

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Saulo Carvalho

**STARTIC LAB: UM LABORATÓRIO WEB PARA O ENSINO DE
PROBABILIDADES**

UBERABA - MG
2022

SAULO CARVALHO

**STARTIC LAB: UM LABORATÓRIO WEB PARA O ENSINO DE
PROBABILIDADES**

Dissertação de Mestrado apresentada à
Comissão Acadêmica Institucional do
PROFMAT-UFTM como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre em
Matemática.

Orientador(a): Leandro Cruvinel

UBERABA - MG

2022

**Catálogo na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do
Triângulo Mineiro**

C328s Carvalho, Saulo Rodrigues de
Startic Lab: um laboratório web para o ensino de probabilidades / Saulo
Rodrigues de Carvalho. -- 2022.
47 p. : il., graf., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)
-- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2022
Orientador: Prof. Dr. Leandro Cruvinel Lemes

1. Probabilidades. 2. Laboratórios - Realidade Virtual. 3. Jogos de
probabilidades (Matemática). I. Lemes, Leandro Cruvinel. II. Universidade
Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 519.2:303.436.4-021.131

SAULO RODRIGUES DE CARVALHO

STARTIC LAB: UM LABORATÓRIO WEB PARA O ENSINO DE PROBABILIDADES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, área de concentração “Matemática” da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como requisito parcial para obtenção do título de mestre

Uberaba, 08 de abril de 2022

Banca Examinadora:

Dr. Leandro Cruvinel Lemes – Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dr. Heron Martins Félix
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dr. Felipe Alves da Louza
Universidade Federal de Uberlândia





fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#) e no art. 34 da [Portaria Reitoria/UFTM nº 87, de 17 de agosto de 2021](#).



Documento assinado eletronicamente por **HERON MARTINS FELIX, Professor do Magistério Superior**, em 30/06/2022, às 18:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#) e no art. 34 da [Portaria Reitoria/UFTM nº 87, de 17 de agosto de 2021](#).



Documento assinado eletronicamente por **Felipe Alves da Louza, Usuário Externo**, em 18/07/2022, às 23:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#) e no art. 34 da [Portaria Reitoria/UFTM nº 87, de 17 de agosto de 2021](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.uftm.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0772971** e o código CRC **50BD7EC9**.

DEDICATÓRIA

A minha querida esposa e meus filhos.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente à Deus por me dar saúde e muita força para passar por essa etapa, só Ele sabe o quanto foi difícil, e quantas vezes pensei em desistir.

À minha esposa e filhos por acreditar em mim e estar sempre ao meu lado, suportando os momentos em que eu me ausentei nesse período.

À minha família, pelo apoio e compreensão e por sempre estarem ao meu lado. Em especial aos meus irmãos Francisco, Talita e meus cunhados Tuany, Karine e Juninho.

Aos meus pais Francisco e Rosangela, que sempre estiveram ao meu lado, dando todo suporte que sempre precisei, cuidando dos meus filhos e por sempre me incentivarem a estudar desde pequeno, sem vocês não teria chegado até aqui e sei que esta vitória também é de vocês.

À minha sogra, sogro e cunhados que foram suporte para minha esposa e filhos neste período que fui mais ausente do que presente.

A todos os meus alunos, colegas, amigos e diretores que estiveram ao meu lado neste período, que muitas vezes me escutaram em momentos de desabafos, me fizeram sentir mais leve e contribuíram em ajustes de horários nas escolas.

Ao meu orientador, Professor Dr. Leandro Cruvinel, pela paciência e dedicação em me ajudar sempre que precisei. Sem você não teria chegado aqui.

À Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM) e todos os professores que compartilharam conosco seus conhecimentos.

Aos colegas do curso, meu muito obrigado pelas trocas e aprendizados, em especial a Renata e Johnny que estiveram mais próximos durante as viagens e almoço.

E por fim, a todos aqueles que direta ou indiretamente estiveram ao meu lado e contribuíram para que eu chegasse até aqui.

“Foi o tempo que dedicastes à tua rosa que a fez tão importante”
Antoine de Saint-Exupéry

RESUMO

O ensino enfrenta, de forma geral, grandes desafios para compatibilizar as demandas de uma geração nascida no universo digital com o conhecimento adquirido pela humanidade, organizado em forma de conteúdo. No caso das disciplinas que envolvem conceitos abstratos, como a probabilidade, o desafio se torna ainda maior, já que o aluno médio não possui contato com a temática e depende de um grande número de experimentos para conseguir perceber padrões. Sobre este aspecto, a atual tecnologia permite a utilização de laboratórios virtuais, os quais garantem ao aluno uma vivência prática de experimentos que não podem ser realizados com grande eficácia educacional por seu alto custo e pela necessidade de replicações. A presente pesquisa se coloca neste contexto, com o objetivo de desenvolver um laboratório online de estatística para que alunos e professores possam melhorar o processo de ensino e aprendizagem de alguns conceitos relacionados a estatística básica e probabilidade. Com a revisão de alguns jogos clássicos ligados ao tema, e com atenção especial aos pontos que correspondem às principais dificuldades do aluno brasileiro do século XXI, o laboratório virtual tem potencial de inserir o conteúdo, considerado complicado, de uma forma lúdica e visual, o que tende a consolidar o conhecimento dos usuários. Com a aplicação do laboratório desenvolvido, os alunos têm condições de constatar que é mais provável a obtenção da soma 10 em comparação com a soma 9 no jogo passe-dix, resolvendo o equívoco do enviesamento da equiprobabilidade, bem como de perceber corretamente o espaço amostral por meio dos gráficos visuais. Com relação ao jogo Caixa de Bertrand, os alunos podem perceber o espaço amostral, também pela via visual, evitando erros comuns de análise do jogo, como a inversão do eixo temporal. Através do jogo Cobras e Escadas, os alunos aprendem matemática jogando dados, ou seja, proporciona um ensino lúdico da matemática. Assim como, no jogo dos Diferentes, as crianças com o uso de dados, são capazes de aprender probabilidade de um modo divertido. Com base nos exemplos demonstrados, conclui-se a presente pesquisa com uma discussão sobre a importância da utilização de laboratórios virtuais para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de alunos de todas as classes e em todos os contextos, já que grandes entraves encontrados em experimentos que utilizam laboratórios físicos são sanados e, além disso, o perfil do aluno contemporâneo tem bastante compatibilidade com as tecnologias digitais de informação e comunicação aplicadas à Educação.

Palavras-chave: Caixa de Bertrand; Laboratório Virtual; Passe-dix; Probabilidade.

ABSTRACT

Teaching faces, in general, great challenges to reconcile the demands of a generation born in the digital universe with the knowledge acquired by humanity, organized in the form of content. In the case of subjects that involve abstract concepts, such as probability, the challenge becomes even greater, since the average student has no contact with the subject and depends on a large number of experiments to be able to perceive patterns. In this respect, current technology allows the use of virtual laboratories, which guarantee the student a practical experience of experiments that cannot be carried out with great educational effectiveness due to their high cost and the need for replication. This research is placed in this context, with the objective of developing an online statistics laboratory so that students and teachers can improve the teaching and learning process of some concepts related to basic statistics and probability. With the review of two classic games related to the theme, the *passe-dix* and the Bertrand box, and with special attention to the points that correspond to the main difficulties of the Brazilian student in the 21st century, the virtual laboratory has the potential to insert the content, considered complicated, in a playful and visual way, which tends to consolidate the knowledge of users. With the application of the developed laboratory, students are able to see that it is more likely to obtain the sum 10 compared to the sum 9 in the *pass-dix* game, solving the misunderstanding of the bias of equiprobability, as well as correctly understanding the sample space through visual graphics. Regarding the game Bertrand box, students can perceive the sample space, also visually, avoiding common errors in game analysis, such as inverting the temporal axis. Through the game Snakes and Ladders, students learn mathematics by playing dice, that is, it provides a playful teaching of mathematics. As in the game of Differents, children with the use of dice are able to learn probability in a fun way. Based on the examples shown, the present research is concluded with a discussion on the importance of using virtual laboratories to improve the teaching and learning process of students from all classes and in all contexts, since major obstacles found in experiments that they use physical laboratories are remedied and, in addition, the profile of the contemporary student is quite compatible with digital information and communication technologies applied to Education.

Keywords: Bertrand box; Virtual laboratories; Passe-dix; Probability.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Possíveis combinações para os diferentes resultados.....	29
Figura 2 – Diagrama de Árvore relativo à Caixa de Bertrand.....	34
Figura 3 – Jogo Cobras e Escadas.....	37
Figura 4 – Jogo dos diferentes.....	40

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Possibilidades de cada caso para soma 9 e 10.....	29
Tabela 2 – 80 repetições no jogo cobras e escadas.....	37
Tabela 3 – 80000 repetições no jogo cobras e escadas.....	38
Tabela 4 – Simulação de 80 repetições do jogo dos diferentes.....	40
Tabela 5 – Simulação de 80000 repetições do jogo dos diferentes.....	41
Tabela 6 – Possíveis resultados do lançamento de dois dados.....	41

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Comparação da obtenção dos resultados 9 e 10 em 80 repetições.....	26
Gráfico 2 - Comparação da obtenção dos resultados 9 e 10 em 80.000 repetições.....	26
Gráfico 3 - Dispersão com 80 jogadas.....	27
Gráfico 4 - Dispersão com 80.000 jogadas.....	28
Gráfico 5 - Frequência de Ouro x Prata em 80 repetições.....	31
Gráfico 6 – Frequência de Ouro x Prata com 80.000 Repetições.....	31
Gráfico 7 – Dispersão para 40 repetições de 80 experimentos.....	32
Gráfico 8 – Dispersão para 40 repetições de 80.000 experimentos.....	3

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	13
1. AS TECNOLOGIAS E O ENSINO DA MATEMÁTICA	16
2.LABORATÓRIOS ONLINE E O ENSINO DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE	19
3. APLICAÇÃO DO LABORATÓRIO VIRTUAL	24
3.1 JOGO PASSE-DIX.....	25
3.2 JOGO CAIXA DE BERTRAND	30
3.3 JOGO COBRAS E ESCADAS	35
3.4 JOGO DOS DIFERENTES	38
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	41
5. CONCLUSÃO.....	44
REFERÊNCIAS	45

INTRODUÇÃO

Muitas abordagens modernas para melhorar o processo de ensino e aprendizagem da educação básica dependem significativamente da disponibilidade e utilização de tecnologias de multimídia, rede, web, interativas, computacionais e de visualização. Esta recente mudança de paradigma para o ensino baseado em tecnologia é impulsionada, em partes, pelo rápido avanço da tecnologia, pela proliferação da Internet em todos os aspectos da vida e pela demanda intrínseca pela integração da tecnologia da informação com os instrumentos pedagógicos clássicos. Como resultado disso, os métodos contemporâneos de ensino com tecnologia geralmente fazem uso de uma grande variedade de recursos para aprendizagem online, gerenciamento de cursos, incluindo materiais eletrônicos, novas ferramentas de comunicação, engajamento, pensamento experimental, crítico e avaliação de aprendizagem.

Nos últimos anos, surgiram novas ferramentas de auxílio ao ensino e aprendizagem de habilidades e conteúdos escolares. Essas novas ferramentas incluem alguns tipos de software de computador para simular algumas situações problemas trabalhadas dentro de sala de aula. O interesse pela experimentação online foi impulsionado pela possibilidade de alcançar amostras mais diversificadas, recrutando grupos maiores de assuntos e permitindo com que o aluno analise com clareza os vários resultados que este processo permite.

Os processos de ensino e de aprendizagem têm sido um foco permanente de estudos, e a integração de laboratórios remotos no projeto de atividades de ensino pode permitir aos alunos uma melhoria nesse processo. Esta integração requer um amplo entendimento de como alguns processos pré e pós-decisão são influenciados pela motivação pessoal em contextos significativos. Harlan e Rivkin (2000) destacam a importância da qualidade das experiências de ensino e aprendizagem, em contraste com a quantidade. Essa mudança qualitativa na natureza da interação pedagógica requer que o treinamento do aluno seja mais flexível e, portanto, mais capaz de se adaptar a ambientes e expectativas em mudança.

Em um laboratório convencional, diversos fenômenos são percebidos com a utilização de instrumentos físicos. Estes mesmos fenômenos podem ser alcançados em um laboratório virtual, desenvolvido em um sistema computacional disponível pela Internet, oferecidos por meio de objetos dinâmicos programados com imagens e animações (LORANDI *et al.*, 2011). O avanço das tecnologias virtuais no cotidiano humano impacta diversos aspectos, como em saúde ocupacional, meio ambiente, economia, educação à distância e aprendizagem colaborativa.

Com relação à saúde ocupacional, a utilização de experimentos virtuais não envolve a exposição a substâncias nocivas que seriam um problema em laboratórios de química, além de eliminar o risco biológico que ameaça profissionais que trabalham em laboratórios de biologia, microbiologia, bioquímica e ciências da vida. Sobre laboratórios de engenharia, a fabricação de ferramentas automáticas, controle de processos e laboratórios de proteômica são exemplos de experiências virtuais que diminuem o acontecimento de acidentes de trabalho (RAY et al., 2012; FABREGAS et al., 2011; ONG E MANNAN, 2004).

No caso de meio ambiente, a utilização de ambientes virtuais permite o alcance de resultados sem a geração de resíduos, diminui o despejo de substâncias tóxicas em corpos de água e solo. No caso da simulação molecular, é evitado o contato com produtos químicos que podem ser considerados nocivos (KOFKE; MIHALICK, 2002).

Com relação à economia, a utilização de reagentes e de materiais é reduzida, diminuindo os custos que, geralmente, encarecem cursos práticos ligados a programas das áreas de ciências básicas e aplicadas (LORANDI *et al.*, 2011).

Sobre a Educação à distância, Monge, Méndez e Rivas (2005) destacam que as novas tecnologias permitem o aprofundamento dos temas, o que leva a um aprimoramento dos cursos da modalidade. Além disso, os currículos de programas presenciais passam a ser mais flexíveis.

Acerca da aprendizagem colaborativa, Jara *et al.* (2009) consideram que as tecnologias são consideradas recursos com acesso generalizado, o que estimula, portanto, a troca de ideias entre os alunos e facilita a realização de trabalhos em equipe. Ainda assim, fica aberto a cada aluno um desenvolvimento em ritmo próprio. Os laboratórios virtuais servem como exemplo de aplicação de dados compartilhados para o aprendizado.

A utilização de laboratórios virtuais surge como uma abordagem criativa, moderna e barata para as instituições de ensino, presenciais ou à distância, que requerem atividades práticas durante o processo de formação (MONGE; MÉNDEZ, 2007; MUHAMAD, CAMAN E AHMAD, 2012).

Calvo *et al.* (2008) apontam que com os laboratórios virtuais, dois objetivos didáticos são alcançados: a realização de práticas relacionadas ao assunto com maior disponibilidade de laboratórios e a capacitação dos alunos sobre o uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs). Esses recursos foram fundamentais para mitigar o dano educacional durante a pandemia do coronavírus (COVID-19), uma vez que muitos países implementaram rigorosas medidas de isolamento e para reduzir o impacto educacional foi implementado o ensino remoto. Essa área se apresenta como uma

De fato, com um laboratório virtual é possível a realização de práticas ou experiências com a participação de um número maior de alunos, que podem estar em ambientes físicos distintos. Outro fator importante é que os fenômenos podem ser simulados, incluindo conceitos abstratos e situações hipotéticas, com controle da escala de tempo e de frequência, com a possibilidade de ocultar ou não o modelo matemático durante a demonstração do fenômeno simulado (LORANDI *et al.*, 2011).

Pensando nestas vantagens e usando todas as potencialidades que os recursos tecnológicos oferecem, o presente trabalho se propõe a desenvolver um laboratório online de estatística para que alunos e professores possam melhorar o processo de ensino e aprendizagem de alguns conceitos relacionados a estatística básica e probabilidade e para que os mesmos possam simular situações problemas trabalhadas dentro de sala de aula.

No primeiro Capítulo é realizada uma introdução acerca das tecnologias aplicadas no ensino de Matemática e de como elas têm sido fundamentais no processo de aprendizagem dos alunos. No Capítulo 2, o foco recai sobre os laboratórios online e em como eles podem ser usados no ensino de probabilidade e estatística. Por fim, no Capítulo 3, são apresentadas as resoluções matemática e computacional de problemas selecionados. Nas considerações finais, são levantados, num breve resumo, os aspectos importantes apresentados nessa dissertação e são deixadas perspectivas futuras para novas pesquisas.

1. AS TECNOLOGIAS E O ENSINO DA MATEMÁTICA

Os dados recentes apontam para o fato de que a realidade educacional brasileira ainda enfrenta sérios problemas no que se refere ao entendimento de conceitos relacionados à disciplina Matemática. Esta situação afeta diretamente o desempenho dos alunos que ingressam no ensino superior, comprometendo a qualificação dos profissionais formados pelas instituições do país na área das ciências exatas. Essa situação também é destacada em diversos estudos, que apontam para um alto índice de reprovação nas disciplinas de cálculo integral diferencial que causa a evasão em cursos de engenharia, não só no Brasil, mas também em outros países (TAROUCO *et al.* 2013).

Muitos pesquisadores em educação apoiam a teoria de que os alunos aprendem ativamente construindo seu próprio conhecimento e dando sentido a esse conhecimento. Os indivíduos constroem novos conhecimentos internamente ao transformar, organizar e reorganizar o conhecimento anterior, bem como externamente, por meio de fatores ambientais e sociais que são influenciados pela cultura, idioma e interações com os outros. O construtivismo sugere que o novo conhecimento não é recebido passivamente do professor para o aluno por meio de livros e palestras, ou simplesmente pedindo aos alunos que memorizem fatos rotineiros. Em vez disso, o significado é adquirido por meio de uma interação significativa com o novo conhecimento. Independentemente de quão claramente um professor explica um conceito, os alunos compreenderão o material somente depois de terem construído seu próprio significado para os novos conceitos, o que pode exigir a reestruturação e reorganização de novos conhecimentos e vinculá-los a conhecimentos anteriores. O construtivismo também sugere que a aprendizagem deve ser facilitada pelos professores e que a interação e a discussão são componentes críticos durante o processo de aprendizagem (JAMIE, 2002).

O uso da tecnologia pode fornecer um forte suporte na implementação de abordagens novas e diferentes para o ensino de estatística. Existem maneiras novas e interessantes que consideram o uso de tecnologia para facilitar o aprendizado em estatística. Isso inclui o uso de grandes conjuntos de dados que antes não eram gerenciáveis e o uso de representações gráficas digitais dinâmicas para auxiliar na análise.

Os ambientes virtuais representam uma oportunidade importante para o ensino e a aprendizagem. Estudos têm demonstrado que eles podem apoiar o ensino de vários campos cognitivos em todos os níveis educacionais por meio de uma variedade de abordagens de ensino. Além disso, no contexto da prática pedagógica diária, podem apoiar a aquisição de conhecimentos, bem como o desenvolvimento de competências, atitudes e motivos tanto a nível

individual como de grupo. Assim, pesquisas nos últimos anos mostram uma forte tendência de utilizar tais ambientes no processo educacional (BOUTA; PARASKEVA, 2013).

Neste sentido, é importante salientar a necessidade de que esses ambientes sejam bem planejados e de que abordagens pedagógicas adequadas sejam empregadas para que os resultados sejam ótimos no ensino das diversas disciplinas escolares.

Nos últimos anos, surgiram novas ferramentas de auxílio ao ensino e aprendizagem de habilidades e conteúdos escolares. Essas novas ferramentas incluem alguns tipos de software de computador para simular algumas situações problemas trabalhadas dentro de sala de aula. O interesse pela experimentação online foi impulsionado pela possibilidade de alcançar amostras mais diversificadas, recrutando grupos maiores de assuntos e permitindo com que o aluno analise com clareza os vários resultados que esse processo dá acesso.

Lee e Hollebrands (2008) relataram que as decisões dos professores sobre o uso de ferramentas computacionais eram frequentemente baseadas no conhecimento adquirido durante seus cursos de formação de professores, portanto, é razoável supor que uma abordagem de modelagem em cursos de formação de professores pode permitir o desenvolvimento de uma compreensão mais sofisticada das fraquezas expostas. Esta imersão no uso de software estatístico em cursos de formação de professores é de vital importância devido ao efeito de engrenagem na eventual aprendizagem dos alunos de ideias estatísticas e porque os formadores de professores têm influência potencial sobre muitos alunos que mais tarde se tornam professores (PRATT; DAVIES; CONNOR, 2011).

Considera-se que quando as práticas de ensino são apresentadas com métodos e estratégias adequadas em ambientes educacionais adequados possibilitam aos alunos e professores atingir algumas metas e objetivos relacionados ao ensino de matemática. Além das habilidades acadêmicas e sociais, incluindo habilidades para a vida diária, fazer compras, viajar, ler e escrever; habilidades matemáticas básicas são necessárias para uso na vida cotidiana de indivíduos com necessidades especiais. Para adquirir essas habilidades, é importante fornecer instrução com componentes de organização, objetivos, conteúdo de programas de educação com método ou abordagem apropriada (BAGLAMA; YIKMIS; DEMIROK, 2017).

Muitas abordagens modernas para melhorar o processo de ensino e aprendizagem da educação básica dependem significativamente da disponibilidade e utilização de tecnologias de multimídia, rede, web, interativas, computacionais e de visualização. Esta recente mudança de paradigma para o ensino baseado em tecnologia é impulsionada em parte pelo rápido avanço da tecnologia, a proliferação da Internet em todos os aspectos da vida e a demanda intrínseca pela integração da tecnologia da informação com os instrumentos pedagógicos clássicos. Como

resultado disso, os métodos contemporâneos de ensino com tecnologia, geralmente, envolvem a utilização de diversos recursos de Tecnologia da Informação (TI) e multimídia para aprendizagem online, implementando tecnologias e soluções computacionais voltadas para comunicação, engajamento, pensamento experimental, crítico e avaliação de aprendizagem.

Os processos de ensino e de aprendizagem têm sido um foco permanente de estudos e a integração de laboratórios remotos no projeto de atividades de ensino pode permitir aos alunos uma melhora no processo de ensino e aprendizado. Essa integração requer um amplo entendimento de como alguns processos pré e pós-decisão são influenciados pela motivação pessoal em contextos significativos. Harlan e Rivkin (2000) destacam a importância da qualidade das experiências de ensino e aprendizagem, em contraste com a quantidade. Essa mudança qualitativa na natureza da interação pedagógica requer que o treinamento do aluno seja mais flexível e, portanto, mais capaz de se adaptar a ambientes e expectativas em mudança.

Os laboratórios remotos estão sendo cada vez mais usados no processo de ensino e aprendizagem, pois oferecem vantagens exclusivas que os alunos não teriam fazendo as simulações fisicamente em sala de aulas. Dentre as vantagens, destacam-se a acessibilidade e a disponibilidade.

A Acessibilidade acontece, pois laboratórios remotos permitem que os alunos acessem equipamentos e experimentos que estão fisicamente distantes, ou que são muito raros ou caros para estarem disponíveis em laboratórios educacionais normais.

Já a Disponibilidade pode ser percebida pelo fato de os experimentos poderem estar disponíveis durante períodos prolongados e a qualquer hora do dia. As restrições de tempo para experimentação, repetição ou análise também são mais flexíveis.

A introdução de computadores forneceu aos professores ferramentas poderosas para simulação de experimentos probabilísticos, de modo que os professores não precisam usar apenas materiais concretos para introduzir a noção de probabilidade experimental e encontrar frequências relativas ao mesmo tempo que explora um modelo teórico baseado em resultados possíveis. A ampla disponibilidade de computadores promove investigações em sala de aula usando simulações, que podem ser geradas por vários pacotes de softwares diferentes que estão atualmente disponíveis. Essa disponibilidade torna possível explorar a natureza das distribuições de probabilidade e, especialmente, refinar o entendimento da variação. Embora o exame das probabilidades teóricas e experimentais sejam componentes importantes do ensino, apenas alguns estudos focaram exclusivamente no raciocínio dos alunos sobre a relação entre a probabilidade experimental e a probabilidade teórica (PRODRUMOU, 2012).

2. LABORATÓRIOS ONLINE E O ENSINO DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

Desde a sua criação, o laboratório virtual foi definido de várias formas, entre as quais está o conceito do Encontro de Especialistas em Laboratórios Virtuais (UNESCO, 2000): “um espaço de trabalho eletrônico concebido para colaboração e experimentação remota com objeto de investigação ou realizar outras atividades criativas, bem como elaborar e divulgar os resultados através das tecnologias de informação e comunicação disseminadas”.

Outra definição, mais específica, considera que um laboratório virtual é uma simulação da realidade, ou seja, um experimento de laboratório, utilizando os padrões descobertos pela ciência. Esses padrões, ou leis, são codificados por um processador de computador de forma que, por meio de alguns comandos, fornece respostas semelhantes às que poderiam ser obtidas na vida real (SANZ E MARTÍNEZ, 2005).

O uso da tecnologia em matemática permite algo fundamental na formulação de hipóteses e conjecturas: a experimentação. O ato de vivenciar facilita a visualização do aluno, da situação em questão, testando diversas possibilidades, o que é muito mais difícil quando se utiliza apenas lápis e papel (TAROUCO *et al.* 2013).

Observa-se que a tecnologia oferece aos professores oportunidades para o ensino de estatística, possibilitando fornecer experiências de aprendizagem ricas para seus alunos. Rubin (2007) refletiu sobre a experiência no uso de tecnologia no ensino de estatística e concluiu que, por mais incríveis e inspiradoras que essas tecnologias possam parecer, nenhuma delas tem qualquer efeito educacional sem um currículo cuidadosamente construído e um ensino talentoso.

O panorama atual do processo ensino-aprendizagem traz novos desafios acadêmicos, principalmente no que se refere a metodologias capazes de construir competências que visem a uma maior autonomia do aluno, pois a aprendizagem será mais efetiva se, em algum momento da experiência, o aluno puder participar ativamente através da experimentação, da análise e da tomada de decisão.

Nesse sentido, os laboratórios virtuais são de grande utilidade, podendo ser utilizados como ferramenta de reforço e suporte para que os alunos aprimorem seus conhecimentos por conta própria, ou podem ser implementados como elemento didático em aulas expositivas para promover um ambiente participativo e construtivista. Além disso, a sua utilização potencia também a aquisição de competências na gestão das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), tão importantes para a formação dos alunos (MOLINA, 2012).

Estudos recentes têm buscado estabelecer o papel da tecnologia no ensino e na aprendizagem de estatística. Harradine (2008) observou como, no final da década de 1990, as investigações estatísticas começaram a incorporar conjuntos de dados reais e grandes à medida que os computadores gerenciavam a análise de números. No entanto, ele expressou preocupação com o fato de que a pedagogia em educação estatística parece não ter avançado.

Os alunos ativamente envolvidos na análise de dados usando software estatístico obtiveram uma compreensão mais completa dos conceitos de estatística. Com esse uso crescente de tecnologia, no entanto, pesquisas e discussões adicionais são necessárias sobre as maneiras apropriadas de usar computadores na sala de aula de estatística para identificar e determinar especificamente seu efeito no aprendizado do aluno (JAMIE, 2002).

Na literatura é possível encontrar trabalhos que descrevem certos fundamentos que impactam na forma como a estatística é abordada, apreciando as diferentes perspectivas sobre a estatística que podem ser tomadas como base para o ensino do tema. Muitos pesquisadores da área têm concordado sobre a importância de fortalecer o papel que a probabilidade desempenha nos currículos de estatística, reconhecendo as diferenças entre o pensamento matemático e o pensamento estatístico (READING, 2011).

O conhecimento sobre estatística está se tornando cada vez mais importante e relevante para todos os níveis de cidadania, com cada vez mais dados sendo disponibilizados para informar a tomada de decisão. A forma como esses dados são utilizados por aqueles que tomam as decisões e por aqueles que agem sobre as decisões é necessariamente impactada pelas experiências de aprendizagem estatísticas disponibilizadas. A probabilidade é uma área jovem e seu desenvolvimento formal esteve ligado a um grande número de paradoxos, que mostram a disparidade entre intuição e desenvolvimento conceitual neste campo.

Com o foco crescente na educação estatística, alguns autores têm sugerido projetos que forneçam um contexto investigativo. Eles defendem o uso de uma estrutura prática para demonstrar e aprender o pensamento estatístico, ou seja, um ciclo de investigação de dados que incorpora as etapas de definição do problema, planejamento, coleta, análise e interpretação dos dados (READING, 2011).

A prática laboratorial é uma poderosa estratégia pedagógica para a construção de competências procedimentais e, por isso, é utilizada em uma grande variedade de programas acadêmicos, geralmente sincronizados com sua disciplina teórica correspondente (JIMÉNEZ, 2014).

Uma das principais vantagens oferecidas pelo trabalho prático em laboratório é a sua interatividade, pois permite ao aluno o contato com os elementos, sua manipulação e suas

transformações. Ao poder observar o que acontece nos experimentos, o aluno desenvolve habilidades cognitivas e práticas que facilitam a proposição de problemas e a aplicação de seus conhecimentos sobre o mundo que os cerca, treinando na execução do método científico no mundo real. No entanto, apesar de ser um local ideal para a experimentação, este espaço também apresenta desvantagens, entre as quais se destacam o custo inicial, manutenção, consumo de energia e restrições de espaço devido ao aumento de matrículas, típico da explosão populacional (LORANDI *et al.*, 2011).

Criar novas intuições probabilísticas corretas requer adivinhação de resultados, realização de experimentos e avaliação de resultados, não apenas a prática de cálculos de probabilidade. É evidente que é insuficiente para os educadores presumirem que os alunos entendem a probabilidade teórica se puderem calculá-la (IRELAND; WATSON, 2009).

As razões para incluir probabilidade nas escolas têm sido repetidamente destacadas nos últimos anos, vão desde sua utilidade para a vida cotidiana, seu papel instrumental em outras disciplinas, a necessidade de um conhecimento estocástico básico em muitas profissões e o importante papel do raciocínio de probabilidade na tomada de decisão. Os alunos encontrarão a aleatoriedade não apenas na sala de aula de matemática, mas em atividades sociais, econômicas, meteorológicas, biológicas e políticas. Como consequência, a probabilidade agora está incluída no currículo escolar em muitos países, desde muito cedo. Além disso, o estudo da probabilidade tem sido amplamente difundido, começa na escola primária, ensino básico, fundamental e médio, sendo também observada em grande maioria dos cursos de exatas aplicadas em centros de ensino técnico e superior. Além disso, há uma ênfase na abordagem experimental e em fornecer aos alunos experiência estocástica em currículos recentes.

Existem dois aspectos da probabilidade, o teórico e o empírico. Ambos os aspectos precisam ser ensinados aos alunos. Uma abordagem teórica é obtida pela fração de resultados favoráveis a este evento no espaço amostral, isso faz uso de uma suposição implícita de probabilidade igual de todos os resultados únicos do espaço amostral. É uma abordagem a priori da probabilidade na medida em que permite cálculos de probabilidades antes de qualquer tentativa ser feita. Em contraste, uma abordagem empírica da probabilidade define a probabilidade experimental de um evento como a probabilidade estimada de frequências relativas usadas para determinar a probabilidade de um evento a partir dos resultados de um experimento aleatório que é repetido um número suficientemente grande de vezes nas mesmas condições (PRODRUMOU, 2012).

Uma das ferramentas disponíveis na web são os laboratórios virtuais, que se encontram na forma de sites e aplicativos, programas leves e muitas vezes baseados em modelos

teóricos que, por meio de alguns elementos-chave, são capazes de simular as condições do laboratório. Desta forma, o aluno pode realizar múltiplos experimentos, alterando as variáveis e observando as respostas do sistema; o que permite que se faça uma conexão entre o que é percebido na realidade e o que a máquina virtual está apresentando.

Os laboratórios virtuais ganham referência ao serem utilizados como ferramenta nos programas acadêmicos de instituições de prestígio como o Massachusetts Institute of Technology (MIT) ou as universidades de Cambridge e Leipzig (SELMER et al., 2007).

Espera-se que os alunos da escola explorem e contrastem as abordagens teóricas, empíricas e experimentais da probabilidade. Alguns pesquisadores defendem o desenvolvimento simultâneo e mútuo das duas abordagens. Um importante princípio educacional dos sistemas de tarefas estocásticas é o trabalho paralelo em um nível empírico e experimental e em um nível de modelagem teórica. Ambos os níveis devem estar relacionados entre si, a dependência indevida de um desses dois modos de trabalho deve ser evitada. Nesse sentido, os dois lados da probabilidade, ou seja, a probabilidade de Laplace e a probabilidade como sequência relativa, devem estar relacionados entre si como formas análogas do mesmo conceito sem, no entanto, serem identificados (PRODRUMOU, 2012).

O ensino e aprendizagem de estatística tem sido objeto de estudo de pesquisadores importantes nas últimas duas décadas. A defasagem no aprendizado dessas áreas está bem estabelecida, portanto qualquer proposta que se disponha a solucionar essa problemática deve ser debatida e incentivada. A internet e os aparelhos de comunicação já são amplamente utilizados para o ensino em outras áreas das ciências, sua implementação para o ensino de estatística pode ser um aliado ao educador que deseja empregar novas estratégias e metodologias.

Como um laboratório virtual é baseado em modelos matemáticos que funcionam em computadores, sua configuração e instalação são muito mais fáceis do que em laboratórios reais. Além disso, os espaços virtuais apresentam um grau de robustez e segurança muito superior, uma vez que, por não existirem dispositivos reais, não podem causar problemas no ambiente (CALVO et al., 2008).

Mudanças no que se espera no ensino de probabilidade e estatística não dizem respeito apenas à quantidade, mas também à qualidade do conteúdo. Até recentemente, o currículo escolar estocástico (estatística e probabilidade) era reduzido a uma abordagem baseada em fórmulas que resultava em alunos mal preparados para estatísticas de nível superior e adultos que eram estatisticamente despreparados. A tendência atual, mesmo para os níveis de escola primária, é para um ensino de probabilidade orientado por dados, onde os alunos devem realizar

experimentos ou simulações, formular perguntas ou previsões, coletar e analisar dados desses experimentos, propor e justificar conclusões e previsões que se baseiam sobre dados (BURRILL; BIEHLER, 2011).

A importância de desenvolver o pensamento estocástico e não apenas o conhecimento estocástico nos alunos está sendo enfatizada em muitos currículos e alguns autores argumentam que o raciocínio estocástico é diferente do raciocínio matemático, ambos sendo essenciais para a sociedade moderna e complementando-se de maneiras que fortalecem o currículo geral de matemática para alunos (GATTUSO, 2006).

De particular relevância para o ensino de probabilidade são as ideias informais que crianças e adolescentes atribuem ao acaso e à probabilidade antes da instrução e que podem afetar o aprendizado subsequente. Há evidências de que pessoas em diferentes idades mantêm conceitos errados de probabilidade que são difíceis de erradicar com base apenas em um ensino formal do tópico (BATANERO; DÍAZ-CARMEN, 2012).

Truran (1995) encontrou evidências substanciais de que crianças pequenas não veem geradores aleatórios, como dados ou bolas de gude em urnas, como tendo propriedades constantes e consideram que um gerador aleatório tem uma mente própria ou pode ser controlado por forças externas. Em aritmética ou geometria, uma operação elementar pode ser revertida e essa reversibilidade pode ser representada com materiais concretos. Isso é muito importante para crianças pequenas, que ainda estão muito ligadas a situações concretas em seu pensamento matemático (BATANERO; DÍAZ-CARMEN, 2012).

3. APLICAÇÕES DO LABORATÓRIO VIRTUAL

A história da humanidade é repleta de passagens em que a curiosidade atraiu pensadores de diversos ramos para buscar soluções racionais para situações que se assemelham a um “jogo de azar”, expressão que utiliza uma palavra que deriva do árabe *az-zahar*, que, além de significar má-sorte, possui conotação ligada ao acaso. Este fato está ligado à capacidade e ao interesse humano de perceber padrões e levantar hipóteses para explicar fenômenos do cotidiano (SANTOS, 2008).

Neste sentido, consolidou-se o estudo sobre cálculo de probabilidades, com seu marco inicial representado pelas cartas, trocadas em 1654 entre Pierre de Fermat e Blaise Pascal, em que se discutia a resolução de problemas ligados aos jogos propostos por Antoine Gombaud. Para resolver os problemas tratados, os matemáticos propuseram conceitos como a esperança matemática e introduziram uma nova metodologia para se trabalhar com probabilidades (SANTOS, 2008).

O estudo das probabilidades pode conseguir uma maior aderência e engajamento de alunos jovens quando realizado na forma de jogos e dinâmicas. Para Lopes (1999), em meio a um jogo o aluno desenvolve sua própria autonomia ao adquirir conhecimentos, já que ele age de acordo com suas escolhas, acertando ou errando.

Esta visão de estudo mais apropriado para o trabalho com probabilidade é tema de estudo de Scoz (2002) quando ele constata os problemas de aprendizagem de jovens estudantes relacionados com uma abordagem equivocada para o ensino das matérias exatas, a qual gera vínculos negativos com o objeto de estudo e aumenta os problemas de aprendizado.

Neste sentido, Borin (1996) coloca que a utilização de jogos matemáticos permite que o aluno desenvolva seu raciocínio por meio da observação, concentração, análise, atenção e generalização, que são tópicos intensamente conectados com a matemática.

A partir destas constatações, a presente pesquisa pretende oferecer uma ferramenta no ensino de probabilidades. Compreendendo as vantagens de se utilizar jogos para introduzir conceitos abstratos, pais e professores podem utilizar o material pesquisado acerca de quatro jogos, o *passé-dix*, *caixa de Bertrand*, *jogo dos diferentes e cobras e escadas* para trabalhar por um viés lúdico e prático, capaz de evitar equívocos no processo de aprendizado do tema.

3.1 JOGO PASSE-DIX

Entre os jogos que permitiram reflexão e proposição de uma abordagem probabilística, está o jogo “passe-dix”, o qual era praticado nas cortes francesas do século XVII. O jogo consiste em lançar simultaneamente três dados, esperando que o resultado da soma de todas as faces seja maior do que 10 para que o jogador, no caso o banqueiro, fique com a posse do montante apostado. Caso contrário, a aposta é aumentada e o próximo jogador se torna o banqueiro e lança os dados (DIAS, 2015).

O autor destaca ainda que a questão sobre o jogo ganha espaço nas discussões universitárias por ter chamado atenção de Galileo Galilei para um ponto específico do jogo, sobre o qual o autor publicou seu artigo *Sopra le Scoperte dei Dadi* (Considerações sobre o jogo dos dados), publicado em 1718. Jogadores experientes de passe-dix, incluindo Galileu, percebem a maior probabilidade de ocorrência da soma 10 sobre a soma 9, embora intuitivamente se chegue, equivocadamente, à conclusão de que são iguais as chances de se obter tanto o 9 quanto o 10, já que existem seis formas distintas de se obter o número 9, e seis formas distintas de se obter o número 10. O Quadro 1 apresenta todas as possíveis combinações para a soma 9 e para a soma 10, com os valores de dentro das chaves representando os pontos obtidos em cada dado.

Quadro 1 – Possíveis combinações para a obtenção de 9 ou 10 pontos

SOMA	9 Pontos	10 Pontos
1ª Forma	{1,2,6}	{1,3,6}
2ª Forma	{1,3,5}	{1,4,5}
3ª Forma	{2,3,4}	{2,3,5}
4ª Forma	{1,4,4}	{2,2,6}
5ª Forma	{2,2,5}	{2,4,4}
6ª Forma	{3,3,3}	{3,3,4}

Para verificação da existência de uma maior frequência para o resultado de soma 10 sobre o resultado de soma 9, pode-se recorrer a simulações. Os gráficos 1 e 2 mostram, respectivamente, resultados encontrados por simulação para 80 repetições e para 80.000 repetições.

Gráfico 1 – Comparação da obtenção dos resultados 9 e 10 em 80 repetições

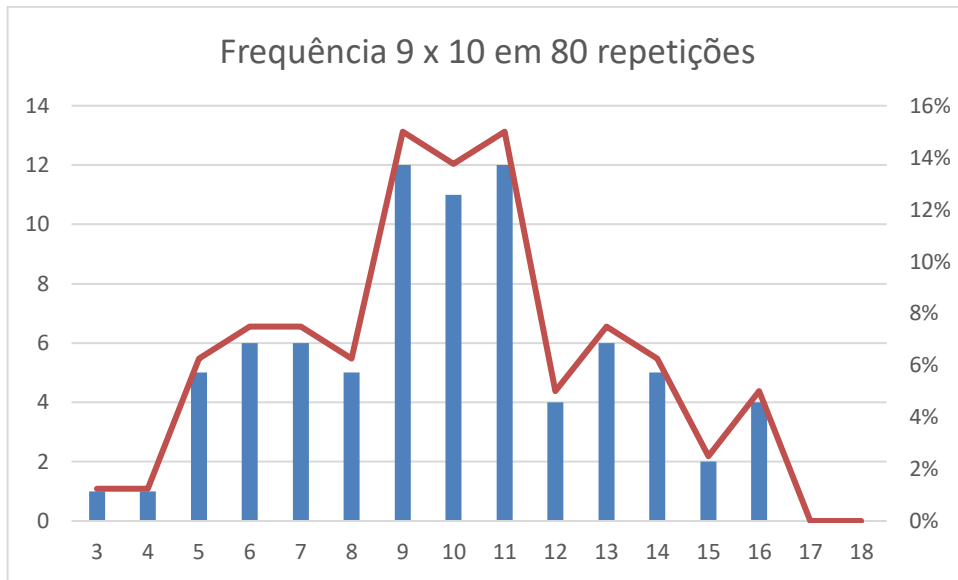
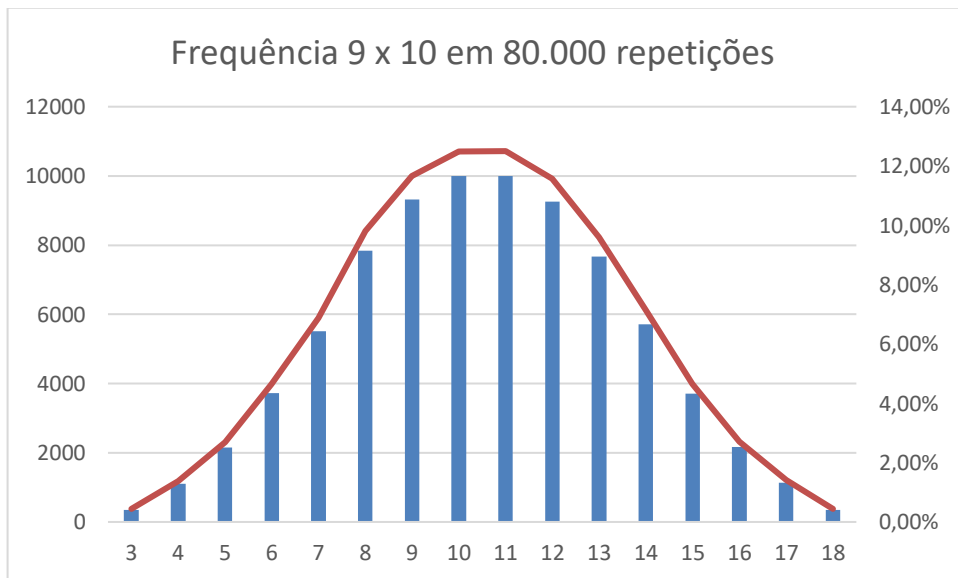


Gráfico 2 - Comparação da obtenção dos resultados 9 e 10 em 80.000 repetições



A simulação dos resultados do lançamento dos dados permite visualizar quem está com a razão: o grupo de jogadores experientes que percebem a maior frequência do número 10, ou aqueles que afirmam ser igual a probabilidade de se encontrar o 9 ou o 10. A experiência foi simulada no laboratório online, com entradas de variáveis aleatórias de 1 a 6, como o que acontece com os dados.

Na experiência, é possível perceber que o que parece ser um fenômeno que possibilita chances iguais para a obtenção de resultados 9 ou 10 em um número pequeno de repetições, se torna, com o aumento sucessivo no número de lançamentos dos três dados, um fenômeno que demonstra a maior ocorrência do número 10 sobre o número 9, corroborando com a visão dos

experientes jogadores de passe-dix. Na primeira série de dados, o 9 apareceu em 15% das oportunidades, enquanto o 10 apareceu em 14% das vezes na mesma série, o que indicaria uma falha na percepção dos jogadores com mais experiência em passe-dix. Todavia, ao continuar o processo de simulação até a marca dos 80.000 lançamentos, a probabilidade de se encontrar o número 9 passou para 11,66%, enquanto em 12,50% dos lançamentos foi encontrado o número 10. Como o elevado número de experiências leva a uma estabilização dos resultados, fica claro que os acontecimentos não são equiprováveis e que a possibilidade de ocorrência do número 10 é maior do que a do número 9.

O gráfico 3 mostra a dispersão dos dados obtidos em 40 experiências com 80 repetições, enquanto o gráfico 4 mostra a dispersão dos dados obtidos em outras 40 experiências, mas agora com 80.000 repetições.

Gráfico 3 - Dispersão com 80 jogadas

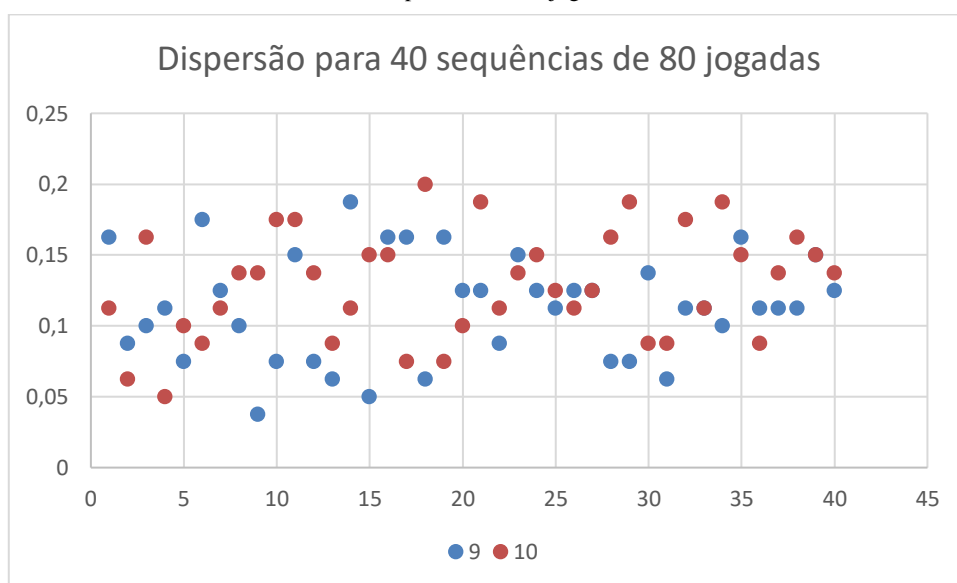
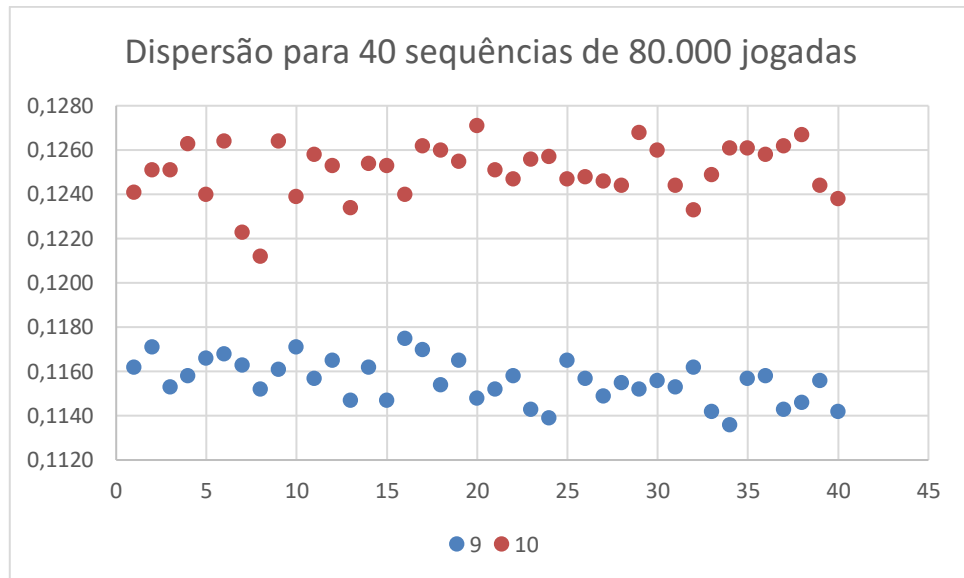


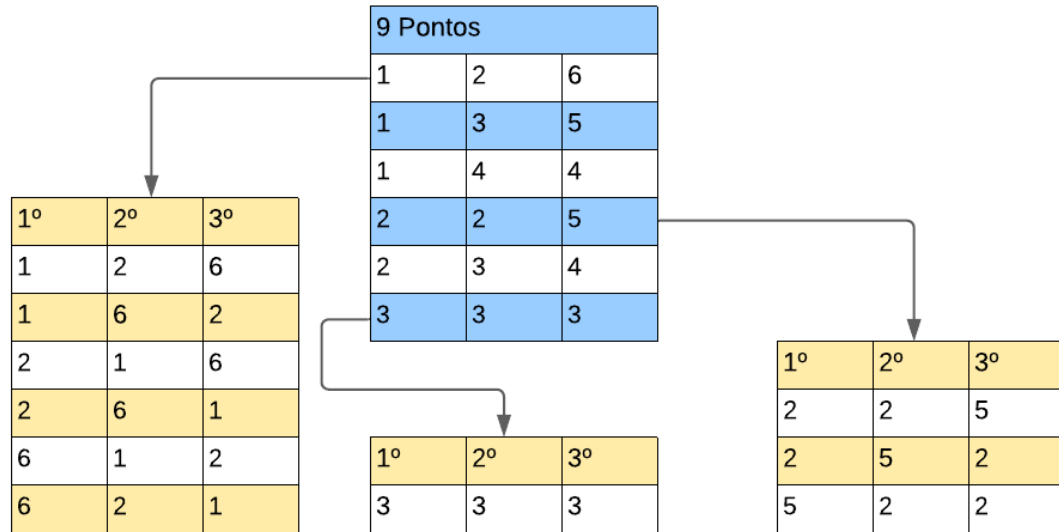
Gráfico 4 - Dispersão com 80.000 jogadas



A observação dos gráficos 3 e 4 permite perceber a evolução das frequências relativas com o aumento do número de jogadas, evidenciando que, o que no princípio se parece algo totalmente aleatório, se torna ao final das 80.000 jogadas algo que segue um padrão lógico a partir da estabilização das frequências relativas de obtenção dos valores 9 e 10 no jogo passe-dix, com maior probabilidade para o maior valor.

Com a prova empírica indicando a razão para aqueles que afirmavam ser mais provável a obtenção do valor 10 em relação ao 9, resta buscar-se uma explicação para tal fato. Apesar da existência de um mesmo número de formas para se alcançar as somas iguais a 9 e 10, seis possibilidades, existe uma diferença quando se analisa o caso em termos dos casos favoráveis para a ocorrência de cada soma. A figura 1 elucida sobre o tópico ao apontar exemplos de possibilidades.

Figura 1 – Possíveis combinações para os diferentes resultados



Compreendendo todas os possíveis resultados a partir do exemplo da figura 1, as possibilidades de todas as combinações para resultado de soma 9 e para resultado de soma 10 são mostradas na tabela 1.

Tabela 1 – Possibilidades de cada caso para soma 9 e 10

9 Pontos	Possibilidades	10 Pontos	Possibilidades
{1,2,6}	6	{1,3,6}	6
{1,3,5}	6	{1,4,5}	6
{2,3,4}	6	{2,3,5}	6
{1,4,4}	3	{2,2,6}	3
{2,2,5}	3	{2,4,4}	3
{3,3,3}	1	{3,3,4}	3
TOTAL	25	TOTAL	27

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Como fica claro a partir da tabela 1, combinações com três números distintos podem ser alcançadas de seis maneiras diferentes, enquanto combinações com dois números iguais e um distinto podem ser alcançadas por três maneiras e combinações com três números idênticos só pode ser alcançada de uma maneira. Assim, do total de 216 resultados possíveis a partir do lançamento dos três dados ($6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$), apenas 25 casos satisfazem ao exigido para obtenção da soma igual a 9 pontos, o que representa 11,57% das possibilidades ($\frac{25}{216} =$

11,57%), e são 27 os casos em que a soma dos dados alcança a quantia de 10 pontos, ou seja, 12,50% dos casos ($\frac{27}{216} = 12,50\%$), ou seja, valores sensivelmente próximos àqueles encontrados via simulação.

Uma estratégia de inserção da temática em sala de aula para ensino fundamental e médio seria por meio de, inicialmente, uma discussão sobre a intuição dos alunos acerca da igualdade ou não de possibilidades dos resultados, para posterior prática capaz de levar aos alunos uma percepção de que certos valores ocorrem mais vezes do que outros. Assim que percebido pela turma a aparição de um número em maior quantidade de vezes que outro, o professor pode introduzir os conceitos de probabilidade que confirmam o pensamento de alguns alunos, e respondem aos equívocos do pensamento de outros.

Um equívoco comum ao caso explicitado no jogo passe-dix foi estudado por Dias (2015), quem o chamou de enviesamento da equiprobabilidade. O autor comenta que é comum estudantes acreditarem que aqueles eventos com caráter aleatório são, por natureza, equiprováveis, o que não se verifica na questão posta por Galileu acerca da probabilidade de obtenção da soma 9 ou da soma 10.

Outro equívoco importante comum aos estudantes é a não percepção correta do espaço amostral do jogo, como o paralelo estudado por Fischbein e Gazit (1984) em que uma condição restringe o espaço amostral da probabilidade condicionada.

3.2 JOGO CAIXA DE BERTRAND

Joseph Bertrand foi um matemático francês que propôs em seu livro *Calcul des Probabilités*, de 1889, o problema conhecido como caixa de Bertrand. O cenário do jogo é aquele em que existem três caixas, e em cada caixa existem duas gavetas fechadas com uma moeda dentro. Uma das caixas possui duas moedas de ouro em cada uma de suas gavetas, enquanto outra das caixas possui duas moedas de prata em cada uma de suas gavetas e, por fim, a terceira caixa contém uma moeda de ouro em uma gaveta e uma moeda de prata na outra gaveta. Nesta situação, uma caixa é escolhida e, dentro da caixa, uma das gavetas é selecionada e aberta, encontrando uma moeda de ouro. A partir deste fato, a questão posta é definir a probabilidade de se encontrar outra moeda de ouro na gaveta restante.

O problema da caixa de Bertrand pode ser classificado como uma experiência sujeita a uma condição, ou seja, é o caso de uma probabilidade condicionada. Para este tipo de problema, é comum que os alunos sem aprofundamento nos conceitos probabilísticos afirmem, equivocadamente, que restam apenas duas opções: ou a moeda da outra gaveta seria de ouro,

ou de prata, já que a gaveta aberta indica que a caixa escolhida deveria ter uma moeda de ouro (já conhecida) e a outra seria de ouro (no caso das duas gavetas com moedas de ouro) ou de prata (no caso de uma moeda de cada tipo), e que portanto a probabilidade seria de 50% para cada resultado esperado.

A partir de um experimento computacional, todos têm condições de compreender que a probabilidade de se encontrar outra moeda de ouro não é de 50%, mas de 66,6%, já que a frequência relativa da moeda ser de ouro é maior do que a de prata pela condição anterior, a abertura de uma gaveta com uma moeda de ouro. O Gráfico 5 ilustra a frequência para uma repetição de 80 experiências, enquanto o Gráfico 6 o faz para 80.000 experiências.

Gráfico 5 - Frequência de Ouro x Prata em 80 repetições

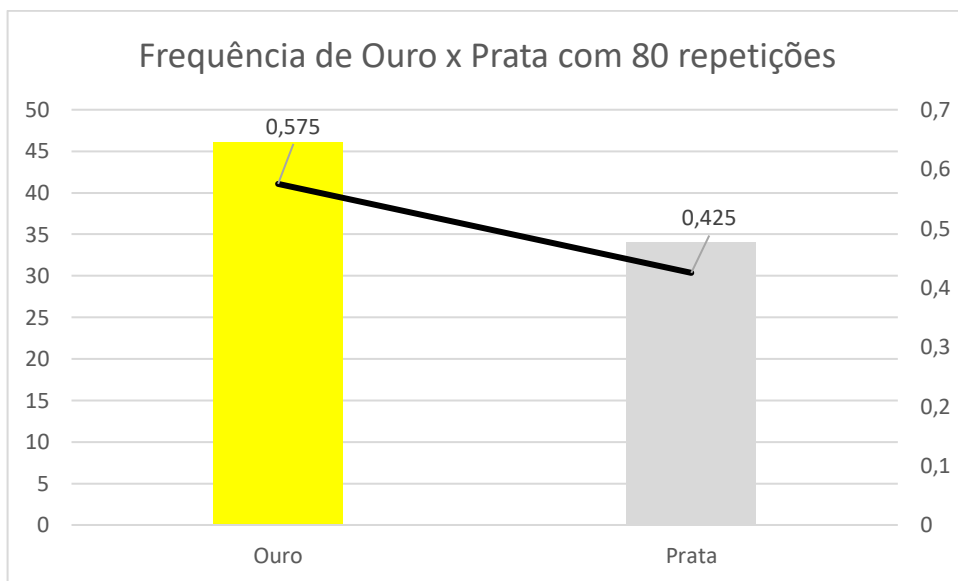
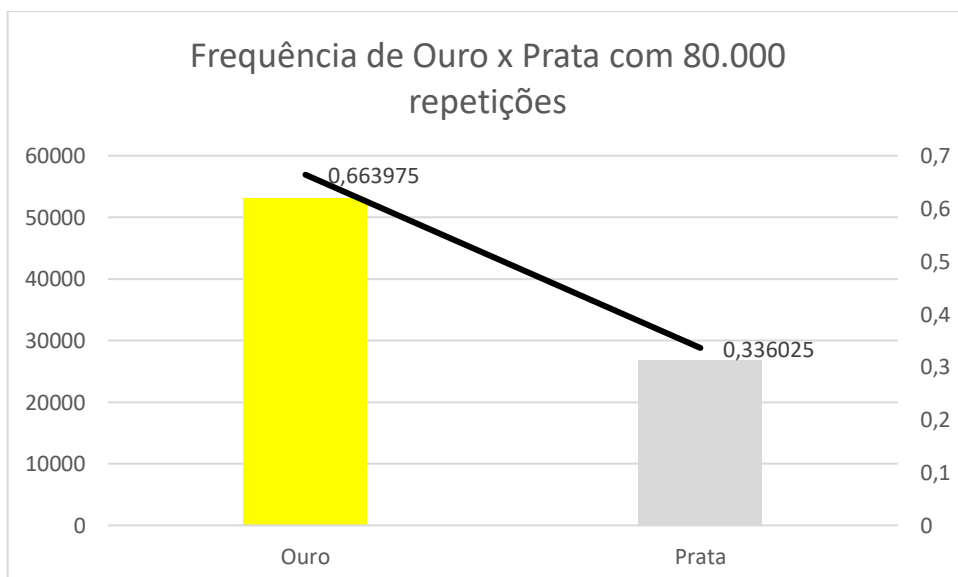
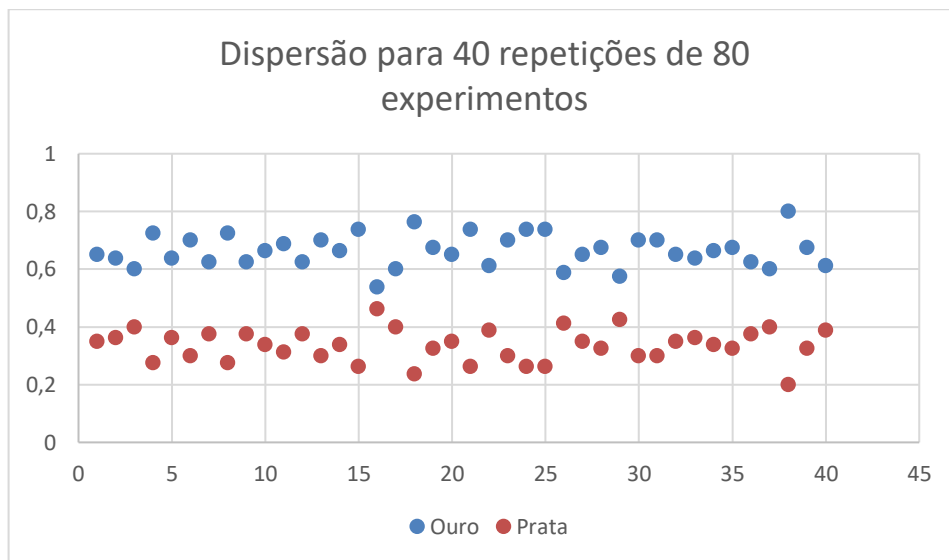


Gráfico 6 – Frequência de Ouro x Prata com 80.000 Repetições



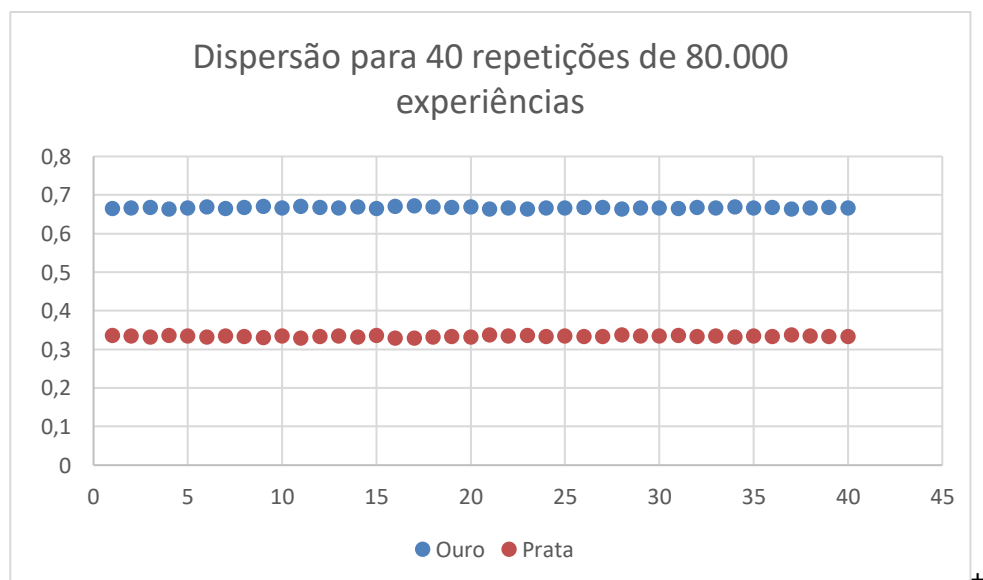
Com um grande número de repetições, é possível presumir que não seja casual o equilíbrio tendendo a 66,6% para a moeda de ouro e a 33,4% para a moeda de prata. O gráfico 7 mostra a dispersão do mesmo experimento e permite acompanhar de forma visual a mudança do comportamento dos resultados quando existe um número pequeno ou grande de repetições, nota-se que com 80 experimentos, é possível perceber uma tendência superior para o encontro da moeda de ouro, mas ainda imprecisa.

Gráfico 7 – Dispersão para 40 repetições de 80 experimentos



O gráfico 8 permite perceber a estabilização dos resultados em 0,667 para o encontro da moeda de ouro e em 0,334 para a moeda de prata.

Gráfico 8 – Dispersão para 40 repetições de 80.000 experiências



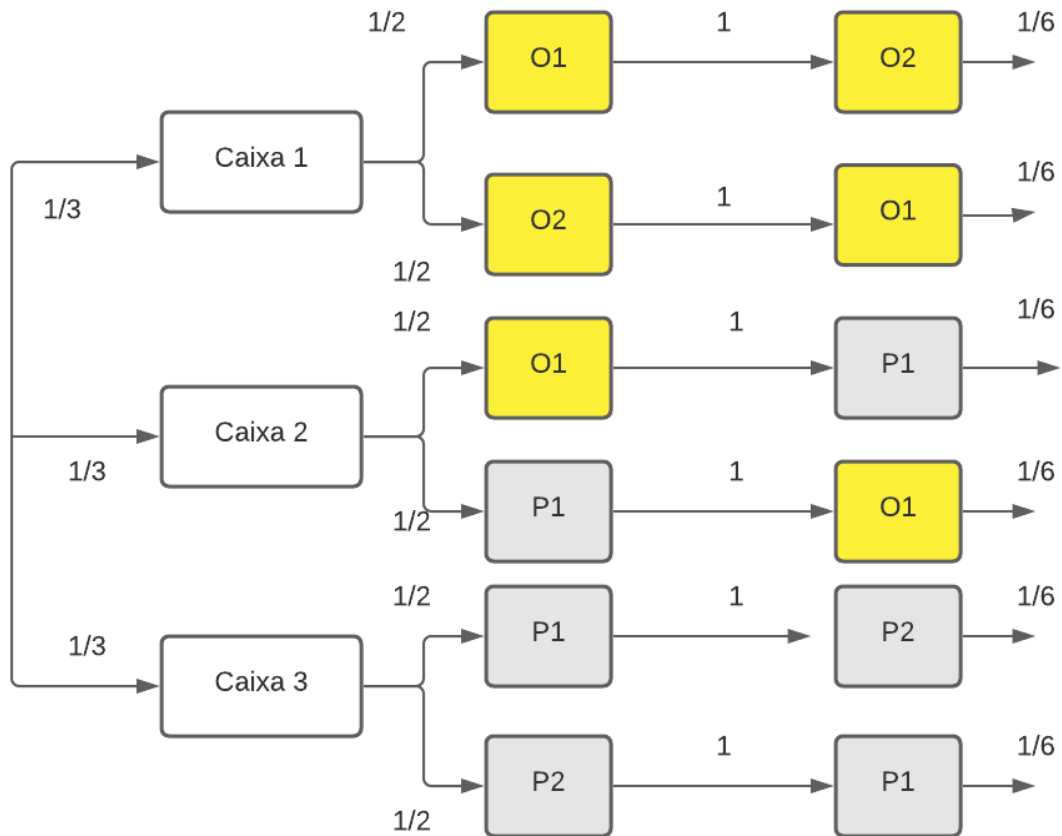
Com vivência empírica sobre as possibilidades, resta investigar os motivos dos equívocos e oferecer as explicações necessárias. É presumível que aqueles que entendem ser igual a probabilidade de encontrar uma moeda de ouro ou uma moeda de prata não consigam perceber qual é o espaço amostral da experiência e nem compreendem sobre a dependência dos acontecimentos sequenciais.

Sobre erros do primeiro caso, é comum que a intuição leve o aluno a deduzir que, já que ele escolheu uma caixa que contém uma gaveta com moeda de ouro, a outra deve necessariamente conter ou outra moeda de ouro ou uma moeda de prata. Este aluno considera equiprovável a possibilidade entre a moeda de ouro e a de prata, por não refletir sobre o fato de que o universo com duas moedas e ouro ser mais provável do que o universo com uma moeda de ouro e outra de prata. Este equívoco foi estudado por Dias (2015) e por Fischbein e Gazit (1984), quando os autores destacam a dificuldade dos discentes em definir um espaço amostral adequado e em perceber a não equiprobabilidade em todos os acontecimentos aleatórios.

O erro do segundo caso, conhecido como falácia da inversão do eixo temporal (CORREIA, FERNANDES E CONTRERAS, 2013), faz com que o aluno acredite que o acontecimento condicionante deve necessariamente preceder temporalmente o acontecimento condicionado, o que no caso da caixa de Bertrand significa que a moeda de ouro encontrada não poderia afetar um evento que aconteceu antes: a seleção da caixa. Falk (1986) acredita que este tipo de equívoco deriva da incorreta compreensão da linguagem dos alunos, que confundem probabilidade conjunta e condicional. Tversky e Kahneman (1983) destacam que é comum que alunos acreditem que a conjunção é mais representativa do que os acontecimentos separados, o que é comum quando um dos acontecimentos é representativamente mais provável que outro.

A partir da sensibilização dos alunos e da experimentação, eles passam a perceber questões de probabilidade de maneira mais concreta. Para complementar a percepção do espaço amostral, é possível recorrer a um diagrama de árvore que possibilite a esquematização e representação dos diferentes acontecimentos das experiências, permitindo a visualização da natureza sequencial do problema, como apontado na figura 2.

Figura 2 – Diagrama de Árvore relativo à Caixa de Bertrand



A figura 2 permite total compreensão da sequência das atividades, iniciadas pela escolha de uma caixa, com um terço de chance para cada caminho, posterior escolha entre duas gavetas, com metade de chance para cada caminho, e, por fim, a abertura da gaveta restante.

Com a utilização do diagrama de árvores, o aluno pode perceber que, ao se escolher uma caixa na qual existe uma moeda de ouro em uma das gavetas, restam três casos com a mesma probabilidade de ocorrência. O primeiro é aquele em que foi selecionada a caixa com duas moedas de ouro e, portanto, a outra gaveta também contém uma moeda de ouro. O segundo caso é aquele em que também se tem duas moedas de ouro, mas as gavetas se invertem na escolha para a abertura. E o terceiro caso é aquele em que, apesar da abertura de uma gaveta com uma moeda de ouro, a caixa escolhida era aquela que continha uma moeda de cada tipo, ou seja, restará uma moeda de prata na outra gaveta.

Dos casos possíveis, dois satisfazem ao desejo de se encontrar uma segunda moeda de ouro, e uma não satisfaz. Assim, a probabilidade condicionada aponta o mesmo resultado encontrado na experimentação.

$$P = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3} = 66,66\%$$

3.3 JOGO COBRAS E ESCADAS

De acordo com Bastos (2019), o Jogo Cobras e Escadas é um jogo de tabuleiro para crianças sem habilidade ou interesse em matemática. Há um tabuleiro de xadrez que é essencialmente um quadrado que varia de 1 a 100. Cada jogador começa no quadrado 0 (fora do tabuleiro), e os jogadores se revezam. Em cada turno, o jogador rola um dado regular de 6 lados e avança tantas casas quanto o dado. A diferença é que alguns quadrados ("escadas") o levarão para os quadrados posteriores quando você pousar, enquanto outros ("cobras") o levarão de volta aos quadrados anteriores. O objetivo é ser o primeiro a chegar ao quadrado 100.

A questão é que os jogadores são independentes. Eles também podem jogar separadamente, cada um contando quantos lances fez e depois comparando as pontuações finais: aquele com menos lances vence (BASTOS, 2019). Sua origem está na Índia como parte da família de jogos que incluem um dado para jogar, como o famoso "Pachisi" que conhecemos hoje como ludo. Mais tarde, este se espalhou para a Inglaterra que é responsável por comercializá-lo sob o nome de "Snakes and Ladders", fez tanto sucesso que conseguiu chegar a muitos países, como o Brasil, de acordo com Viana (2011).

O funcionamento do jogo consiste em alcançar a última célula de um tabuleiro de um baú movendo uma peça que indica a posição atual do jogador. Para avançar neste quadro, será utilizado um dado virtual e serão feitas perguntas que o aluno deverá responder corretamente. O estímulo para o aluno consiste em atingir a última célula obtendo a maior pontuação possível, pois esse valor será utilizado para a classificação do aluno no ranking geral da disciplina (VIANA, 2011).

Acredita-se que Cobras e Escadas tenha se originado de um jogo indiano chamado Gyan Chauparem Hindi, que chegou à Inglaterra vitoriana como um efeito colateral do colonialismo britânico. O jogo é jogado desde o século 2 dC, e várias fontes atribuem suas origens a Sant Dnyaneshwar no século 13, mas novamente sem citar qualquer base. Alguns argumentaram que o jogo do século 18 tem evidências concretas, dizendo que é, sem dúvida, muito mais antigo. O tamanho do tabuleiro, o número de cobras e escadas, e suas posições, representações e rótulos

variam, mas o jogo continua o mesmo. Em dois continentes, o jogo é voltado para a educação moral. Escadas de bondade e vícios, representadas por cobras, o levarão para alguma versão do paraíso. Sua representação e rotulagem serão adequadas à moral da época e do lugar, como a versão vitoriana, com sua escada que leva a uma praça elegante (RAMALHETE, 2018).

Ele era conhecido como o jogo do conhecimento que transmitiu ensinamentos filosóficos da cultura em que foi criado. O jogador rolava os dados para entrar em um mundo espiritual onde as escadas o ajudariam a alcançar o conhecimento e as cobras o impediriam de subir, diferente do jogo que é conhecido hoje no Brasil. Alcançar a última caixa, número 100, significava iluminação espiritual. Algumas versões deste jogo que podem ser vistas hoje em museus não incluem ilustrações nas caixas, apenas texto que indica a ascensão espiritual, porém, são decoradas nas margens com algumas divindades e as cobras são de cores diferentes (VANZELLA, 2009).

A versão original de Cobras e escadas apresentava uma visão sobre a vida que misturava livre-arbítrio com sorte. Era conhecido como uma ferramenta para ensinar as consequências de boas e más ações. As escadas representavam virtudes e as cobras representavam imoralidades. Ao jogá-lo, uma espécie de salvação foi alcançada através do conhecimento e a escolha teórica de boas ações. O número de escadas e cobras não era equilibrado, sempre havia mais cobras do que escadas para enfatizar que é mais difícil fazer o bem do que o mal (CONSTANTIN, 2019).

O jogo original apresentava cinco virtudes; fé, confiabilidade, generosidade, conhecimento e ascetismo e 12 ações imorais: desobediência, vaidade, vulgaridade, roubo, mentira, embriaguez, dívida, raiva, ganância, orgulho, assassinato e luxúria, muito divergente do que é conhecido atualmente.

Originalmente, o jogo foi pintado em tela pintada com guache e possivelmente jogado em qualquer superfície plana. Consistia em caixas ou espaços ordenados em sequência numérica e do mesmo tamanho, o que lhe dava uniformidade e ordem. Dependendo da versão do jogo, o número de caixas variava de 64 a 142. O mais comum era 100 caixas em média. As caixas podiam ser quadradas ou redondas e incluíam números e informações visuais ou verbais do que se pretendia ensinar.

Agora analisando o jogo de matemática, vamos supor que haja uma escada de 4 a 14 no tabuleiro. Isso significa que 4 nunca pode ser ocupado: por exemplo, se um jogador está no 3 e tira um 1, ele se move para 14.

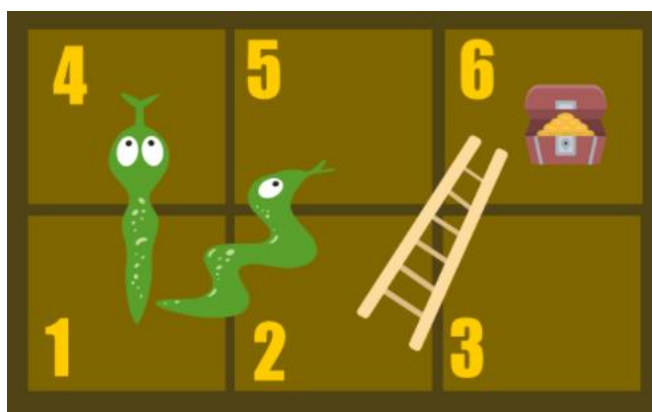
Há dois pequenos detalhes. Uma delas é como terminar. Se exceder 100, é tratado como comprometer-se, ficar na mesma caixa e tentar novamente na próxima rodada, ou "refletir" de

100? A versão "refletor" foi escolhida arbitrariamente: começando em 99, por exemplo, rolar um 3 levaria 1 passo à frente para 100 e depois 2 passos para trás para 98.

O segundo detalhe é que às vezes o jogo é jogado de modo que se um jogador tirar um 6, ele pode dar um passo extra na mesma rodada; não há diferença essencial e essa complicação é evitada.

Para este estudo, foi desenvolvido o Jogo Cobras e Escadas com um tabuleiro de 6 quadrantes que pode ser visto a seguir na figura 3. O jogo possui perguntas sugeridas como: "Qual a probabilidade de o jogador vencer no primeiro lançamento?" e "Qual a probabilidade de cair na casa 1 no primeiro lançamento?"

Figura 3 – Jogo Cobras e Escadas



Com base no que foi visto até agora, foi feita uma simulação de 80 e 80.000 repetições (tabela 2 e tabela 3) no próprio laboratório virtual, a fim de convalidar quais os números que poderiam ser obtidos no lançamento do dado.

Tabela 2 – 80 repetições no jogo cobras e escadas

#	Nº de ocorrências
Resultado 1	38
Resultado 2	0
Resultado 3	21
Resultado 4	0
Resultado 5	0
Resultado 6	21

Com base na simulação da tabela 2 e com base nas perguntas sugeridas no jogo, a probabilidade experimental de cair na casa 1 é 47,5%, ao passo que a probabilidade do jogador vencer (casa 6) é de 26,25%, bem como é a mesma probabilidade de cair na casa de nº 3.

Tabela 3 – 80000 repetições no jogo cobras e escadas

#	Nº de ocorrências
Resultado 1	40016
Resultado 2	0
Resultado 3	15879
Resultado 4	0
Resultado 5	0
Resultado 6	24105

A tabela 3 apresenta o resultado da simulação feita com 80000 repetições, através dessa tabela fica evidente que a probabilidade experimental do dado cair na casa 1 é de 50,02%, ao passo que a probabilidade de cair na casa 3 é de aproximadamente 19,85%, e de cair na casa 6 é de 30,13%, mostrando ter uma probabilidade divergente de 80 repetições.

Uma proposta de aplicação seria analisar algumas probabilidades teóricas relacionadas ao jogo, como aquelas que estão indicadas nas perguntas sugeridas.

Analisando a probabilidade de o jogador vencer no primeiro lançamento, teríamos dois casos em que isso aconteceria. O primeiro seria quando temos o resultado dois no dado, o jogador iria para a “casa 2” e subiria até a “casa 6” vencendo o jogo. O segundo caso é quando o jogador tira o número 6 no dado, ele vai para a “casa 6” vencendo assim também o jogo. Logo teríamos dois casos favoráveis em um total de seis, e a probabilidade teórica seria de 33,33% algo bem próximo dos valores que conseguimos através da experimentação.

3.4 JOGO DOS DIFERENTES

Xadrez e damas chinesas são considerados os mais antigos jogos de tabuleiro sobreviventes. Normalmente, estes são jogados usando números, fichas ou símbolos na mesa, mas em alguns jogos são usados cartões. Um dos jogos mais típicos e tradicionais, o Ludo consiste em mover peças coloridas no tabuleiro, dependendo do número de pontos obtidos ao rolar os dados (PRADO, 2018).

Atualmente, os jogos de tabuleiro incorporam elementos educativos ou pedagógicos da aprendizagem infantil, utilizando o elemento de oportunidade como pretexto para inserir um elemento de desafio intelectual que estimule a aprendizagem (SANTOS, 2021). Os dados são comumente usados para movimentos aleatórios em jogos de tabuleiro, por exemplo, para decidir até onde uma peça se move no tabuleiro, para determinar o resultado de um evento, para resolver conflitos, realizar uma ação ou apostar no resultado de um movimento, por exemplo, em jogos diferentes.

Enquanto os dados são usados principalmente para jogos de azar e elementos aleatórios em jogos (como jogos de RPG), o cientista Francis Galton já descreveu um método de geração de números aleatórios usando dados em 1890, expressamente para fins científicos (CUSTÓDIO *et al*, 2019).

De acordo com Custódio *et al* (2019), os dados também são usados para adivinhação e outras práticas ocultas conhecidas como "adivinhação", uma antiga forma de adivinhação feita através de elementos considerados aleatórios, como os dados. Normalmente são usados pares de dados comuns, embora outras formas de poliedros possam ser usadas. Por exemplo, o budismo tibetano às vezes usa esse método de adivinhação.

De acordo com as leis da mecânica clássica, o resultado de um lançamento de dados depende de como os dados são rolados. As jogadas de dados são um evento aleatório e, devido à incerteza de fatores secundários, como pequenos movimentos nas mãos do lançador, são um dispositivo que gera números aleatórios, assim como um sorteio de uma moeda ou uma roleta de cassino. Para reduzir a possibilidade de que os números gravados na superfície de alguns estilos de dados possam causar pequenos desvios nos resultados, os cassinos usam dados de precisão com marcas de nivelamento (COSTA, 2020).

Segundo Boni (2021), os dados podem ser usados de várias maneiras para derivar várias distribuições de probabilidade. Para um dado perfeito de 6 faces, a probabilidade de todos os resultados é $1/6$.

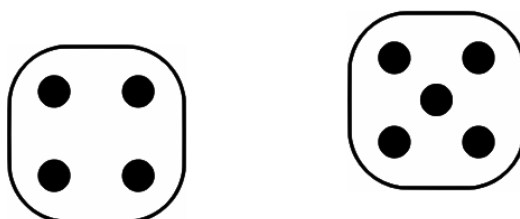
Quanto mais próximo o rolo do dado estiver de uma "distribuição uniforme discreta", mais rolagens, mas os valores extremos (rolagem alta ou baixa) às vezes são removidos para modificar a distribuição de várias maneiras. Nos chamados "dados médios", os valores extremos são eliminados, resultando em uma distribuição semelhante a uma "distribuição normal". Um "dado médio" amplamente utilizado é um dado de 6 lados com lados numerados 2, 3, 1, 4 (BONI, 2021).

Por exemplo, rolar um dado de 6 lados com os lados 2, 3, 3, 4, 4 e 5 produzirá uma distribuição diferente de rolar dois dados tradicionais. Existem 36 combinações possíveis de

rolar dois dados de 6 faces. Por exemplo, dois "dados médios" somam apenas de 4 a 10, enquanto dois dados regulares somam de 2 a 12. Existem 10 opções para somar 7 com "dados médios", mas existem apenas 6 possibilidades para dados regulares. Com esses dados, é possível obter a mesma média aritmética dos dados padrão (3,5 para um único dado, 7 para um par), de acordo com Pontes *et al* (2020).

Posto isso, foi exposto no laboratório virtual o jogo dos diferentes (figura 4), que o mesmo apresenta dois dados que devem ser lançados, e tem como instrução que se o primeiro jogador obtiver duas faces diferentes ele vence, e o segundo jogador vence quando o dado mostra duas faces iguais.

Figura 4 – Jogo dos diferentes



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

O jogo dos diferentes apresenta as seguintes perguntas sugeridas:

- Qual a probabilidade do jogador 1 vencer?
- Qual a probabilidade do jogador 2 vencer?
- Qual jogador tem mais chances de vencer?

Desta forma, a seguir nas tabelas 4 e 5 serão apresentadas as simulações de 80 e 8000 repetições do jogo dos diferentes.

Tabela 4 – Simulação de 80 repetições do jogo dos diferentes

#	Nº de ocorrências
Diferentes	60
Iguais	20

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Com base na simulação de 80 repetições, vemos que a probabilidade do Jogador 1 vencer é de 75%, ao passo que a probabilidade do Jogador 2 vencer é de apenas 25%.

Tabela 5 – Simulação de 80000 repetições do jogo dos diferentes

#	Nº de ocorrências
Diferentes	65501
Iguais	14499

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

De acordo com a Tabela 5, a chance do Jogador 1 vencer é ainda maior com 80 repetições, pois a mesma representa aproximadamente 81,88% de chance, ao passo que o Jogador 2 possui apenas 18,12% de chance de vencer. Ou seja, com base nas simulações de 80 e 80000 repetições a probabilidade do Jogador 1 vencer é bem maior do que a probabilidade do Jogador 2 vencer.

Como o objetivo do laboratório online, é fazer a comparação entre a probabilidade teórica com a experimental, podemos sugerir que sejam feitos alguns cálculos de probabilidade teórica relacionado com o jogo, como as quais estão indicadas nas perguntas sugeridas.

Analisando qual jogador tem mais chance de vencer, temos que as possíveis combinações no lançamento de dois dados então indicadas na tabela abaixo:

Tabela 6 – Possíveis resultados do lançamento de dois dados

D ₂ \ D ₁	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Dos trinta e seis resultados possíveis temos que seis são iguais { (1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6)} e o restante, são diferentes. Logo a probabilidade do “jogador 1” vencer é de trinta em trinta e seis, ou seja, aproximadamente 83,33% e a probabilidade do “jogador 2” vencer é de seis em trinta e seis, ou seja, aproximadamente 16,66%, valores próximos aos encontrados via simulação.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

De acordo com Ferreira *et al* (2017), as novas gerações de alunos estão constantemente conectadas a computadores, dispositivos móveis de comunicação e Internet. Essas tecnologias

já são familiares e muitas delas disponível para um número cada vez maior de alunos. A realização de práticas laboratoriais é recente, mas apresenta resultados promissores, nessas práticas os alunos se apresentam como elementos ativos do aprendizado, verificando-os experimentalmente e de forma adequada ao seu contexto e realidade.

Um laboratório virtual tem uma função principalmente educacional que permite assimilar conceitos, leis e fenômenos sem ter que esperar longos períodos e investir em infraestrutura. É também uma ferramenta de previsão e verificação de dados para o desenho de experimentos cada vez mais complexos.

Baseando-se no referencial teórico e na análise do laboratório virtual, é dado que a importância essencial da aplicação de métodos de cálculo de probabilidade reside na sua capacidade de estimar ou prever eventos. Quanto maior a quantidade de dados disponíveis para calcular a probabilidade de um evento, mais preciso será o resultado calculado. Dada a complexidade dos sistemas nos quais a teoria das probabilidades costuma ser aplicada, são necessários modelos computacionais e estatísticos altamente elaborados, o que seria impossível se não houvesse recursos tecnológicos modernos relacionados à computação.

A construção e projeto de um Laboratório Virtual de Probabilidade é uma proposta essencialmente para implementar no ensino, em disciplinas de matemática ou de curso técnico, e de engenharia com mediação virtual e que por sua estrutura intuitiva e amigável favorece a aprendizagem autônoma e/ou que sirva como complemento de cursos presenciais ou a combinação de duas mediações. Neste caso, a construção e o design foram pensados para que tudo (experiência, medições, resultados e relatório) seja virtual; o laboratório deve transcender e sair do espaço físico, ser inclusivo e preparar para o trabalho de campo real e como ferramenta de pesquisa (SILVA, 2012).

No curto prazo, espera-se que a implementação produza resultados que permitam estabelecer comparações com laboratórios ou práticas de estatística presencial. O que diz respeito, a longo prazo, podem ser consideradas comparações com propostas semelhantes, uma vez que o mesmo pode ser empregue para ajudar acadêmicos que pretendam utilizar em seus trabalhos como meio de pesquisa.

Por outro lado, o Laboratório Virtual de Estatística como proposta pedagógica, pode auxiliar primeiramente com cursos teóricos, fundamentalmente caracterizados por serem mais ou menos rígido, focado no conteúdo, relatórios de leitura, propor avaliações, questionários, fóruns colaborativos e onde as propostas de pesquisa são feitas com base em projetos, casos ou discussão de problemas e o processamento de dados pode ser feito com softwares licenciados,

sendo também válido para trabalhar a interdisciplinaridade com outros conteúdos, tais como física, química e biologia.

Por fim, a implantação do Laboratório Virtual de Estatística surge como uma proposta pedagógica moderna, que deve ser discutida, comparada e implementada, visando tornar a ferramenta mais viável para cada realidade e mais difundida no meio acadêmico.

5. CONCLUSÃO

O Laboratório Virtual de Probabilidade, até o momento, é apenas uma proposta de projeto, estudos posteriores devem analisar o impacto de sua implementação parcial ou total em mediações educacionais, portanto, não existem bases de dados que permitam estabelecer os impactos educacionais dessa metodologia em comparação aos modelos de aprendizagem tradicionais construtivista-conectivistas, limitando assim as conclusões desse trabalho.

Comparado aos laboratórios onde é exigida a presença tanto do professor quanto do aluno, o laboratório virtual permite: interação remota, de forma síncrona ou assíncrona (casa, sala de aula, lan house, etc.); enquanto os laboratórios físicos exigem grandes investimentos em infraestrutura física e tecnológica, recursos humanos e materiais, os laboratórios virtuais exigem apenas um investimento mínimo por parte da instituição de ensino (computadores, conexão à internet, pontos de rede e servidores), o aluno só precisa de um computador, smartphone ou tablet e uma ligação à Internet. A revitalização do ensino tradicional através da aprendizagem combinada utilizando diferentes recursos é uma área promissora e que deve desempenhar um papel especial na área da educação nas próximas décadas, é espectável que as inovações tecnológicas sejam empregadas na educação, uma vez que elas possibilitam aumentar a imersão dos alunos e trazer benefícios para sua aprendizagem.

Independentemente da mediação escolhida e de se manter o modelo de ensino-aprendizagem ou se optar pela aprendizagem autônoma, um laboratório virtual abre um leque de possibilidades que dão a muitas disciplinas outra forma de recriar o experimento, inúmeras possibilidades de argumentação, as probabilidades não são exceção.

Para o futuro, espera-se como proposta pedagógica que o laboratório deve ir além do projeto e da construção e deve ser implementado, seja como complemento ao ensino tradicional e presencial ou como curso experimental de educação a distância. Pela sua relevância, deve ser implementado um piloto com alunos dos cursos de ciências básicas e engenharias, em mediações presenciais e tradicionais, preferencialmente que sejam ou tenham feito cursos de estatística (descritiva e inferencial) e probabilidade.

Por fim, no ensino deve ser implementado um instrumento padrão de avaliação periódica, que meça o progresso e permita comparações entre mediações presenciais e virtuais, sendo essencial um teste de conhecimento prévio. As aulas desenvolvidas no laboratório, devem ser periodicamente revisadas e atualizadas em termos de tópicos, estratégias didático-pedagógicas, programas, roteiros, rubricas, demonstrações, planilhas, relatórios e trabalhos colaborativos, independentemente dos resultados obtidos pelos alunos.

REFERÊNCIAS

- BAGLAMA, B.; YIKMIS, A.; DEMIROK, M. S. Special education teachers' views on using technology in teaching mathematics. **European Journal of Special Education Research**, 2017.
- BASTOS, P. A. S. *et al.* Jogo didático para aula de Geografia. **Anais do Pró-Ensino: Mostra Anual de Atividades de Ensino da UEL**, v. 1, n. 1, 2019. 10 p.
- BATANERO, C.; DÍAZ, C. Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. **Chilean Journal of Statistics**, v. 3, n. 1, p. 3-13, 2012.
- BONI, D. A. **Ensinando probabilidade com o jogo de dados de Mozart**. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, 2021.
- BOUTA, H.; PARASKEVA, F. The cognitive apprenticeship theory for the teaching of mathematics in an online 3D virtual environment. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 44, n. 2, p. 159-178, 2013.
- BURRILL, G.; BIEHLER, R. Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. In: **Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education**. Springer, Dordrecht, 2011. p. 57-69.
- CALVO, I. *et al.* Laboratorios remotos y virtuales en enseñanzas técnicas y científicas, Ikastorratza, **e-Revista de didáctica**, vol. 3, pp. 1-21. 2008.
- COSTA, D. L. A. **Desenvolvimento de um jogo de tabuleiro na versão Print and Play inspirado na história de Alagoas**. 108f. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Design) - Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2020.
- CUSTÓDIO, J. A. L.; AFIUNE, P. de S. O ethos religioso na antiguidade: a origem ritualística dos jogos de tabuleiro. **Revista de Artes FAP**, v. 20, n. 1, 2019. 19 p.
- DIAS, A. I. G. C. **O uso da simulação no cálculo de probabilidades**. 126f. 2015. Relatório de projeto (Mestrado em Ciências da Educação) – Instituto politécnico de Leiria, Leiria.
- FABREGAS, E.; *et al.* Developing a remote laboratory for engineering education, **Computers & Education**, v. 57, n. 2, p 1686-1697, 2011.
- FERREIRA, G. M. dos S.; CASTIGLIONE, R. G. M. TIC na educação: ambientes pessoais de aprendizagem nas perspectivas e práticas de jovens. **Educação e Pesquisa**, v. 1, n. 44, 2018. 22 p.
- FISCHBEIN, E.; GAZIT, A. **Does the Teaching of Probability Improve Probabilistic Intuitions?** An Exploratory Research Study. **Educational Studies in Mathematics**, v. 15, n. 1, p. 1-24. 1984.

GATTUSO, L. Statistics and mathematics. **Is it possible to create fruitful links**. In: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics. International Association for Statistical Education and International Statistical Institute, Salvador, 2006.

HARLAN, J. D., RIVKIN, M. S. **Ciências na Educação Infantil — uma abordagem integrada**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

HARRADINE, A.; BAKER, N. Birthing big ideas in the minds of babes. Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. **Proceedings of the ICMI Study**, v. 18, 2008.

IRELAND, S.; WATSON, J. Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 4, n. 3, p. 339-370, 2009.

JAMIE, D. M. Using computer simulation methods to teach statistics: A review of the literature. **Journal of Statistics Education**, v. 10, n. 1, 2002.

JARA, C. *et al.* Hands-on experiences of undergraduate students in Automatics and Robotics using a virtual and remote laboratory, **Computers & Education**, vol. 57, núm. 4, pp. 2451-2461. 2009.

JIMÉNEZ, C. I. Propuesta pedagógica para el uso de laboratorios virtuales como actividad complementaria. **Revista Mexicana de Investigación Educativa**, v. 19, n. 62, p.917-937, 2014.

KOFKE, D.; MIHALICK, B. Web-based technologies for teaching and using molecular simulation, **Fluid Phase Equilibria**, v. 194, n. 197, p. 327-335, 2002.

LEE, H.; HOLLEBRANDS, K. Students use of technological features while solving a mathematics problem, **Journal of Mathematical Behavior**, v. 25, p. 252-266, 2006.

LORANDI, A. *et al.* Los laboratorios virtuales y laboratorios remotos en la enseñanza de la ingeniería, **Revista Internacional de Educación en Ingeniería**, vol. 4, pp. 24-30. 2011.

MOLINA, J. **Herramientas virtuales: laboratorios virtuales para ciencias experimentales** - una experiencia con la herramienta VCL, trabajo presentado en X Jornades de xarxes d'investigació en docència universitària. 2012. Disponible em: <http://web.ua.es/es/ice/jornadas-redes-2012/documentos/posters/245405.pdf>. Acceso em: 12 abr. 2021.

MONGE, J.; MÉNDEZ, V. Ventajas y desventajas de usar laboratorios virtuales en educación a distancia: la opinión del estudiantado en un proyecto de seis años de duración, **Revista Educación**, v. 31, n. 1, p. 91-108, 2007.

MONGE, J.; MÉNDEZ, V.; RIVAS, M. **El potencial de los laboratorios virtuales en la educación a distancia**: lecciones aprendidas tras 10 años de implementación, San José, Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia. 2005. Disponible em: <http://repositorial.cuaed.unam.mx:8080/jspui/bitstream/123456789/1309/1/2005-02-1919mongeLaboratoriosVirtuales.pdf>. Acceso em: mai. 2021.

MUHAMAD, M.; ZAMAN, H.; AHMAD, A. Virtual Biology Laboratory (VLab-Bio): Scenario-based Learning Approach, **Procedia - Social and Behavioral Sciences**, v. 69, p. 162-168. 2012.

ONG, S.; MANNAN, M. Virtual reality simulations and animations in a web-based interactive manufacturing engineering module, **Computers & Education**, v. 43, n. 4, p. 361-382. 2004.

PRADO, L. L. do. Educação lúdica: os jogos de tabuleiro modernos como ferramenta pedagógica. **Ludus Scientiae**, v. 2, n. 2, 2018. 13 p.

PRATT, D.; DAVIES, N.; CONNOR, D. The role of technology in teaching and learning statistics. In: **Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education**. Springer, Dordrecht, p. 97-107, 2011.

PONTES, E. A. S. *et al.* Investigação Experimental de um Produto Educacional: um jogo matemático desenvolvido a partir do conceito intuitivo de probabilidades. **RACE - Revista de Administração do Cesmac**, v. 7, n. 1, 2020. 11 p.

PRODROMOU, T. Connecting experimental probability and theoretical probability. **ZDM**, v. 44, n. 7, p. 855-868, 2012.

RAMALHETE, M. P. Luta de classes e literatura infantil: um breve diálogo à luz de Bakhtin. **Revista Pró-discente**, v. 24, n. 1, 2018. 12 p.

RAY, S. *et al.* Virtual labs in proteomics: New e-learning tools, **Journal of proteomics**, v. 75, n. 9, p. 2515-2525, 2012.

READING, C. Fundamentals for teaching statistics. Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. **A Joint ICM/IASE Study**, p. 53-56, 2011.

RUBIN, A. Much has changed; little has changed: Revisiting the role of technology in statistics education 1992-2007. **Technology Innovations in Statistics Education**, v. 1, n. 1, 2007.

SANTOS, R. **Probabilidade Circa 1914 e a construção de Pacheco d Amorim**. 769f. 2008. Tese (Doutorado em Estatística e Investigação Operacional) – Universidade de Lisboa, Lisboa.

SANTOS, J. J. dos. **Jogo do Tabuleiro**. 57f. 2020. Trabalho de Conclusão de Curso (Tecnólogo em Design Gráfico) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Cabedelo, 2020.

SANZ, A.; MARTÍNEZ, J. El uso de los laboratorios virtuales en la asignatura Bioquímica como alternativa para la aplicación de las tecnologías de la información y la comunicación, **Tecnología Química**, v. 25, n. 1, p. 5-17. 2005.

SELMER, A *et al.* Weblabs in chemical engineering education, **Education for Chemical Engineers**, v. 2, n 1, p. 38-45, 2007.

SILVA, N. C. da. Laboratório virtual de Física Moderna. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 29, n. 3, 2012.

TAROUCO, L. et al. Virtual laboratory for teaching Calculus: An immersive experience. In: **2013 IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON)**, p. 774-781, 2013.

TRURAN, K. Animism: A view of probability behaviour. In: **Proceedings of the Eighteenth Annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia (MERGA)**. 1995. p. 537-541.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. **Psychological Review**, v. 90, n. 4, p. 293-315, 1983.

UNESCO. **Informe de la Reunión de Expertos sobre Laboratorios Virtuales**, París: UNESCO. 2000. Disponível em: <http://unesdoc.unesco.org/images/0011/001191/119102s.pdf>. Acesso em: mai. 2021.

VANZELLA, L. C. G. **O jogo da vida: uso e significações**. 219 f. 2009. Tese (Doutorado em História da Educação) – Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo, 2009.

VIANA, F. R.; BARRETO, M. C. A construção de conceitos matemáticos na educação de alunos surdos: o papel dos jogos na aprendizagem. **Horizontes**, v. 29, n. 1, 2011. 9 p.