UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

LUANA CRISTINA BERNARDINO FAQUIM

A GEOMETRIA FRACTAL EM AULAS DE MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E DO ENSINO MÉDIO: UM MAPEAMENTO DE TESES E DISSERTAÇÕES BRASILEIRAS

UBERABA (MG)
2023

LUANA CRISTINA BERNARDINO FAQUIM

A GEOMETRIA FRACTAL EM AULAS DE MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E DO ENSINO MÉDIO: UM MAPEAMENTO DE TESES E DISSERTAÇÕES BRASILEIRAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Linha de Pesquisa: Cultura, Construção do Conhecimento e suas interfaces com a Educação em Ciências e Matemática, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Luís Pereira Fernandes.

UBERABA (MG)

2023

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

	Faquim, Luana Cristina Bernardino
F223g	A geometria fractal em aulas de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio: um mapeamento de teses e dissertações brasileiras / Luana Cristina Bernardino Faquim. -- 2023.
	100 p. : il., tab.
	Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2023
	Orientador: Prof. Dr. Fernando Luís Pereira Fernandes
	1. Fractais. 2. Geometria não-Euclidiana. 3.Prática de ensino. 4.Didática. I. Fernandes, Fernando Luís Pereira. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.
	CDU 514.13:37.02

Eduardo Caetano Leal – CRB-6/2200

LUANA CRISTINA BERNARDINO FAQUIM

A GEOMETRIA FRACTAL EM AULAS DE MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E DO ENSINO MÉDIO: UM MAPEAMENTO DE TESES E DISSERTAÇÕES BRASILEIRAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Linha de Pesquisa: Cultura, Construção do Conhecimento e suas interfaces com a Educação em Ciências e Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação Ciências e Matemática.

19 de setembro de 2023.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
FERNANDO LUIS PEREIRA FERNANDES
Data: 25/03/2024 09:28:37-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Fernando Luís Pereira Fernandes - Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM

Documento assinado digitalmente
JOSE CARLOS PINTO LEIVAS
Data: 25/03/2024 11:12:37-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas
Universidade Franciscana - UFN

Documento assinado digitalmente
MONICA DE CASSIA SIQUEIRA
Data: 25/03/2024 14:34:55-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Monica de Cassia Siqueira
Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM

Dedico esta dissertação aos meus pais: Vanilda e José por sempre estarem presentes e, à minha querida avó, Matilde, a estrela mais linda no céu.

“Que ninguém se engane, só se consegue a simplicidade através de muito trabalho”.

Clarice Lispector

AGRADECIMENTOS

Ao **Prof. Dr. Fernando Luís Pereira Fernandes** por me desafiar e incentivar a pesquisar sobre a Geometria Fractal, pela orientação durante o Mestrado;

À **Profa. Dra. Monica de Cassia Siqueira** e ao **Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas** pela leitura crítica da dissertação na Banca Examinadora de Defesa;

Aos integrantes do **EMAPS – Grupo de Pesquisa Educação Matemática e Práticas Sociais** pelos momentos de leitura e de discussão sobre a pesquisa;

Aos meus pais, **Vanilda e José**, pelos conselhos, orientações e por tudo.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo mapear teses e dissertações brasileiras que tratam do ensino de Geometria Fractal nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. As pesquisas que compuseram o *corpus* de análise foram defendidas entre 2007 e 2020. Realizamos uma revisão de literatura, apresentando uma breve discussão sobre as Geometrias Não Euclidianas, o que se entende por Geometria Fractal, quais os tipos de fractais e os fractais precursores, o que os documentos curriculares oficiais orientam sobre esse tema e, por último, apresentamos exemplos de algumas experiências de ensino. A metodologia da pesquisa é de natureza qualitativa, sobretudo descritiva e interpretativa. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica do tipo Mapeamento. A partir de levantamento realizado no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, após seleção, obtivemos 16 trabalhos para o *corpus* de análise, os quais foram fichados, após uma leitura flutuante das produções e de trechos relevantes para a investigação. Para a análise de dados, contamos com a Análise de Conteúdo e a constituição de duas categorias de análise: *a priori*, “Recursos Didáticos” e a *posteriori*, “Conexão entre Geometria Fractal e outros conteúdos matemáticos”. Como resultado, foi possível concluir que a Geometria Fractal tem sido discutida e utilizada em aulas de Matemática como uma ferramenta importante para facilitar a compreensão e a conexão com outros conteúdos matemáticos.

Palavras-Chave: Geometria Fractal. Práticas Escolares. Recursos Didáticos. Conexões entre conteúdos matemáticos. Estudo documental.

ABSTRACT

This research mapped Brazilian theses and dissertations that address the teaching of Fractal Geometry in the final years of Elementary and High School. The studies comprising the corpus of analysis were dated from 2007 to 2020. In the literature review it was presented a brief discussion on Non-Euclidean Geometries, also known as Fractal Geometry, the types of fractals and precursor fractals, the guides from the official curriculum documents towards this topic, and finally, examples of some teaching experiences. The research methodology was qualitative, mainly descriptive and interpretative. It was a bibliographic research, of the Mapping type. Based on a survey conducted in the CAPES Theses and Dissertations Catalog, 16 works for the corpus of analysis were selected, which were cataloged after a float reading of the productions and relevant passages for the investigation. For data analysis, we relied on Content Analysis and the establishment of two analysis categories: a priori, "Teaching Resources" and a posteriori, "Connection between Fractal Geometry and other mathematical contents." As a result, it was possible to conclude that Fractal Geometry has been discussed and used in Mathematics classes as an important tool to facilitate understanding and connection with other mathematical contents.

Keywords: Fractal Geometry. School Practices. Teaching Resources. Connections between mathematical contents. Documentary Study.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELA

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

USP	Universidade de São Paulo
UNESP	Universidade Estadual Paulista
FURB	Universidade Regional de Blumenau
PUCRS	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFSCAR	Universidade Federal de São Carlos
UFRPE	Universidade Federal Rural de Pernambuco
UNIVATES	Universidade do Vale do Taquari
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
UFMT	Universidade Federal de Mato Grosso
ULBRA	Universidade Luterana do Brasil
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DCE/PR	Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná
PCN	Parâmetros Curriculares do Nacionais
PPGECM	Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
UFTM	Universidade Federal do Triângulo Mineiro
PPGECE	Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esta dissertação tem como tema o ensino de Geometria Fractal na Educação Básica, particularmente, nos anos finais do Ensino Fundamental (EF) e no Ensino Médio (EM). Lorenzato (1995), ao evidenciar a importância que essas etapas da escolarização representam na formação Matemática do aluno, contribuindo para o desenvolver do pensamento geométrico, destaca a necessidade de desenvolver a percepção, o raciocínio e a linguagem geométrica, para que seja possível resolver questões que não envolvam números e medidas.

O pensamento geométrico, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[1], é essencial “para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes” (BRASIL, 2018, p. 271), desenvolvendo habilidades de interpretação e de representação. Dessa forma, nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio contemplam-se tais aspectos para o ensino de geometria.

Na BNCC são apresentadas orientações sobre o estudo da Geometria Euclidiana. Entretanto, para que fosse possível estudar propriedades e comportamentos de figuras mais complexas, haveria a necessidade da inserção de outras geometrias, as Geometrias Não Euclidianas, para responder questionamentos os quais apenas com a Geometria Euclidiana não seria suficiente.

Observamos ainda que, nas competências específicas e habilidades no que concerne à organização curricular orientada pela BNCC há uma única menção sobre os fractais quando é dito sobre as construções de figuras e de análise de elementos da natureza e de diferentes produções humanas citando entre parênteses as expressões *fractais*, *construções civis*, *obras de arte* e *entre outras*. Para além de mencionar a palavra *fractais*, consideramos relevante compreender como eles poderiam ser inseridos no ensino e de que maneira poderiam contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico além do que a Geometria Euclidiana possibilita.

Dessa forma, com esta pesquisa visamos conhecer e evidenciar possibilidades pedagógicas do ensino da Geometria Fractal, que estuda comportamentos e propriedades mais complexas nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio considerando que a “geometria não pode ficar reduzida à mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas” (BRASIL, 2018, p. 272).

[1] Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ Acesso: 14 de outubro de 2021.

Diante do exposto, apresentamos a questão orientadora da pesquisa: **Como a Geometria Fractal está sendo mobilizada em classes dos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, a partir do mapeamento de dissertações e teses brasileiras?**

Com o intuito de responder a essa pergunta, explicitamos o objetivo geral da investigação: **mapear teses e dissertações brasileiras que tratam do ensino de Geometria Fractal nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.**

Para isso, foram traçados objetivos específicos, a saber:

1. Descrever as regiões brasileiras, as instituições de pesquisa, o período em que essas investigações foram produzidas e a modalidade dos programas de pós-graduação;
2. Identificar os conteúdos matemáticos que estabelecem conexões com a Geometria Fractal;
3. Analisar as práticas escolares implementadas nas pesquisas que compõem o *corpus* de análise.

O interesse em investigar a Geometria Fractal nessas etapas da Educação Básica se dá em ressaltar a importância desses conhecimentos em aulas de Matemática, mesmo não havendo orientações curriculares sobre como trabalhar essa temática, e mostrar as contribuições que essa Geometria pode apresentar para o ensino de Matemática.

É importante mencionar que houve a inserção de noções de Geometria não Euclidiana para o Ensino Fundamental e Ensino Médio nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do estado do Paraná. Esse fato é mencionado por Vejan e Franco (2008), cujo artigo destaca, como resultado final, um estudo desenvolvido com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental a respeito de noções de Geometria Não Euclidiana, especificamente, sobre a Geometria Fractal. Diante disso, houve um despertar sobre essa temática já que é possível observar a relevância desse ensino uma vez que ele foi inserido nesse currículo em específico.

Mesmo que, orientações sobre as Geometrias Não Euclidianas sejam superficiais ou pouco objetivas, será possível observar, a partir dessa pesquisa, que está havendo um movimento na tentativa de fazer uso de conceitos da Geometria Fractal dentro da sala de aula, desde apresentar os fractais e suas características até o uso de conceitos de fractais para facilitar o ensino e a compreensão de diferentes conteúdos matemáticos.

Após apresentarmos a questão orientadora, o objetivo geral e os objetivos específicos, seguem as seções que compõem este texto.

Na seção 2 – Carta aberta aos amantes da Geometria – é narrado sobre o nosso interesse por esse tema;

Na seção 3 – Revisão de Literatura – apresentamos um breve panorama sobre o ensino de Geometria, Geometria Não Euclidiana, Geometria Fractal e os diferentes tipos de fractais. Essa seção é essencial para dialogar com o mapeamento e a análise dos trabalhos.

Na seção 4 – Aspectos Metodológicos – descrevemos sobre a metodologia adotada na pesquisa, o tipo de abordagem, procedimentos e a construção das categorias de análise.

Na seção 5 – Mapeamento e Análise – diante da seção anterior, foi possível desenvolver o mapeamento de teses e dissertações para responder os objetivos e a problemática que norteia a construção da pesquisa.

Na seção 6 – Considerações Finais – retomando a questão orientadora da pesquisa e os objetivos, apontamos as conclusões da pesquisa a partir do mapeamento das teses e dissertações que compuseram o *corpus* de análise, contribuindo para a área da Educação e Ensino, explicitando convergências e singularidades nas pesquisas sobre o referido tema e instigando para que novas pesquisas sobre a Geometria Fractal sejam desenvolvidas.

2. CARTA ABERTA AOS AMANTES DE GEOMETRIA

Imagine uma pessoa que você ama muito e vocês estão sem se ver há algum tempo. O sentimento que habita em você é de saudade. Esse mesmo sentimento de saudade viveu[2] comigo durante o período em que eu estive na universidade cursando Licenciatura em Matemática. Eu me perguntava diversas vezes *"onde estava a minha geometria?"*. Em outras palavras, quais eram os conhecimentos geométricos que eu possuía e quais os que eu ainda não tinha.

Mesmo com as disciplinas de Geometria ofertadas pelo curso, eu ainda sentia um espaço em branco, uma saudade de algo que eu não lembrava e não sabia. Não era uma saudade da Geometria Plana, Espacial ou Vetorial. Era uma saudade da Geometria que eu ainda não conhecia.

Desde a leitura do texto *"Por que não ensinar geometria?"* do autor Sergio Lorenzato (1995), em uma das disciplinas cursadas durante a graduação, fiquei inquieta sobre o porquê de não ensinarem a melhor parte da Matemática. Talvez, a melhor parte para mim não fosse a melhor parte para o outro. Mas, se era interessante por que não estudar, aprofundar e pesquisar buscando encontrar o que eu ainda não sabia sobre a Geometria?

Foi a partir disso que pensei em seguir uma linha de pesquisa sobre esse fascinante ramo da Matemática, a Geometria. Comecei a pesquisar sobre esse tema no trabalho de conclusão de curso de graduação. Todavia, era a mesma Geometria que eu já conhecia.

Propus continuar a pesquisa no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM), da Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM). Entre um diálogo e outro com o professor orientador Fernando Luís, foi que ele me apresentou a Geometria Fractal, pedindo para eu pesquisar mais e entender um pouco sobre essa outra geometria.

Confesso que sair da zona de conforto nos deixa inseguros, mas nos proporciona novos conhecimentos. E se tem algo que ninguém nos tira é o que aprendemos. Diante dessa proposta, percebi que era a Geometria que eu ainda não conhecia, com diferentes tipos de construção, por exemplo, por fronteira e remoção. Era a Geometria dos Fractais!

E por que não se desafiar e se apropriar desse conhecimento? Gratidão, Professor Fernando, por me apresentar os fractais.

[2] Nesta seção, farei a escrita do texto na primeira pessoa do singular.

3. REVISÃO DE LITERATURA

Nesta seção, será apresentada a revisão de literatura que fundamenta essa pesquisa e essencial para subsidiar a compreensão do leitor referente à temática de Geometria Fractal e o seu ensino Para isso, os tópicos das subseções irão apresentar as Geometrias Não Euclidianas, dando ênfase para o que se entende por Geometria Fractal, os diferentes tipos de fractais, como os documentos oficiais orientam, ou não, sobre a inserção da Geometria Fractal na sala de aula da Educação Básica e algumas experiências de ensino.

3.1 Geometrias não Euclidianas: o fractal e o seu ensino

A Matemática é uma ciência que traz frustrações e curiosidades. (AMBROZI; GLOWACKI; SAUER, 2015). Em alguns casos é considerada como difícil e incompreensível para alguns estudantes no âmbito da educação básica. Entretanto, essa ciência vem "se refazendo e reconfigurando seus cenários, na produção de novos conhecimentos" (AMBROZI; GLOWACKI; SAUER, 2015, p. 130). Por meio da curiosidade e do fascínio de quem tem interesse por essa ciência é que novas ideias vão surgindo para reconfigurar e expandir esse conhecimento por diferentes áreas, contribuindo na construção de novas pesquisas.

Um dos ramos da Matemática que deslumbra beleza é a Geometria. De acordo com Lorenzato (1995), a Geometria propicia o desenvolvimento da criatividade e a leitura interpretativa do mundo. Sem conhecer esses conhecimentos a leitura "torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida" (LORENZATO, 1995, p. 5).

Apropriar-se dos conhecimentos geométricos é importante pois possibilita trabalhar com a individualidade dos alunos, estabelecer conexões com outras áreas do conhecimento, desenvolver competências e habilidades (AMBROZI; GLOWACKI; SAUER, 2015), permite desenvolver o raciocínio visual dedutivo e o pensamento geométrico (LORENZATO, 1995). Ensinar Geometria possibilita que esta seja um apoio a outras áreas do conhecimento. Em consonância com Lorenzato (1995),

> A Geometria é um excelente apoio as outras disciplinas: como interpretar um mapa, sem o auxílio da Geometria? E um gráfico estatístico? Como compreender conceitos de medida sem idéias geométricas? A história das civilizações está repleta de exemplos ilustrando o papel fundamental que a Geometria (que é carregada de imagens) teve na conquista de conhecimentos artísticos, científicos e, em especial, matemáticos. A imagem desempenha importante papel na aprendizagem e é por isso

> que a reapresentação de tabelas, fórmulas, enunciados, etc, sempre recebe uma interpretação mais fácil com o apoio geométrico. (LORENZATO, 1995, p. 6)

Ensinar ou aprender Geometria contribui para melhor visualização e compreensão de situações pertencentes ao cotidiano. Sabendo sobre a importância de aprender e ensinar Geometria, como esses conhecimentos geométricos teriam surgido?

Segundo Pavanello (1989), o conhecimento geométrico teria surgido conforme as necessidades do homem em compreender o mundo ao seu redor, sendo construídos empiricamente. Entretanto, mesmo que seja difícil dizer com precisão quando esses conhecimentos começaram a ser desenvolvidos, esse ramo da Matemática está diretamente relacionado com o cotidiano do sujeito, instigando "a interpretação e o entendimento, possibilitando, tanto a quem ensina, quanto a quem aprende, ver com outros olhos o mundo que os rodeia" (LUTZ, 2020, p. 21). Apropriar-se desses conhecimentos geométricos é fazer a leitura de mundo com outros olhos, a partir de outras referências.

Na escola, desde o Ensino Fundamental e no currículo de Matemática esses conhecimentos geométricos são baseados nos conceitos da Geometria Euclidiana, a qual é descrita em um espaço plano. Segundo Kaleff e Nascimento (2004, p.12), "os conhecimentos geométricos se restringiam aos saberes - relações lógicas e construções de traçados constitutivos de desenhos - advindo da Geometria estabelecida na Grécia". Essa Geometria mencionada pelos autores é a Geometria Euclidiana. Todavia, esses conhecimentos podem não ser suficientes para representar objetos da natureza, por exemplo. Ao tomar como referência a Geometria Euclidiana, "muitas vezes, reproduz de forma satisfatória os objetos criados pelo homem, entretanto, há casos em que não temos uma boa representação ou essa é muito complexa" (LUTZ, 2020, p. 21). Para representar objetos que não apresentava "uma boa representação ou essa é muito complexa" (LUTZ, 2020, p. 21) não podendo ser representados a partir da Geometria Euclidiana, houve a necessidade do desenvolvimento de outras geometrias, as Geometrias Não Euclidianas.

Essas Geometrias foram construídas diante da necessidade de se ter uma Geometria que permitisse representar objetos antes limitados como objetos da natureza (LUTZ, 2020). Para Kaleff e Nascimento (2004), os conhecimentos geométricos teriam evoluído e, em decorrência dessa evolução, surgiram as Geometrias não Euclidianas, por volta do século XX.

Alguns exemplos de Geometrias Não Euclidianas são: a Geometria Esférica, Hiperbólica, Elíptica e Fractal. Ressaltamos que a ênfase, nessa pesquisa, será para a Geometria Fractal, nosso tema de interesse.

De acordo com Artigue, Fanaro e Lacués (2021), a temática de Geometria Fractal na área da Matemática é relativamente nova, sendo desenvolvida "há pouco menos de meio século" (p. 76).

Vários cientistas trabalhavam com o conceito dos fractais. Mas, em 1975, Benoit Mandelbrot usou o termo fractal pela primeira vez. Sendo o responsável "por investigar propriedades e comportamentos de figuras mais complexas as quais a Geometria Euclidiana não é capaz de representar" (PEREIRA; BORGES, 2017, p. 565). Indo ao encontro do que é mencionado por Artigue, Fanaro e Lacués (2021), Pereira e Borges (2017) também se referem à observação que Mandelbrot fez sobre a natureza, dizendo ser tão complexa que somente com a Geometria Euclidiana não seria suficiente para estudá-la, citando exemplos sobre as formas naturais das nuvens, das montanhas ou das costas de países. Esse termo fractal surgiu devido à necessidade de Benoit Mandelbrot "de encontrar um nome para descrever a geometria com que buscava representar as reais formas da natureza" (ASSIS et al, 2008, p. 1).

Segundo Barbosa (2005, p. 9), Mandelbrot denominou os fractais "baseando-se no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo *frangere* correspondente significa quebrar, criar fragmentos irregulares, fragmentar". Indo ao encontro com o que é mencionado por ASSIS et. al (2008, p.1) sobre a criação da palavra fractal em "uma consulta a um dicionário de latim resultou no encontro do adjetivo *fractus*, do verbo *frangere*, que significa quebrar." Dessa forma, criou-se esse termo fractal.

Para definir o conceito de fractal, Mandelbrot usou o conceito de dimensão. De acordo com Barbosa (2005, p. 18), "um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovith excede estritamente a dimensão topológica".

Uma importante propriedade que caracteriza um fractal é conhecida como autossimilaridade.

Sobre os fractais, Barbosa (2005) diz que,

> Essas formas geométricas possuem, entre outras, uma propriedade especial, que pode ser considerada característica. Esses entes constituem uma imagem de si, própria em cada uma de suas partes. Segue que suas partes lhe são semelhantes; propriedade conhecida como *autossimilaridade*" (BARBOSA, 2005, p. 9, destaque do autor).

A autossimilaridade é uma propriedade dos fractais, na qual a figura geométrica se repete em diferentes escalas, se constituem em partes semelhantes à figura geométrica original. Em outras palavras, ao fragmentar a figura, suas partes são semelhantes à figura inicial.

De acordo com Barbosa (2005) o conceito de fractal, para a Educação pode ser "simples e de fácil compreensão e entendimento" (BARBOSA, 2005, p. 19), bastando considerar a propriedade de autossimilaridade, indo ao encontro do que é mencionado por Artigue, Fanaro e Lacués (2021) sobre a importância dessa característica para dar significado aos fractais.

> Essa propriedade característica dos fractais também é pontuado por Assis et. al (2008), denominada como autossemelhança, mas também caracterizam os fractais por meio de outras duas propriedades: a complexidade infinita e a sua dimensão: A autossemelhança é identificada quando uma porção, de uma figura ou de um contorno, pode ser vista como uma réplica do todo, numa escala menor [...]. A complexidade infinita refere-se ao fato de que o processo de geração de uma figura, definida como sendo um fractal, é recursivo. Isto significa que, quando se executa um determinado procedimento, no decorrer da mesma encontra-se como sub-procedimento o próprio procedimento anteriormente executado. [...] Finalmente, a dimensão de um fractal, ao contrário do que ocorre na Geometria Euclidiana, não é necessariamente um valor inteiro. Nela, um ponto possui dimensão três. No caso da dimensão fractal, ela é uma quantidade fracionária, representando o grau de ocupação da estrutura no espaço que a contém. Como exemplos, pode-se citar a dimensão fractal da bacia fluvial do rio Amazonas que é 1.85, dos relâmpagos no espaço tridimensional, 1.51, dos angiogramas dos rins, 1.61, dentre outros (ASSIS, et. al, 2008, p. 2).

Com isso, entendemos por autossemelhança a repetição, em outra escala, do todo, assemelhando "ao seu todo sob alguns aspectos" (BARBOSA, 2005, p. 18) A complexidade infinita dita pelos autores remete ao processo recursivo ou iterativo ao mesmo procedimento anterior e, por último, a dimensão fractal no espaço. Essa dimensão fractal, "definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica" (BARBOSA, 2005, p. 19)

No artigo de Artigue, Fanaro e Lacués (2021), os autores propõem uma revisão bibliográfica de pesquisas relacionadas com o ensino e aprendizagem de elementos da Geometria Fractal, semelhante com o objetivo de nossa pesquisa. Para Artigue, Fanaro e Lacués (2021) para trabalhar com a Geometria Fractal é preciso focar nas propriedades intrínsecas dos fractais como a autossimilaridade e a ideia de infinito. Além desses, reiteram a importância de recuperar a essência Matemática da Geometria articulando-a com outras áreas do conhecimento e saberes.

Pereira e Borges (2017), assim como Artigue, Fanaro e Lacués (2021) realizam pesquisa bibliográfica referente à Geometria Fractal no ensino de Matemática, indicando a potencialidade da exploração dos fractais em outros temas matemáticos. Pereira e Borges (2017), ao analisarem artigos e relatos de experiências publicados em periódicos brasileiros online nos últimos dez anos, pontuaram que essa Geometria vem ganhando espaço, mesmo que timidamente, "devido à sua versatilidade, beleza e pela sua capacidade avançada de análise a objetos da natureza" (PEREIRA, BORGES, 2017, p. 565)

Tanto Pereira e Borges (2017) quanto Artigue, Fanaro e Lacués (2021) têm pesquisas publicadas recentemente e, que apresentaram um panorama sobre estudos que discutiram sobre essa temática com objetivos semelhantes aos de nossa pesquisa.

Barbosa (2005) pontua sobre a beleza dos fractais mencionando que

> Ver e sentir o belo e apresentar um senso estético é talvez propriedade inerente a alguns poucos temas de matemática; entre os outros, muitos são áridos ou desinteressantes. O despertar e desenvolver do senso estético pode muito bem ser cuidado e aproveitado com o tema fractais, quer apreciando o belo irradiante, quer observando a regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades (BARBOSA, 2005, p. 14).

A citação acima corrobora a importância de considerar a Geometria Fractal na Educação Básica, possibilitando conectar diferentes ciências, evidenciando a beleza visual, permitindo explicar fenômenos da natureza, a construção do senso estético por meio de recursos manipuláveis como o papel e digitais, por meio de softwares, apresentando aspectos de desordem que podem ser organizados pela Geometria Fractal e que, aparentemente, essa desordem pode ser conduzida a uma ordem e padrões.

Ainda, de acordo com Barbosa (2005), a utilização da Geometria Fractal na sala de aula é justificada baseada em:

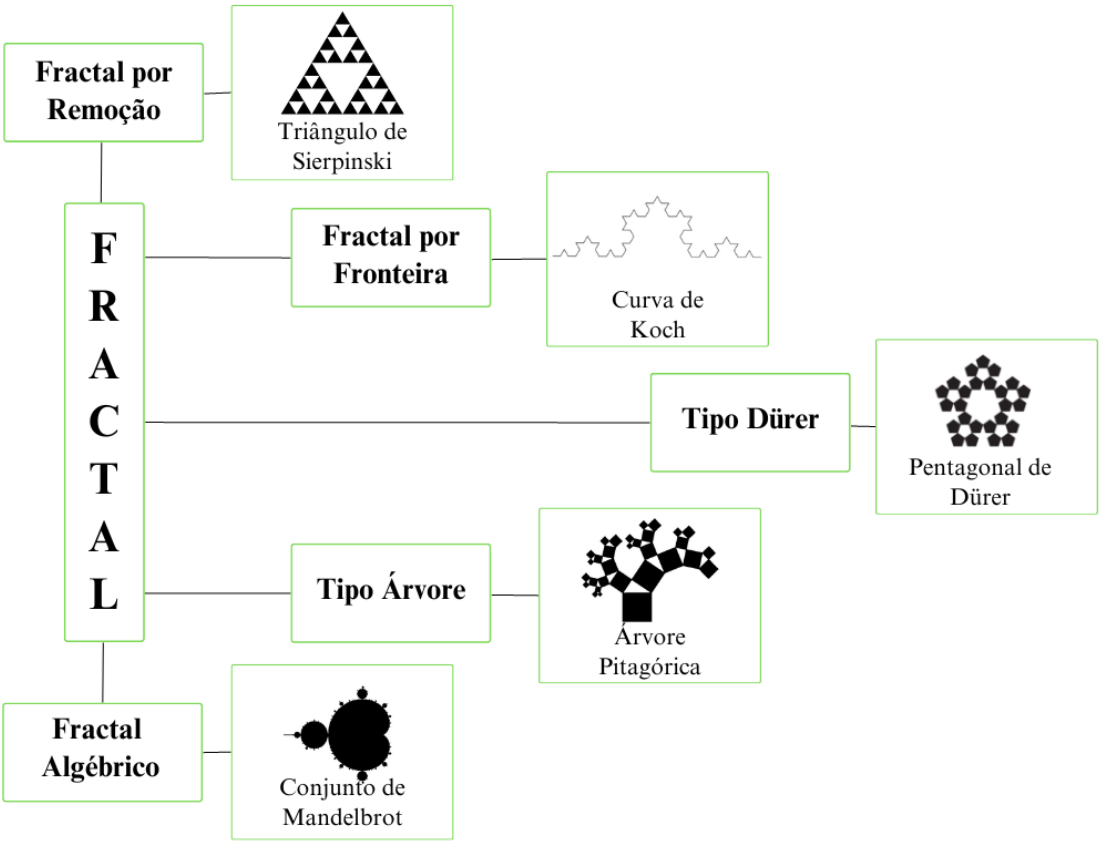
> - **conexões** com várias ciências;
> - **deficiências** da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza, desde que é, em geral, apenas apropriada para formas do mundo oriundas do humano, como construções de casas, prédios, pontes, estradas, máquinas etc.; objetos naturais são com frequência mais complicados e exigem uma geometria mais rica, que os modela com fractais, possibilitando desenvolver projetos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos que ocorram nos diversos ambientes;
> - **difusão e acesso** aos computadores e a tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização;
> - **existência** do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais, entendendo-se arte como toda ação que envolve simultaneamente emoção, habilidade e criatividade;
> - **sensação** de surpresa diante da ordem na desordem. (BARBOSA, 2005, p. 19, grifos do autor)

Diante da relevância dessa temática e das caracterizações de um fractal, não há uma definição formal, sobre Fractal, “que caiba ao ser e só ao ser.” (BARBOSA, p. 19, 2005), mas ressaltamos sobre a importância dos conhecimentos geométricos e da Geometria Fractal, em especial, no processo de ensino e aprendizagem dentro da sala de aula, contribuindo para o desenvolvimento de competências e habilidades, melhor compreensão, visualização e interpretação de mundo e adquirir conhecimentos matemáticos.

3.2 Tipos de Fractais

Existem diferentes maneiras de construir um fractal, cujas construções, de acordo com Barbosa (2005), podem ser classificadas de quatro maneiras: (i) fractais pela fronteira; (ii) por remoção; (iii) tipo Dürer e (iv) tipo Árvore. Segundo Gouvea (2005) há ainda o fractal algébrico e por expansão. Essas construções são feitas a partir do processo recursivo. Para a construção de qualquer fractal, segundo Gouvea (2005, p. 57), "há a necessidade de se repetir sempre um determinado procedimento infinitamente, o que, no nosso caso, é um processo geométrico" A figura abaixo apresenta os modos de obtenção dos fractais citados inicialmente e uma ilustração que exemplifica a representação de cada um deles.

Figura 1: Maneiras de obter fractais



Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

Observe a imagem que representa o fractal algébrico, representado pelo chamado Conjunto de Mandelbrot. Esse fractal é um dos mais famosos. Segundo Fernandes (2006, p.

210), “Benoit Mandelbrot foi um dos primeiros matemáticos que procuraram criar uma teoria para os fractais, tanto que o nome fractal foi de sua criação”.

3.3 Fractais precursores

Nessa subseção serão apresentados alguns fractais precursores. Apesar do termo Geometria Fractal ter sido criado por Benoit Mandelbrot, diferentes estudos foram sendo desenvolvidos em anos anteriores por outros pesquisadores, contribuindo para a construção de diferentes fractais. As construções apresentadas a seguir foram elaboradas utilizando o software gratuito *Geogebra*. Somente o fractal “Conjunto de Mandelbrot” que foi elaborado a partir de uma ferramenta manipulativa gratuita *Mathigon*[3].

3.3.1 Conjunto de cantor

O matemático Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918) contribuiu para o desenvolvimento da Matemática publicando estudos sobre a Teoria dos Conjuntos. Barbosa (2005), relata sobre a publicação de um trabalho por Cantor, em 1883, “no qual é construído um conjunto, chamado hoje de *“Conjunto de Cantor”* (às vezes *“Polvo de Cantor”* ou *“Poeira de Cantor”*) (p. 25).”

Cantor “se destacou por apresentar ideias altamente inovadoras sobre o conceito de infinito, propôs a construção de um objeto que resultou chamar-se de conjunto de Cantor” (ASSIS et. al, 2008, p. 6)

O fractal Conjunto de Cantor é formado por uma “quantidade infinita de segmentos de dimensões pequenas” (LUTZ, 2020, p. 27). Para a construção desse fractal, Barbosa (2005, p. 25) apresenta três passos:

1. Considerar um segmento de reta;
2. Dividir o segmento em três partes iguais e eliminar a central;
3. Repetir a construção 2 em cada segmento e, assim, sucessivamente e indefinidamente.

De acordo com essas orientações, a Figura 2 mostra essa construção.

[3] Disponível em: https://pt.mathigon.org/ Acesso: 18 de julho de 2023.

Figura 2: Conjunto de Cantor

Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

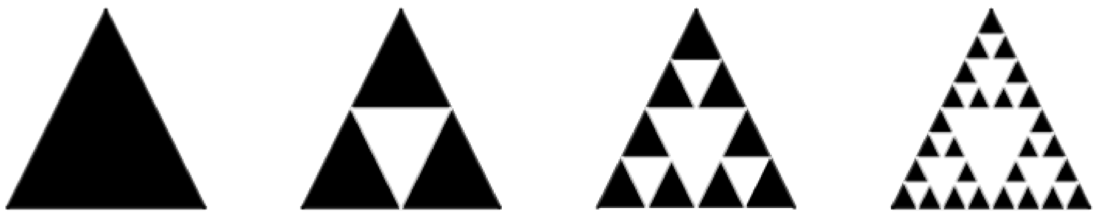
Observe que esse fractal é constituído por partes autossemelhantes e, na medida em que o processo é repetido, as partes vão ficando cada vez menores.

3.3.2 Triângulo de Sierpinski

De acordo com Barbosa (2005) os fractais Triângulo, Tapete e Curva de Sierpinski são criações do matemático Waclaw Sierpinski (1882 - 1969). Para a construção desse fractal, Barbosa (2005, p. 42-43) apresenta cinco passos:

1. Considerar inicialmente um triângulo equilátero;
2. Marcar os segmentos dos pontos médios formando 4 triângulos equiláteros;
3. Eliminar (remover) o central, o que pode ser codificado por exemplo, com cor preta e os outros com uma cor cinza;
4. Repetir em cada triângulo não eliminados as construções 2 e 3;
5. Repetir a operação 4 sucessivamente. Em seguida, é apresentado na Figura 3 a construção desse fractal.

Figura 3: Triângulo de Sierpinski



Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

Observa-se que esse fractal é do tipo *por remoção*, repetindo o mesmo processo sucessivamente.

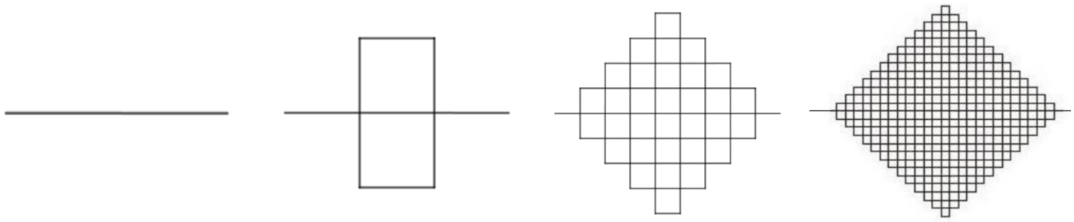
3.3.3 Curva de Peano

Em 1890, o matemático Giusepe Peano (1858 - 1932) diante de um estudo referindo-se ao aprofundamento das noções de continuidade e dimensão publicou sobre a Curva de Peano,

que leva seu nome, em que propunha cobrir totalmente a superfície plana de um quadrado (BARBOSA, 2005) A Figura 4 mostra a construção da Curva de
Peano.

Segundo as orientações de Barbosa (2005, p. 33), esses são os passos para a construção desse fractal: “1 – Iniciamos com um segmento de reta, 2 – Substituímos por uma curva de nove segmentos, [...] portanto em escala 1/3. 3 – Substituímos cada segmento anterior pela curva de nove segmentos [...], e assim sucessivamente.”

Figura 4: Curva de Peano



Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

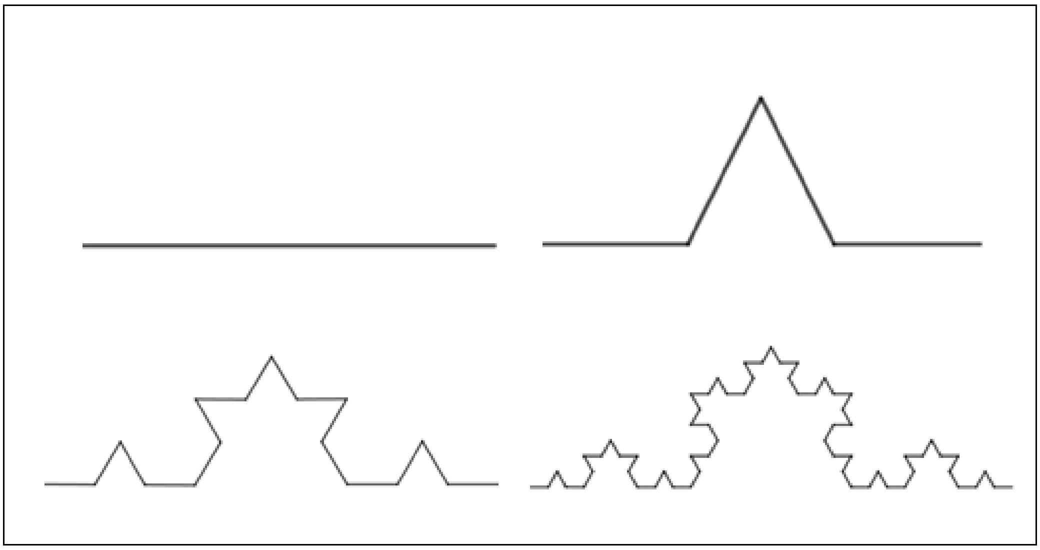
3.3.4 Curva de Koch

O fractal Curva de Koch foi criado pelo matemático Niels Fabian Helge Von Koch (1870 – 1924), o qual foi reconhecido “por ter descrito um dos primeiros fractais de curva” (LUTZ, 2020, p. 30). Para obter esse fractal, Barbosa (2005) apresenta 3 passos:

> 1 – Considerar um segmento de reta;
> 2 – Dividir o segmento em 3 segmentos iguais, substituindo-os por 4 congruentes; intermediário, por um triângulo equilátero sem o segmento intermediário (que seria sua base);
> 3 – Substituir cada um dos segmentos, e assim sucessivamente e iterativamente.

A figura 5 mostra como seria a construção dessa curva.

Figura 5: Curva de Koch



Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

A Curva de Koch é do tipo fractal *por fronteira*. Essa curva é gerada fazendo cópias de cópias.

3.3.5 Curva de Hilbert

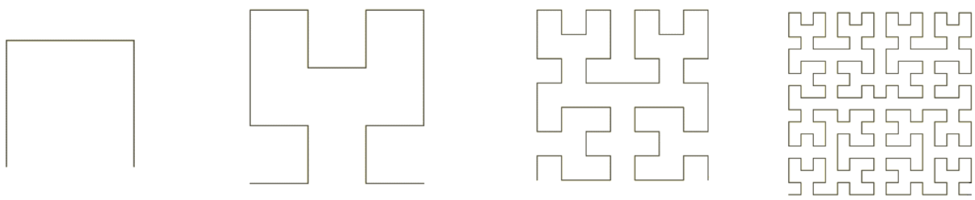
De acordo com Barbosa (2005), a maior contribuição Matemática de David Hilbert foi relativa “à abordagem axiomática da Geometria Euclidiana” (BARBOSA, 2005, p. 36). A Curva de Hilbert foi a público em 1891, pontuando que a curva corresponde à "cobertura da superfície de um quadrado" (BARBOSA, 2005, p. 36). Paixão (2014) apresenta cálculos referente ao comprimento dessa curva e conclui dizendo que o comprimento é infinito.

Nas orientações para a construção desse fractal, Barbosa (2005, p. 37) apresenta duas:

> 1 – Considerar um quadrado e dividi-lo em quatro quadrados, dando início à curva com 3 segmentos consecutivos com extremos nos seus pontos centrais;
> 2 – Substituir cada quadrado por novos 4 quadrados com a mesma construção da curva iniciadora, conectando cada curva parcial com um segmento na mesma ordem das anteriores, e proceder assim sucessivamente.

A Figura 6 mostra a construção dessa curva.

Figura 6: Curva de Hilbert



Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

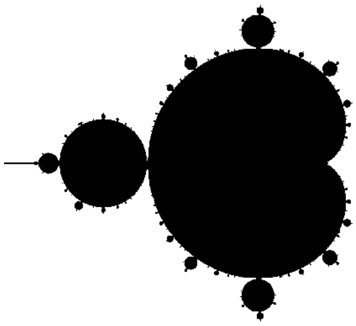
3.3.6 Fatou e Julia

Pierre Fatou (19878 - 1929) e Gaston Julia (1893 - 1978), matemáticos, publicaram trabalhos com contribuições para a área de sistema dinâmicos complexos, particularmente sobre o estudo de propriedades iterativas envolvendo números complexos. Barbosa (2005) menciona que os matemáticos merecem ser lembrados por suas contribuições, mesmo que eles não tivessem desenvolvido pesquisas em conjunto.

3.3.7 Conjunto de Mandelbrot

Os fractais de Fatou e Julia forneceram bases Matemáticas para Mandelbrot, que soube aproveitá-las e desenvolvê-las com recursos computacionais.

Figura 7: Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

3.4 Documentos curriculares, recursos didáticos e práticas escolares

O tema da pesquisa é sobre o ensino de uma Geometria Não Euclidiana, a Geometria Fractal, e como esta está sendo apresentada e discutida em aulas de Matemática. Com isso, alguns questionamentos manifestam-se, tais como será que nos documentos oficiais como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é um documento de caráter normativo, as Geometrias Não Euclidianas são definidas como essencial no processo de aprendizagem do aluno ao longa das etapas da Educação Básica? É necessária a inserção desse tópico nos documentos? Há orientações nos documentos oficiais sobre como apresentar e inserir a Geometria Fractal no ensino de Matemática?

A partir dessas indagações, o intuito é pontuar sobre o que os documentos norteadores dizem ou mencionam sobre as Geometrias Não Euclidianas, em especial a Geometria Fractal. Ressaltamos que essa pesquisa não tem como objetivo um estudo aprofundado sobre os currículos escolares de Matemática. Entretanto, é pertinente consultá-los sobre a prescrição, ou não, do ensino dos fractais na Educação Básica.

De modo geral, há pouca ou quase nenhuma inserção de Geometrias Não Euclidianas nos currículos escolares e que a temática fractal teria sido evidenciada de maneira significativa há menos de 50 anos, cujos conhecimentos ainda são desconhecidos por muitos.

Com relação aos documentos oficiais, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) forneceram elementos essenciais sobre o ensino, orientando sobre a prática escolar de maneira a contribuir com o acesso ao conhecimento matemático às crianças e aos jovens, possibilitando a inserção como cidadãos na sociedade (BRASIL, 1998).

É a partir dos PCN que é explicitado o papel da Matemática no ensino, evidenciando a importância de o aluno valorizar como instrumento para "compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas" e desenvolver habilidades de convívio social.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental é evidenciada a "importância da geometria e das medidas para desenvolver as capacidades cognitivas fundamentais" (BRASIL, 1998, p. 16). Diante disso, os conhecimentos geométricos contribuem com o desenvolvimento de habilidades pessoais e de maneira coletiva, colocando em prática os raciocínios geométricos adquiridos em situações do cotidiano.

Ao pontuar sobre a evolução dos conhecimentos matemáticos, "desenvolvendo-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas" (BRASIL, 1998, p. 25), é dito no PCN que,

> Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. [...] não há uma via única ligando a Matemática e o mundo físico. Os sistemas axiomáticos euclidiano e hiperbólico na Geometria, equivalentes sob o ponto de vista da consistência lógica, são dois possíveis modelos da realidade física. Além disso, essa multiplicidade amplia-se, nos tempos presentes, com o tratamento cada vez mais importante dos fenômenos que envolvem o acaso a Estatística e a probabilidade e daqueles relacionados com as noções matemáticas de caos e de conjuntos fractais (BRASIL, 1998, p. 25).

Inferimos que, desde o PCN, já havia uma preocupação em aceitar uma nova visão de Geometria que não fosse a Geometria Euclidiana, que pudesse modelar e estabelecer conexões com situações do cotidiano e presentes no espaço físico citando os fractais.

Todavia, essa preocupação é mencionada de maneira superficial, sem indicações dessa nova visão e qual visão de Geometria seria essa. É possível notar diante dos conteúdos mencionados pelo PCN do Ensino Fundamental, no campo da Geometria, que as orientações de estudo seriam sobre o espaço, formas, grandezas e medidas, deixando evidente a presença de conceitos e axiomas da Geometria Euclidiana.

Essas mesmas orientações se estendem aos PCN do Ensino Médio, nos quais não há menção sobre as Geometria Não Euclidianas, sendo descrito nas competências e habilidades a serem desenvolvidas: "identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade" (BRASIL, 2000, p. 12), buscando desenvolver "as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação" (BRASIL, 2000, p. 44).

No que tange ao documento normativo vigente na atualidade, Base Nacional Comum Curricular (BNCC) dos anos finais do Ensino Fundamental, os objetivos de conhecimento da Unidade Temática Geometria, juntamente com as habilidades a serem desenvolvidas, estão relacionadas com conceitos e aplicações da Geometria Euclidiana. O Quadro 1 a seguir apresenta os conhecimentos e as habilidades de cada etapa da Educação Básica do Ensino Fundamental (Anos Finais):

Quadro 1: Conhecimentos e habilidades – BNCC

Ano	Conhecimento	Habilidades
6º	Plano cartesiano, prismas e pirâmides, polígonos, construção de figuras semelhantes, ângulos, perímetro, retas paralelas e perpendiculares.	(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial; (EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros; (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos; (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classifica-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles; (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais; (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros; (EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.); (EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento; (EF06MA25) Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas. (EF06MA26) Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão; (EF06MA27) Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais; (EF06MA28) Interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas, (EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

7º	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano, simetrias (translação, rotação e reflexão), circunferência como lugar geométrico, relações entre os ângulos formados por retas paralelas, triângulos e polígonos regulares, área de figuras planas, comprimento da circunferência e volume de blocos retangulares.	(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro; (EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem; (EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros; (EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes; (EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica; (EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°; (EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas; (EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados; (EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos; (EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado; (EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada; (EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico); (EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros; (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas, (EF07MA33) Estabelecer o número como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
8º	Congruência de triângulo, construções geométricas, mediatriz e bissetriz, área de figuras planas e do círculo e volume de bloco retangular.	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos; (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares; (EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso; (EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas; (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica; (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos; (EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes, (EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.
9º	Relações entre ângulos e retas paralelas, relação entre arcos e ângulos, semelhança de	(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal; (EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica; (EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes; (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do

	triângulo, polígonos regulares, distância entre pontos, figuras espaciais, unidades de medida e volume de prismas e cilindros.	triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos; (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes; (EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares; (EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano; (EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva; (EF09MA18) Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros, (EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.

Fonte: BRASIL, 2018.

Diante do exposto anteriormente, concluímos que a Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental anos finais não apresenta competências e habilidades a serem desenvolvidas referentes à Geometria Não Euclidiana ou à utilização dessa Geometria para melhor compreensão e entendimento de outro conteúdo matemático.

No Ensino Médio as habilidades a serem desenvolvidas, de acordo com a BNCC, são:

> (EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos. (EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa. (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro. (EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.). (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras. (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou

> sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados. (EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. (EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital; (EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos. (EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa. (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro. (EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.). (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras. (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados. (EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. (EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital. (BRASIL, 2018, p. 533 – 534)

Mesmo diante de diferentes habilidades envolvendo os conceitos de Geometria, o termo fractal aparece somente na habilidade EM13MAT105, quando é relacionada à "análise de elementos da natureza e diferentes produções humanas" (BRASIL, 2018, p. 533). Ou seja, notamos que os documentos oficiais nacionais - PCN e BNCC, tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio, não incluem orientações referentes ao ensino ou à utilização das Geometrias Não Euclidianas, seja a Fractal ou outra. É importante destacar que, mesmo diante do aparecimento superficial do fractal no Ensino Fundamental (anos finais) e Ensino Médio, existem pesquisas e professores que estão levando esses conhecimentos para as aulas de Matemática.

No âmbito estadual, trouxemos o currículo do Estado do Paraná, o qual se tornou referência para outros sistemas de ensino por ser o primeiro a inserir a Geometria Não Euclidiana em um documento orientador. Nas Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná – DCE – (PARANÁ, 2008), publicadas na primeira década dos anos 2000, houve a inserção de um tópico sobre as Geometrias Não Euclidianas no conteúdo de Geometria (PEREIRA; BORGES, 2017). Segundo as Diretrizes Curriculares desse Estado, recomenda-se que

> [...] no Ensino Médio, aprofundam-se os estudos das noções de geometrias não-euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e elíptica. Na geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades (PARANÁ, 2018, p. 57).

O documento ainda pontua que a abordagem das Geometrias Não Euclidianas - fractal, hiperbólica e elíptica - não se encerram somente a partir dos conteúdos elencados pelas DCE, mas que o professor tem liberdade e autonomia para investigar e realizar outras abordagens dentro da sala de aula.

Embora exista uma ausência de orientações nos Parâmetros Comum Curriculares e na Base Nacional Comum Curricular tem ocorrido um movimento para a inserção dos fractais na sala de aula, possibilitando o desenvolvimento de outra Geometria para além da Euclidiana.

Diante da leitura e da análise dos documentos referidos anteriormente, na busca de encontrar orientações sobre como inserir ou utilizar os conceitos de fractais, existem recomendações sobre o uso de diferentes recursos didáticos no processo de ensino de Geometria.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998),

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (BRASIL, 1998, p. 51).

Em outras Palavras, os PCN afirmam que o estudo da Geometria contribui para a aprendizagem do aluno, estimulando-o a observar, notar semelhanças e diferenças, identificar regularidades e entre outros. Também é mencionado o uso de recursos didáticos como:

> [...] livros, vídeos, televisão, rádio, calculadoras, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão (BRASIL, 1998, p. 57).

Esses diferentes recursos contribuem para uma aprendizagem mais significativa. Dessarte, utilizando como referências os recursos tecnológicos, por exemplo, os computadores, desde os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, existe uma preocupação sobre a importância do uso da tecnologia e o acompanhamento de renovações tecnológicas (BRASIL, 1998). É importante ressaltar que nem todas as escolas brasileiras possuem computadores ou que o acesso seja disponível.

Sobre o uso desses recursos tecnológicos,

> A utilização de recursos como o computador e a calculadora pode contribuir para que o processo de ensino e aprendizagem de Matemática se torne uma atividade experimental mais rica, sem riscos de impedir o desenvolvimento do pensamento, desde que os alunos sejam encorajados a desenvolver seus processos metacognitivos e sua capacidade crítica e o professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e aperfeiçoamento das situações de aprendizagem (BRASIL, 1998, p. 45).

Como é mencionado, esses recursos contribuem no processo de ensino e da aprendizagem de Matemática, seja ele geométrico ou não. Mesmo que não esteja relacionado ao ensino de Geometria, particularmente, nos PCN, no campo Competências e Habilidades a serem desenvolvidas em Matemática há a indicação do uso adequado dos “recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação” (BRASIL, 2000, p. 46), mencionando ainda que as aulas e os livros não se resumem a uma “enorme diversidade de recursos didáticos, meios e estratégias que podem ser utilizados no ensino das Ciências e da Matemática” (BRASIL, 2000, p. 53).

De maneira análoga ao que os PCNs indicam sobre a utilização de diferentes recursos, a BNCC também enfatiza sobre a integração das tecnologias digitais ao currículo escolar tanto nos anos finais do Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

A BNCC do Ensino Fundamental apresenta nas competências específicas de Matemática o uso de ferramentas Matemáticas incluindo as tecnologias digitais “para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2018, p. 267). De modo similar, o apoio ao uso de recursos tecnológicos digitais aparece no nível do Ensino Médio, o documento menciona que diferentes ferramentas tecnológicas como softwares e aplicativos permitem a compreensão e a produção de conteúdo “em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação Matemática” (BRASIL, 2018, p. 475).

Um desses recursos mencionados são os softwares. Na Geometria, Ambrozi, Glowacki e Sauer (2015) mencionam que, o uso de recursos tecnológicos dentro da sala de aula é uma das possibilidades para desmistificar o ensino e a aprendizagem de Geometria, evidenciando softwares dinâmicos como Geogebra, por exemplo, para o ensino da Geometria Fractal:

> Esse aspecto das mídias digitais torna-se muito importante diante das diferentes formas de aprendizagem, permitindo assim que o maior número de alunos consiga desenvolver as habilidades necessárias para a compreensão do objeto geométrico (AMBROZI; GLOWACKI; SAUER, 2015, p. 131).

Considerando a utilização desses recursos que contribuem para que habilidades relacionadas à Geometria Fractal sejam desenvolvidas, Pereira e Borges (2017) apontam que vivemos em uma fase de constante inovações tecnológicas e que a Geometria está relacionada ao uso desses recursos. Esses autores afirmam que nos trabalhos analisados, o uso desse recurso é justificado pelo fato de que ele proporciona melhor “visualização, construção e manipulação de figuras de forma mais precisa e rápida” (PEREIRA, BORGES, 2017, p. 570), especialmente os softwares de geometria. Além das tecnologias digitais, outros recursos didáticos possuem potencialidades pedagógicas para se promover um ensino de geometria com significado, como os materiais manipuláveis.

Segundo Vale e Barbosa (2014), os materiais manipuláveis são:

> todo o material concreto, educacional ou do dia a dia (e.g. ábaco, policubos, folhas de papel, bolas de gude), que represente uma ideia matemática, que durante uma situação de aprendizagem apele aos sentidos e que se caracteriza por um envolvimento ativo dos alunos. Por exemplo, o geoplano é um material educativo pois foi desenvolvido numa perspectiva educacional, enquanto uma folha de papel ou um conjunto de bolas de gude são materiais de uso comum que não foram desenvolvidos com uma finalidade educativa, mas que podem ser usados com esse propósito (VALE; BARBOSA, 2014, p. 6).

Pereira e Borges (2017) discutem sobre a importância dos materiais manipuláveis no ensino de Matemática:

> [...] o uso de materiais manipuláveis na disciplina de Matemática é um importante instrumento de ensino que possibilita ao aluno partir de algo palpável para outros temas mais abstratos, como teoremas, fórmulas e conceitos, sendo assim um subsídio importante para o aluno ter um ponto de partida na tarefa de tornar algo que ele apenas conhece cotidianamente em um conhecimento mais sistemático (PEREIRA, BORGES, 2017, p. 574).

Os autores ainda exemplificam alguns materiais manipuláveis que poderiam ser utilizados no trabalho com o ensino de geometria:

> Materiais manipuláveis, como papel, espelhos, recortes e dobraduras são os mais recorrentes no ensino de geometria, sejam elas euclidianas ou não. Os mesmos possuem um caráter lúdico e por isso muitas vezes despertam o interesse e empenho dos alunos na realização das atividades, o que favorece e o ensino do professor e a aprendizagem dos estudantes (PEREIRA, BORGES, 2017, p. 574).

É fato que tanto os recursos tecnológicos quanto os materiais manipuláveis contribuem para o processo de ensino e aprendizagem de Geometria, despertando o interesse dos alunos.

A título de exemplificação, apresentaremos alguns estudos realizados em aulas de Matemática considerando a Geometria Fractal.

No Ensino Fundamental, Paixão (2014), em sua pesquisa realizada com alunos do ensino fundamental sobre a importância do ensino de fractais nessa etapa da educação básica e sua inserção no currículo de Matemática, relata que o uso de recursos tecnológicos implicou no "aumento do interesse dos alunos pela Geometria e na percepção destes com relação à importância da Matemática como conhecimento útil à vida de muitas formas" (PAIXÃO, 2014, p. 63).

Fernandes (2006), com a intenção de desenvolver uma prática diferenciada acerca do conteúdo Padrões Numéricos, elaborou uma tarefa exploratório-investigativa baseada no Triângulo de Sierpinski, a qual foi aplicada a duas turmas do 7º ano do Ensino Fundamental. Como resultado, a experiência de estabelecer conexões entre a Geometria Fractal e outros conteúdos matemáticos proporcionou, por exemplo, uma rica discussão entre dois alunos, Lia e Leandro, sobre a sequência de triângulos construídos ser infinita ou não, sendo mobilizados pelos alunos argumentos comuns aos infinitésimos:

> **Lia**: Professor, fala para mim que esse triângulo acaba...
> **Leandro**: Lia, não acaba porque se você for tirando triângulos, infinitamente, mesmo que seja um triângulo porcariazinha, você consegue dividi-lo em 4 partes e tirar um triângulo mais porcariazinha ainda.
> **Lia**: Mas, eu não estou vendo. Então não pode...
> **Leandro**: Pode, sim! (FERNANDES, 2006, p. 219)

Acima é apresentada uma experiência aplicada em turmas do Ensino Fundamental nos anos finais. Já o autor Cristovão (2009), realizou uma experiência no Ensino Médio, inspirando-se na tarefa exploratório-investigativa desenvolvida por Fernandes (2006), mas com foco no conteúdo de função exponencial para classes do Ensino Médio. Os resultados apontados pela autora são muito interessantes, desde o envolvimento dos alunos na resolução em equipes, até o desenvolvimento da argumentação, da comunicação e da escrita Matemática.

Diante do exposto, consideramos que independente da escolha do recurso didático ou metodologia de ensino é possível proporcionar uma aprendizagem permeada de sentidos e significados com a Geometria Fractal, desde que a prática pedagógica a ser desenvolvida seja intencional, planejada e com objetivos claros sobre o que se pretende contemplar com os estudantes.

4. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Nessa seção, apresentamos a metodologia empregada na pesquisa, fundamental para a construção do mapeamento das teses e dissertações. Essa pesquisa foi construída a partir das leituras de tese e dissertações já publicadas, configurando-se como uma pesquisa de cunho bibliográfico com abordagem qualitativa.

De acordo com Minayo (2001), uma pesquisa qualitativa pode ser caracterizada levando em consideração os aspectos da realidade que não podem ser quantificados. Possibilitando ainda, a valorização do "[...] universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis" (MINAYO, 2014, p. 21-22). Diante disso, a pesquisa teve como intuito contribuir para a compreensão da relevância do estudo da Geometria Fractal na sala de aula ao contrário de propor a criação de uma amostra de dados probabilísticos e quantificados, não se preocupando com a quantidade numérica, mas sim com os valores que a pesquisa tem a acrescentar.

Ademais, para o desenvolvimento da pesquisa a abordagem qualitativa adotada foi descritiva e interpretativa sobre o ensino de Geometria Fractal nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio a partir das leituras das teses e dissertações.

No que se refere à pesquisa bibliográfica, segundo Marconi e Lakatos (2007, p. 183), esse tipo de pesquisa "[...] não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras". A pesquisa bibliográfica não se trata de uma repetição do conteúdo em estudo, mas o estudo do mesmo conteúdo direcionado para outros objetivos que norteiam a pesquisa. Desta forma, como o objeto de estudo é o ensino da Geometria Fractal, buscamos apresentar essa temática diante dos objetivos inicialmente elencados que moveram essa pesquisa.

Esse tipo de pesquisa bibliográfica pode ser realizado em diferentes fontes bibliográficas já publicadas como,

> [...] publicações avulsas, boletins, jornais, revistas, monografias, teses, material cartográfico etc., até meios de comunicação orais: rádio, gravações em fita magnética e audiovisuais: filmes e televisão. Sua finalidade é colocar o pesquisador em contato direto com tudo o que foi escrito, dito ou filmado sobre determinado assunto, inclusive conferências seguidas de debates que tenham sido transcritos por alguma forma, que publicadas, quer gravadas. (MARCONI, LAKATOS, 2007, p. 183)

Diante das diferentes fontes bibliográficas apresentadas, essa pesquisa está direcionada não só para uma revisão de teses e dissertações, mas também para pesquisas em outras fontes essenciais para a elaboração da revisão de leitura como artigos e livros.

A partir do caráter bibliográfico a pesquisa, aqui descrita, é do tipo Mapeamento, que segundo Fiorentini et. al (2016) entendem essa modalidade de investigação

> como um processo sistemático de levantamento e descrição de informações acerca das pesquisas produzidas sobre um campo específico de estudo, abrangendo um determinado espaço (lugar) e período de tempo. Essas informações dizem respeito aos aspectos físicos dessa produção (descrevendo onde, quando e quantos estudos foram produzidos ao longo do período e quem foram os autores e participantes dessa produção), bem como aos seus aspectos teórico-metodológicos e temáticos (FIORENTINI et al, 2016, p. 17)

A escolha por esse tipo de pesquisa levou em consideração o processo de levantamento e descrição dos dados a partir da leitura de teses e dissertações disponíveis no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES. Uma pesquisa do tipo mapeamento, de acordo com (BARIONI, 2021, p. 20), está comumente apoiada em uma investigação exploratória e descritiva. Dessa forma, realizar o mapeamento é relevante para descrever, explorar e levantar os dados para análise.

O interesse pelo Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES se deve ao fato de este ser alimentado pelos programas de pós-graduação por meio da Plataforma Sucupira, possibilitando obter com maior facilidade e segurança os trabalhos da temática de nosso interesse, exceto os trabalhos que não sejam autorizados por seus autores.

Diante da plataforma escolhida foi necessário acessar, a partir do endereço eletrônico, a Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da Capes[4], para iniciar a busca dos trabalhos que contemplassem o foco da nossa pesquisa. Para que esses trabalhos fossem selecionados foi primordial filtrar as pesquisas disponíveis no Catálogo para que, posteriormente, fossem mapeadas e analisadas.

Após o acesso inicial no Catálogo, foi realizada uma busca[5] essa informação sobre a data de busca é fundamental para que, caso haja a inclusão de produções após esta data, elas não farão parte do mapeamento e da análise da pesquisa.

Nessa busca, foram utilizados os descritores “Fractal” OR “Fractais”, obtendo um total de 1.259 trabalhos encontrados. A escolha desses descritores foi motivada pela intenção de ampliar os resultados da busca. Todavia, diante do resultado obtido, mapear e analisar todos

[4] Disponível em: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/ Acesso em: 04/Jan/2022.
[5] Data da busca: 04 de janeiro de 2022.

esses trabalhos não seria viável e nem relevante para a pesquisa, uma vez que apareceram trabalhos de diferentes áreas do conhecimento e que não possuem interface com a Geometria Fractal na Educação Básica.

Para isso, em seguida, filtramos por “Grande Área do Conhecimento”, selecionando as opções *Ciências Humanas* e *Multidisciplinar*. Essa seleção, “Ciências Humanas e Multidisciplinar”, foi levando em consideração a grande área em que a pesquisa está inserida com trabalhos da área de Educação ou Ensino. Em sequência, em “Área do Conhecimento", foram selecionadas as opções *Educação, Ensino* e *Ensino de Ciências e Matemática*. Com base nesses dois filtros obtivemos 50 trabalhos.

A maioria das produções encontradas são anteriores à plataforma Sucupira, o que exigiu encontrar os arquivos das teses e dissertações nas bibliotecas digitais e repositórios das universidades.

Destacamos que não foi possível localizar as 50 pesquisas inicialmente selecionadas a partir dos filtros. Após as tentativas, cinco não foram encontradas. Logo, foi necessário entrar em contato com os autores por meio do Currículo Lattes, e-mail pessoal e e-mail da biblioteca depositária quando informada, solicitando, caso houvesse, o arquivo das teses e dissertações. Obtivemos o retorno de apenas uma entre as cinco teses/dissertações, a resposta veio por e-mail tanto por parte da autora quanto pela biblioteca depositária, que nos enviou o arquivo da dissertação de mestrado.

Após localizarmos as demais pesquisas nas bibliotecas depositárias informadas, para que em sequência fossem selecionadas e lidas, foi essencial a construção de um quadro contendo as seguintes informações dos trabalhos: nome do autor, título, nome do orientador, instituição e ano de publicação, incluindo as pesquisas não localizadas, até porque as informações mencionadas anteriormente estavam disponíveis no Catálogo da CAPES.

No entanto, para a organização do mapeamento e análise das pesquisas selecionadas foi fundamental nomear essas pesquisas. Desse modo, a identificação dessas publicações foi dada pelo último sobrenome do autor. Isso foi possível desde que não houvesse sobrenomes repetidos, o que não se aplica.

Portanto, são apresentadas no Apêndice 1, todas as teses e dissertações selecionadas para leitura e que seriam, consequentemente, analisadas para compor o *corpus* da pesquisa. Além disso, no Apêndice 2, são apresentadas as informações das teses e dissertações cujo arquivo contendo o texto não foi localizado para leitura. Sendo assim, esses textos foram desconsiderados, restando o total de 45 trabalhos.

Em sequência, para realizar o mapeamento foi preciso ler o título, resumo e palavras-chave. Posteriormente, foi realizada a leitura flutuante de algumas seções dos trabalhos que apresentassem discussão sobre a construção de algum fractal, indicação detalhada do público-alvo da pesquisa, os meios didáticos utilizados para as possíveis construções dos fractais e as considerações finais buscando apontamentos importantes.

Essa leitura flutuante contribuiu para que a categoria *a posteriori* fosse construída, dividindo as teses e dissertações de acordo com a etapa da Educação Básica a qual o trabalho estivesse sendo aplicado.

Como já dito, os trabalhos restantes para serem possivelmente analisados e mapeados foram 45 textos. Entretanto, seria inviável considerar todos os trabalhos filtrados como *corpus* da análise e para a construção do mapeamento. Diante disso, com base na organização em treze grupos, foi essencial escolher qual ou quais grupos fariam parte dos dados para compor essa pesquisa e responder aos objetivos traçados. Para isso, foram escolhidos, a princípio, três grupos: Ensino Fundamental II (EF), Ensino Médio (EM) e Ensino Fundamental II e Médio (EF e EM) ao mesmo tempo, totalizando assim, 22 trabalhos. A seguir, o Quadro 2, apresenta a quantidade de trabalhos em cada um dos grupos escolhidos.

Quadro 2: Quantidade de trabalhos nos grupos selecionados.

Nome do Grupo	**Quantidade de Teses/Dissertações**
Ensino Fundamental II (EF)	11
Ensino Médio (EM)	10
Ensino Fundamental II e Médio (EF e EM)	1

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Prontamente, diante dos dois grupos, foi possível identificar as teses e dissertações que estavam voltados para os anos finais do Ensino Fundamental (EF) e Ensino Médio (EM), etapas estas da Educação Básica que fazem parte do foco de estudo dessa dissertação. Então, 22 trabalhos têm como contexto o Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Entretanto, entre os 22 trabalhos, o único trabalho que considerou ambos os níveis de escolarização - Ensino Fundamental II e Médio (EF e EM) ao mesmo tempo - não tem como tema a Geometria Fractal. Assim, dentre os 11 trabalhos que têm como contexto somente o Ensino Fundamental II (EF), 3 deles não discutem esse tema e 1 trabalho não foi localizado

(M03.1), mas que no título aborda sobre Geometria Fractal. Já os 7 trabalhos restantes discutem sobre a temática em estudo.

Com relação ao grupo do Ensino Médio (EM), apenas um deles não discute especificamente sobre fractal como conteúdo de ensino. Então, nesse grupo restaram 9 trabalhos.

Por fim, restaram 16 trabalhos para serem feitos o fichamento e, posteriormente, o mapeamento e a análise. A seguir, no quadro 3, mostramos como ficou a distribuição da quantidade de trabalhos de acordo com as duas etapas da Educação Básica.

Quadro 3: Quantidade de trabalhos em cada grupo selecionado para análise e mapeamento.

Nome do Grupo	**Quantidade de Teses/Dissertações**
Ensino Fundamental II (EF)	7
Ensino Médio (EM)	9

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Diante do quadro 3, restaram 7 trabalhos do Ensino Fundamental (II) e 9 trabalhos para o Ensino Médio.

Nos quadros 3 e 4, dispostos a seguir, apresentamos os trabalhos que fazem parte da análise e do mapeamento dessa pesquisa, respectivamente do grupo do Ensino Fundamental nos anos finais (EF) e Ensino Médio (EM). São apresentadas ainda algumas informações das publicações como: nome completo do autor, título da dissertação ou tese, nome do orientador, nome da instituição de ensino e ano de defesa.

Quadro 4: Trabalhos do grupo – Ensino Fundamental (EF).

Identificação (Ano de Defesa)	Nome do(a) Autor(a)	Título	Orientação	Instituição	Programa
Gressler (2008)	Márcia Denise Gressler	Construindo uma percepção complexa da realidade a partir do estudo dos fractais	Prof. Dr. João Bernardes da Rocha Filho	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul	Mestrado em Educação em Ciências e Matemática
Gomes (2010)	Antônio do Nascimento Gomes	Uma proposta de ensino envolvendo Geometria Fractal para o estudo de Semelhanças de Figuras Planas	Prof. Dr. José Antonio Salvador	Universidade Federal de São Carlos	Mestrado em Ensino de Ciências Exatas
Rodrigues (2011)	Georges Cherry Rodrigues	Introdução ao estudo de geometria espacial pelos caminhos da arte e por meio de recursos computacionais	Profa. Dra. Tânia Baier	Universidade Regional de Blumenau	Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática
Krindges (2012)	Eliana Einsfeld Krindges	Geometria fractal no ensino fundamental: inserindo matemática contemporânea nos conteúdos do currículo escolar	Profa. Dra. Tânia Baier	Universidade Regional de Blumenau	Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática
Padilha (2012)	Teresinha Aparecida Faccio Padilha	Conhecimentos geométricos e algébricos a partir da construção de fractais com o uso do software geogebra	Orientadora: Profa. Dra. Maria Madalena Dullius Coorientadora: Profa. Dra. Marli Teresinha Quartieri	Universidade do Vale do Taquari	Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas
Mineli (2012)	Juliano de Paula Mineli	Fractais: generalização de padrões no Ensino Fundamental	Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Mestrado em Educação Matemática

Xavier (2020)	Luana Kuister Xavier	Exploração de conceitos geométricos por meio de fractais com o uso do GeoGebra em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental	Profa. Dra. Débora da Silva Soares	Universidade Federal do Rio Grande do Sul	Mestrado em Ensino de Matemática

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Quadro 5: Trabalhos do grupo – Ensino Médio (EM).

Identificação (Ano de Defesa)	**Nome do Autor**	**Título**	**Orientação**	**Instituição**	**Programa**
Gonçalves (2007)	Andrea Gomes Nazuto Gonçalves	Uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais	Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni;	Pontifícia Católica de São Paulo	Mestrado Profissional em Ensino Matemática
Alves (2008)	Alceu Domingues Alves	Introduzindo a geometria fractal no ensino médio: uma abordagem baseada nas formas dos objetos construídos pela natureza	Orientador: Prof. Dr. Romildo Albuquerque Nogueira; Coorientadora: Profa. Dra. Josinalva Estacio Menezes	Universidade Federal Rural de Pernambuco	Mestrado em Ensino das Ciências
Coelho (2010)	Priscila Schmidt Coelho	Fractais e sistemas dinâmicos não-lineares no Ensino Médio	Prof. Dr. Nelson Fiedler Ferrara	Universidade de São Paulo	Mestrado em Ensino de Ciências
Nascimento (2012)	Maristel do Nascimento	Uma proposta metodológica para o ensino de geometria fractal em sala de aula na Educação Básica	Orientadora: Profa. Dra. Sani de Carvalho Rutz da Silva; Coorientadora: Profa. Dra. Nilcéia Ap. Maciel Pinheiro	Universidade Tecnológica Federal do Paraná Mestrado Profissional em Ensino de Ciência e Tecnologia	Mestrado Profissional em Ensino de Ciência e Tecnologia
Faria (2012)	Rejane Waiandt Schuwartz Faria	Padrões fractais: contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos	Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi	Universidade Estadual Paulista – Rio Claro	Mestrado em Educação Matemática
Eli (2014)	Juliano Eli	Números complexos e suas aplicações: uma proposta de ensino contextualizado com abordagem histórica	Orientadora: Profa. Dra. Tânia Baier; Coorientadora: Profa. Dra. Márcia Regina Barcellos Vianna Vanti	Universidade Regional de Blumenau	Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática

Olgin (2015)	Clarissa de Assis Olgin	Critérios, possibilidades e desafios para o desenvolvimento de temáticas no currículo de matemática no ensino médio	Profa. Dora. Claudia Lisete Oliveira Groenwald	Universidade Luterana do Brasil	Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática
Silva (2016)	Josemy Brito da Silva	Fractal - A geometria da natureza aplicada no ensino médio no ensino de física	Prof. Sergio Roberto de Paulo	Universidade Federal do Mato Grosso	Mestrado em Ensino de Ciências Naturais
Vieira (2019)	Diogo Comin Vieira	O uso da geometria fractal como ferramenta no ensino de progressões geométricas e logaritmos	Prof. Dr. José Antonio Salvador	Universidade Federal de São Carlos	Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Para a organização e a análise dos dados, adotamos a Análise de Conteúdo que, segundo Laville e Dionne (1999),

> Mesmo organizado, o material continua bruto e não permite ainda extrair tendências claras e, ainda menos, chegar a uma conclusão. Será preciso para isso empreender um estudo minucioso de seu conteúdo, das palavras e frases que o compõem, procurar-lhes o sentido, captar-lhes as intenções, comparar, avaliar, descartar o acessório, reconhecer o essencial e selecioná-lo em torno das ideias principais. É este o princípio da análise de conteúdo para esclarecer suas diferentes características e extrair sua significação (LAVILLE; DIONNE, 1999, p. 214)

Consoante a isso e aos objetivos propostos nessa pesquisa, a Análise de Conteúdo permite que o mapeamento e a análise de dados possam ser comparados e, ao mesmo tempo, encontradas características semelhantes para discussão. Além disso,

> A análise de conteúdo não é, contudo, um método rígido, no sentido de uma receita com etapas bem circunscritas que basta transpor em uma ordem determinada para ver surgirem belas conclusões. Ela constitui, antes, um conjunto de vias possíveis nem sempre claramente balizadas, para a revelação — alguns diriam reconstrução — do sentido de um conteúdo. Assim, pode-se, no máximo, descrever certos momentos dele, fases que, na prática, virão as vezes entremear-se um pouco, etapas no interior das quais o pesquisador deve fazer prova de imaginação, de julgamento, de nuança, de prudência crítica. (LAVILLE; DIONNE, 1999, p. 217)

A escolha desse tipo de análise contribui para descrever algo que seja relevante das categorias analíticas, sejam *a priori* ou *a posteriori*. A partir da metodologia Análise de Conteúdo, o método para construir as categorias de análise dessa pesquisa foi o indutivo, o qual, segundo Moraes (2003),

> [...] o método indutivo implica construir as categorias com base nas informações contidas no corpus. Por um processo de comparação e contrastação constantes entre as unidades de análise, o pesquisador vai organizando conjuntos de elementos semelhantes, geralmente com base em seu conhecimento tácito, conforme descrevem Lincoln e Guba (1985). Esse é um processo essencialmente indutivo, de caminhar do particular ao geral, resultando no que se denomina as categorias emergentes. (MORAES, p. 197, 2003)

Partindo desse pressuposto, foram consideradas duas categorias de análise na pesquisa, sendo a primeira a *priori*, denominada “Recursos Didáticos” e a segunda categoria construída *a posteriori* intitulada “Conexão entre Geometria Fractal e outros conteúdos matemáticos".

5. ANÁLISE DOS DADOS

Nessa seção, será apresentada a análise dos dados da pesquisa a partir das categorias de análise apresentadas. Antes, faremos a apresentação do mapeamento das dissertações e das teses que compõem o *corpus* de análise de modo descritivo.

Essa seção será dividida em duas subseções: “Panorama das pesquisas” e “Particularidade e Universalidade entre as Dissertações e a Tese”.

5.1 Panorama das pesquisas

Essa subseção está dividida pelos seguintes eixos descritivos, a saber: Composição do *corpus* de análise; Área de concentração da pesquisa; Distribuição das dissertações e da tese por região; Orientações por região e autores recorrentes nos trabalhos;

5.1.1 Composição do *corpus* de análise

Conforme dito na seção anterior, 16 publicações compuseram o *corpus* de análise, sendo 15 dissertações de mestrado e 1 dissertação de doutorado, as quais foram defendidas entre anos de 2007 e 2020.

Quadro 6: Quantidade de trabalhos nos grupos selecionados.

Nome do Grupo	Quantidade de Teses/Dissertações
Ensino Fundamental II (EF)	7
Ensino Médio (EM)	9

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Para a construção do mapeamento e da análise das dissertações e da tese foi realizada a leitura das publicações e o fichamento dos textos. Em sequência, apresentaremos no Quadro 7 a síntese de cada dissertação e da tese, em ordem cronológica crescente, destacando os seguintes aspectos: nome do(a) autor(a), título, objetivo da pesquisa, contexto da pesquisa, fractais mencionados e/ou discutidos, abordagem metodológica da pesquisa, as palavras chaves e a pergunta de pesquisa.

Escolhemos destacar essas informações referente aos trabalhos, pois esses foram alguns aspectos coletados no fichamento.

Quadro 7: Síntese das Dissertações e Tese.

Síntese da dissertação: Gonçalves, A. G. N. Uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais. São Paulo, 2007. Essa dissertação teve como objetivo investigar a aprendizagem do conteúdo de Progressão Geométrica por meio dos fractais e qual seria a influência sobre a construção do conhecimento nesse assunto. Para isso, houve a construção de fractais, em seguida foi feita a representação desses fractais com o uso de software dinâmico e por último, as generalizações. A autora, em suas considerações finais, pontua que com a sequência didática construindo, manipulando e observando facilitou o processo de generalização do conteúdo de Progressão Geométrica. A abordagem metodológica descrita na pesquisa é Engenharia Didática. A autora apresenta detalhes sobre a construção do Fractal Central, Árvore Fractal e Triângulo de Sierpinski, utilizando como recursos pedagógicos dobradura e os softwares Cabri e iGeom. Foram utilizadas as palavras-chave: Fractais, Progressões Geométricas e Geometria Dinâmica. Tem como pergunta de pesquisa "Como a utilização dos fractais pode ser motivadora na percepção da autossemelhança? Como a autossemelhança pode contribuir no processo de generalização das fórmulas da progressão geométrica para os alunos do Ensino Médio?".
Síntese da dissertação: Gressler, M. D. Construindo uma percepção complexa da realidade a partir do estudo dos fractais. Porto Alegre, 2008. A autora propõe um estudo interdisciplinar da natureza complexa dos fractais propondo atividades interdisciplinares entre Matemática, Filosofia e Arte-Educação com o objetivo de investigar a modificação da compreensão dos alunos com relação a realidade. Cada disciplina propôs uma atividade estabelecendo interdisciplinaridade com outra. É mencionado que foi construído com os alunos os fractais Poeira de Cantor, Triângulo de Sierpinski e Cartão Fractal. Nas construções citadas são apresentados os passos para essas construções, mas não são detalhados. A autora, em suas considerações finais, destaca a disciplina de Matemática como parte essencial na investigação onde foi proposto o estudo da complexidade dos fractais que respondeu à pergunta de pesquisa inicialmente elencada pela autora sendo possível evidenciar a evolução dos alunos na compreensão de fatos da realidade por meio dos fractais. A abordagem metodológica da pesquisa é qualitativa do tipo estudo de caso. Foram utilizadas as palavras-chave: Fractais, Teoria da Complexidade, Interdisciplinaridade e Realidade Complexa. Tem como pergunta de pesquisa "De que forma o estudo interdisciplinar da natureza complexa dos fractais modifica a compreensão de alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, acerca da realidade?"

Síntese da dissertação: Alves, A. D. Introduzindo a geometria fractal no ensino médio: uma abordagem baseada nas formas dos objetos construídos pela natureza. Recife, 2008. O autor diz que a temática de Geometria Fractal tem sido pouco discutida nos anos finais do Ensino Médio, propondo uma observação dos fenômenos da natureza e do homem e a partir deles introduzir os conceitos de Geometria Fractal. Para isso, é proposto uma intervenção didática, assim chamada pelo autor, dividida em duas partes: a primeira discutir sobre a Geometria Euclidiana e a segunda utilização do software Cabri Geométre e de materiais concretos. São apresentadas atividades sobre os fractais Esponja de Menger, Conjunto de Cantor e o Triângulo de Sierpinski não detalhando sobre essas construções. O autor, em suas considerações finais, diz que a introdução da Geometria Fractal a partir das observações dos processos construídos pela natureza é bastante motivador e interessante para os alunos. A abordagem metodológica da pesquisa é qualitativa. Foram utilizadas as palavras-chave: Geometria Euclidiana, Geometria Fractal, Construtos pessoais, Ciclo da experiência de Kelly, Software de Geometria Dinâmica. Tem como pergunta de pesquisa “Como trabalhar com os alunos do ensino médio uma nova geometria (a geometria fractal) que permita descrever com mais precisão os objetos e processos que ocorrem na natureza?”
Síntese da dissertação: Coelho, P. S. Fractais e sistemas dinâmicos não-lineares no Ensino Médio. São Paulo, 2010. A autora teve como objetivo identificar evidências de complexificação do conhecimento cotidiano dos alunos. Para isso, proposto atividades inserindo a introdução de conceitos sobre Fractal e de sistemas dinâmicos não lineares. É construído um Cartão Fractal. O procedimento para essa construção é apresentado em um anexo. Todavia, é apenas descrito e não representativo. A abordagem metodológica da pesquisa é qualitativa. Não há palavras-chave indicadas no resumo da dissertação. Não é explicitado qual a pergunta norteadora da pesquisa.
Síntese da dissertação: Gomes, A. N. Uma proposta de ensino envolvendo Geometria Fractal para o estudo de Semelhanças de Figuras Planas. São Carlos, 2010. O objetivo do autor é desenvolver um material didático para alunos e professores explorarem a Geometria Fractal com o intuito de auxiliar no processo de ensino-aprendizagem do conceito de semelhança de triângulos. São apresentadas 7 folhas de atividades com diferentes objetivos. Entretanto, não é explicado como foram feitas as construções sendo apenas pontuado e mostrado através de imagens. O autor, em suas considerações finais, diz que é necessário aperfeiçoar o material didático para posteriormente divulgar para outros professores. A abordagem metodológica da pesquisa é qualiquantitativa, possivelmente sendo um estudo de

caso ou campo, não sendo explicitado pelo autor. Foram utilizadas as palavras-chave: Ensino de Matemática, Geometria Fractal, Motivação e Proposta Curricular. A pergunta de pesquisa é “Como se dá o processo de elaboração, aplicação, análise e recepção pelos estudantes de um Material Didático envolvendo Geometria Fractal para o aprendizado do conceito de Semelhança de Figuras na 8º série do Ensino Fundamental?

Síntese da dissertação: Rodrigues, G. C. Introdução ao estudo de geometria espacial pelos caminhos da arte e por meio de recursos computacionais. Blumenau, 2011.

O autor proporciona uma reflexão referente ao estudo da Geometria Espacial. Discutidas as dificuldades dos alunos em visualizar objetos tridimensionais quando representados em um espaço bidimensional. Sugerindo atividades pedagógicas que relacionasse a Matemática e Arte. É mencionado, uma única vez, no corpo do texto, a palavra Fractal. Como o foco da dissertação é a Geometria Espacial, com relação a Geometria Fractal é proposta uma atividade aos alunos sobre a Esponja de Menger, não apresentando detalhes sobre essa construção. Apenas é utilizado um objeto em acrílico com o intuito de representar a primeira interação da Esponja de Menger. O autor, em suas considerações finais, referente a Geometria Fractal, informa que quando trabalhada paralelamente ao estudo de Geometria Espacial, proporciona uma didática diferente ao ensinar. Contribuindo para desenvolver habilidades de visualização de Geometrias Não Euclidianas. A abordagem metodológica da pesquisa não é explicitada assim como, a pergunta de pesquisa. Foram utilizadas as palavras-chave: Arte, Educação básica, Geometria espacial, Sistema de perspectiva.

Síntese da dissertação: Krindges, E. E. Geometria fractal no ensino fundamental: inserindo Matemática contemporânea nos conteúdos do currículo escolar. Blumenau, 2012.

A autora tem como proposta inserir temas matemáticos contemporâneos, dando destaque a Geometria Fractal. Para isso, é proposta a construção dos fractais com o intuito de melhorar a compreensão de conteúdos matemáticos existentes no currículo escolar. As atividades foram relacionadas com geografia, história, biologia, artes e ensino religioso, possibilitando ao aluno reconhecer a ligação da Matemática com outras áreas do conhecimento. Os fractais construídos foram: Curva de Koch, Floco de Neve de Koch, Conjunto de Cantor, Curva de Peano, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Curva de Hilbert, Árvore Fractal, Conjunto de Júlia e Árvore Pitagórica. A explicação das construções é bem suscinta não apresentando o passo a passo de como foram executados. A autora, em suas considerações finais, diz que com relação a utilização do software Pythagora Tree para construir a Árvore Pitagórica os alunos tiveram dificuldades com a utilização do software e, destaca como principal a dificuldade de ouvir as orientações. Conclui dizendo que é possível inserir a Geometria Fractal e relacionar

com conteúdos já existentes no currículo. A abordagem metodológica da pesquisa não é especificada. Foram utilizadas as palavras-chave: Geometria Fractal, Ensino Fundamental e Atividades Pedagógicas. Tem como pergunta de pesquisa “É possível inserir, nos anos finais do ensino fundamental, tópicos da Geometria *fractal* relacionando-os com os conteúdos já existentes no currículo escolar e com as demais disciplinas do currículo?”
Síntese da dissertação: Nascimento, M. Uma proposta metodológica para o ensino de Geometria Fractal em sala de aula na Educação Básica. Ponto Grossa, 2012. Essa dissertação teve como objetivo propor diferentes atividades de ensino sobre a temática de Geometria Fractal permitindo investigar características básicas dessa Geometria. Na sala de aula de informática foi proposta a construção da Curva de Koch, Floco de Neve, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski e Cartão Fractal. Além disso, foram feitas algumas construções utilizando dobraduras. Todavia, não é explicitado detalhes sobre essas construções, mas são apresentadas imagens. A autora, em suas considerações finais, diz que utilizar atividades diferentes no ensino de Geometria aliada a uma metodologia adequada permiti que os alunos tenham uma participação ativa na aprendizagem. A abordagem metodológica da pesquisa é qualitativa. Foram utilizadas as palavras-chave: Diretrizes Curriculares. Geometria Fractal. Ensino Aprendizagem. Tem como pergunta de pesquisa “Como introduzir os conceitos básicos de Geometria Fractal no Ensino Médio, por meio de diferentes atividades?”
Síntese da dissertação: Faria, R. W. S. Padrões fractais: contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos. Rio Claro, 2012. O objetivo é investigar as contribuições explorando os padrões Fractais por meio de um software dinâmico Geogebra com relação ao processo de generalização de conteúdos matemáticos. Para isso, são propostas seis atividades de manipulação e análise dos padrões fractais. Não explicitando como essas construções foram feitas. A autora, em suas considerações finais, informa que os fractais contribuíram no processo de generalização de conteúdos matemáticos possibilitando a exploração e percepção da propriedade dos fractais, destacando a autossimilaridade. A abordagem metodológica da pesquisa é qualitativa do tipo revisão de literatura. Foram utilizadas as palavras-chave: Educação Matemática, Ensino de Matemática e Ensino Médio. Tem como pergunta de pesquisa “de que modo o estudo dos fractais pode contribuir para a aprendizagem de progressões geométricas?”.
Síntese da dissertação: Padilha, T. A. F. Conhecimentos geométricos e algébricos a partir da construção de fractais com o uso do software geogebra. Lajeado, 2012.

A autora propõe uma intervenção pedagógica buscando investigar como a construção de fractais utilizando o software Geogebra pode contribuir com o entendimento dos conhecimentos geométricos e algébricos. Para isso é mencionado que foi proposta a construção de diferentes fractais. Todavia, não é explicitado como esses fractais foram construídos. São apresentadas apenas algumas orientações superficiais. A autora, em suas considerações finais, afirma sobre a importante contribuição do software Geogebra como apoio nas construções dos fractais, dizendo que as construções com régua, compasso e transferidor seriam mais trabalhosas. A abordagem metodológica da pesquisa é qualitativa. Foram utilizadas as palavras-chave: Geometria, Álgebra e Geogebra. Tem como pergunta de pesquisa "Como a construção de fractais com o uso do Geogebra pode suscitar a produção de conhecimentos geométricos e algébricos?"
Síntese da dissertação: Mineli, J. P. Fractais: generalização de padrões no Ensino Fundamental. São Paulo, 2012. A temática da pesquisa é o conteúdo matemático equação do primeiro grau que tem como objetivo estudar as habilidades dos estudos para resolver problemas por meio da equação do primeiro grau. Analisando as dificuldades encontradas na Generalização de Padrões. Para isso, foi elaborada uma sequência didática com três atividades apoiadas nos elementos da Geometria Fractal. É apresentado um passo a passo dos fractais Conjunto de Cantor, Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski. Para a construção do triângulo o autor trouxe o passo a passo de como seria para construir utilizando o Geogebra. Todavia, não há imagens ilustrando o passo a passo. O autor, em suas considerações finais, fala sobre a utilização da Geometria Fractal para propiciar o reconhecimento de padrões e realizar generalizações. Pontuando também, sobre a dificuldade de organizar a estrutura da equação. A abordagem metodológica da pesquisa é qualitativa e o tipo de pesquisa é engenharia didática. Foram utilizadas as palavras-chave: Generalização de Padrões, Equações do 1º grau, Teoria das Situações Didáticas, Geometria Fractal. Esse autor não apresenta pergunta de pesquisa, mas traz a problemática da pesquisa que inclui elementos relativos ao ensino e aprendizagem de álgebra e, a conceitualização Matemática da ideia de equação.
Síntese da dissertação: Eli, J. Números complexos e suas aplicações: uma proposta de ensino contextualizado com abordagem histórica. Blumenau, 2014. O autor tem como objetivo contribuir com o estudo inicial dos números complexos a partir de sua construção histórica e explorando algumas aplicações. Para isso, aplica uma avaliação diagnóstica em quatro escolas. É apresentado sobre os números complexos na Geometria Fractal, onde foi elaborada uma apresentação sobre os cálculos matemáticos para a obtenção

dos fractais de Julia e de Mandelbrot, mas sem detalhes sobre essas construções. É apenas informando um apêndice que leva a uma página onde estão expostas planilhas sobre as construções. O autor, em suas considerações finais, informa que a proposta educacional pode contribuir para que o ensino de números complexos seja contextualizado relacionando aos conhecimentos históricos, aplicáveis e aos conhecimentos prévios dos alunos. A abordagem metodológica da pesquisa é qualitativa. Foram utilizadas as palavras-chave: Números Complexos, História da Matemática, Ensino de Matemática e Ensino Médio. Tem como pergunta de pesquisa “Quais as concepções dos estudantes de ensino médio sobre raízes quadradas de números negativos? A abordagem histórica e epistemológica da construção do tema números complexos ajudará no aprendizado dos estudantes? Atividades contextualizadas despertam o interesse dos estudantes no tema números complexos?”
Síntese da tese: Olgin, C. A. Critérios, possibilidades e desafios para o desenvolvimento de temáticas no currículo de matemática no ensino médio. Canoas, 2015. Autora teve como objetivos verificar quais são os possíveis temas a serem trabalhados no Currículo de Matemática do Ensino Médio. Para isso, é apresentado sobre os fractais nos currículos e sugerido ao longo do texto exemplos de atividades que explora os fractais, mas não apresenta uma atividade para o ensino dos fractais. Os dados coletados não estão direcionados para a aplicação dos fractais. Aparecendo superficialmente apenas em citações. A autora, em suas considerações finais, diz que é possível indicar temáticas que podem ser desenvolvidas no Currículo de Matemática do Ensino Médio de maneira a comtemplar aspectos referentes ao que ensinar, como e porquê. A abordagem metodológica da pesquisa é qualitativa. Foram utilizadas as palavras-chave: Currículo de Matemática, Ensino Médio e Temas de interesse. Tem como pergunta de pesquisa “Quais propostas temáticas, inspiradas em teorias curriculares contemporâneas, podem fornecer subsídios para o planejamento de outras formas de se apresentar a Matemática do Ensino Médio?”
Síntese da dissertação: Silva, J. B. Fractal - A geometria da natureza aplicada no ensino médio no ensino de física. Cuiabá, 2016. A autor teve como objetivo explorar as possibilidades para que a Geometria Fractal possa ser ensinada no ensino médio como forma de auxílio nas aulas de física. Com relação a Geometria Fractal é apresentada a construção do cartão fractal através de dobraduras apresentando o passo a passo dessa construção. O autor, em suas considerações finais, informa que há uma deficiência no ensino de física em muitas escolas, ter estudados os fractais tornou a aprendizagem mais interessantes e permitiu identificar padrões e regularidades. Segundo o autor, o objetivo foi atingido sendo possível trabalhar de forma não aprofundada, mas de

maneira clara e objetiva os fractais. A abordagem metodológica da pesquisa é qualiquantitativa. A pergunta de pesquisa não é específica no texto. Foram utilizadas as palavras-chave: Geometria fractal, teoria da complexidade, aprendizagem significativa.
Síntese da dissertação: Vieira, D. C. O uso da geometria fractal como ferramenta no ensino de progressões geométricas e logaritmos. São Carlos, 2019. O autor propõe a utilização da Geometria Fractal como uma ferramenta no ensino do conteúdo de Progressão Geométrica. Para isso, é aplicada uma sequência didática construindo dois cartões fractais diferentes a partir de recortes. É apresentado como essas construções foram feitas. O autor, em suas considerações finais, diz sobre o interesse dos alunos ao participar das atividades propostas que envolveu recortes. A abordagem metodológica da pesquisa e a pergunta norteadora não ficaram evidentes no texto. Foram utilizadas as palavras-chave: Ensino de Matemática, Geometria Fractal, Progressões, Logaritmos.
Síntese da dissertação: Xavier, L. K. Exploração de conceitos geométricos por meio de fractais com o uso do GeoGebra em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental. Porto Alegre, 2020. A autora propõe uma intervenção pedagógica com o objetivo de analisar as potencialidades do software Geogebra para compreender conceitos geométricos por meio da exploração dos fractais. Para isso são propostos quatro momentos sendo a 1º apresentação sobre a ideia de fractal, 2º construção do Tapete de Sierpinski usando material concreto, 3º exploração do Tapete de Sierpinski utilizando o Geogebra e, 4º também utilizando o Geogebra exploração do Triângulo de Sierpinski. Não é especificado como foram feitas as construções com o material concreto e no software, mas são apresentadas imagens prontas pela autora. A autora, em suas considerações finais, menciona sobre a contribuição significativa do software Geogebra para compreender os conceitos geométricos e sobre a importância de o planejamento dos objetivos estarem alinhados com a tecnologia. A abordagem metodológica da pesquisa é qualitativa do tipo estudo de campo. Foram utilizadas as palavras-chave: Tecnologias Digitais, Geogebra, Ensino de Geometria e Fractais. Tem como pergunta de pesquisa "Quais as potencialidades do GeoGebra para a compreensão de conceitos geométricos a partir da exploração de fractais em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental?".

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

A partir da síntese, consideramos que a maioria dos trabalhos não apresenta detalhes sobre como podem ser executadas as construções, passo a passo, dos fractais mencionados nas atividades ou intervenções promovidas nas pesquisas. Essas construções são mencionadas de maneira superficial, apresentando como podem ser realizadas as construções, indicando recursos que podem ser usados para efetuar essas construções como softwares e dobraduras, por exemplo, imagens de como seriam esses fractais construídos.

Destacamos a ausência da pergunta de pesquisa em 4 trabalhos. Entendemos que essa ausência é um ponto negativo, pois por se tratar uma pesquisa bibliográfica, que tem como fonte de pesquisa produções acadêmicas e as informações presentes nelas, a pergunta de pesquisa, para o pesquisador, é justamente o que norteia a buscar uma resposta por meio da pesquisa, uma vez que essa pergunta será a orientação sobre os tipos de dados necessários a serem coletados que contribuíram para atingir os objetivos propostos. Responder à pergunta ou identificar lacunas poderá servir como fonte de novas pesquisas ou a continuidade dela.

Nas pesquisas, foram mencionados os usos dos fractais para a aprendizagem de diferentes conteúdos tais como: progressão geométrica, semelhança de triângulo, generalização de conteúdos, compreensão dos fractais relacionando à realidade, descrição de objetos e processos da natureza e a utilização da Geometria Fractal nas aulas de física, para facilitar o entendimento e compreensão de determinado conteúdo. Sobre essa utilização nas aulas de Física, ressaltamos a contribuição da utilização dos fractais no ensino, tornando a aprendizagem mais significativa e interessante.

Com relação à metodologia adotada, apenas um dos trabalhos mencionou ter utilizado como metodologia a Engenharia Didática. De acordo com a autora sua pesquisa denominada "Engenharia Didática" faz referência a "um estudo análogo ao trabalho de um engenheiro no que tange à construção de um projeto" (GONÇALVES, 2007, p. 28). Mencionando que essa engenharia se fundamenta em quatro fases sucessivas a serem executadas: "análises preliminares; concepção das atividades e análise a *priori*; aplicação da sequência didática a *posteriori*" (GONÇALVES, 2007, p. 29). Destacamos a presença da metodologia qualitativa nas pesquisas.

Há menção, ainda, sobre a ausência de discussão nos anos finais do Ensino Médio sobre a temática de Geometria Fractal. Em um dos trabalhos, em que é feita uma análise do currículo de Matemática sobre os temas a serem trabalhados no Ensino Médio, os fractais são apresentados de forma superficial.

A utilização de softwares de geometria dinâmica é mencionada em dois trabalhos, que apresentam em suas conclusões a contribuição desse recurso para a construção dos fractais e na compreensão do que está sendo exposto.

Por último, as construções mais mencionadas nos trabalhos foram o Triângulo de Sierpinski e do Cartão Fractal. Talvez, essas duas construções foram os destaques das construções, pois ambas são possíveis de serem construídas com a utilização ou não de um software de geometria dinâmica.

5.1.2 Área de concentração da pesquisa

Foi realizada uma busca na Plataforma Sucupira para confirmar a Área de Concentração dos programas das dissertações e da tese que compõem o *corpus* de análise, identificando a linha de pesquisa em Ensino, Educação ou Ensino de Ciências e Matemática. No Quadro 8 são apresentados a sigla da instituição de ensino, a modalidade - Mestrado (ME), Mestrado Profissional (MP) ou Doutorado (D), a área de concentração de acordo com a CAPES e, por último, o ano de defesa das dissertações.

Quadro 8: Produção dos programas de pós-graduação.

Sigla da Instituição	**Quantidade**	**Modalidade**	**Programa**	**Área de concentração da linha de pesquisa**	**Ano de defesa das publicações**
USP	1	ME	Ensino de Ciências	Ensino	2010
UNESP-RC	1	ME	Educação Matemática	Geociências	2012
FURB	3	MP MP MP	Ensino de Ciências Naturais e Matemática	Ensino	2012
			Ensino de Ciências Naturais e Matemática	Ensino	2011
			Ensino de Ciências Naturais e Matemática	Ensino	2014
PUCRS	1	MA	Educação em Ciências e Matemática	Ensino	2008
PUCSP	1	MP	*Ensino de Matemática	Ensino	2007
	1	ME	Educação Matemática	Ensino	2012
UFRGS	1	ME	Ensino de Matemática	Ensino	2020
UFSCAR	2	MP	Ensino de Ciências Exatas	Ensino	2019
		MP	Ensino de Ciências Exatas	Ensino	2010

UNIVATES	1	MP	Ensino de Ciências Exatas	Ensino	2012
UTFPR	1	MP	Ensino de Ciência e Tecnologia	Ensino	2012
UFMT	1	MP	Ensino de Ciências Naturais	Ensino	2016
UFRPE	1	ME	Ensino de Ciências e Matemática	Ensino de Ciências e Matemática	2008
ULBRA	1	D	Ensino de Ciências e Matemática	Ensino	2015
Total	16				

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Podemos notar, a partir do Quadro 8, apresentado acima, que a área de concentração em destaque é Ensino. Essa área se deve ao fato de os trabalhos terem tido uma abordagem de ensino sobre determinado conteúdo matemático envolvendo a Geometria Fractal.

Notamos ainda que, apesar de as publicações serem a maioria do Programa de Pós-Graduação com a obtenção do título de Mestrado, seja ele profissional ou não, há um único trabalho com a obtenção do título de Doutorado. Isso pode indicar o desinteresse em continuar as pesquisas com essa temática, o interesse em outros temas para pesquisa ou a não continuidade dos estudos em outras Pós-Graduações ou, até mesmo, a influência de orientadores no Programa de Pós-Graduação em pesquisar sobre esse tema. Entretanto, são apenas hipóteses e especulações.

No Quadro 8 há uma marcação com asterisco (*), apresentando destaque para esse programa de pós-graduação. De acordo com a Plataforma Sucupira, não há Mestrado Profissional no programa pós-graduação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP) em Ensino de Matemática. É possível que esse programa tenha sim existido, mas foi extinto.

Foi possível destacar os programas que tiveram destaque no que se refere ao número de trabalhos sobre Geometria Fractal nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. No Quadro 9 é apresentada essa distribuição.

Quadro 9: Distribuição das pesquisas de acordo com a Modalidade do Programa de Pós-Graduação.

Modalidade	**Quantidade de Teses/Dissertações**
Ensino de Ciências	1
Ensino de Ciências Naturais e Matemática	3
Educação em Ciências e Matemática	1
Ensino de Matemática	2
Educação Matemática	2
Ensino de Ciências Exatas	3
Ensino de Ciências e Tecnologia	1
Ensino de Ciências Naturais	1
Ensino de Ciências e Matemática	2

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

No Quadro acima é apresentada a distribuição das dissertações e da tese com relação à modalidade do programa de pós-graduação, destacando o *Ensino de Ciências Naturais e Matemática* e *Ensino de Ciências Exatas*, com o total de 3 trabalhos em cada modalidade.

5.1.3 Distribuição das dissertações e tese por região

As dissertações e a tese foram defendidas entre 2007 e 2020. Na Tabela 1 mostramos a quantidade de trabalhos publicados por ano. De acordo com a distribuição no período, houve uma média de quase 1 publicação por ano referente à temática de Geometria Fractal.

Tabela 1: Distribuição das pesquisas por ano de publicação.

Ano de publicação	**Quantidade de Dissertações e Teses**
2007	1
2008	2
2010	2
2011	1
2012	5
2014	1
2015	1
2016	1
2019	1
2020	1

Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

Analisando a tabela 1, o ano de mais publicações foi em 2012, com 5 dissertações defendidas, sendo duas pesquisas defendidas no estado de São Paulo, uma defesa no estado de Santa Catarina, uma no estado do Paraná e outra no estado do Rio Grande do Sul. Destaca-se a região Sul, com três pesquisas defendidas sobre a temática de Geometria Fractal em 2012.

Nota-se ainda, na tabela 2, a distribuição das dissertações e da tese nas regiões brasileiras, sendo a região Sul destacada pelo maior número de publicações sobre esse assunto.

Tabela 2: Distribuição das teses e dissertações quanto as regiões brasileiras.

Regiões Brasileiras	**Quantidade de Dissertações e Teses**
Sul	7
Sudeste	6
Centro-Oeste	1
Nordeste	1
Norte	0

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Com essa distribuição 46,6% das publicações correspondem à região Sul, seguida da região Sudeste com 40% e as regiões Centro-Oeste, Nordeste e Norte, respectivamente, com 6,7%, 6,7% e 0% de publicações.

O destaque à Região Sul pode ter acontecido devido à influência de grupos de pesquisa e orientadores para que a tendência em Geometria Fractal tivesse maior destaque e evidência na região. Ademais, isso se deve à alta concentração de cursos de pós-graduação nas regiões Sul e Sudeste. De acordo com o Ministério da Educação[6] (MEC), a região Sudeste tem a maior concentração de pós-graduandos com o total de 31 274 alunos de doutorado, 45 856 no mestrado acadêmico e 2 893 no mestrado profissional. Nota-se na distribuição regional que essa região corresponde a quase metade dos trabalhos publicados. O MEC afirma ainda que as regiões Norte e Centro-oeste são aquelas que possuem os menores índices de matrículas em programas de pós-graduação.

O estado do Paraná (PR), localizado na região Sul, foi o primeiro estado a incluir nos currículos a Geometria Fractal. É importante mencionar que nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná[7] (DCE/PR), desde o ano de 2008, foram inseridas no currículo noções básicas

[6] Ministério da Educação, disponível em: http://portal.mec.gov.br/secretaria-de-regulacao-e-supervisao-da-educacao-superior-seres/180-estudantes-108009469/pos-graduacao-500454045/2583-sp-2021081601#:~:text=A%20regi%C3%A3o%20Sudeste%20concentra%20o,e%202.893%20no%20mestrado%20profissional. Acesso em: 01 de julho de 2023.

[7] Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná, disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em: 25 de setembro de 2022.

de Geometria Não Euclidiana para o Ensino Fundamental e Médio, com a iniciação à Geometria dos fractais no Ensino Fundamental e aprofundando-se em estudos no Ensino Médio com os fractais, mas também as geometrias projetiva, hiperbólica e elíptica. Nas DCE, justifica-se a inclusão dessas geometrias, dentre os diferentes argumentos, que “[...] muitos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas geometrias não-euclidianas” (PARANÁ, 2008, p. 56).

Em consulta à versão atual das Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná[8] atual, publicada no ano de 2018, as Geometrias Não Euclidianas estão presentes como objetos de conhecimento a partir do 6º ano do Ensino Fundamental. O documento apresenta como objetivo de aprendizagem “(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros”

Em relação às produções da região Sul, das 7 pesquisas, 3 delas estiveram sob orientação da professora Dra. Tânia Baier[9], que possui formação em Educação e Educação Matemática, concluindo seu doutorado sobre a Geometria Fractal, intitulado “O nexo "Geometria Fractal - Produção da Ciência Contemporânea" tomado como núcleo do currículo de Matemática do ensino básico”.

A segunda região com o maior número de publicações é a Sudeste, com o total de 6 trabalhos. Esses trabalhos foram produzidos em programas de pós-graduação de universidades paulistas. De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo, publicado em 2011, o documento, ao referir-se aos conteúdos de Geometria, coloca que não há introdução de temas distantes da prática dos professores citando como exemplo, “noções de cálculo diferencial e integral ou de Geometrias Não Euclidianas” (SÃO PAULO, 2011, p. 38). A partir dessa informação, realizamos pesquisas no currículo lattes dos autores das dissertações e seus orientadores, buscando identificar alguma relação para ter despertado o interesse em desenvolver uma pesquisa sobre a Geometria Fractal.

Na dissertação de Mineli (2012), por exemplo, o autor deixa explícito em sua pesquisa que seu interesse na Geometria Fractal surgiu diante da busca por explicações pelas origens das dificuldades de seus alunos com a aprendizagem em Matemática, levando-o a participar do Curso de Pós-Graduação em Psicopedagogia Clínica e Institucional na UNESP *Campus*

[8]Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná, disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/bncc/2018/referencial_curricular_parana_cee.pdf. Acesso: 01 de julho de 2022.

[9] Informações de acordo com o currículo lattes, disponível em: http://lattes.cnpq.br/6543586201650401. Acesso em: 14 de agosto de 2022.

Araraquara entre 2007 a 2009, onde direcionou seus estudos para os “transtornos específicos da aprendizagem dessa disciplina - Discalculia do Comportamento e Acalculia [...]”. (MINELI, 2012, p. 13) O autor indica que para despertar a atenção em seus alunos foi necessário buscar algo relacionado à estética.

Desse modo, teve contato com a Geometria Fractal, “a qual indicou possível potencialidade de seus conceitos para o ensino de Matemática”. (MINELI, 2012, p. 14), partindo da seguinte indagação: “utilizar elementos da Geometria Fractal seria um recurso que poderia motivar os alunos?”. Isso o instigou a dar continuidade em seus estudos na área de Educação Matemática e a produzir sua dissertação sob orientação da Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori. Entretanto, de acordo com o currículo lattes de Mineli[10] (2012), ele é coordenador do projeto de desenvolvimento intitulado “A Geometria e Música Fractal como Estímulo no Processo Ensino – Aprendizagem”, desde 2007 até os dias de hoje, indicando que, possivelmente, a criação desse projeto tenha iniciado diante de seu interesse com essa temática ainda no curso de Pós-Graduação em Psicopedagogia Clínica e Institucional.

Segundo o Currículo Lattes de Sonia Barbosa Camargo Igliori[11], apesar de possuir Graduação, Especialização, Mestrado e Doutorado em Matemática, é professora permanente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP e, em suas orientações em dissertações, ao todo 32, 28 são em Educação Matemática e 3 em Matemática. Além disso, em 1990, foi orientadora de Iniciação Científica, cujo tema foi "Os Fractais" e, participou como integrante do projeto intitulado "A utilização de fractais no ensino da Matemática", em 2012.

Com base nessas informações, Mineli (2012) e sua orientadora possuíam experiências e conhecimento sobre os fractais, aproximando-os a partir do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP, onde foi obtido o título de mestre

Já o orientador de Gomes (2010) e Vieira (2019), o Prof. Dr. José Antonio Salvador[12], sua familiaridade com os fractais surge desde a orientação em trabalhos de conclusão de curso em 2005, como orientador em iniciação científica em 2006, ministrando curso de curta duração intitulado de “Dobras, Cortes, Padrões e Fractais” em 2008, até chegar às orientações das

[10] Informações de acordo com o currículo lattes, disponível em: http://lattes.cnpq.br/8428509335766516. Acesso em: 30 de julho de 2023.
[11] Informações de acordo com o currículo lattes, disponível em: http://lattes.cnpq.br/0345215431099831. Acesso em: 30 de julho de 2023.
[12] Informações de acordo com o currículo lattes, disponível em: http://lattes.cnpq.br/2487171069472158. Acesso em: 30 de julho de 2023.

dissertações de Gomes (2010) e Vieira (2019). E, diante do currículo lattes de Gomes[13] (2010) e de Vieira (2019)[14], ambos não apresentam familiaridade com a temática de fractais. Mas, diferentemente de Vieira (2019), que desenvolve somente a dissertação sobre os fractais, Costa (2010) fez apresentações em congressos, participou de eventos relacionados à Geometria Fractal e também fez apresentações de trabalhos publicando em anais de congressos durante o período em que desenvolveu sua dissertação. Com base nessas informações, uma hipótese é que a Geometria Fractal teria sido uma sugestão do orientador embasada, possivelmente, no projeto inicial escrito pelos pesquisadores sobre Geometria.

Logo, podemos concluir que o professor orientador pode influenciar os caminhos a serem percorridos ao longo da pesquisa, sugerindo ideias e alinhando a proposta inicial do projeto. Mas, também, pode haver alinhamento com a linha de raciocínio de ambas as partes, orientador e orientando.

5.1.4 Orientações por região e autores recorrentes nos trabalhos

A seguir, o Quadro 10 indica a quantidade de produções de acordo com os orientadores. Acreditamos que a linha de pesquisa do orientador é importante, mas não suficiente para a escolha do orientador. Todavia, isso não significa que o projeto inicial não possa sofrer alterações e mudanças.

Quadro 10: Quantidade de orientações por região.

Região do Brasil	**Nome do Orientador**	**Quantidade de Trabalhos Orientados**
Sul	Profa. Dra. Tânia Baier	3
	Prof. Dr. João Bernardes da Rocha Filho	1
	Profa. Dra. Débora da Silva Soares	1
	Profa. Dra. Maria Madalena Dullius	1
	Profa. Dra. Sani de Carvalho Rutz da Silva	1

[13] Informações de acordo com o currículo lattes, disponível em: http://lattes.cnpq.br/6811702285923172. Acesso em: 30 de julho de 2023.
[14] Informações de acordo com o currículo lattes, disponível em: http://lattes.cnpq.br/4128546204648929. Acesso em: 30 de julho de 2023.

Total		7
Sudeste	Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori	1
	Prof. Dr. José Antonio Salvador	2
	Prof. Dr. Nelson Fiedler Ferrara	1
	Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni	1
	Dr. Marcus Vinicius Maltempi	1
Total		6
Centro-Oeste	Prof. Sergio Roberto de Paulo	1
Total		1
Nordeste	Prof. Dr. Romildo Albuquerque Nogueira	1
Total		1

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Podemos observar, a partir das informações dispostas no quadro acima que, ao todo, foram 12 orientadores diferentes e entre eles se destacam: Profa. Dra. Tânia Baier, como mencionada anteriormente, com três orientações defendidas na região Sul e o Prof. Dr. José Antonio Salvador, com duas orientações defendidas na região Sudeste.

De acordo com o currículo *lattes*[15], a professora coordenou o projeto de pesquisa denominado de "História da Matemática dos primórdios aos fractais: possibilidades pedagógicas para a educação básica" entre 2010 e 2012. Além disso, teve 21 orientações de mestrado concluídas, incluindo discussões sobre Geometria, apresentadas no título, sendo: uma sobre a Geometria Fractal, uma sobre Geometria Espacial e a outra no contexto da Geometria Analítica. Identificamos, também, duas orientações em andamento que são a respeito da Geometria, sendo uma delas sobre a Geometria Fractal. Houve ainda, 12 orientações em monografias, sendo quatro voltadas para a Geometria, com três delas discutindo sobre Geometria Fractal. Suas duas últimas palestras, em 2017 e 2019, foram apresentadas respectivamente, sobre “Fractais para o ensino fundamental: vivências pedagógicas em escolas

[15] Currículo lattes: Professora Dra. Tânia Baier. Disponível em: http://lattes.cnpq.br/6543586201650401. Acesso, 25 de setembro de 2022.

parceiras PIDIB/Matemática/FURB" e "Fractais Africanos". A partir disso, podemos compreender sua proximidade com a temática de Geometria, em especial a Fractal.

Já o professor Dr. José Antonio Salvador[16] apresenta em seu currículo lattes a sua linha de pesquisa voltada para a Matemática Aplicada e Modelagem Matemática. Ele publicou um artigo em 2012 intitulado de "Dobras. Cortes e fractais no Ensino Fundamental". Além disso, houve publicações de trabalhos em anais de congressos a respeito da Geometria Fractal, em 2010 e 2009, um resumo expandido intitulado "Explorando Geometria Elementar através de Jogos e Desafios" e, três sobre a Geometria Fractal em resumos expandidos. Notamos que, apesar de suas contribuições, sua linha de pesquisa está mais voltada para a área de Modelagem Matemática. Apesar de atuar no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE), sua formação acadêmica não é na área de Educação ou Ensino, possuindo Graduação, Pós-graduação e Doutorado em Matemática.

Com o auxílio do fichamento, foi possível analisar qual foi o tipo de metodologia adotada na tese e nas dissertações. Para facilitar esse mapeamento no fichamento foram descritas da seguinte maneira: qualitativa, quantitativa, qualiquantitativa, sem especificação e outros. A opção sem especificação foi destinada às dissertações que, a partir da leitura, não foram identificadas ou mencionadas explicitamente. A opção "outros" foi para as possíveis dissertações que apresentavam alguma metodologia diferentes das opções citadas. A seguir, o Quadro 11, mostra essa distribuição.

Quadro 11: Abordagem metodológica nas dissertações

Etapa da Educação Básica	**Abordagem Metodológica**	**Quantidade**
Ensino Fundamental (II)	Qualitativa	4
	Quantitativa	0
	Qualiquantitativa	1
	Outros	0
	Sem especificação	2

[16] Currículo lattes: Professor Dr. José Antonio Salvador. Disponível em http://lattes.cnpq.br/2487171069472158. Acesso, 25 de setembro de 2022.

Ensino Médio (EM)	Qualitativa	5
	Quantitativa	0
	Qualiquantitativa	1
	Outros	1
	Sem especificação	1

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Com base nas informações expostas no quadro 11, podemos analisar que a pesquisa qualitativa foi a abordagem metodológica mais utilizada, totalizando 9 dissertações com essa abordagem e 2 com qualiquantitativa. Esse volume de pesquisas com abordagem metodológica qualitativa pode ter ocorrido devido à preocupação dos pesquisadores em aplicar um método exploratório, no qual as atividades e intervenções propostas pudessem ser exploradas e analisadas, em que "vários tipos de dados são coletados e analisados para que se entenda a dinâmica do fenômeno" (GODOY, 1995, p. 21), estudando os fenômenos sociais e comportamentais e levando em consideração o contexto que eles estão inseridos.

Conforme explicitado na seção de metodologia, para compreender sobre o que essas pesquisas qualitativas abordaram, foram criadas duas categorias: "Recursos Didáticos" e "Conexão entre Geometria Fractal e outros conteúdos matemáticos".

Na subseção a seguir, detalharemos a categoria a priori "Recursos Didáticos".

5.2 Categoria 1 – Recursos Didáticos

Essa categoria denominada Recursos Didáticos tem como característica identificar quais recursos foram priorizados pelos professores e/ou pesquisadores em suas intervenções didáticas, lócus da construção dos dados dessas pesquisas.

Para Panossian e Galvão (2022),

> São considerados como recurso didático todo material utilizado como auxiliar no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, que o professor tem por objetivo trabalhar com seus estudantes. Assim, são considerados recursos didáticos materiais concretos e manipulativos, jogos, o uso de um software, vídeos, filmes, músicas, cartazes, o livro didático, entre outros. (PANOSSIAN; GALVÃO, 2022, p. 16)

Os recursos didáticos considerados nessa categoria fazem referência às considerações de Panossian e Galvão (2022) que podem ser utilizados no trabalho pedagógico, contribuindo com o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, com "estudantes dos anos finais do ensino fundamental, do ensino médio e do ensino superior" (SÁ; PANOSSIAN, 2022, p. 78) e também, as orientações da BNCC, em que são apresentadas para o desenvolvimento de habilidades previstas para o Ensino Fundamental II indicando o uso de,

> "[...] recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (BRASIL, 2018, p. 276)

Portanto, a utilização desses recursos contribui com o processo de ensino e aprendizagem do aluno. Para o Ensino Médio, de acordo com as orientações da BNCC, podem ser efetivadas ações em conjunto com a família e a comunidade, por exemplo, "selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender" (BRASIL, 2018, p. 16).

Sabendo da importância desses recursos didáticos e da contribuição que eles podem propiciar no processo de ensino e aprendizagem da geometria e de sua utilização pelos professores para o ensino, os recursos pontuados em nove dissertações foram os softwares Pythagoras Tree, Geogebra, Cabri-Géomètre, Fractint, iGeom e Forge.

São softwares de geometria dinâmica voltados para o ensino e aprendizagem da Geometria, sendo utilizados para o entendimento do conteúdo específico em estudo a partir da compreensão dos fractais. Entretanto, esses softwares existem devido ao fato de as ferramentas tecnológicas serem essenciais para ampliar as buscas por informações para além dos livros didáticos e da biblioteca. Essa ferramenta, a tecnologia, é primordial para que softwares dinâmicos, por exemplo, possam ser explorados e possam contribuir para ampliar os estudos e a visualização do que está sendo ensinado.

O Quadro 12 apresenta quais foram os softwares utilizados nos trabalhos, juntamente com a identificação das dissertações que fizeram uso dessa ferramenta, assim como as dissertações que utilizaram além dos softwares dinâmicos outro(s) recurso(s) metodológico(s) adotados para ensinar.

Quadro 12: Softwares Dinâmicos.

Nome do Software	Dissertações/Tese	Etapa da Educação Básica	Quantidade de Trabalhos

Geogebra	Xavier	EF	4
	Mineli	EF	
	Faria	EF	
	Padilha	EM	
Pythagoras Tree	Kringes	EF	1
Cabri-Géomètre	Gonçalves	EM	2
	Alves	EM	
iGeom	Gonçalves	EM	1
Forge	Nascimento	EM	1
Fractint	Eli	EM	1

Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

No entanto, é importante mencionar que, mesmo que houve a aparição dos softwares Forge e Fractint, respectivamente, nas dissertações de Nascimento (2012) e Eli (2014), ambos não utilizaram o recurso didático referido no processo de ensino e aprendizagem de determinado conteúdo a partir da Geometria Fractal.

Na dissertação de Nascimento (2012) não foi proposta a aplicação de atividade, na qual seria discutida a construção do fractal por meio do software Forge, mas sim a partir da aplicação de uma oficina intitulada de “A inclusão da Geometria Fractal como conteúdo da educação básica representa um avanço na Educação Matemática do Paraná”. Em um dos encontros, foi proposta uma atividade de visualizar fractais já prontos por meio do software. Consideramos que, mesmo não havendo a construção do fractal, a atividade propôs explorar e manipular o fractal permitindo que o aluno fizesse observações e identificasse conhecimentos matemáticos.

Nascimento (2012) indica que, ao questionar os alunos sobre a importância do uso do software na visualização e manipulação dos fractais, eles relataram que, com o uso do software Forge “ficou mais fácil compreender o que significava “Complexidade infinita”, pois nos desenhos realizados em sala de aula “não era possível realizar mil interações” (aluno A9).” (NASCIMENTO, 2012, p.72).

Já a tese de Eli (2014), foi a única a utilizar o software Fractint, o qual é aplicado, inicialmente, em uma avaliação diagnóstica, buscando conhecer os conhecimentos dos alunos a respeito de raiz quadrada e de números negativos.

Os sujeitos da pesquisa foram os alunos da 3º série do Ensino Médio noturno de uma escola pública localizada na cidade de Gaspar-SC, propondo a aplicação de um produto educacional[17], que são atividades, apresentando importância para a utilização do recurso computacional e possibilitando a exploração de imagens no plano complexo e de objetos fractais.

[17] O produto educacional citado nessa dissertação pode ser encontrado através do endereço eletrônico https://sites.google.com/site/julianoeli/ disponibilizado pelo autor na própria dissertação.

Eli (2014) apresenta a aplicação dos números complexos na Geometria Fractal, instruindo o professor a realizar atividades por meio de planilhas eletrônicas e o software Fractint, permitindo a exploração visual dos fractais. Para isso, foram estudados os conjuntos de Julia e de Mandelbrot. O Conjunto de Mandelbrot foi apresentado aos alunos por meio de uma apresentação de *Power Point*. Porém, não houve a construção dos conjuntos, sendo relatada a impossibilidade de trabalhar com os computadores para que os alunos pudessem ter contato com o software Fractint. Não há aprofundamento sobre o estudo dos fractais com os alunos. No entanto, nas considerações finais do trabalho é apresentado o interesse dos alunos em querer construir fractais e o quanto ficaram deslumbrados com as imagens apresentadas.

Mesmo diante de poucos apontamentos com relação à Geometria Fractal, na dissertação de Eli (2014), foi possível expressar sobre a beleza dos fractais, mesmo que apresentando somente a imagem, provocando nos alunos o interesse em conhecer mais sobre o software Fractint e a construir fractais a partir desse recurso. É dito ainda que "o produto educacional ficou limitado quanto às atividades de aplicações, porém estas relações necessitam de mais tempo para que o próprio estudante entenda as conexões que existem" (ELI, 2014, p. 119), apresentando superficialmente os fractais e o potencial do recurso do software para as construções.

Com base no Quadro 12, notamos que o software Geogebra foi o mais utilizado entre as 9 dissertações e a tese que fazem uso desse recurso didático. O software em destaque é gratuito e reúne diferentes recursos para o ensino e a aprendizagem de Matemática. O Geogebra é um software livre que permite realizar diversas construções utilizando pontos, segmentos, retas, bem como construções de funções entre outros (ZIMMER; DESCOVI, 2013).

Na dissertação de Xavier (2020), a autora usa o software Geogebra na exploração do Tapete e Triângulo de Sierpinski. Essa exploração acontece diante de uma proposta de intervenção pedagógica composta por quatro momentos, sendo o primeiro a apresentação inicial da ideia de fractal, seguida da aplicação de uma folha impressa contendo perguntas abertas referentes aos fractais, tais como o que é um fractal, exemplos de fractais na natureza e entre outras, com a intenção de recordar sobre a apresentação dos fractais e promover uma discussão sobre o tema. Ressaltamos que essas perguntas foram construídas a partir da introdução inicial de fractais, as quais foram apresentadas por meio de apresentação oral e de slides.

Após essa revisão, o segundo momento da intervenção foi a construção do Tapete de Sierpinski, utilizando o EVA como material. No terceiro e no quarto momento foram explorados o Tapete de Sierpinski e o Triângulo de Sierpinski no GeoGebra. No entanto, essas explorações foram feitas por meio de um *applet* desenvolvido pela professora da classe, que também era a pesquisadora, para que os alunos pudessem acessar e interagir com a representação virtual do Tapete de Sierpinski que possuía as mesmas dimensões, 27 cm x 27 cm, assim como os construídos pelos alunos utilizando o material concreto. Nesse *applet*, havia controle deslizante para que os alunos pudessem explorar. Da mesma maneira, o Triângulo de Sierpinski também foi disponibilizado, a partir do *applet*, para a exploração dos alunos com as orientações do pesquisador.

A pesquisa de Xavier (2020) foi aplicada a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental II de uma escola pública localizada em Gramado – RS. Foi relatado, a partir da aplicação da intervenção pedagógica sobre a contribuição significativa do software Geogebra para a compreensão dos conteúdos de área e do perímetro que foram calculados nas atividades com o material concreto e visualizados no software. Além disso, a autora diz que a visualização e a exploração das construções promoveram a percepção de infinito, a qual os alunos podiam ampliar a imagem que haveria mais e mais triângulos retirados, ou seja, a imagem teria uma continuidade repetitiva.

No entanto, a construção do Tapete e do Triângulo de Sierpinski no software não é proposta para os alunos, é apresentado apenas a imagem pronta dessas construções e a disposição de algumas ferramentas que ficaram disponíveis para a exploração dos alunos escondendo as que não seriam utilizadas. Essa ausência da construção desses fractais é justificada pela pesquisadora diante da necessidade do domínio para manusear o software vindo dos alunos, necessitando de algumas aulas para ensiná-los a utilizar a ferramenta, o que tornaria as construções demoradas e dispersaria o foco da atividade, que é o cálculo de área e perímetro. Além disso, haveria atraso no cumprimento do planejamento escolar. Ressaltamos ainda que a autora explicita que realizar as construções poderia ter trazido discussões interessantes para a aula, mas que em nenhum momento essa ausência teria prejudicado a análise dos conteúdos em estudo.

Complementamos ainda, referente à dissertação de Xavier (2020), sobre o questionamento interessante apresentado no trabalho no qual foi transcrito o diálogo no trabalho vindo de um aluno com sua dupla enquanto respondia a folha impressa com perguntas sobre o Triângulo de Sierpinski, na questão em que era pedido para explicar detalhadamente o processo de construção do fractal. A dúvida foi em relação à classificação dos triângulos quanto à medida dos lados - equilátero, isósceles e escaleno - para a criação do triângulo de Sierpinski, uma vez que é preciso calcular o ponto médio do triângulo. Esse questionamento é pertinente, pois poderia ser discutido propondo aos alunos a construção do triângulo de Sierpinski, usando o software, caso eles soubessem manusear, ou então o material concreto, EVA, por exemplo, que foi utilizado para a construção inicial na intervenção pedagógica, a partir de um triângulo qualquer diferente de um equilátero e observar se o processo seria o mesmo e se seria possível construir.

Entretanto, para responder a esse questionamento e sanar a dúvida do aluno, a professora pesquisou imagens no *Google* para mostrar aos alunos e foi escrito no trabalho o seguinte: "Pesquisei o Tapete de Sierpinski quando o triângulo não é equilátero" (XAVIER, 2020, p. 131). Acreditamos que tenha havido um erro de digitação e que ao invés de "Tapete" deveria ser "Triângulo", pois a sessão em discussão no trabalho explora o Triângulo de Sierpinski. Mas, o apontamento principal com relação a esse questionamento é que, dando sequência ao diálogo que foi transcrito, é possível entender que o ponto médio de um triângulo pode ser calculado independentemente da classificação quanto à medida dos lados, o que de fato é verdade. Mas que, a partir de qualquer triângulo, a construção do Triângulo de Sierpinski poderia ser possível, o que não é verdade. Em seu livro, Barbosa (2005) apresenta sobre a construção de alguns fractais incluindo o Triângulo de Sierpinski, a partir de um triângulo equilátero.

Podemos inferir que houve um equívoco com relação a essa afirmação, de que seria possível construir o triângulo de Sierpinski com qualquer triângulo. Por fim, nessa mesma dissertação é expressa a necessidade de ter planejamento, ao inserir a tecnologia, alinhando com os objetivos a serem propostos na atividade em sala de aula complementando que "o recurso tecnológico, sozinho, não transforma o contexto pedagógico" (XAVIER, 2020, p. 141).

Em Faria (2012), é proposto um curso com seis atividades de manipulação utilizando o software Geogebra, a partir de diferentes fractais como Árvore Pitagórica, Triângulo de Sierpinski, Curva de Koch, Tetra Círculo, Lunda-Design e Hexagonal tipo Dürer, cujas atividades foram aplicadas a alunos da 1ª série do Ensino Médio.

Para iniciar o curso foi aplicado um questionário diagnóstico com o intuito de identificar o nível de conhecimento dos alunos com relação aos fractais, com o uso do computador, softwares e entre outros. Antes mesmo de iniciar as atividades, foram apresentadas algumas funções do software que seriam utilizadas nas manipulações. Essas orientações foram apresentadas no apêndice da pesquisa, de maneira descritiva e sem ilustrações.

A construção de todos os fractais não foi desenvolvida com os alunos, apenas a construção de dois deles foram apresentadas. Além disso, não é mencionado como os demais fractais foram construídos até serem dispostos para os alunos. Como dito, quatro entre os seis fractais já haviam sido construídos pelo pesquisador apresentando a construção pronta no software Geogebra para que o aluno realizasse as manipulações por meio de um questionário.

A partir da leitura, pudemos compreender que semelhante à pesquisa de Xavier, Faria (2012) utiliza o fractal já construído liberando algumas funções do software para interação. Um exemplo é a primeira atividade referente à Árvore Pitagórica, essa interação é conduzida a partir das perguntas, solicitando a dupla de alunos a realizar o que está sendo pedido e escrever o que foi observado ao efetuar o comando. A maneira como foi proposta a atividade solicitando que descrevesse ou respondesse algum questionamento ao realizar um dado comando permite analisar detalhadamente cada passo da manipulação do fractal.

A partir da Árvore Pitagórica foi possível realizar o estudo do conteúdo de progressões aritméticas encontrando uma equação que equivalesse à equação do termo geral, tornando o ensino e a aprendizagem significativos. Esse processo de apresentar o fractal no software para que as duplas de alunos manipulassem a partir das questões é repetido nas demais atividades com questões apropriadas ao fractal estudado e ao conteúdo em estudo pretendido.

Porém, por se tratar da proposta de um curso, seria interessante, para além das aplicações do questionário, mostrar como as construções foram feitas e dispostas ao aluno a fim de conhecer como seriam os comandos necessários à construção dos fractais em manipulação. As únicas construções que são apresentadas com o passo a passo são para os fractais Tetra Círculo e Hexagonal tipo Dürer.

Podemos concluir que o uso do software Geogebra em ambas as dissertações citadas anteriormente indicam contribuição para o entendimento de diferentes conteúdos matemáticos, na possibilidade de visualização, manipulação e a construção dos fractais. É de suma importância dizer que as construções utilizando régua, compasso e transferidor também são válidas, contudo, limitadas a serem construídas repetidamente com interações infinitas. Além disso, as atividades foram feitas em duplas permitindo uma discussão entre os alunos e a troca de ideias.

A apresentação das construções, fazendo o uso do software, são bem superficiais ou, até mesmo, inexpressivas havendo uma preocupação com a aplicação de questionários após as atividades fazendo parte da coleta de dados da pesquisa e posterior análise. Realmente, as dissertações propuseram a manipulação dos softwares a partir dos fractais já prontos liberando algumas funções para interagir com o fractal e realizar o estudo do conteúdo em discussão.

Pontuamos ainda que, na atividade referente à Árvore Pitagórica citada na dissertação de Faria (2012) uma dupla de alunas não recordava como era feito o cálculo da área no software. Então, a professora sanou a dúvida e exemplificou o comando, em sequência as alunas fizeram e registraram os cálculos na tabela de registro.

Assim, com relação à tecnologia utilizada através dos softwares expressados anteriormente, os autores Costa et. al (2009) dizem que,

> A tecnologia não exclui os livros e as bibliotecas como guias de leitura concisa. Ela vem para complementar e ampliar o espaço de busca do conhecimento de forma mais rápida. Nessa concepção, é possível unir aulas convencionais com novos recursos obtendo aulas inovadoras e surpreendentes para nossos alunos. (COSTA et. al, 2019, p. 2)

Logo, a ferramenta tecnológica contribui para que softwares sejam construídos e explorados oferecendo a utilização desse recurso para a aprendizagem além do livro didático.

Segundo Ambrozi, Glowacki e Sauer (2015),

> Dentro das possibilidades tecnológicas surge, a geometria dinâmica, cujo termo, comumente é utilizado para designar programas interativos que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades, ou até mesmo os chamados régua e compasso eletrônicos, constituindo-se de ferramentas importantes para o ensino da geometria euclidiana, estes softwares também costumam ser usados em pesquisas e em outras áreas da geometria, como as geometrias não-euclidianas, geometria analítica e geometria descritiva. (AMBROZI; GLOWACKI; SAUER, 2015, p. 130-133)

A partir da declaração dos autores, podemos notar que o uso de softwares dinâmicos é essencial, pois auxilia na criação, manipulação, visualização e identificação de elementos da Geometria Euclidiana e Não Euclidiana.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p. 59) enfatizam sobre a importância de incorporar ao ensino de Matemática, de modo geral, os recursos tecnológicos, mencionando sobre o uso do computador, por exemplo. A inserção desses recursos tecnológicos como o computador é fundamental porque é a partir desses recursos que softwares dinâmicos poderão ser explorados permitindo a partir deles conhecer a Geometria para que o aluno "consiga desenvolver as habilidades necessárias para a compreensão do objeto geométrico". (AMBROZI; GLOWACKI; SAUER, 2015, pág. 130-133)

Já nos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCNEM) é nítida a preocupação com a inserção da tecnologia no ensino, pontuando que "privilegiar a aplicação da teoria na prática e enriquecer a vivência da ciência na tecnologia e destas no social passa a ter uma significação especial no desenvolvimento da sociedade contemporânea" (BRASIL, 2000, p. 15). Perante o exposto, o uso de softwares dinâmicos nas aulas contribui para o desenvolvimento do aluno diante da sociedade que está tecnologicamente sendo modificada.

Na BNCC, em competências específicas de Matemática para o ensino fundamental é apresentado sobre a utilização de ferramentas Matemáticas, incluindo tecnologias digitais, modelando e resolvendo problemas do cotidiano.

Barbosa (2002, p. 104) menciona que a “informática pode modificar a forma da compreensão da Matemática”. Sendo assim, sem esses recursos o conjunto de Julia, por exemplo, não seria possível de ser visualizado.

É ressaltado a partir da pesquisa desenvolvida por Sena e Dorneles (2013, p. 153) que “os estudos reforçam a necessidade de o currículo incorporar novas técnicas e tecnologias para melhorar o processo de ensino aprendizagem”. De fato, utilizar as tecnologias promove melhor visualização e contribui para o ensino mais significativo.

Diante da contribuição que a tecnologia tem para que esses recursos de softwares sejam criados e construídos e com base na preocupação dos PCNs em inserir essa tecnologia no ensino foi possível, por meio da análise dos dados das publicações, identificar o uso de seis softwares diferentes para discutir dentro da sala de aula sobre a temática de Geometria Fractal e/ou fazer uso desse recurso juntamente com os conceitos da Geometria Fractal para compreender outros conteúdos, tais como: progressão geométrica, área e entre outros.

Em face da exposição dos recursos didáticos dos softwares dinâmicos para auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem da Geometria Fractal ou de conteúdos matemáticos, também identificamos pesquisas que apresentaram a utilização de recursos didáticos como material concreto: régua, tesoura, esquadro e EVA.

O Quadro 13, a seguir, apresenta quais foram as pesquisas que apresentaram esses recursos didáticos em suas dissertações.

Quadro 13: Recursos Didáticos.

<table>
<tr><th>Material</th><th>Dissertações</th><th>Etapa da Educação Básica</th><th>Quantidade de Trabalhos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Régua, tesoura e esquadro (dobradura)</td><td>Krindges
Gressler
Mineli
Padilha
Gomes</td><td>EF</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Coelho
Gonçalves
Vieira
Nascimento
Silva</td><td>EM</td><td>5</td></tr>
<tr><td>EVA</td><td>Xavier</td><td>EF</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Material concreto</td><td>Rodrigues</td><td>EF</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>Alves</td><td>EM</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Consoante o Quadro 13 acima, notamos o uso do recurso didático EVA em apenas uma pesquisa. A pesquisadora Xavier (2020) utiliza esse recurso para a construção do Tapete de Sierpinski. Em um primeiro momento, os alunos fizeram essa construção no EVA e, posteriormente, em um software dinâmico. Segundo a autora, a escolha por esse material justifica-se pela facilidade em manusear e menor risco de rasgar. Não há muito detalhes sobre essa construção, mas a autora afirma que o material concreto pode ser interessante para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, contribuindo para o processo de aprendizagem a partir da manipulação. Todavia, a autora ressalta que, mesmo esses alunos não sendo tão pequenos, houve dificuldade em manusear o material e realizar a construção.

Segundo Koepsel e Baier (2017), em um estudo de caso, relatam sobre o uso do EVA e a Geometria Fractal para o ensino de área e perímetro de quadrados com um aluno de 6º ano do Ensino Fundamental com baixa visão. Nesse relato foi desenvolvido o estudo do fractal Tapete de Sierpinski, no qual as autoras mencionam sobre a construção estar relacionada a quadrados. Para isso, foram utilizadas folhas de EVA. As autoras apresentam como essa confecção foi feita, descrevendo o seu passo a passo. Ainda, segundo as autoras, a utilização do material em EVA "possibilitou o entendimento de conceitos de área e perímetro de quadrados e facilitou a construção do fractal Tapete de Sierpinski.” (KOEPSEL; BAIER, 2017, p. 12). Por último, em suas considerações finais, é descrito sobre os benefícios em utilizar esse material no ensino: “o E.V.A. apresenta a grande vantagem de poder ser marcado com linhas em baixo relevo, que facilmente são tateadas, possibilitando o entendimento da construção do fractal Tapete de Sierpinski” (KOEPSEL; BAIER, 2017, p. 13) e, complementando ainda sobre os resultados obtidos com a aplicação desse material “possibilitando o entendimento de conceitos de área e de perímetro de quadrados”.

Tanto na dissertação de Xavier (2020) quanto no artigo das autoras Koepsel e Baier (2017) é utilizado o EVA para desenvolver a construção do Tapete de Sierpinski. Embora o principal recurso tenha sido o EVA foi necessário o manuseio da régua, deixando evidente o uso correto desse recurso. É notável o sucesso com a utilização desse material para o ensino e aprendizagem do conteúdo matemático a partir da construção do Triângulo de Sierpinski, porém é extremamente importante ter o manuseio correto dos materiais.

A partir dos relatos, o uso da régua entre os alunos ainda é bastante difícil para alguns deles. Enquanto pesquisadora e professora, pontuamos sobre essa dificuldade em traços e marcações simples com a régua. Esse impasse acaba comprometendo o desenvolvimento da atividade e, talvez, levando ao insucesso da proposta.

Os pesquisadores Rodrigues (2011) e Alves (2008) utilizaram os recursos didáticos, respectivamente, material concreto em acrílico e o material dourado para representar o fractal Esponja de Menger.

No trabalho de Rodrigues (2011) é apresentado o material em acrílico para os alunos e, posteriormente, é desenvolvido um estudo a partir dele, contudo o trabalho não dá detalhes sobre esse estudo, relatando superficialmente sobre a temática de fractais. O autor sugere a utilização do material dourado, caso haja esse recurso disponível na escola, mas não desenvolve a construções de fractais.

Na pesquisa desenvolvida por Alves (2008) há o uso desse material. É desenvolvida a construção da Esponja de Menger com o recurso didático, mas não são apresentadas orientações de como essas construções foram conduzidas. Com esse material, a partir do trabalho, a construção ficou visualmente bonita.

Em ambos os trabalhos a ideia do material concreto foi interessante, porém o material de acrílico já estava pronto apenas para ser explorado e com o material dourado poderia haver a exploração tanto no momento de construir quando após a construção.

Notamos ainda, com base no Quadro 13 acima, que os materiais régua, esquadro e tesoura estão juntos em um mesmo campo. Essa junção desses materiais ocorreu devido às construções dos fractais mencionadas pelos pesquisadores, como dobradura, fazerem uso principalmente da régua e tesoura, ficando inviável apresentar a separação na mesma tabela.

Ainda com relação ao Quadro 13, destacamos dentre os demais recursos didáticos o material concreto, em específico da dissertação de Rodrigues (2011), em que o autor apresenta o fractal Esponja de Menger aos alunos a partir de um material de acrílico já pronto, mas não há uma proposta de construção e discussão desse fractal havendo uma apresentação somente do material. Destarte, mesmo que nessa dissertação tenha sido utilizado esse recurso didático e apresentado o fractal Esponja de Menger, não houve a construção do fractal e a exploração dele. É sugerido pelo autor que esse fractal poder ser feito com o material dourado. Por isso, essa dissertação não estará disposta no Quadro 14, a seguir onde são mostradas as dissertações que utilizaram esses recursos didáticos indicando as construções realizadas a partir deles.

Quadro 14: Fractais construídos

Dissertações	Fractais construídos
Krindges	- Árvore Fractal - Triângulo de Sierpinski - Curva de Koch - Cartão de Sierpinski - Floco de Neve - Tapete de Sierpinski
Gressler	- Poeira de Cantor - Triângulo de Sierpinski - Cartão Fractal
Xavier	- Tapete de Sierpinski
Mileni	- Conjunto de Cantor - Curva de Koch
Padilha	- Cartão Fractal - Cartão Triângulo de Sierpinski - Esponja de Menger - Tetraedro de Sierpinski
Gomes	- Triângulo de Sierpinski
Coelho	- Cartão Fractal
Gonçalves	- Fractal Central (Cartão Fractal) - Fractal Árvore (Árvore Fractal) (nome descrito pelos pesquisadores)
Vieira	- Cartão Fractal - Cartão Triângulo de Sierpinski
Alves	- Esponja de Menger
Nascimento	- Triângulo de Sierpinski - Curva de Koch - Floco de Neve de Koch - Tapete de Sierpinski - Cartão Fractal
Silva	- Cartão Fractal

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

A partir do Quadro 14 acima, é possível notar que as construções de fractais desenvolvidas nas pesquisas foram: Árvore Fractal, Triângulo de Sierpinski, Curva de Koch, Cartão Triângulo de Sierpinski, Floco de Neve, Poeira de Cantor, Conjunto de Cantor, Cartão Fractal, Tapete de Sierpinski, Esponja de Menger e Tetraedro de Sierpinski.

Diante dessas construções, no Quadro 15 é indicada a quantidade de cada uma dessas construções e os pesquisadores que as propuseram em suas pesquisas com os alunos.

Quadro 15: Quantidade de construções

Fractal	**Quantidade**	**Dissertações**
- Árvore Fractal	2	Krindges Gonçalves
- Triângulo de Sierpinski	4	Krindges Gressler Gomes Nascimento
- Curva de Koch	3	Krindges Mileni Nascimento
- Cartão Triângulo de Sierpinski	3	Krindges Padilha Vieira
- Floco de Neve	2	Krindges Nascimento
- Poeira de Cantor	1	Gressler
- Conjunto de Cantor	1	Mileni
- Cartão Fractal	7	Gressler Padilha Coelho Gonçalves Vieira Nascimento Silva
- Tapete de Sierpinski	3	Krindges Xavier Nascimento
- Esponja de Menger	2	Padilha Alves
- Tetraedro de Sierpinski	1	Padilha

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Com base no Quadro 15, o fractal Árvore Fractal foi proposto em dois trabalhos, Krindges (2012) e Gonçalves (2007). Em ambos, as construções foram realizadas utilizando régua e tesoura. Nas duas dissertações, são apresentadas orientações sobre a construção desse fractal, mas destacamos a dissertação de Gonçalves (2007), a qual apresenta uma construção mais detalhada do fractal, orientando as construções, seguido de imagens e ilustrando cada passo. Entretanto, a autora propõe a construção de um único fractal utilizando esse recurso didático, diferentemente de Krindges (2012), que apresenta apenas os passos para construir o fractal e propõe a construção de diferentes fractais. Gonçalves (2007) menciona sobre a quantidade de alunos, com um total de 22, no momento de aplicar a atividade. Essa quantidade de alunos, segundo Gonçalves (2007) teria dificultado a aplicação da atividade.

Pontuamos que atualmente a quantidade de alunos por turma é de 22 alunos para mais e que algumas atividades a serem propostas diante do volume de discentes acaba sendo inviável.

Além dessa construção, Krindges (2012) propôs a construção do fractal Floco de Neve, assim como a pesquisadora Nascimento (2012). Krindges (2012) não apresenta tantos detalhes nas construções, mas Nascimento (2012) descreve as orientações e apresenta imagens para ilustrá-las. A autora Krindges (2012) não pontua em suas considerações finais sobre as construções desenvolvidas com a régua, mas a partir da leitura para o fichamento e análise de dados, foi possível identificar no relato descrito pela autora feito pelos alunos, referente à atividade sobre a dificuldade em manusear a régua.

Evidenciamos que, a partir da leitura da dissertação, Krindges (2012) teve uma preocupação em apresentar diferentes construções de fractais e discutir com os alunos sobre cada um deles.

Na dissertação de Gressler (2008) é proposto a partir da utilização da régua e do esquadro a construção do Triângulo de Sierpinski, porém não há muitos detalhes sobre essa construção onde é apresentada a orientação sobre como construir. A autora informa, assim como Krindges (2012), sobre a dificuldade com o manuseio da régua e do esquadro dizendo que nos trabalhos de Matemática era necessário ter habilidades com esses instrumentos (KRINDGES, 2012, p. 55).

Já na dissertação de Mileni (2012), é proposta a construção do fractal Conjunto de Cantor utilizando a régua. O autor apresenta imagens das construções final do fractal feito pelos alunos, mas traz apenas os passos descritos para essa construção.

A construção do fractal Esponja de Menger é proposta em duas dissertações, Padilha (2012) e Alves (2008), nessa ordem, sendo utilizados os recursos didáticos régua e material dourado. Padilha (2012) apresenta aos alunos o sólido cubo já pronto em uma dimensão maior e, em seguida, pede para que cada aluno monte o sólido cubo de razão 13, totalizando 27 cubos. Após a montagem dos cubos, em seguida, a autora orienta que sejam retirados os cubos centrais de cada uma das faces e o cubo central (PADILHA, 2012, p. 93). Apresentamos dois apontamentos referentes a essa construção, dizendo que não ficou evidente o porquê totalizou 27 cubos, tomando como referência a quantidade de alunos descrita pela autora que teria participado da intervenção, ao todo, 20 alunos de uma turma de 7ª Série, atualmente 8º Ano do Ensino Fundamental.

Apontamos ainda, sobre as orientações de retirar os cubos centrais de cada uma das faces e o cubo central, não deixando claro como teria sido essa orientação de remoção: se cada aluno fez um recorte do cubo ou se teria empilhado todos os cubos construídos formando um único cubo e, a partir dele, os cubos que estavam nessa posição foram sendo removidos, mas ainda assim, sobraria um cubo. A autora não apresenta imagens de como teria ficado o fractal dos alunos após a orientação. Pontua ainda, nas considerações finais, que foi notório o sucesso com a utilização de software de geometria dinâmica para a construção de outros fractais, enfatizando sobre a importância desse recurso. Destacamos ainda que, em algumas escolas, talvez esse acesso a recursos tecnológicos não seja possível, comprometendo a proposta de atividade do professor.

Como já mencionado, Rodrigues (2011) não desenvolve a construção do fractal Esponja de Menger, mas propõe a visualização a partir de um material em acrílico já pronto e mostra na dissertação esse material. Diferentemente de Padilha (2012) que não mostra.

Já na dissertação de Alves (2008), o autor propõe a construção utilizando o material dourado, entretanto, não é explicitada como a atividade foi desenvolvida, mas apresenta imagens das construções. É mencionado pelo autor que, a partir das construções foi possível evidenciar "que os alunos compreenderam adequadamente a geometria fractal" (ALVES, 2008, p. 103).

Observando o Quadro 15, as construções que se evidenciaram foram o Triângulo de Sierpinski e o Cartão Fractal, respectivamente, construídas em 4 e 7 dissertações.

Sobre a construção do Triângulo de Sierpinski, em todas as dissertações que apresenta a construção desse fractal foram utilizados como recurso didático régua ou tesoura para obter o fractal.

Krindges (2012) apresenta em seu referencial como esse fractal é gerado. Em um primeiro momento, foi proposta a construção do Cartão Triângulo de Sierpinski, partindo de uma dobradura em uma folha A4 e, depois desse cartão, são apresentados os passos para construir o Triângulo de Sierpinski com a régua, seguindo a descrição de um passo a passo sem detalhes de imagens. Diante dessas duas construções, a autora relata que os alunos "estavam mais envolvidos na construção do cartão do que na construção com régua" (KRINDGES, 2012, p. 83).

Já a proposta de Gressler (2008) é compreendida por duas atividades, sendo uma delas a construção do Triângulo de Sierpinski, por meio de régua e esquadro. Para isso, a autora diz que os alunos seguiram um passo a passo para realizar a construção partindo de um triângulo equilátero. De maneira análoga a Krindges (2012), a pesquisadora não apresenta imagens do passo a passo dessa construção, mas, ao final da proposta de atividade, expõe uma imagem de um Triângulo de Sierpinski produzido por um aluno.

É pontuado que, para realizar a atividade era preciso ter habilidade com o uso da régua e do esquadro, sendo "possível perceber a dificuldade dos alunos no manuseio desses instrumentos de medida" (GRESSLER, 2008, p. 55). Ressaltamos sobre a aproximação da Geometria Fractal com a natureza que a dissertação apresenta, mencionando que há uma dificuldade em expressar a natureza através da Geometria Euclidiana e que essa teria sido uma das origens da Geometria Fractal propondo aproximar das formas da realidade. (GRESSLER, 2008, p. 62-63).

Essa colocação da autora é relevante, pois permite compreender a importância das Geometrias Não Euclidianas e concluir que apenas com os conhecimentos da Geometria Euclidiana não seria possível descrever aproximando da realidade.

Diante de alguns trechos das dissertações analisadas é evidente a dificuldade e até menos interesse em realizar as construções devido à falta de habilidade em manusear a régua. Gomes (2010) apresenta em sua dissertação apenas uma única construção de fractal, o Triângulo de Sierpinski e, a partir dessa construção, aponta algumas conclusões dizendo que "os estudantes apresentaram menos traquejo com o uso da régua que o esperado, fazendo com que a construção demorasse a ser concluída" (GOMES, 2010, p. 103) e, ainda descreve algumas dificuldades como posicionar a régua para medir e o desconhecimento da unidade de medida, em centímetros, da régua. (GOMES, 2010, p. 155).

Por último, Nascimento (2012) apresenta as etapas para a construção do fractal e informa na primeira etapa que o triângulo equilátero a ser construído deve conter 24 cm de lado. Essa orientação, em determinar a medida para os lados da figura, é interessante para que todas as produções sejam iguais e fiquem visualmente mais nítidas de observar as interações.

Diante de alguns relatos na construção de outros fractais utilizando a régua é evidente que esse envolvimento maior na construção do cartão tenha sido mais interessante, pois não há a necessidade de ter habilidade em manusear a régua ou saber usá-la.

A BNCC orienta a iniciação do uso de materiais para as construções geométricas desde o Ensino Fundamental II, considerando que essas construções devam ser feitas com o “uso de réguas, esquadros e softwares” (BRASIL, 2018, p. 302). Assim, ambos os materiais escolhidos devem estar presentes como instrumento de medição.

5.3 Categoria 2 - Conexão entre Geometria Fractal e outros conteúdos matemáticos

Ao analisar os PCN e a BNCC, observamos que a Geometria Fractal é mencionada de maneira superficial apenas na BNCC do Ensino Médio, não evidenciando orientações sobre o ensino e/ou utilização desse conhecimento dentro da sala de aula. Já no Ensino Fundamental II, não há menções em ambos os documentos.

Entendemos que, mesmo que não há orientações sobre como esse ensino deve ser abordado, é importante compreender sobre os fractais e aproveitar os conceitos da Geometria Fractal para auxiliar e/ou contribuir no processo de ensino e aprendizagem de outros conteúdos seja eles matemáticos ou não.

No Quadro 16, a seguir, são apresentadas as dissertações que tiveram como proposta de atividade ensinar ou explorar determinado conteúdo matemático a partir da construção do fractal. O quadro contém informações tais como: Etapa da Educação Básica (EF ou EM), identificação da dissertação que propôs a atividade com fractal, quais foram os fractais construídos e os conteúdos estudados a partir deles.

Quadro 16: Fractais construídos e os conteúdos discutidos a partir dos fractais

Etapa de Educação Básica	**Dissertações**	**Fractais construídos**	**Conteúdo matemático discutido/abordado**
EF	Krindges	- Árvore Fractal	Potenciação
		- Triângulo de Sierpinski - Tapete de Sierpinski	Perímetro
		- Curva de Koch	Comprimento
		- Cartão de Sierpinski	Área e potenciação
		- Floco de Neve	Área, perímetro e potenciação

		- Árvore Pitagórica	Progressão geométrica
	Xavier	- Árvore Pitagórica	Identificação de figuras planas – quadrado e triângulo
		- Triângulo de Sierpinski - Tapete de Sierpinski	Área e perímetro
	Gomes	- Triângulo de Sierpinski	Área e perímetro
EM	Gonçalves	- Triângulo de Sierpinski	A soma de infinitos termos de uma progressão geométrica
		- Fractal Árvore (Árvore Fractal)	Progressão Geométrica
	Vieira	- Cartão Fractal - Cartão Triângulo de Sierpinski	Progressão Geométrica
	Faria	- Curva de Koch - Lunda-Design - Hexagonal tipo Dürer	Potenciação
		- Triângulo de Sierpinski	Perímetro
		- Tetra-Círculo	Progressão Geométrica
		- Árvore Pitagórica	Área de quadrados, progressões aritméticas e teorema de Pitágoras
	Silva	- Cartão Fractal	Potenciação

Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

A partir do Quadro acima, nota-se que, por meio do fractal Triângulo de Sierpinski, os conteúdos abordados ou discutidos foram: área, perímetro e a soma dos termos infinitos de uma progressão geométrica. Em seguida, o Quadro 17, configura somente os autores que propuseram abordar sobre esses conteúdos matemáticos a partir do fractal Triângulo de Sierpinski.

Quadro 17: Conteúdos discutidos a partir do fractal Triângulo de Sierpinski

Fractal construído	**Etapa de Educação Básica**	**Dissertações**	**Conteúdo matemático discutido/abordado**
Triângulo de Sierpinski	EF	Krindges	Perímetro

		Xavier	Área e perímetro
		Gomes	Área e perímetro
	EM	Gonçalves	A soma de infinitos termos de uma progressão geométrica
		Faria	Perímetro

Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

Com base no Quadro 17, Krindges (2012) propõe a construção do fractal utilizando a régua. A autora menciona que como um dos objetivos da atividade é a generalização, então, é sugerido que o perímetro seja escrito na forma de potência. Entretanto, não é explicitado como a atividade é desenvolvida. A autora apresenta um mapa conceitual relacionando o fractal Triângulo de Sierpinski com as disciplinas de Matemática, Artes e História e pontua nas considerações finais, identificando que, a partir desse fractal, é possível estudar sobre sequências numéricas, perímetro e área, potenciação e generalizações algébricas.

Para a construção do fractal Triângulo de Sierpinski, Gomes (2008) também propõe o uso da régua, mas antes de iniciar a construção é apresentado, por meio de slide, sobre a temática de Geometria Fractal. O objetivo dessa construção, segundo o autor, é descobrir propriedades e regularidades no fractal e trabalhar os conceitos de segmento, ponto médio, múltiplos e divisores de 2. Diante dessa descrição, percebemos que esses conceitos serão estudados ou identificados a partir do fractal. Em uma segunda atividade, investigando o fractal construído é proposto “recordar ou apresentar os conceitos de perímetro de uma figura plana e fórmula” (GOMES, 2008, p. 66), do qual foi proposto o preenchimento de uma tabela contendo informações sobre o perímetro. Gomes (2008) pontua que houve dificuldades na compreensão e na leitura da tabela, que apresentou problemas. Esses problemas foram descritos pelo autor a serem melhorado na tabela como não constar o passo zero e explicação sobre notações criadas na tabela. Além disso, houve confusão com conceito de divisão.

Em Xavier (2020), essa construção é feita utilizando o software Geogebra. A autora afirma que a proposta em utilizar esse fractal foi para explorar conceitos geométricos, em específico, área e perímetro de polígonos. Para iniciar a atividade a pesquisadora apresenta em slides as imagens dos fractais, destacando o processo de repetição do fractal. Após apresentar a ideia dos fractais, a pesquisadora, que também era professora da turma, faz uma revisão de conceitos de área e perímetro em figuras planas e apresenta brevemente sobre o software. A proposta de atividade era explicitar o roteiro que descrevia o passo a passo da construção do fractal e os alunos executarem no software, contudo o software não estava instalado nos computadores do laboratório da escola, mesmo sendo realizada a solicitação. A justificativa pela não instalação foi a grande demanda do município, uma vez que, somente poderia ser feita pelo técnico de informática que não conseguiu ir até a escola instalar. Outra possibilidade seria utilizar o software *online*, mas ao final do dia os arquivos seriam perdidos, pois os computadores são programados para excluir os arquivos. Dessa forma, a pesquisadora projetou para os alunos e desenvolveu os primeiros passos do roteiro utilizando o software para os alunos visualizarem e dar sequência com suas duplas. Mesmo diante disso, os alunos apresentaram dificuldades com o manuseio da ferramenta, então, na aula seguinte, a pesquisadora gerou um *applet* e escondeu todas as ferramentas que não seriam utilizadas. Ainda assim, a autora descreve que os alunos gastaram muito tempo da aula apenas para construir o triângulo equilátero. Diante disso, a pesquisadora gerou um *applet* em que os alunos pudessem manipular a construção por meio de um controle deslizante. Partindo disso, os alunos seguiram instruções sobre como calcular a área e perímetro do fractal completando um quadro sobre essas medidas.

Analisando essa proposta de atividade de Xavier (2020) destacamos sobre a modificação do planejamento da atividade diante da ausência do software nos computadores do laboratório de informática e das dificuldades enfrentadas com o manuseio do software. Mesmo diante de um bom planejamento pode haver diferentes empecilhos que exigem do professor conhecimento e diferentes estratégias para concluir o que foi proposto. Xavier (2020) se depara com situações adversas e faz com que sua proposta seja reestruturada. Mas, ao final da atividade, a pesquisadora encontrou uma solução a partir do *applet* criado para auxiliar os alunos em suas dificuldades com a construção e para calcular a área e perímetro do fractal conseguindo concluir a atividade plenamente.

Essa manipulação proposta por Xavier (2020) vai ao encontro do que mencionado por Pereira e Borges (2017) sobre o uso da tecnologia, em especial os softwares de geometria dinâmica, para o ensino de Geometria, o qual afirma que,

> Vivemos uma fase de constantes inovações tecnológicas e as geometrias como um todo são comumente relacionadas com o uso de tecnologias, de acordo com as pesquisas. São diversos os trabalhos que enaltecem essa combinação e buscam justificar que o ensino e a aprendizagem, ancorado ao uso de *softwares*, especialmente os de geometria dinâmica, proporcionam ao aluno diversas vantagens na hora do aprendizado, como: melhor visualização, construção e manipulação de figuras de forma mais precisa e rápida, maior facilidade na generalização de fórmulas e conceitos etc. (PEREIRA; BORGES, 2017, p. 570)

Como apresentado por Pereira e Borges (2017) o uso dos softwares permite uma melhor construção, manipulação e visualização do que está sendo produzido. Em Faria (2012) a construção também é feita usando o software Geogebra. É apresentado na dissertação um roteiro sobre a construção desse fractal, mas não foi possível identificar como foi proposta a construção do fractal, mas diante do questionário o conteúdo de perímetro é discutido. Destacamos que, em uma das falas dos alunos transcritas pelo autor, um dos alunos identifica a propriedade da complexidade infinita a partir do fractal Triângulo de Sierpinski construído, na qual o pesquisador pontua em seu trabalho sobre a propriedade escrevendo: "propriedade está que está relacionada às infinitas interações que ocorrem na construção desse fractal". (FARIA, 2012, p. 105).

Observando as construções do Triângulo de Sierpinski conclui-se que os conceitos de perímetro e área foram recordados em alguns momentos, mas ficou evidente o incentivo em calcular o perímetro em cada interação na construção do fractal.

Houve também dissertações, conforme mostra o Quadro 18, que apresentaram como proposta de atividade a construção do fractal, mas sem a necessidade de estabelecer uma relação com algum conteúdo matemático e estudar ou explorar sobre ele.

Quadro 18: Fractais construídos e os conteúdos discutidos a partir dos fractais

Etapa de Educação Básica	**Dissertações**	**Fractais construídos**
	Gressler	- Poeira de Cantor - Triângulo de Sierpinski - Cartão Fractal
	Mileni	- Conjunto de Cantor - Curva de Koch - Triângulo de Sierpinski
	Padilha	- Cartão Fractal - Cartão Triângulo de Sierpinski - Esponja de Menger - Tetraedro de Sierpinski - Floco de Neve de Koch - Tapete de Sierpinski - Triângulo de Sierpinski - Curva de Koch
	Coelho	- Cartão Fractal (aplicar o conceito de fractal)
	Gonçalves	- Fractal Central (Cartão Fractal) - Tetra-Círculo

EM	Alves	- Esponja de Menger - Triângulo de Sierpinski - Conjunto de Cantor
	Nascimento	- Triângulo de Sierpinski - Curva de Koch - Floco de Neve de Koch - Tapete de Sierpinski - Cartão Fractal

Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

Na dissertação de Gressler (2008) é proposta a construção dos fractais Poeira de Cantor, Triângulo de Sierpinski e Cartão Fractal, mas não houve relação estabelecida em ensinar ou explorar conceitos matemáticos. Foi destacado sobre a "origem da palavra Fractal, assim como as propriedades e aplicações deste conceito" (GRESSLER, 2008, p.53)

Em Gonçalves (2007), as construções do Fractal Central e Tetra-Círculo não foram propostas a fim de explorar ou discutir sobre algum conteúdo. Entretanto, com a construção do Cartão Fractal buscou-se identificar a ideia de fractal por meio da figura, como é construído o fractal e conhecer o processo de geração desse fractal tendo como objetivo "fazer com que o aluno identifique o caráter fractal da figura [...]". (GOMES, p. 66)

Nas diferentes construções propostas por Padilha (2012) também não é especificado nenhum conteúdo matemático trabalhado, mas há uma preocupação de que a partir da construção dos fractais podem suscitar conhecimentos geométricos e algébricos chegando a generalizações.

Com isso, assim como alguns trabalhos usaram a construção do fractal para explorar sobre algum conceito ou reforçar o cálculo de área e perímetro como no caso das dissertações apresentadas no Quadro 18, houve também, os trabalhos que tiveram a intenção e o objetivo de apresentar aos alunos sobre os fractais e suas propriedades.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como pudemos notar, a partir do mapeamento das dissertações e da tese e, posteriormente, a discussão das categorias de análise, a Geometria Fractal está localizada nos documentos oficiais de maneira sucinta, diferentemente da maneira como é apresentado na unidade temática de Geometria, na BNCC, sobre a geometria plana e espacial em que são apresentados os objetos do conhecimento a serem discutidos e propostos em sala.

No entanto, essa noção de que a Geometria Fractal seja pouco explicita da nos documentos oficiais norteadores para a educação básica permitiu que uma resposta hipotética para a questão orientadora da pesquisa: **Como a geometria fractal está sendo mobilizada em classes dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, a partir do mapeamento de dissertações e teses brasileiras?** fosse elaborada antes mesmo da análise dos documentos e da construção do referencial teórico.

Como hipótese, pensamos que a Geometria Fractal estivesse sendo implementada na sala de aula de maneira superficial apresentando o conceito e características de um Fractal. Todavia, a partir da leitura dos documentos curriculares e das teses e dissertações que compuseram o *corpus* de análise, é possível responder a essa mesma pergunta concluindo que a Geometria tem sido discutida em sala de aula, porém não como um conteúdo específico, do qual é apresentado o seu conceito, definição e aspectos dos fractais, mas que esses conceitos aplicados são importantes para a compreensão de outros estudos e, consequentemente, discutindo sobre as características de um fractal.

Ainda, diante da pergunta de pesquisa, destacamos positivamente que, mesmo com a ausência de orientações sobre o ensino dessa Geometria no processo de ensino e aprendizagem de Matemática ou outras áreas do conhecimento, há uma movimentação e interesse em pesquisas e aplicações sobre os fractais dentro da sala de aula como uma ferramenta facilitadora para a compreensão ou estudos de diferentes conteúdos matemáticos.

Sabendo disso, de que a Geometria Fractal está sendo utilizada como um recurso facilitador para o entendimento de outros conteúdos, surgiu o seguinte questionamento: - *Por que seria importante inserir a geometria fractal nos currículos?* E se essa pergunta tivesse sido feita antes de iniciar a pesquisa a resposta seria: para que os alunos viessem a conhecer a tal Geometria.

Por outro lado, a partir da pesquisa foi possível entender que mesmo essa Geometria não estando presente nos currículos escolares, tem havido, de forma pontual, a sua inserção nas salas de aulas. Fato esse que deve ser considerado como um avanço se pensarmos em uma

Geometria que não aparece como orientação ser discutida e que alguns professores estão fazendo um movimento para que ela seja notada. Ou ainda, que há algumas décadas, Pavanello (1989) nos chamava a atenção para o abandono do ensino de Geometria, então, provocado pelo Movimento da Matemática Moderna.

De acordo com os PCNs do Ensino Fundamental, um dos objetivos gerais é estabelecer conexões com outros temas matemáticos. Essa conexão pôde ser notada a partir da leitura das publicações analisadas, já que utilizar a Geometria Fractal proporcionou atividades sobre diferentes conteúdos matemáticos como o cálculo de área, perímetro, potenciação, progressões aritméticas e geométricas e entre outros conteúdos e, consequentemente, a apresentação e estudo desse conteúdo a partir do fractal. Além da compreensão de conteúdos matemáticos utilizando os Fractais houve também interdisciplinaridade com outras áreas do conhecimento, por exemplo, a Física.

Com o intuito de responder à pergunta de pesquisa sobre o uso da Geometria Fractal nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, tiveram também, os objetivos específicos, tais como: descrever as regiões brasileiras, as instituições de pesquisa destacando as regiões Sul e Sudeste, com respectivamente, 7 e 6 publicações sobre a temática em estudo. Investigando sobre o período entre 2007 e 2020, sendo quase uma publicação por ano e também o nível de escolaridade destacando produções de Mestrado e apenas uma tese de Doutorado. E, por último, as práticas escolares implementadas nas pesquisas utilizando recursos tecnológicos como os softwares dinâmicos e recursos didáticos como o material dourado.

É importante mencionar que ao longo da construção do mapeamento e da análise das pesquisas foram identificadas algumas dificuldades que devem ser mencionadas, desde a obtenção do arquivo das pesquisas referentes às dissertações e à tese para a leitura até o processo de leitura dessas pesquisas para identificar o contexto e a dimensão de estudo. Elencamos, inicialmente, a dificuldade de acesso a algumas dissertações e teses não disponibilizadas na versão digital pela Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da Capes e/ou não bibliotecas depositárias das universidades que sediam essas pesquisas. Pontuamos ainda, sobre a necessidade de entrar em contato com as bibliotecas depositárias e autores para a obtenção da versão final digital das dissertações ou teses, mas não obtivemos retorno de todos. Mencionamos sobre as dissertações e a tese que demandaram mais de uma leitura para compreensão do contexto e dimensão de estudo e confirmarmos, a partir da leitura os dados coletados, para evitar informações equivocadas.

Evidenciamos, como tendência identificada no corpus de análise, a utilização de softwares dinâmicos como recurso didático no ensino da Geometria Fractal. Esse recurso apareceu na maioria dos trabalhos analisados, permitindo aos alunos, de acordo com os autores, a manipulação virtual e a visualização dos fractais. Destacamos ainda que o uso do material concreto foi pouco mobilizado nas pesquisas, indicando uma lacuna para a realização de pesquisas futuras sobre o tema. Para finalizar, pontuamos que a partir do mapeamento foi possível observar que a maioria das pesquisas foi realizada em classes do Ensino Médio, o que também possibilita a continuidade dos estudos em classes dos anos finais do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

AMBROZI, L; GLOWACKI, J; SAUER, L. T. Z. **Explorando Conceitos de Geometria não Euclidiana. Revista Scientia Cum Industria**, vol. 3, nº. 3, 130 – 133, 2015.

ARTIGUE, M. V; FANARO, M. A; LACUÉS, E. **Estado del arte sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Fractal en la escuela secundaria**. Revista de Investigación, vol. 11, nº 2, 75 – 92, 2021.

ALVES, A. D. **Introduzindo a geometria fractal no ensino médio: uma abordagem baseada nas formas dos objetos construídos pela natureza**. 2008. 150f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2008.

ASSIS et. al**. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais**. Revista Brasileira de Ensino de Física, Salvador - BH, v. 30, n. 2, p. (2034-1 - 2034-10), 2008.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BARIORI, A. A. **Mapeamento de pesquisas sobre Modelagem Matemática no Ensino Médio no período de 2017 a 2020**. 2021. 105f. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.

BRASIL, **Ministério da Educação – Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio**. Brasília: Secretaria de Educação, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BRASIL, **Ministério da Educação – Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: Secretaria de Educação, 1998.

COELHO, P. S. **Fractais e sistemas dinâmicos não-lineares no Ensino Médio**. 2010. 282f. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

COSTA et. al. **Internet e Laboratório de Informática: Dois Importantes Recursos Metodológicos para Surpreender os Estudantes e Beneficiar a Interdisciplinaridade**. XX Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 2009.

CRISTOVÃO, E. M. Uma experiência com o Triângulo de Sierpinski no Ensino Médio ou Fractais e "Porcariazinhas" II. In: CARVALHO, D. L.; CONTI, K. C. **Histórias de colaboração e investigação na prática pedagógica em matemática**: ultrapassando os limites da sala de aula. Campinas: Alínea, 2009, p. 203-215.

ELI, J. **Números complexos e suas aplicações: uma proposta de ensino contextualizado com abordagem histórica**. 2014. 171f. Dissertação de Mestrado. Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2014.

FARIA, R. W. S. **Padrões fractais: contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos**. 2012. 197f. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

FERNANDES. F. L. P. Fractais e "Porcariazinhas": Professor, acaba ou não acaba? In: FIORENTINI, D.; CRISTOVÃO. E. M. **Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática**. Campinas: Alínea, 2006, p. 208-226.

FIORENTINI, D. et al. **O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa**. In: FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. (Org). Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática: período 2001-2012. São Paulo: FE/UNICAMP, 2016. p.17- 41.

GOMES, A. N. **Uma proposta de ensino envolvendo Geometria Fractal para o estudo de Semelhanças de Figuras Planas**. 2010. 228f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

GONÇALVES, A. G. N. **Uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais**. 2007. 205f. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

GOUVEA, F. R. **Um Estudo de Fractais Geométricos através de Caleidoscópio e Softwares de Geometria Dinâmica**. 2005. 259 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2005.

GRESSLER, M. D. **Construindo uma percepção complexa da realidade a partir do estudo dos fractais**. 2008. 152f. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

KALEFF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. **Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o Exemplo da Geometria do táxi**. Boletim GEPEM, n. 44, 2014, p. 11 - 42.

KRINDGES, E. E. **Geometria fractal no ensino fundamental: inserindo matemática contemporânea nos conteúdos do currículo escolar**. 2012. 94f. Dissertação de Mestrado. Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2012.

LAVILLE, C; DIONNE, J. A construção do saber - Manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Editora: UFMG, 1999.

LORENZATO, S. **Porque não ensinar geometria?** Revista Educação Matemática. Campinas: UNICAMP, 1995.

LUTZ, M. R. **Possibilidade de inserção da Geometria Fractal na licenciatura em Matemática do IFFAR**. 2020. 253f. Tese de Doutorado. Universidade Franciscana, Santa Maria-RS,2020.

MARCONI, M. A; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica**. Revista: Atlas, 6ª edição, 2007.

MINAYO, M. C. S. (Org.). **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis: Vozes, 2001

MINAYO, M. C. S. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde**. 14.ed, São Paulo: Hucitec/Abrasco, 2014.

MINELI, J. P. **Fractais: generalização de padrões no Ensino Fundamental**. 2012. 88f. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

MORAES, R. **Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva**. *Revista Ciência & Educação*, Bauru, v.9, n.2, dez. 2003.

NASCIMENTO, M. **Uma proposta metodológica para o ensino de Geometria Fractal em sala de aula na Educação Básica**. 2012. 92f. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponto Grossa, 2012.

OLGIN, C. A. **Critérios, possibilidades e desafios para o desenvolvimento de temáticas no currículo de matemática no ensino médio**. 2015. 265f. Tese de Doutorado. Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2015.

PADILHA, T. A. F. **Conhecimentos geométricos e algébricos a partir da construção de fractais com o uso do software geogebra**. 2012. 140f. Dissertação de Mestrado. Universidade do Vale do Taquari, Lajeado, 2012.

PAIXÃO, R. S. **O ensino de fractais no Ensino Fundamental. 2014. 68 p. Dissertação de Mestrado**. Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.

PANOSSIAN, M. L.; GALVÃO, M. E. E. L. A prática e a pesquisa sobre recursos didáticos: reflexões emergentes de produções do ENEM 2019. In: PANOSSIAN, M. L.; GALVÃO, M. E. E. L. (org.) **Recursos didáticos em aulas de matemática**: o proposto pelas pesquisas e o praticado. Brasília: SBEM Nacional, 2022, p. 6-19.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática**. Curitiba: SEED, 2008.

PAVANELLO, R. M. **Abandono do Ensino de Geometria: Uma Visão Histórica**. Dissertação de Mestrado, 1989.

PEREIRA, T; BORGES, F. A. **A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos**. Revista: Acta Scientiae, vol. 19, p. 563 - 581, 2017.

RODRIGUES, G. C. **Introdução ao estudo de geometria espacial pelos caminhos da arte e por meio de recursos computacionais**. 2011. 143f. Dissertação de Mestrado. Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2011.

SILVA, J. B. **Fractal - A geometria da natureza aplicada no ensino médio no ensino de física**. 2016. 63f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2016.

VALE, I.; BARBOSA, A. **Materiais manipuláveis para aprender e ensinar geometria**. Boletim GEPEM, n. 65, 2014, p. 3 - 16.

VEJAN, M. P; FRANCO, V. S. **Geometria Não-Euclidiana/ Geometria dos Fractais**. Paraná/PR, 2008.

XAVIER, L. K. **Exploração de conceitos geométricos por meio de fractais com o uso do GeoGebra em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental**. 2020.162f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020.

ZIMMER, F. R.; DESCOVI, L. M. G. **O aplicativo geogebra no ensino da geometria: uma proposta didática.** Curitiba/PR, 2013.

APÊNDICE 1

Identificação	Nome do Autor	Título| Orientação| Instituição| Ano de Defesa
M10.1	Priscila Schmidt Coelho	Título: Fractais e sistemas dinâmicos não-lineares no Ensino Médio; Orientador: Prof. Dr. Nelson Fiedler Ferrara; Instituição: Universidade de São Paulo; Ano de defesa: 2010; Mestrado em Ensino de Ciências
M19.1	Elisandra Alves	Título: Educação Matemática: os fractais potencializando a educação ambiental; Orientador: Prof. Dr. Roque Strieder; Instituição: Universidade do Oeste de Santa Catarina; Ano de defesa: 2019; Mestrado em Educação
M11.1	Nilson Jorge Baldovinotti	Título: Um estudo de fractais geométricos na formação de professores de Matemática; Orientadora: Profa. Dra. Miriam Godoy Penteado Instituição: Universidade Estadual Paulista – Rio Claro, Ano de defesa: 2011; Mestrado em Educação Matemática.
M20.1	Paula Roberta Mendes de Oliveira	Título: Fractais na formação de professores: um estudo interdisciplinar no curso de licenciatura em matemática da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte; Orientadora: Profa. Dra. Márcia Maria Alves de Assis; Instituição: Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, Ano de defesa: 2020; Mestrado em Educação.
M05.1	Flavio Roberto Gouvea	Título: Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópios e softwares de Geometria Dinâmica; Orientador: Prof. Dr. Claudemir Murari; Instituição: Universidade Estadual Paulista – Rio Claro, Ano de defesa: 2005; Mestrado em Educação Matemática.
M12.1	Eliana Einsfeld Krindges	Título: Geometria fractal no ensino fundamental: inserindo matemática contemporânea nos conteúdos do currículo escolar; Orientadora: Profa. Dra. Tânia Baier; Instituição: Universidade Regional de Blumenau, Ano de defesa: 2012; Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.
M11.2	Edilson de Moura	Título: O conceito fractal e sua presença pedagógica na Educação Básica; Orientador: Prof. Dr. Antônio Pádua Machado Instituição: Universidade Federal do Mato Girassol do Sul, Ano de defesa: 2011; Mestrado em Educação Matemática.
M20.2	Fabio Antunes Brun de Campos	Título: O ensino da matemática com fractais na Educação Básica: percepções em meio ao curso ENFRAC; Orientadora: Profa. Dra. Minéia Cappellari Fagundes; Instituição: Universidade do Estado de Mato Grosso, Ano de defesa: 2020; Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática.

M08.1	Márcia Denise Gressler	Título: Construindo uma percepção complexa da realidade a partir do estudo dos fractais; Orientador: Prof. Dr. João Bernardes da Rocha Filho; Instituição: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Ano de defesa: 2008; Mestrado em Educação em Ciências e Matemática.
MP07.1	Andrea Gomes Nazuto Gonçalves	Título: Uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais; Orientador: Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni; Instituição: Pontifícia Católica de São Paulo, Ano de defesa: 2007; Mestrado Profissional em Ensino Matemática.
M20.3	Luana Kuister Xavier	Título: Exploração de conceitos geométricos por meio de fractais com o uso do GeoGebra em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental; Orientadora: Profa. Dra. Débora da Silva Soares; Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Ano de defesa: 2020; Mestrado em Ensino de Matemática.
MP19_2	Diogo Comin Vieira	Título: O uso da geometria fractal como ferramenta no ensino de progressões geométricas e logaritmos; Orientador: Prof. Dr. José Antonio Salvador; Instituição: Universidade Federal de São Carlos, Ano de defesa: 2019; Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas.
M97.1	Laerte Francisco Rosolem	Título: Fractal na sala de aula: contribuição para o ensino de uma nova geometria; Orientador: Prof. Dr. Ivan Amaral Guerrini Instituição: Universidade Metodista de Piracicaba, Ano de defesa: 1997; Mestrado em Educação.
M12.2	Juliano de Paula Mineli	Título: Fractais: generalização de padrões no Ensino Fundamental; Orientadora: Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori Instituição: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Ano de defesa: 2012; Mestrado em Educação Matemática.
M12.3	Rejane Waiandt Schuwartz Faria	Título: **Padrões fractais: contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos;** Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi; Instituição: Universidade Estadual Paulista – Rio Claro, Ano de defesa: 2012; Mestrado em Educação Matemática.
M19.3	Lara Martins Barbosa	Título: Aspectos do pensamento computacional na construção de fractais com o software GeoGebra; Orientador: Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva; Instituição: Universidade Estadual Paulista – Rio Claro, Ano de defesa: 2019; Mestrado em Educação Matemática.
M08.2	Alceu Domingues Alves	Título: **Introduzindo a geometria fractal no ensino médio: uma abordagem baseada nas formas dos objetos construídos pela natureza;** Orientador: Prof. Dr. Romildo Albuquerque Nogueira; Coorientadora: Profa. Dra. Josinalva Estacio Menezes Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco, Ano de defesa: 2008; Mestrado em Ensino das Ciências.

MP12.4	Teresinha Aparecida Faccio Padilha	Título: Conhecimentos geométricos e algébricos a partir da construção de fractais com o uso do software geogebra; Orientadora: Profa. Dra. Maria Madalena Dullius; Coorientadora: Profa. Dra. Marli Teresinha Quartieri; Instituição: Universidade do Vale do Taquari, Ano de defesa: 2012; Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas
D05.1	Tânia Baier	Título: O Nexo "Geometria Fractal - produção da ciência contemporânea" tomado como núcleo do currículo de Matemática do Ensino Básico; Orientadora: Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo; Instituição: Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho – Rio Claro, Ano de defesa: 2005; Doutorado em Educação Matemática.
M08.3	Vandoir Stormowski	Título: Estudando matrizes a partir de transformações geométricas; Orientador: Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke; Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Ano de defesa: 2008; Mestrado em Ensino de Matemática.
MP12.5	Maristel do Nascimento	Título: Uma proposta metodológica para o ensino de geometria fractal em sala de aula na Educação Básica; Orientadora: Profa. Dra. Sani de Carvalho Rutz da Silva; Coorientadora: Profa. Dra. Nilcéia Ap. Maciel Pinheiro; Instituição: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ano de defesa: 2012; Mestrado Profissional em Ensino de Ciência e Tecnologia.
M03.1	Vivian Otte Rocha	Título: Geometria Fractal: uma sequência didática para ensinar a geometria euclidiana no ensino fundamental; Orientador: Prof. Dr. Ialo Rohrig Bonilla Instituição: Universidade Vale do Itajaí; Ano de defesa: 2003; Mestrado em Educação.
M16.1	Josemy Brito da Silva	Título: Fractal - A geometria da natureza aplicada no ensino médio no ensino de física; Orientador: Prof. Sergio Roberto de Paulo; Instituição: Universidade Federal do Mato Grosso; Ano de defesa: 2016; Mestrado em Ensino de Ciências Naturais.
M10.2	Antônio do Nascimento Gomes	Título: Uma proposta de ensino envolvendo Geometria Fractal para o estudo de Semelhanças de Figuras Planas; Orientador: Prof. Dr. José Antonio Salvador; Instituição: Universidade Federal de São Carlos; Ano de defesa: 2010; Mestrado em Ensino de Ciências Exatas.
M15.1	Rodrigo Cardoso da Silva	Título: O estudo de conceitos de ecologia por meio objetos digitais de aprendizagem; Orientadora: Profa. Dra. Tânia Baier; Coorientador: Prof. Me. Dalton Solano dos Reis; Instituição: Universidade Regional de Blumenau; Ano de defesa: 2015 Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.
M15.2	Daiana Dallagnoli Civinski	Título: Introdução ao estudo da aritmética e da álgebra no ensino fundamental; Orientadora: Profa. Dra. Tania Baier; Instituição: Universidade Regional de Blumenau; Ano de defesa: 2015; Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

M14.1	Claudimara da Silva Pfiffer	Título: Jogos com conteúdos matemáticos para os anos finais do ensino fundamental; Orientadora: Profa. Dra. Tânia Baier; Instituição: Universidade Regional de Blumenau; Ano de defesa: 2014; Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.
M14.2	Rivaneide Antonia de Lima	Título: Dificuldades dos alunos no estudo da função afim Orientadora: Profa. Dra. Tânia Baier; Instituição: Universidade Regional de Blumenau; Ano de defesa: 2014; Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.
M11.3	Araceli Gonçalves	Título: Alfabetização científica e postura fenomenológica: reflexões e possibilidades pedagógicas para o estudo da matemática Orientadora: Profa. Dra. Tânia Baier; Instituição: Universidade Regional de Blumenau; Ano de defesa: 2011; Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.
M11.4	Georges Cherry Rodrigues	Título: Introdução ao estudo de geometria espacial pelos caminhos da arte e por meio de recursos computacionais; Orientadora: Profa. Dra. Tânia Baier; Instituição: Universidade Regional de Blumenau; Ano de defesa: 2011; Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.
M12.6	Roberto João Eissler	Título: **Contribuições da escola teuto-brasileira ao ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**; Orientadora: Profa. Dra. Rosinéte Gaertner; Instituição: Universidade Regional de Blumenau; Ano de defesa: 2012; Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.
M15.3	Edmilson Alves de Andrade Junior	Título: Ciência contemporânea na formação de professores: o caso dos fractais em uma perspectiva Kellyana; Orientador: Prof. Dr. Alexandro Cardoso Tenório; Coorientador: Prof. Dr. Raimundo A. Nogueira e Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento; Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco; Ano de defesa: 2015; Mestrado em Ensino de Ciências.
MP12.7	Celso Menezes	Título: Clubes de ciências: contribuições para a educação científica nas escolas da rede municipal de ensino de Blumenau – SC; Orientador: Prof. Dr. Edson Schroeder Instituição: Universidade Regional de Blumenau; Ano de defesa: 2012; Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.
D20.1	Mauricio Ramos Lutz	Título: Possibilidade de inserção da geometria fractal na licenciatura em matemática do IFFAR; Orientador: Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas; Instituição: Universidade Franciscana; Ano de defesa: 2020; Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática.
M14.3	Juliano Eli	Título: Números complexos e suas aplicações: uma proposta de ensino contextualizado com abordagem histórica; Orientadora: Profa. Dra. Tânia Baier; Coorientadora: Profa. Dra. Márcia Regina Barcellos Vianna Vanti; Instituição: Universidade Regional de Blumenau; Ano de defesa: 2014; Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

M17.1	Barbara Regina da Silveira Batista	Título: Sequências numéricas a partir da geometria fractal para licenciados em Matemática; Orientador: Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas; Instituição: Universidade Franciscana; Ano de defesa: 2017; Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.
M08.4	João Correia de Andrade Neto	Título: Educação anarquista e pedagogia libertária caleidoscópio de uma história (1880 – 1930); Orientadora: Profa. Dra. Sara Martha Dick; Instituição: Universidade Federal da Bahia; Ano de defesa: 2008; Mestrado em Educação.
D15.1	Clarissa de Assis Olgin	Título: Critérios, possibilidades e desafios para o desenvolvimento de temáticas no currículo de matemática no ensino médio; Orientadora: Profa. Dora. Claudia Lisete Oliveira Groenwald; Instituição: Universidade Luterana do Brasil; Ano de defesa: 2015; Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática.
MP16.1	João Lucas de Paula Batista	Título: Uma proposta de ensino de acústica a partir da análise dos timbres de instrumentos musicais do samba; Orientadora: Profa. Dra. Débora Coimbra; Instituição: Universidade Federal de Uberlândia; Ano de defesa: 2016; Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática.
M12.8	Keilla Cristina Arsie Camargo	Título: **A Expressão Gráfica e o ensino das geometrias não euclidianas;** Orientadora: Profa. Dra. Simone da Silva Soria Medina; Instituição: Universidade Federal do Paraná; Ano de defesa: 2012; Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática.
M19.4	Graciely Rocha Braga	Título: A Teoria da Flexibilidade Cognitiva como Estruturante dos Três Momentos Pedagógicos: Contribuições ao Ensino de Física na Educação de Jovens e Adultos; Orientador: Wagner Duarte Jose; Instituição: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia; Ano de defesa: 2019; Mestrado em Ensino.
D95.1	Laerthe de Moraes Abreu Junior	Título: O cenário epistemológico da complexidade; Orientador: Hugo Assmann; Instituição: Universidade Metodista de Piracicaba Ano de defesa: 1995; Doutorado em Educação.
D07.1	Júlio César da Rosa Machado	Título: O erro na construção do conhecimento sob a perspectiva do construtivismo sistêmico autopoiético; Orientadora: Profa. Dra. Maria Helena Menna Barreto Abrahão; Coorientador: Prof. Dr. Juan M. Mosquera; Instituição: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul; Ano de defesa: 2007; Doutorado em Educação.
M04.1	Rosangela Salles dos Santos	Título: Redescobrir e encantar-se com a geometria numa abordagem transdisciplinar; Orientadora: Prof. Graciela Rene Ormezzano; Instituição: Fundação Universidade de Passo Fundo; Ano de defesa: 2004 Mestrado em Educação.

D09.1	José Carlos Pinto Leivas	Título: Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática; Orientadora: Profa. Dra. Maria Tereza Carneiro Soares; Instituição: Universidade Federal do Paraná; Ano de defesa: 2009; Doutorado em Educação.
D13.1	Emanuela Oliveira Carvalho Dourado	Título: Tecendo a rede municipal de Educação de Irecê-BA: Enredálea no curso de formação de professores e na escola; Orientadora: Profa. Dra. Maria Inez da Silva de Souza Carvalho; Instituição: Universidade Federal da Bahia Ano de defesa: 2013; Doutorado em Educação.
D12.1	Maria da Conceição Guilherme Coêlho	Título: Perguntou o juiz ao tutor pela pessoa deste órfão: os magistrados na ordem sócio educacional do Seridó (Século XIX); Orientadora: Profa. Dra. Maria Inês Sucupira Stamatto Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Norte; Ano de defesa: 2012; Doutorado em Educação.
D12.1	Maria da Conceição Alves Ferreira	Título: Saberes pedagógicos/comunicacionais, pesquisa/ formação: reflexões sobre as experiências formativas das professoras online; Orientadora: Profa. Dra. Maria das Graças Pinto Coelho; Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Norte; Ano de defesa: 2012; Doutorado em Educação.
D01.1	Gilberto Aparecido Damiano	Título: Semente Voadora: Germinação Epistemestética de uma Pedagogia Spathodea; Orientador: Prof. Dr. Francisco Cock Fontanella e Prof. Dr. Jose Lima Junior Instituição: Universidade Metodista de Piracicaba; Ano de defesa: 2001; Doutorado em Educação.
M10.3	Fernanda Feitosa do Vale	Título: Juventude, mídias sonoras e cotidiano escolar: um estudo em escolas de periferia; Orientadora: Profa. Dra. Leila Maria Ferreira Salles; Instituição: Universidade Estadual Paulista – Rio Claro; Ano de defesa: 2010; Mestrado em Educação.

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

APÊNDICE 2

Identificação	Nome do Autor	Título
Rosolem (1997)	Laerte Francisco Rosolem	Título: Fractal na sala de aula: contribuição para o ensino de uma nova geometria.
Rocha (2003)	Vivian Otte Rocha	Título: Geometria Fractal: uma sequência didática para ensinar a geometria euclidiana no ensino fundamental.
Junior (1995)	Laerthe de Moraes Abreu Junior	Título: O cenário epistemológico da complexidade.
Santos (2004)	Rosangela Salles dos Santos	Título: Redescobrir e encantar-se com a geometria numa abordagem transdisciplinar.
Damiano (2001)	Gilberto Aparecido Damiano	Título: Semente Voadora: Germinação Epistemestética de uma Pedagogia Spathodea.

Fonte: Elaborado pela autora, 2022