da existência de uma fórmula para resolução algébrica de uma equação cúbica, ver BOYER & MERZBACH (2018) (p. 200). Tais rumores chegaram até ao professor e cientista de grande talento de Veneza *Niccolò Fontana* (cerca de $1500 - 1557$), mais conhecido como *Niccolò Tartaglia* ou apenas *Tartaglia*. Tartaglia sabendo da possibilidade da fórmula resolutiva, decidiu que ele iria descobrir por contra própria sua fórmula. De maneira independente, ou devido alguma dica, Tartaglia teria realmente aprendido a resolver equações cúbicas, isso em 10 de fevereiro de 1535.

Niccolo Fontana era natural de Bréscia, na Itália. No ano de 1512 sua cidade foi invadida pelos franceses, que mesmo se refugiando dentro da catedral da cidade com outros habitantes, foi seriamente ferido por um golpe de sabre tendo seu palato perfurado. Apesar do ferimento Niccolo sobreviveu, mas devido ao ferimento, adquiriu uma gagueira que o acompanhou pelo resto de sua vida, por isso o apelido Tartaglia (tartamudo, ou seja, gago). Niccolo acabou aceitando o ocorrido e adotando Niccolò Tartaglia como pseudônimo. Tartaglia era órfão de pai e muito pobre, mas as dificuldades não lhe impediram de ter uma inteligência brilhante, sendo autodidata e tornando-se um respeitável professor de matemática. Ver GELSON IEZZI (1993) (p. 99).

Figura 4.3: Imagem de Niccolò Tartaglia em seu livro. *Fonte:* https://www.manhattanrarebooks.com/pages/books/2279/niccolo-tartaglia/quesiti-et-inventioni-diverse (acesso: 17/01/2020)

Tartaglia já havia derrotado desafiantes em duelos (competições) intelectuais de matemática. Talvez, em algum desses duelos, Tartaglia tenha usado sua fórmula para a equação cúbica, vazando desta maneira, a notícia que ele conhecia uma maneira de resolver uma equação do tipo $x^3 + px^2 = q$. Assim que soube da resolução das cúbicas de Tartaglia, pensando ser uma provocação ou mentira, Antonio Fiore desafiou Tartaglia para um duelo envolvendo equações cúbicas. Acontece que Tartaglia além de resolver a equação $x^3+px+q = 0$, também achou uma fórmula geral para a equação $x^3+px^2 = q$, a fórmula para esta última equação era desconhecida por Fiore. A única coisa que Antonio Fiore tinha era a fórmula deixa por Scipione del Ferro, já Tartaglia tinha um conhecimento e inteligência bem acima do normal. Então, em 1535 cada um propôs 30 questões para o outro. Tartaglia resolveu as 30 questões, enquanto que Antonio Fiore não conseguiu resolver nenhuma, fazendo Tartaglia ser mais reconhecido e afamado.

Um fato que pode ter contribuído para a derrota de Antonio Fiore é que na época não existia um único método para tratar todas as cúbicas, pois em cada possibilidade dos coeficientes serem positivos e negativos deveria se ter um método diferente. Antonio Fiore só sabia resolver equações do tipo $x^3 + px = q$, enquanto Tartaglia equações do tipo $x^3 + px^2 = q$ e provavelmente conseguiu reduzir seu caso eliminando o termo quadrático, para assim resolver as questões propostas por Antonio Fiore.

A fama de Tartaglia sobre a resolução das cúbicas chegou aos ouvidos do respeitado professor de Bolonha e Milão *Girolamo Cardano* $(1501 - 1576)$ (ou Gerônimo Cardano, ou ainda Jerome Cardan). Cardano nasceu em Pávia, na Itália, fez graduação em medicina na Universidade de Pádua em 1526. Além de médico, Cardano era astrônomo, astrólogo, matemático, jogador, herege e filósofo. Sua curiosidade e vontade em aprender diversos tipos de conhecimentos eram inesgotáveis. Cardano escreveu muitos livros sobre diversos assuntos, mais de cem livros no total, sendo seu primeiro livro o *De malo recentiorum medendi uso libellus (Sobre a má prática da medicina em uso comum).*

Figura 4.4: Girolamo Cardano. *Fonte:* https://pt.wikipedia.org/wiki/GirolamoCardano (acesso: 18/01/2020)

Tartaglia era de origem humilde e não conseguira fonte substancial para sua subsistência, já Cardano conseguiu fazer riquezas principalmente com a medicina. Ao saber do sucesso na resolução das cúbicas por Tartaglia, Cardano escreveu várias cartas pedindo para que Tartaglia revelasse seu segredo sobre a resolução, e sempre obtendo uma resposta negativa, até que um dia, Tartaglia aceitou um convite para ir de sua casa em Bréscia e vistitar Cardano em Milão. Talvez Tartaglia, devido sua baixa condição financeira, aceitou o convite do influente Cardano, esperando conseguir um trabalho em uma Universidade.

Cardano planejava publicar um livro de álgebra, com a ajuda de seu notável discípulo *Ludovico Ferrari* (ou Luigi Ferrari). Por isso, na visita de Tartaglia, Cardano acabou convencendo-o a revelar sua fórmula, porém Tartaglia não lhe deu a demonstração. Para que Tartaglia revelasse a fórmula, Cardano ainda teve que fazer o seguinte juramento: " Juro a você pelo Evangelho Sagrado, e pela minha fé como cavalheiro, não somente jamais publicar suas descobertas, se você transmiti-las a mim, mas também prometo e empenho minha fé, como cristão verdadeiro, a anotá-las em forma cifrada, para que depois de minha morte ninguém possa compreendê-las." Ver STEIN (2008) (p. 100).

Depois que Tartaglia passou o método de resolução das cúbicas para Cardano, faltava a Cardano fazer uma demonstração, mas conhecendo o método, com algum empenho acabou conseguindo uma demonstração. Cardano mostrou que fazendo a substituição $x = y - a/3$ o termo x^2 da equação $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ seria eliminado. Cardano ainda pediu para seu brilhante ajudante Ferrari para que buscasse uma solução para equações de quarto grau, que com uma substituição adequada consegui reduzir a quártica para uma cúbica, agora bastava utilizar a fórmula da cúbica e assim obter a solução por radicais da quártica.

Ludovico Ferrari (cerca de $1522 - 1560$) nasceu em Bolonha, sendo de origem extremamente humilde, em 1536 com apenas 14 anos começou a trabalhar como servo na casa de Cardano. Cardano percebeu o talento de Ferrari para a matemática, tanto que, pouco tempo depois que começara a trabalhar com Cardano, foi promovido a secretário. Aos 18 anos Ludovico passou a trabalhar como professor em Milão, tendo a proteção do Cardeal de Mantova, conseguiu alcançar posições que lhe forneceram boa renda. Ferrari ainda se tornaria professor de Matemática na Universidade de Bolonha, vindo a falecer pouco tempo depois, supostamente envenenado por sua própria irmã, com o objetivo de ficar com sua herança. Ver GARBI (2009) (p. 42).

Figura 4.5: Ludovico Ferrari. *Fonte:* https://mathintime.weebly.com/blog/ferrari-quartic-equation (acesso: 18/01/2020)

Faltava Cardano e Ferrari publicarem seus resultados, porém a promessa feita a Tartaglia impedia a publicação de seus estudos. Para contornar a promessa, em 1542 Cardano e Ferrari foram visitar Annbale Della Nave em Bolonha. Lá pediram permissão para analisar os manuscritos deixados por Scipione del Ferro. Entre os manuscritos, estava a solução da equação $x^3 + px = q$. Cardano tinha feito um juramento que proibia a publicação da solução de Tartaglia, mas não tinha nenhum impedimento de publicar a solução de Scipione del Ferro que surgiu 20 anos antes da solução de Tartaglia. Desta maneira, Cardano voltou-se para a preparação de seu livro.

O grande livro de Cardano intitulado *Ars Magna* (Arte Maior ou A Grande Arte) foi publicado em 1545. O livro foi bem recebido pelos matemáticos e estudiosos, mas Tartaglia não gostou de ver sua fórmula no livro de Cardano. A desaprovação de Tartaglia se deve ao fato que, ele também estaria organizando um livro em que pretendia expor seus estudos. Cardano até fez muitos elogios a Tartaglia, mas completou dizendo que, 30 anos antes e de maneira independente, Scipione del Ferro obteve os mesmos resultados, porém Scipione repassou a regra para Antonio Maria Fiore que desafiou Tartaglia, que mediante a competição deu a Tartaglia oportunidade para descobrir a fórmula. Sobre a inédita fórmula para resolver equações do 4º grau, Cardano escreveu em seu livro *Ars Magna* que "é devida a Ludovico Ferrari, que a inventou a meu pedido", ver BOYER & MERZBACH (2018) (p. 202).

No ano seguinte, em 1546, Tartaglia publica seu livro intitulado "*Quesiti et Inventioni Diverse*", ver a figura 4.3. Em seu livro, Tartaglia apresenta vários problemas com suas respectivas soluções, mas também conta a história de sua relação com Cardano e o juramento não mantido por Cardano sobre o segredo da fórmula da cúbica. Tartaglia comentou em seu livro que além de trair sua confiança, Cardano havia quebrado um sagrado juramento sobre a Bíblia. Cardano não se importou com as falas de Tartaglia, mas Ferrari, conhecido por ter um temperamento mais explosivo saiu em defesa de seu tutor.

Ferrari, defendendo Cardano desafiou Tartaglia para um duelo matemático. Tartaglia só aceitou em 1548, porém, no livro *Ars Magna* haviam tópicos desconhecidos por ele, como a resolução de equações de 4º grau. O duelo matemático ocorreu em Milão, sempre com Cardano mantendo-se fora da briga e não levando em consideração as provocações de Tartaglia. Por fim, devido as desvantagens de Tartaglia, Ferrari foi melhor e as autoridades universitárias de Bréscia (lugar que Tartaglia acabara de ingressar) não ficaram contentes com seu desempenho e cancelaram seu contrato. Tartaglia voltou para Veneza, passando a viver de forma humilde e obscura, vindo a falecer nove anos depois.

Observações: Ao aplicar a fórmula resolutiva, nada impedia de obter-se raiz quadrada de números negativos, tal fato deixou Cardano pensativo. Tanto que em seu livro

Ars Magna ele classifica as soluções com radicando negativo como inúteis, que futuramente dariam origem aos números complexos. Neste ponto, o avanço matemático sobre a busca de solução de equações polinomiais fica sem progresso por cerca de dois séculos e meio.

4.2 Fórmula resolutiva da equação do 3º grau

Conforme a definição 4.1, considere a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{4.1}$$

Para $x = y + m$, tal que $y \neq 0$ e $m \neq 0$, temos:

$$a(y+m)^3 + b(y+m)^2 + c(y+m) + d = 0$$

que após realização das operações e agrupamentos em y, fica:

$$ay^3 + (b + 3am)y^2 + (3am^2 + 2bm + c)y + (m^3a + bm^2 + cm + d) = 0 \tag{4.2}$$

Observe que para anular o termo quadrático da equação (4.2), necessariamente devemos ter $b + 3am = 0$, ou seja

$$m = -\frac{b}{3a} \tag{4.3}$$

Substituindo (4.3) em (4.2), ficamos com:

$$ay^3 + (b-b)y^2 + \left(\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)y + \left(-\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0 \tag{4.4}$$

Multiplicando toda a equação (4.4) por $1/a$ e tirando *mmc*, obteremos:

$$y^3 + \underbrace{\left(\frac{-b^2 + 3ac}{3a^2}\right)}_{p} y + \underbrace{\left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}\right)}_{q} = 0 \tag{4.5}$$

que é uma equação sem o termo do 2º grau, sendo reduzida para $y^3 + py + q = 0$. Observe que resolvendo $y^3 + py + q = 0$, podemos encontrar x que é igual a $y - b/3a$ e assim encontramos a solução geral de (4.1). Tartaglia merece todo o mérito, pois como a equação (4.1) pode ser reduzida para $y^3 + py + q = 0$, Tartaglia na verdade encontrou um método para a equação geral do 3º grau e não somente um caso particular.

Para resolver equação reduzida

$$y^3 + py + q = 0 \tag{4.6}$$

considere $y = u + v$, assim:

$$y = u+v \Leftrightarrow y^3 = (u+v)^3 \Leftrightarrow y^3 = u^3+3u^2v+3uv^2+v^3 \Leftrightarrow y^3 = 3uv(u+v)+u^3+v^3 \tag{4.7}$$

A última equação das equivalências (4.7) pode ser reescrita como $y^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0$ e utilizando o fato de que $y = u + v$, temos a equação

$$y^3 - 3uvy + (-u^3 - v^3) = 0 \tag{4.8}$$

Comparando as equações (4.6) e (4.8), temos que: $p = -3uv$ e $q = -(u^3 + v^3)$. Ou seja,

$$\begin{cases} u^3 \cdot v^3 = -p^3/27 \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \tag{4.9}$$

Observe que, para encontar u^3 e v^3 conhecendo sua soma e produto satisfazendo o sistema (4.9), basta resolver uma equação do 2º grau conforme vimos na seção 3.2.4. Ou seja, para $w + t = S$ e $w \cdot t = P$, temos que $t = S - w$ substituído em $w \cdot t = p$, após algumas operações, fica $w^2 - Sw + P = 0$. Utilizando (4.9) na equação $w^2 - Sw + P = 0$, encontramos $w^2 - (-q)w + (-p^3/27) = 0$. Assim, u^3 e v^3 são as raízes da equação do 2º grau

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{4.10}$$

cuja solução pela fórmula de Bhaskara e após simplificações é dada por:

$$w = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

ou seja

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad \text{e} \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Portanto,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad \text{e} \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{4.11}$$

Como $x = y+m$ com $y = u+v$, utilizando (4.11) e $m = -b/3a$ segue que a fórmula para encontrar as raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ é dada por:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{b}{3a} \tag{4.12}$$

com $p = (-b^2 + 3ac)/3a^2$ e $q = (2b^3 - 9abc + 27a^2d)/27a^3$.

Algumas observações podem ser feitas em relação ao radicando

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \tag{4.13}$$

da fórmula (4.12).

São válidas as seguintes observações, conforme LIMA (2012) (p. 24):

- Se $R > 0$, então a equação terá uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas;
- Se $R = 0$, então a equação terá três raízes reais, sendo uma repetida;
- Se $R < 0$, então a equação terá três raízes reais e distintas.

Observação: No começo do desenvolvimento da fórmula resolutiva, ao tomar $x = y+m$, tem a hipótese $m \neq 0$. Em (4.3), vimos que $m = -b/3a$, sendo necessário que $b \neq 0$ para que ocorra $m \neq 0$, mas nada impede que o coeficiente b seja igual a zero. A hipótese $m \neq 0$ fez-se necessária para que não ocorra a identidade $x = y$, que não ajudaria em nada na busca por uma fórmula resolutiva.

4.3 Exemplos de aplicação da fórmula

Exemplo 4.1. *Vamos construir uma equação cujas raízes sejam $2, i, -i$. Pela forma fatorada de uma equação polinomial, podemos escrever a equação $(x-2)(x-i)(x+i) = 0$ que após, multiplicação, simplificação e agrupamento, fica $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$.*

Resolução: Nosso objetivo é encontrar as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ e testar a fórmula resolutiva. Fazendo os cálculos, encontra-se $p = -1/3$, $q = -52/27$ e $R = (25/27) > 0$. Sendo $R > 0$, devemos ter uma raiz real e duas complexas conjugadas. Pela fórmula (4.12) uma raiz é $x = 2$. Então podemos dividir o polinômio $x^3 - 2x^2 + x - 2$ por $x - 2$. Utilizando o método da chave de PAZ & LIMA (2018) (link para download nas referências), temos:

$$
\begin{array}{rr|l}
 & x^3 - 2x^2 + x - 2 & x - 2 \\
\hline
+ & -x^3 + 2x^2 & x^2 + 1 \\
\cline{1-2}
 & x - 2 & \\
+ & -x + 2 & \\
\cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Obtemos como quociente o polinômio $x^2 + 1$. Basta encontar as raízes da equação $x^2 + 1 = 0$ que teremos todas as raízes da equação original. De fato, $x^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = -1 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-1}$, ou seja, $x = i$ e $x = -i$ são raízes. Portanto, as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ são $x = 2$, $x = i$ e $x = -i$.

Exemplo 4.2. *Primeiro vamos escrever uma equação cujas raízes sejam* $-2, -1 + 3i$ *e* $-1 - 3i$. *Basta fazer* $(x + 2)(x + 1 - 3i)(x + 1 + 3i) = 0$, *ou seja,* $x^3 + 4x^2 + 14x + 20 = 0$.

Resolução: Dada a equação $x^3 + 4x^2 + 14x + 20 = 0$, temos que $p = 26/3$, $q = 164/27$ e $R = (100/3) > 0$. Como esperado $R > 0$, assim devemos ter uma raiz real e duas complexas conjugadas. Pela fórmula (4.12), encontramos $x = -2$. Ao dividir o polinômio $x^3 + 4x^2 + 14x + 20$ por $x + 2$

$$
\begin{array}{rr|l}
 & x^3 + 4x^2 + 14x + 20 & x + 2 \\
\hline
+ & -x^3 - 2x^2 & x^2 + 2x + 10 \\
\cline{1-2}
 & 2x^2 + 14x + 20 & \\
+ & -2x^2 - 4x & \\
\cline{1-2}
 & 10x + 20 & \\
+ & -10x - 20 & \\
\cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

encontramos como quociente o polinômio $x^2 + 2x + 10$. Pela fórmula de Bhaskara, as raízes da equação $x^2 + 2x + 10 = 0$ são $x = -1 + 3i$ e $x = -1 - 3i$. Assim, as raízes da equação $x^3 + 4x^2 + 14x + 20 = 0$ são -2, $-1 + 3i$ e $-1 - 3i$.

Exemplo 4.3. *Caso em que as raízes são reais e uma é repetida. Tomemos os números* -4 *e* 3 *como as raízes, com* -4 *sendo raiz duas vezes. A equação será* $(x+4)(x+4)(x-3) = 0$, *ou* $x^3 + 5x^2 - 8x - 48 = 0$.

Resolução: Para a equação $x^3 + 5x^2 - 8x - 48 = 0$, temos $p = -49/3$, $q = -686/27$ e $R = 0$ (quer dizer três raízes reais sendo uma repetida). Pela fórmula (4.12), segue que uma das raízes é $x = 3$. Divindo o polinômio $x^3 + 5x^2 - 8x - 48$ por $x - 3$, temos

$$
\begin{array}{rr|l}
 & x^3 + 5x^2 - 8x - 48 & x - 3 \\
\hline
+ & -x^3 + 3x^2 & x^2 + 8x + 16 \\
\cline{1-2}
 & 8x^2 - 8x - 48 & \\
+ & -8x^2 + 24x & \\
\cline{1-2}
 & 16x - 48 & \\
+ & -16x + 48 & \\
\cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

cujo quociente é o polinômio $x^2 + 8x + 16$. Ao aplicar a fórmula de Bhaskara para a equação $x^2 + 8x + 16 = 0$, encontra-se $x = -4$ como raiz dupla. Segue que as raízes da equação $x^3 + 5x^2 - 8x - 48 = 0$ são $x = -4$ (raiz dupla) e $x = 3$.

Exemplo 4.4. ***Retirado de LIMA (2012) (p. 25)*** *Encontrar as raízes da equação $x^3 - 6x - 4 = 0$.*

Resolução: Em uma primeira análise, encontramos $p = -6$, $q = -4$ e $R = -4 < 0$. Como $R < 0$, a equação $x^3 - 6x - 4 = 0$ deve ter três raízes reais distintas. Por (4.12) e (4.13), temos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} - \frac{b}{3a}$$

Fazendo as devidas substituições na equação acima, ficamos com

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{-4}} - \frac{0}{3 \cdot 1}$$

ou seja,

$$x = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i} \tag{4.14}$$

Pela fórmula, concluímos que uma das raízes é o número complexo $\sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}$, mas a equação deveria ter 3 raízes reais distintas. Espera-se que uma das 3 raízes reais coincida com $\sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}$. Será necessário transformar esse número complexo em um número real. Para isso, recordemos alguns termos e propriedades dos números complexos.

Dado um número complexo $z = a + b \cdot i$, o **argumento** de z é calculado por $\cos(\theta) = a/\rho$ e $\operatorname{sen}(\theta) = b/\rho$, com $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ sendo o módulo de z. A **forma trigonométrica** ou **polar** de um número complexo z é obtida fazendo uma simples manipulação:

$$z = a + b \cdot i = \rho \left(\frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho} \cdot i \right)$$

que utilizando o argumento de z encontramos sua forma polar: $z = \rho(\cos(\theta) + i \cdot \text{sen}(\theta))$. Uma notação que pode ser útil é a **Fórmula de Euler**: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \text{sen}(\theta)$. Pela fórmula de Euler, podemos escrever o número complexo z de uma maneira mais econômica: $z = \rho \cdot e^{i\theta}$.

Para $z_1 = 2 + 2i$, temos que $\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Assim o argumento de z_1 é dado por $\cos(\theta) = 2/2\sqrt{2}$ e $\text{sen}(\theta) = 2/2\sqrt{2}$, ou seja, $\cos(\theta) = \sqrt{2}/2$ e $\text{sen}(\theta) = \sqrt{2}/2$, acarretando que $\theta = 45^o$, ou $\theta = \pi/4 + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Segue que

$$z_1 = 2 + 2i = \sqrt{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{8} \cdot e^{i\pi/4}$$

Para $x_1 = \sqrt[3]{z_1}$, temos:

$$x_1 = \sqrt[6]{8} \cdot e^{i\pi/12} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) = \sqrt{2} \cdot \Big(\cos(15^o) + i \cdot \text{sen}(15^o) \Big)$$

Para $x_2 = \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{2 - 2i}$, com procedimento análogo, concluí-se que

$$x_2 = \sqrt{2} \cdot \Big(\cos(15^o) - i \cdot \text{sen}(15^o) \Big)$$

Portanto, a raiz procurada é

$$x = x_1 + x_2 = 2\sqrt{2} \cdot \cos(15^o) \overset{(*)}{=} 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = 1 + \sqrt{3}$$

Na passagem $(*)$, foi utilizado a expressão para o arco metade da função cosseno. As outras duas raízes da equação são $x = -2$ e $x = 1 - \sqrt{3}$.

Utilizando o Geogebra, podemos fazer o gráfico da função $y(x) = x^3 - 6x - 4$, constatando assim que as raízes da equação $x^3 - 6x - 4 = 0$ são de fato as obtidas pela resolutiva:

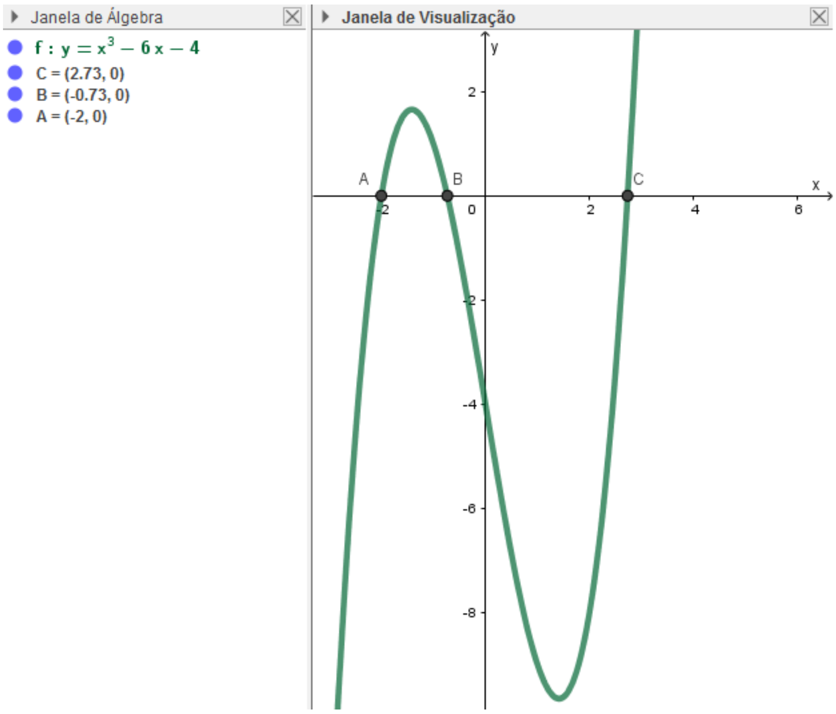


Figura 4.6: Gráfico e raízes de uma cúbica. *Fonte:* prórpio autor.

5 Equação do 4º grau

5.1 Mais história e definição da equação de 4º grau

Uma equação do 4º grau completa ou equação quártica é definida da seguinte maneira:

Definição 5.1. *Dados $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. Dizemos que uma equação na incógnita x é uma **equação do 4º grau** quando pode ser escrita na forma $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$.*

Por simplicidade de notação, escrevendo $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$ e dividindo a igualdade por A, ficamos com: $x^4+\frac{B}{A}\cdot x^3+\frac{C}{A}\cdot x^2+\frac{D}{A}\cdot x+\frac{E}{A}=0$. Definindo $a=\frac{B}{A}$, $b=\frac{C}{A}$, $c=\frac{D}{A}$ e $d=\frac{E}{A}$, podemos escrever a equação $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ que é equivalente a da definição 5.1.

Na seção 4.1 do capítulo anterior, vimos um pouco sobre a história do desenvolvimento das fórmulas para calcular raízes de equações de 3º e 4º grau por meio de radicais. Também vimos que vários matemáticos contribuíram de maneira direta e indiretamente para a criação das fórmulas, sendo figuras centrais da descoberta os matemáticos Tartaglia, Cardano e Ferrari.

Observamos que era comum para a época de Tartaglia e Cardano fazer duelos de problemas matemáticos. Certa vez, por volta do ano de 1540, Cardano recebeu um problema do matemático italiano *Zuanne de Tonini da Coi*. Zuanne propôs a Cardano que resolvesse o seguinte problema: "*dividir* 10 *em* 3 *partes tal que elas estejam em proporção continuada e que o produto das duas primeiras sejam* 6". Sejam $x>0$, $y>0$ e $z>0$ os números procurados. Com as informações dadas, podemos montar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} (I) & x+y+z=10 \\ (II) & \frac{x}{y}=\frac{y}{z} \Longleftrightarrow z=y^2/x \\ (III) & xy=6 \Longleftrightarrow y=6/x \end{cases} \tag{5.1}$$

Substituindo y de (III) em z de (II), ficamos com $z=36/x^3$. Ao substituir y e z

em (I) do sistema (5.1), obtemos:

$$x+\frac{6}{x}+\frac{36}{x^3}=10 \Longleftrightarrow x^4+6x^2+36=10x^3 \tag{5.2}$$

ou seja, para Cardano responder ao problema que foi-lhe proposto, ele necessitava resolver uma equação do 4º grau, que no momento não sabia resolver.

Após Cardano tentar várias vezes e não conseguir, resolveu passar o problema para seu ajudante e aprendiz Ludovico Ferrari. No livro *Ars Magna*, Cardano publica a solução de Ferrari para o problema de Zuanne e ainda mais outros casos, sendo um total de vinte casos, com os passos da solução dados por meio de palavras.

5.2 Fórmula resolutiva da equação do 4º grau

Pela definição 5.1, uma equação geral do 4º grau é dada por

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \tag{5.3}$$

Utilizando a igualdade $x=y+m$ com $y\neq 0$ e $m\neq 0$, obtemos:

$$a(y+m)^4+b(y+m)^3+c(y+m)^2+d(y+m)+e=0$$

Após realização das operações e agrupamentos em y fica:

$$ay^4+(4am+b)y^3+(6am^2+3bm+c)y^2+(4am^3+3bm^2+2cm+d)y+$$
$$+\big(am^4+bm^3+cm^2+md+e\big)=0 \tag{5.4}$$

Para anular o termo cúbico da equação (5.4), devemos impor que $4am+b=0$, ou seja:

$$m=-\frac{b}{4a} \tag{5.5}$$

Substituindo (5.5) em (5.4), multiplicando o resultado por $1/a$ e fazendo algumas simplificações, ficamos com:

$$y^4+\underbrace{\left(\frac{-3b^2+8ac}{8a^2}\right)}_{p}y^2+\underbrace{\left(\frac{b^3-4abc+8a^2d}{8a^3}\right)}_{q}y+$$
$$+\underbrace{\left(\frac{-3b^4+16ab^2c-64a^2bd+256a^3e}{256a^4}\right)}_{r}=0 \tag{5.6}$$

que é uma equação sem o termo do 3º grau, sendo reduzida para $y^4 + py^2 + qy + r = 0$, com

$$\begin{cases} p &= (-3b^2 + 8ac)/8a^2 \\ q &= (b^3 - 4abc + 8a^2d)/8a^3 \\ r &= (-3b^4 + 16ab^2c - 64a^2bd + 256a^3e)/256a^4 \end{cases} \tag{5.7}$$

Observe que resolvendo $y^4 + py^2 + qy + r = 0$, podemos encontrar x que é igual $y - b/4a$ e assim encontramos a solução geral de (5.3).

Ferrari buscou maneiras para transformar a equação $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ em quadrado perfeito em ambos os membros da igualdade. Conseguindo tal feito, basta extrair a raiz quadrada de ambos os membros, resolvendo assim o problema.

Temos que:

$$y^4+py^2+qy+r = 0 \iff y^4+py^2 = -qy-r \iff y^4+py^2+py^2+p^2 = py^2+p^2-qy-r \iff$$

$$\iff (y^2+p)^2 = py^2-qy+p^2-r \iff \big(y^2+(p+\alpha)\big)^2-2\alpha y^2-2\alpha p-\alpha^2 = py^2-qy+p^2-r \iff$$

$$\iff (y^2 + p + \alpha)^2 = (p + 2\alpha)y^2 - qy + (p^2 - r + 2\alpha p + \alpha^2) \tag{5.8}$$

Observação: a letra grega α funciona como uma variável auxiliar, que ajudará no completamento do quadrado perfeito.

Para que o segundo membro de (5.8) (equação do 2º grau em y) seja um quadrado perfeito, basta termos o discriminante $\Delta = 0$. Aplicando a fórmula de Bhaskara e impondo que $\Delta = 0$, obtemos:

$$(-q)^2 - 4(p + 2\alpha) \cdot (p^2 - r + 2\alpha p + \alpha^2) = 0 \iff$$

$$\iff -8\alpha^3 - 20p\alpha^2 + (8r - 16p^2)\alpha + (-4p^3 + 4pr + q^2) = 0 \iff$$

$$\iff 8\alpha^3 + 20p\alpha^2 + (-8r + 16p^2)\alpha + (4p^3 - 4pr - q^2) = 0 \tag{5.9}$$

Observe que a equação (5.9) é do 3º grau em α. Basta aplicar a fórmula de Tartaglia encontrada em (4.12) na equação (5.9) e encontrar um valor β_1 para α. Substituindo a raiz β_1 em (5.8), segue que seu segundo membro será um quadrado perfeito:

$$(y^2 + p + \alpha)^2 = (uy + v)^2$$

com u e v sendo números que dependem de p, q, r e α.

Depois basta aplicar a raiz quadrada em ambos os membros, obtendo:

$$y^2 + p + \alpha = \pm(uy + v) \tag{5.10}$$

sendo assim, possível encontrar o valor de y.

Na sequência, substiui-se o valor de y encontrado em (5.10) em $x = y + m \iff x = y - b/4a$, encontrando x.

Conforme BOYER & MERZBACH (2018) (p. 202), Cardano descreveu por meio de palavras, os passos para resolver (5.2), sendo basicamente o que foi feito de (5.3) até (5.10).

5.3 Exemplo de aplicação da fórmula/método

Exemplo 5.1. *Vamos construir uma equação cujas raízes sejam* $-3, -2, 1$ *e* 4. *Pela forma fatorada de um polinômio, podemos escrever:* $(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-4) = 0$ *que equivale à equação* $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$. *Exemplo de GARBI (2009) (p. 45).*

Resolução: O plano será encontrar um y, tal que $x = y - b/4a$ seja solução da equação dada. Primeiramente calculemos via sistema (5.7) os valores de p, q e r. Após os cálculos, segue que $p = -15$, $q = -10$ e $r = 24$. Substituindo estes valores em (5.9) encontraremos um valor para α. Mediante substituição e simplificações, obtem-se:

$$8\alpha^3 - 300\alpha^2 + 3408\alpha - 12160 = 0 \tag{5.11}$$

conhecida como *cúbica resolvente*.

Para aplicar a fórmula (4.12) de Tartaglia, calculemos inicialmente p_α e q_α. Utilizando p e q de (4.12), segue que $p_\alpha = -171/4$ e $q_\alpha = -405/4$, que substituídos na fórmula de Tartaglia (4.12), nos permite encontrar $\alpha = 8$ como raiz.

Utilizando $\alpha = 8$, $p = -15$, $q = -10$ e $r = 24$ na equação (5.8), termos:

$$(y^2 - 15 + 8)^2 = (-15 + 2\cdot 8)\cdot y^2 - (-10)\cdot y + \big((-15)^2 - 24 + 2\cdot 8\cdot(-15) + 8^2\big) \iff$$

$$\iff (y^2 - 7)^2 = y^2 + 10y + 25 \iff$$

$$\iff (y^2 - 7)^2 = (y + 5)^2 \tag{5.12}$$

que é uma equação com quadrado perfeito em ambos os membros.

Tomando a raiz quadrada em ambos os membros de (5.12), ficamos com:

$$y^2 - 7 = \pm(y+5) \tag{5.13}$$

Observe que teremos 4 raízes, pois são duas para o sinal positivo e mais duas para o sinal negativo. Temos que, as raízes das equações $y^2 - y - 12 = 0$ e $y^2 + y - 2 = 0$ são respectivamente $y_1 = -3$, $y_2 = 4$ e $y_3 = -2$, $y_4 = 1$. Falta calcular $x = y + m = y - b/4a$ para cada umas das soluções de y (ver as equações (5.3) e (5.5)). Na seção 5.2, a hipótese $m \neq 0$ era necessária apenas para que não tivéssemos a igualdade $x = y$, que não ajudaria em nada na procura por uma fórmula resolutiva. Porém, nada impede que o coeficiente b de (5.3) seja igual a zero, levando concluir que $m = 0$.

Para este exemplo, temos que $m = -0/(4 \cdot 1)$, ou seja, $m = 0$. Assim, as soluções da equação $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$ são dadas por $x = y$. Portanto, as soluções procuradas são: $x = -3, x = -2, x = 1$ e $x = 4$.

Utilizando o Geogebra, podemos fazer o gráfico da função $y(x) = x^4 - 15x^2 - 10x + 24$, constatando assim que as raízes da equação $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$ são de fato as obtidas pela resolutiva:

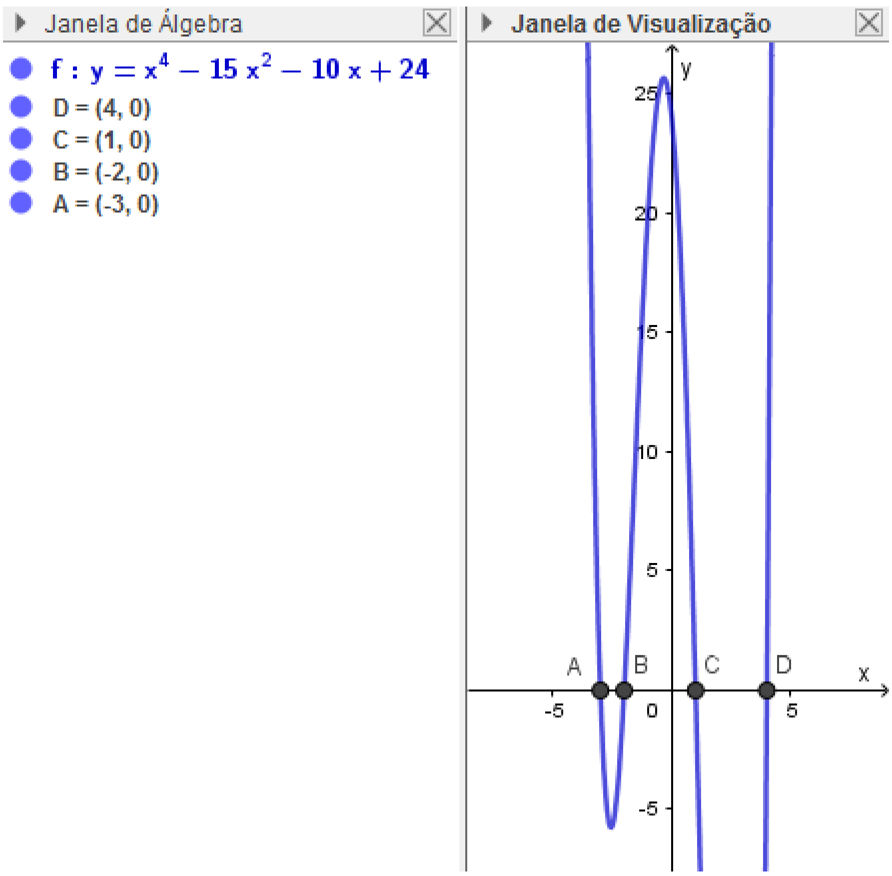


Figura 5.1: Gráfico e raízes de uma quártica. *Fonte:* prórpio autor.

6 Equações de grau $\geqslant 5$

6.1 Insolubilidade das equações de grau $\geqslant 5$

Passaram-se próximo de dois séculos e meio desde a descoberta da Fórmula de Ferrari, mas a matemática não avançou praticamente nada na busca por solução de equações de grau cinco ou mais por meio de radicais.

Com o surgimento do cálculo na segunda metade do século $XVII$, os matemáticos estavam mais interessados nesta nova área da matemática. O cálculo por ser recente era mais promissor e com muitas possibilidades para novas descobertas.

Além do cálculo se mostrar mais promissor que a busca de soluções de equações por meio de radicais, os problemas associados a busca de solução para equações se tornavam cada vez caóticos e difíceis. Mesmo assim, matemáticos de grande renome como Leonhard Euler $(1707-1783)$ e Joseph-Louis Lagrange $(1736-1813)$ tentaram resolver uma equação de 5^o grau por meio de radicais.

Figura 6.1: Leonhard Paul Euler. *Fonte:* https://br.pinterest.com/pin/749004981760992931/?d=t&mt=signup (acesso: 25/01/2020)

Esperando resolver a questão das equações de 5º grau, Lagrange publicou em 1770 o artigo *Reflexões sobre a Teoria Algébrica das Equações.* Neste artigo Lagrange apresenta suas reflexões sobre a resolução algébrica das equações com grau maior ou igual a cinco. Porém não conseguiu êxito ao tentar resolver o problema, mesmo esperando em algum momento conseguir uma resolução algébrica. Apesar de não ter conseguido, seus trabalhos serviram de inspiração para outros matemáticos em outras ocasiões.

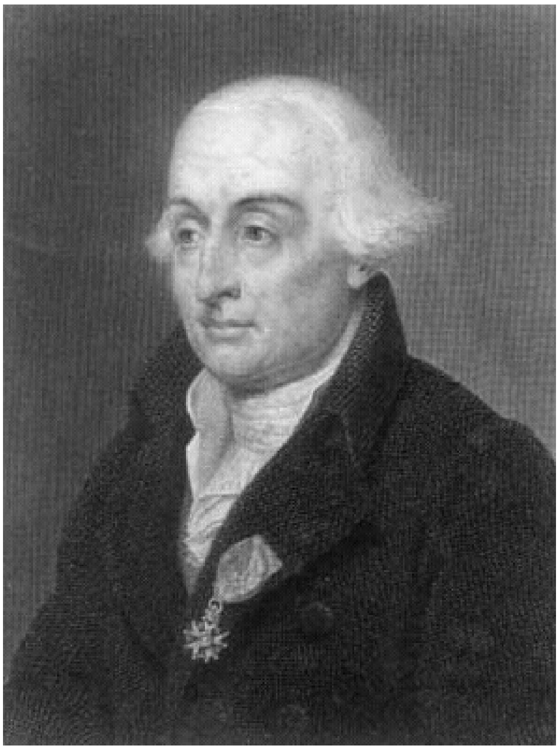


Figura 6.2: Joseph-Louis Lagrange. *Fonte:* http://ecalculo.if.usp.br/historia/lagrange .htm (acesso: 25/01/2020)

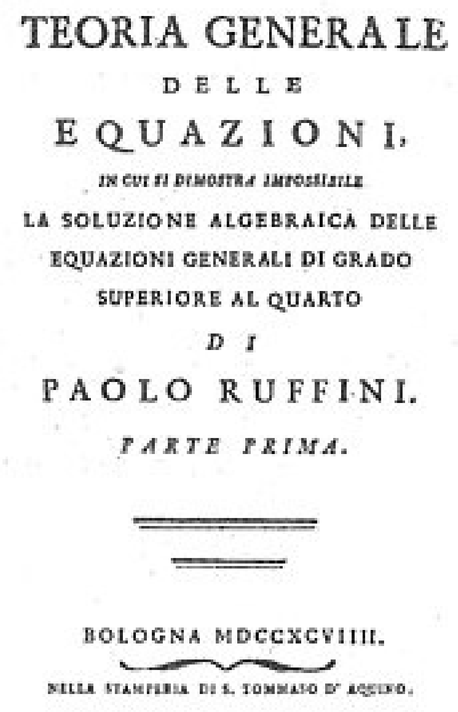
6.2 Paolo Ruffini

Devido a grande dificuldade em encontrar solução de uma equação de 5º grau por meio de radicais, alguns matemáticos começaram duvidar da possibilidade de existir tal solução por radicais. O primeiro matemático a sinalizar que equações de grau maior que 4 não seriam resolúveis por radicais foi o matemático e médico italiano *Paolo Ruffini* $(1765 - 1822)$.

Figura 6.3: Paolo Ruffini. *Fonte:* https://www.portalsaofrancisco.com.br/biografias/paolo-ruffini (acesso: 27/01/2020)

Paolo Ruffini nasceu em Valentano na Itália, filho do médico Basilio Ruffini e Maria Francesca Ippoliti. Ruffini estudou na Universidade de Modena cursando medicina, filosofia, literatura e matemática, incluindo geometria e cálculo infinitesimal. Obteve licenciatura em filosofia e medicina em 9 de Junho de 1788, logo depois em matemática. Em 1788, com apenas 23 anos foi nomeado professor de fundamentos da análise da Universidade de Modena. Nesta universidade, chegou a ser simultaneamente a partir de 1814 reitor, professor de medicina prática e matemática aplicada. Em 1817, ao atender os cidadãos em decorrência de uma epidemia de tifo, Ruffini teria contraído tal doença. Mesmo tendo se recuperado da doença, sua vitalidade já não era a mesma, vindo falecer em Modena com 56 anos.

Em 1799, Ruffini apresenta uma prova da impossibilidade de resolução por meio de radicais de equações de grau maior que 4 em sua obra de 516 páginas "*Teoria Generale delle Equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*" ("Teoria geral das equações, na qual se mostra a impossibilidade da solução algébrica da equação geral de grau superior a quatro").


TEORIA GENERALE

DELLE

EQUAZIONI,

IN CUI SI DIMOSTRA IMPOSSIBILE

LA SOLUZIONE ALGEBRAICA DELLE

EQUAZIONI GENERALI DI GRADO

SUPERIORE AL QUARTO

DI

PAOLO RUFFINI.

PARTE PRIMA.

BOLOGNA MDCCXCVIIII.

NELLA STAMPERIA DI S. TOMMASO D' AQUINO.

Figura 6.4: Teoria Generale delle Equazioni, 1799, por Paolo Ruffini. *Fonte:* https://www.portalsaofrancisco.com.br/biografias/paolo-ruffini (acesso: 28/01/2020)

Conforme STEIN (2008) (p. 103), sobre sua obra, Ruffini declara: " *A solução algébrica de equações gerais de grau maior do que* 4 *é sempre impossível. Observe um teorema muito importante que creio ser capaz de defender* (*se é que não caio em erro*)*: até hoje, a prova dele é a principal publicação deste volume. O imortal Lagrange, com suas sublimes reflexões, ofereceu a base de minha prova.*"

A demonstração de Ruffini tinha uma falha, mas apresentava parcela de verdade. Com a primeira versão de sua demonstração considerada insuficiente, em 1813, após discussões com matemáticos como Malfatti, Gregorio Fontana e Pietro Paoli, Ruffini fez uma publicação mais refinada do teorema "*Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali*" ("Reflexões entorno da solução de equações algébricas gerais"). Mesmo após melhorias, a versão de 1813 (ainda contendo lacunas na demonstração) também foi vista com certa desconfiança por quase todos os matemáticos importantes da época. Talvez se tivessem apontado as lacunas da demonstração, Ruffini poderia ter feito uma correção provando por completo o teorema. Apesar da desconfiança da maioria dos matemáticos, um dos mais respeitados matemáticos franceses da época *Augustin-Louis Cauchy* (1789 − 1857) aprovou o trabalho de Ruffini.

Conforme LIVIO (2006) (p. 88), pouco antes da morte de Ruffini (cerca de seis meses), Cauchy enviou-lhe uma carta (que normalmente não dava elogios), dizendo: "*Your* *memoir on the general resolution of equations is a work which has always seemed to me worthy of the attention of mathematicians and which, in my judgement, proves completely the insolvability of the general equation of degree greater than 4.*", ("*Seu livro de memórias sobre a resolução geral de equações é um trabalho que sempre me pareceu digno da atenção dos matemáticos e que, na minha opinião, prova completamente a insolubilidade da equação geral de grau maior que 4.*").

6.3 Niels Henrik Abel

Niels Henrik Abel $(1802-1829)$, nasceu na pequena e pobre aldeia de Findo, costa noroeste da Noruega. A família de Abel era pobre e numerosa, com seu pai sendo um pastor viciado em álcool.

Figura 6.5: Niels Henrik Abel $(1802-1829)$. *Fonte:* https://www.britannica.com/biography/Niels-Henrik-Abel (acesso: 29/01/2020)

Em 1815 Abel e seu irmão mais velho foram enviados para a escola da Catedral de Oslo (na época, Cristânia). O primeiro professor de Abel não teria sido um profissional exemplar. Já seu segundo professor *Bert Michael Holmboe* $(1795-1850)$, tinha capacidade para incentivar seus alunos e sabia aproveitar o potencial dos alunos destaques. Quando percebeu o potencial de Abel, passou-lhe a ministrar aulas extras utilizando livros universitários de grandes matemáticos como Gauss, Euler, Newton e Lagrange. Cerca de um ano após conhecer Abel, o professor Holmboe profetizou que seu pupilo seria o maior matemático do mundo.

Quando ainda estava estudando na escola da Catedral de Oslo, Abel acreditou ter encontrado a solução para uma equação geral do 5º grau. Ele teria enviado sua solução para alguns matemáticos noroegueses para consultar-lhes, estes por sua vez enviaram a demonstração para o matemático dinamarquês *Carl Ferdinand Degen* $(1766 - 1825)$. Degen não teria encontrado nenhum erro no raciocínio de Abel, mas por precaução solicitou mais argumentos e uma ilustração numérica. Ao buscar atender a solicitação de Degen, Abel descobriu que sua desmonstração estava errada.

Aos 18 anos Abel ficara órfão de pai. A família que já vivia em situação financeira complicada, com a morte do patriarca da família a situação ficou ainda pior. Ficou para Abel, boa parte da responsabilidade do sustento e subsistência de sua família.

Em 1821, quando tinha cerca de 19 anos, Abel ingressa na Universidade de Oslo. Ele continuou pesquisando sobre a resolução por meio de radicais de equações de grau $\geqslant 5$, mas agora buscando uma prova por *redução ao absurdo*.

Em 1824 Abel publica o artigo "*Sobre a resolução algébrica de equações*" apresentando a primeira demonstração completa e sem erros de que nenhuma solução por radicais seria possível para equações de grau $\geqslant 5$, dando fim a uma longa busca. Como resultado dos trabalhos de Abel e Ruffini, hoje a insolubilidade de equações de grau $\geqslant 5$ é conhecido como **Teorema de Abel-Ruffini**: "*A equação algébrica geral de grau* $\geqslant 5$ *não pode ser resolvida por radicais*". Abel publicou seu artigo utilizando seus próprios recursos financeiros, para economizar, as cópias impressas de sua demonstração foram reduzidas para seis páginas, tendo quase que nenhuma repercussão. Uma cópia do artigo chegou até ao grande matemático, astrônomo e físico alemão *Carl Friedrich Gauss* $(1777 - 1855)$, mas Gauss não deu-lhe a miníma atenção, pois não acreditava que problema em aberto há cerca de 250 anos poderia ser resolvido por um simples desconhecido.

Em 1825, Abel conseguiu ganhar uma bolsa de estudos que lhe permitiu visitar grandes centros matemáticos na europa, como na França, na Itália e na Alemanha. Seu objetivo era monstrar seus trabalhos e assim conseguir um posto como professor em alguma universidade, para enfim sair da situação de probreza que ele e sua família viviam.

Abel não teve o retorno esperado em suas visitas, mas teve a felicidade de conhecer e fazer amizade com o alemão *August Leopold Crelle* $(1780 - 1855)$. Crelle era engenheiro e grande amante da matemática, que na época lançou o primeiro periódico dedicado exclusivamente à matemática o *Journal of Pure and Applied Mathematics* (1826). Na revista criada por Crelle, no primeiro número, Abel publicou uma versão expandida de sua demonstração da insolubilidade de uma equação de grau $\geqslant 5$. Nos três primeiros números da revista, Abel contribuiu com 22 artigos, abordando diversos assuntos como na teoria das funções elípticas e hiperelípticas.

Em 1827 Abel volta para a Noruega, pois não havia conseguido nenhum posto como professor ou pesquisador em nenhuma universidade. Para sobreviver dava aulas particulares, mas não deixou de realizar suas pesquisas. Mesmo contraindo uma tuberculose, não deixou de enviar mais material para Crelle. Abel faleceu em 1829, com apenas 26 anos, vítima da tuberculose. Em 6 de abril de 1829, dois dias após a morte de Abel, Crelle enviou-lhe uma carta convidando-o para ser professor de matemática na Universidade de Berlim, mas a carta chegou tarde.

Talvez se Gauss tivesse dado atenção para o artigo de Abel, este teria conseguido um posto como professor em alguma universidade, tendo seu devido reconhecimento ainda em vida. O matemático francês *Charles Hermite* (1822 − 1901) disse: "*Abel deixou aos matemáticos com o que trabalhar durante* 150 *anos*".

6.4 Évariste Galois

Na seção anterior vimos que em 1826 Abel publicou uma versão completa da demonstração da insolubilidade de equações de grau maior que 4. Em outras palavras, Abel demonstrou que não existe nenhum procedimento algébrico geral, para resolver equações de grau maior que 4. Faltava então caracterizar as equações que eram resolúveis por radicais. A base para a caracterização viria cerca de 5 anos após o artigo de 1826 de Abel, pelo jovem gênio francês *Évariste Galois* (1811 − 1832). Galois caracterizou as condições de resolubilidade de equações por meio de radicais utilizando teoria das permutações.

Figura 6.6: Évariste Galois (1811 − 1832). *Fonte:* https://www.pinterest.dk/pin/70347 6404268791069/ (acesso: 30/01/2020)

Évariste Galois nasceu em 1811 no vilarejo de Bourg-la-Reine, que fica próximo a

Paris. Vindo de família instruída, na ocasião de seu nascimento, seu pai, Nicolas-Gabriel Galois, era diretor de um internato e em 1815 passaria a ser prefeito da cidade. Sua base de estudo foi desenvolvida inicialmente com sua mãe, que lhe ensinava em casa. Em 1823, aos doze anos, foi admitido no internato Liceu Louis-le-Grand em Paris. Neste internato tinham estudado Voltaire e Vitor Hugo. Galois não teria mostrado muito interesse pelo latim, grego ou álgebra, que nos dizeres de seus professores, estava longe de ser um bom aluno e o consideravam uma pessoa excêntrica.

Provavelmente, fascinado com a leitura da obra *Élements de géometrie* (*Elementos de geometria*) do matemático francês *Adrien-Marie Legendre* ($1752 - 1833$), ainda como aluno no Liceu, Galois passaria a ter mais entusiasmo pela matemática. Depois de algum tempo, teria estudado com boa compreensão álgebra e análise, de matemáticos como Lagrange, Cauchy e Abel, mas mesmo assim ainda era considerado um aluno pouco exemplar.

Em 1827, com 16 anos, esperava ser aceito como aluno na École Polytechnique, escola por onde passaram matemáticos de renome como Cauchy, Jean-Baptiste Biot, Pierre-Simon Laplace e Jean Baptiste Joseph Fourier. Acabou não sendo aceito na sua primeira tentativa possivelmente por falta de preparo sistemático. Dois anos depois, em sua segunda tentativa não seria aceito novamente, talvez estivesse desnorteado pelo suicídio de seu pai alguns dias antes do exame. Em 1829, seu pai estava sofrendo perseguições e difamações públicas pelos seus inimigos políticos, que parecem terem sido planejadas por um padre, não resistindo a pressão que vinha sofrendo, acabou suicidando-se.

Em maio de 1829, enviou para a Academia de Ciências suas conclusões sobre a teoria das equações. O matemático Cauchy era o encarregado para a avaliação, que acabou perdendo o material.

Devido seus fracassos para ingressar na École Polytechnique, restou para Galois tentar a École Normale. Galois conseguiu sua vaga na École Normale em outubro de 1829, que iria preparar-lhe para o ensino. Mesmo se preparando para o ensino nessa instituição, Galois prosseguiu com suas pesquisas. Em fevereiro de 1830, apresentou um artigo para concorrer a um prêmio da Academia sobre teoria das equações. O encarregado de examinar trabalho foi *Joseph Fourier* ($1768 - 1830$), que acabou falecendo pouco antes de dar seu parecer. Mais uma vez os manuscritos de Galois sumiriam.

Galois tinha uma certa inclinação para a política também, tomando mais fôlego após o suicídio de seu pai. Republicano radical, Galois estava insatisfeito com o desfecho da revolução de 1830. Em uma carta, criticou publicamente o diretor da École Normal por ter favorecido a legitimidade em detrimento da liberdade. Como resultado, Galois foi expulso em janeiro de 1831, afastado-se do ensino superior.

Apesar de todas as frustações Galois seguiu pesquisando. Ainda em 1831, tentaria mais uma vez apresentar um artigo à academia. O artigo "*Sur lês conditions de resolubilité dês equations par radicaux*"("*Sobre as condições de resolubilidade das equações por radicais*") foi um único texto completo de sua autoria, sendo examinado pelo matemático e físico francês *Siméon Denis Poisson* (1781 − 1840). Passado algum tempo (cerca de seis meses), Poisson devolveu o artigo, pois considerava ininteligível e recomendou que Galois explicitasse melhor suas ideias apresentando demonstrações, pois seus argumentos não estavam suficientemente claros.

Ainda em 1831, conforme HYGINO & IEZZI (2018) (p. 342) Galois foi preso duas vezes: "a primeira por propor um brinde numa reunião de republicanos, cuja causa defendia, e que foi interpretada como ameaça de morte ao rei Louis-Philippe; a segunda, por seis meses (sendo liberado no dia 29 de abril de 1832), por ter vestido o uniforme da extinta Guarda Nacional".

Em 30 de maio de 1832, com menos de 21 anos, devido um duelo de pistolas, tomaria um tiro no estômago que ocasionaria uma peritonite (inflamação do peritônio, membrana que reveste parte da cavidade e das vísceras abdominais). Mesmo ferido e agonizando, conseguiu ajuda para chegar ao hospital Cochin, mas já não era possível salvá-lo. No dia seguinte ao duelo, após agonizar muito devido ao ferimento, Galois faleceu em 31 de maio de 1832. Conforme LIVIO (2006) (p. 112) antes de morrer Galois disse para seu irmão Alfred: "*Não chore, preciso de toda a minha coragem para morrer aos vinte anos*".

Existem algumas incertezas acerca dos motivos que desencadearam o duelo que levou a morte de Galois. Em D'AMBROSIO (2014) (p. 10 − 12) comenta-se algumas teorias sobre os motivos que teriam levado Galois para o duelo: "*Em uma delas, uma revolta seria deflagrada a partir da morte de um republicano conhecido, capaz de inflamar o povo, e que essa morte seria atribuída aos apoiadores do rei Louis-Philippe. Galois voluntariou-se para essa missão de sacrificar-se pela causa*". " *De acordo com o planejado, os membros da Société espalhariam que o duelo foi, na verdade, uma armação para matá-lo. Isso deflagraria a revolta popular*". "*Em outras versões sobre a morte de Évariste Galois, o duelo teria sido devido a uma rivalidade amorosa envolvendo Stéphanie. Um rival amoroso, parte do mesmo círculo de amizades, teria duelado com Galois. Ou, em uma outra versão, Stephanie teria sido uma agente do governo, articuladora da trama para assassiná-lo, por razões políticas ou amorosas. Assim o mito em torno de Galois floresceu. Surgiu, inclusive, uma versão que o duelo teria sido por ciúmes acadêmicos*".

O que se pode afirmar é que, pressentindo a morte, na noite anterior ao duelo, Galois escreveu todas as suas ideias sobre a resolução de equações algébricas. Suas ideias foram colocadas uma carta dirigida ao amigo Auguste Chevalier, solicitando empenho para publicação de suas ideias. Após Chevalier realizar uma razoavel organização nos manuscritos de Galois, em 1843 deixou o material para *Jhoseph Liouville* (1809 − 1882), que os publicou em 1846. Galois introduziu a ideia de *grupo* na matemática, provavelmente dando o primeiro passo na criação da álgebra moderna. Com as ideias de Galois, cria-se na matemática a *Teoria de Galois* e o Teorema de Abel-Ruffini passa a ser corolário da nova teoria.

Conforme GELSON IEZZI (1993) (p. 198), o jovem Évariste Galois estava muito à frente de seu tempo, tanto que apenas em 1870 suas ideias conseguiram ser plenamente esclarecidas.

Referências Bibliográficas

[1] BERTATO, F. M., Campinas, Brasil (2018), A Falsa (Su-)Posição? Tradução dos Problemas 24, 25, 26 e 27 do Papiro de Rhind. *RBHM, Vol. 18, n. 36 (2018), 11-29.*

[2] BIANCHINI, E.; São Paulo, Brasil (2018), Matemática Bianchini – 9º Ano. *Editora Moderna.*

[3] BOLDRINI, J. L.; Costa, S. I. R.; Figueiredo, V. L. & Wetzler, H. G.; São Paulo, Brasil (1986), Álgebra Linear. *Editora HARBRA Ltda.*

[4] BOYER, C.B., Brooklyn, New York (1968), A History of Mathematics. *Jhon Wiley & Sons, Inc.*

[5] BOYER, C. B. & MERZBACH, U. C.; [tradução de Helena Castro], São Paulo - Brasil (2012), História da Matemática. *Tradução da 3ª edição americana - 4ª reimpressão (2018), Editora Edgar Blücher Ltda.*

[6] BRITISH MUSEUM,

`https://www.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details/collection_image_gallery.aspx?partid=1&assetid=366139001&objectid=110036.`

Acesso: 25/07/2019.

[7] BROOKLYN MUSEUM, https://www.brooklynmuseum.org/opencollection/objects/118304 *Acesso:* 25/07/2019.

[8] CHACE, A. B.; Oberlin, Ohio, U.S.A. (1927), The Rhind Mathematical Papyrus. *Mathematical Association of America..*

[9] D'AMBROSIO, U., (2014), Anais/Actas do 6º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática- Artigo: Bicentenário de Évariste Galois: lições sobre historiografia *SBHMat.*

[10] GARBI, G. G., (2009), O Romance das Equações Algébricas - 3ª Edição. *Editora Livraria da Física.*

[11] GEOGEBRA, https://www.geogebra.org/?lang=pt *Acesso:* 22/12/2019.

[12] GILMOUR, C., Edinburgh, Scotland (2015), Alexander Henry Rhind (1833–63): a Scottish antiquary in Egypt. *Proceedings of the Society of Antiquaries of Scotland 145 (2015), 427–440.*

[13] GUELLI, O., São Paulo - Brasil(1996), Contando a História da Matemática - Vol. 3 - História da Equação do 2º Grau - 6ª Edição. *Editora Ática.*

[14] HALMOS, P.R.; Princeton, New Jersey (1960), Nalve Set Theory. *D. Van Nostrand Company, Inc..*

[15] HYGINO H. Domingues & Gelson Iezzi, São Paulo (2003), Álgebra Moderna - 4ª Edição. *Atual Editora.*

[16] HYGINO H. Domingues & Gelson Iezzi, São Paulo (2018), Álgebra Moderna - 5ª Edição. *Editora Saraiva.*

[17] IEZZI, G., São Paulo (1993), Fundamento da Matemática Elementar - complexos, polinômios e equações. *Editora Atual.*

[18] LIMA, E.L.; Carvalho, P.C.P.; Wagner, E. & Morgado, A.C., Rio de Janeiro (2006), A Matemática do Ensino Médio - Volume 1. *Editora SBM.*

[19] LIMA, E. L., (2012), Meu Professor de Matemática e outras histórias - 2ª Edição. *SBM.*

[20] LIVIO, M., (2006), The Equation That Couldn't Be Solved: How Mathematical Genius Discovered the Language of Symmetry. *Simon & Schuster.*

[21] LUZ, A. M. R. & ÁLVARES, B. A.; São Paulo, Brasil (1997), Curso de Física - vol 1. *Editora Scipione.*

[22] MARTINS, J., Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, O livro que divulgou o papiro Rhind no Brasil. *Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2015.*

[23] MEDEIROS, C. F. & MEDEIROS, A., Pernambuco, Brasil (2004), O Método da Falsa Posição na História e na Educação Matemática. *Ciência & Educação, v. 10, n. 3 (2004), 545-557.*

[24] MUSEU VIRTUAL PAMPULHA, http://www.museuvirtualbrasil.com.br/museupampulha/modules/news3/article.php?storyid=144, *Acesso:* 09/11/2019.

[25] PAZ, L. B. & LIMA, M. V. R. L.,(2018), Metódo da Chave - Algoritmo GeoGebra, https://drive.google.com/file/d/16kI8rsO6mEUqo2vZvJuwLQY3JFTSwBmh/view, Acesso: 12/01/2020, Artigo: Construção de ferramentas para divisão de polinômios, implementadas com o *JavaScript*, no software *GeoGebra Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, v.7, n.2, p. 80-94, 2018 - ISSN 2237-9657.*

[26] PITOMBEIRA, J. B. & ROQUE, T. M.; Rio de Janeiro, Brasil (2012), Tópicos de História de Matemática. *SBM.*

[27] POLYA, G., (1995), A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático - 2ª Edição. *Editora Interciência Ltda.*

[28] SANTOS, R. C., Como dividir somando - uma técnica egípcia. *REMat- REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA, ISSN 2177-5095 nº2 - 2010, http://matematicajatai.com/rematFiles/2-2010/div-egip.pdf, Acesso:* 04/08/2019.

[29] STEIN, J. D., (2008), Como a Matemática Explica o Mundo - o poder dos números no cotidiano - 2ª Edição. *Editora Campus.*

[30] STEINBRUCH, A. & WINTERLE, P.; São Paulo, Brasil (2006), Geometria Analítica. *Pearson Education do Brasil.*

[31] TAO, T. Chi-Shen, (2013), Como Resolver Problemas - Uma perpectiva pessoal - 1ª Edição. *Editora SBM.*

[32] VENTURI, J. J.; Coritiba, Brasil (2019), Cônicas e Quádricas - 6ª edição. *Site: www.geometriaanalitica.com.br (download gratuito).* Acesso: 12/01/2020.