

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO

Cássia Valênia Gonçalves Vieira

**A Educação Algébrica no Contexto de Aulas Exploratório-Investigativas em
Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio: um
estado do conhecimento de teses e dissertações brasileiras**

UBERABA - MG

2023

Cássia Valênia Gonçalves Vieira

**A Educação Algébrica no Contexto de Aulas Exploratório-Investigativas em
Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio: um
estado do conhecimento de teses e dissertações brasileiras**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Profº. Dr. Fernando Luís Pereira Fernandes.

UBERABA - MG

2023

**Catálogo na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do
Triângulo Mineiro**

V714e	Vieira, Cássia Valênia Gonçalves A educação algébrica no contexto de aulas exploratório-investigativas em matemática nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio: um estado do conhecimento de teses e dissertações brasileiras / Cássia Valênia Gonçalves Vieira. -- 2023. 329 f. : il.; graf., tab. Dissertação (Mestrado Educação em Ciências e Matemática) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2023 Orientador: Prof. Dr. Fernando Luís Pereira Fernandes 1. Ensino. 2. Álgebra. 3. Matemática - Estudo e ensino. 4. Conhecimento. I. Fernandes, Fernando Luís Pereira. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título. CDU 512(07)
-------	---

CÁSSIA VALÊNIA GONÇALVES VIEIRA

**A Educação Algébrica no Contexto de Aulas Exploratório-Investigativas em
Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio: um
estado do conhecimento de teses e dissertações brasileiras**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Uberaba-MG, 15 de setembro de 2023.

Banca Examinadora:

 Documento assinado digitalmente
FERNANDO LUIS PEREIRA FERNANDES
Data: 15/09/2024 08:09:59-0300
Verifique em: <https://validar.br.gov.br>

Prof. Dr. Fernando Luís Pereira Fernandes – Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

 Documento assinado digitalmente
ELIANE MATESCO CRISTOVÃO
Data: 15/09/2024 09:05:47-0300
Verifique em: <https://validar.br.gov.br>

Profa. Dra. Eliane Matesco Cristovão
Universidade Federal de Itajubá

 Documento assinado digitalmente
VANESSA DE PAULA CINTRA
Data: 15/09/2024 12:40:05-0300
Verifique em: <https://validar.br.gov.br>

Profa. Dra. Vanessa de Paula Cintra
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Ao meu filho, Rafael Miguel, e minha filha,
Gabriela e ao meu esposo, Renato, anjos
da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, Nosso Pai, pela força nesta jornada!

Ao meu esposo e filhos pela compreensão nos momentos de dedicação a esta pesquisa.

Ao professor Fernando Luís Pereira Fernandes, que aceitou o meu convite para ser o orientador deste trabalho e por ter compartilhado comigo seu tempo e conhecimento.

Aos amigos que fiz durante o período do curso, que sempre foram fontes de incentivo.

“Tenho a percepção que existem muitas pesquisas brasileiras inspiradas na Investigação Matemática, mas nunca fiz um levantamento sobre a dimensão e a natureza desse movimento.”
João Pedro da Ponte

RESUMO

A pesquisa teve como meta compreender um estado do conhecimento da pesquisa brasileira sobre a Educação Algébrica nas Aulas Exploratório-Investigativas nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, a partir de teses e dissertações. Metodologicamente, as teses e dissertações que compuseram o *corpus* da análise foram selecionadas a partir do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES por meio de descritores, sendo realizada, posteriormente, a descrição das regiões e instituições de pesquisa envolvidas, a identificação dos conteúdos algébricos mais recorrentes nas tarefas investigativas e a análise de práticas escolares. Para atingir esse objetivo, foram elencados objetivos específicos, incluindo a descrição das regiões e instituições de pesquisas envolvidas, a identificação dos conteúdos algébricos mais recorrentes nas tarefas investigativas e a análise das práticas escolares implementadas e dos recursos didáticos utilizados nas pesquisas. A análise dos dados foi realizada a partir de duas categorias *a priori*: a) Tarefas apresentadas em aulas Exploratório-Investigativas, que seguiram um padrão de planejamento e aplicação para trabalhar conceitos matemáticos; b) Funções da Álgebra mobilizadas em Aulas Exploratório-Investigativas, destacando conteúdos algébricos como: equações, expressões, funções, produtos notáveis e progressões; e uma categoria emergente: c) Organização das aulas Exploratório-Investigativas: práticas escolares e recursos didáticos, enfatizando a estruturação das aulas com dinâmicas diferenciadas e o uso de tecnologia e materiais concretos. Como resultado a pesquisa mostrou que a Educação Algébrica mobilizada no *corpus* analisado se destacou no viés da álgebra que foi relacionada à aplicação de conceitos, desenvolvimento de linguagem e do pensamento, resolução de problemas, compreensão da dependência entre grandezas, desenvolvimento de habilidade de escrita e padrões. Além disso, as práticas escolares envolvidos confluíram-se nas ações voltadas para trabalho em grupo, explicação oral do professor, exploração de estratégias, atividades e conceitos, utilização das tecnologias digitais da informação e comunicação, registros tabular, gráfico e escrito. Entretanto, algumas lacunas se mostraram presentes nas pesquisas, entre elas: a necessidade de valorização do conhecimento prévio dos alunos, uso de temas inclusivos, planejamento compatível com a aplicação da atividade, avaliação formativa para os alunos durante a aplicação de tarefas e a explicitação de dificuldades enfrentadas pelos professores ao implementar as tarefas.

Palavras-chave: Tarefas exploratório-investigativas; Educação Algébrica; Estado do Conhecimento.

ABSTRACT

The research aimed to understand a state of knowledge of Brazilian research on algebraic education in the Exploratory-Investigative Classes in the final years of basic and secondary education, from theses and dissertations. Methodologically, the theses and dissertations that composed the corpus of the analysis were selected from the Catalogue of Theses and Dissertations of CAPES by means of descriptors, being carried out, subsequently, the description of the regions and research institutions involved, the identification of the most recurring algebraic contents in the research tasks and the analysis of school practices. To this objective, specific objectives were listed, including the descriptions of regions and institutions of research involved, identifying the most frequent algebraic content in the investigative tasks, and analysis of the schools practices implemented and the teaching resources used in research. The analysis of the data was carried out from two categories *a priori*: (a) tasks presented in Exploratory-Investigative classes, which followed a pattern of planning and application to work mathematical concepts; (b) Algebra functions mobilized in Exploration and Investigative Classes, highlighting algebraic contents such as: equations, expressions, functions, remarkable products and progressions; and an emerging category: (c) Organization of the Explorational-Research classes: school practices and didactic resources, emphasizing the structure of the lessons with differentiated dynamics and the use of technology and concrete materials. As a result the research showed that algebraic education mobilized in the *corpus* analyzed stood out in the bias of algebra that was related to the application of concepts, development of language and thought, problem solving, understanding of the dependency between sizes, the development of writing skills and patterns. In addition, the school practices involved converged in the actions aimed at group work, teacher's oral explanation, exploration of strategies, activities and concepts, use of digital information and communication technologies, tabular, graphical and written records. However, some gaps were present in the research, among them: the need to enhance the prior knowledge of the students, the use of inclusive topics, planning compatible with the application of the activity, educational evaluation for students during application of tasks and the explicitation of difficulties encountered by teachers when implementing the tasks.

Keywords: Exploratory-investigative tasks; Algebraic Education; State of Knowledge.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Livro didático utilizado	19
Figura 2 - Tarefas Matemáticas	46
Figura 3 - Gráfico de Distribuição de pesquisa por programa	60
Figura 4 - Gráfico de Distribuição das pesquisas por ano	60
Figura 5 - Gráfico de Distribuição por conteúdo matemático	61
Figura 6 - Tarefa 7 - Área de um quadrilátero em função de X	64
Figura 7 - Tabela da Atividade 4	66
Figura 8 - Discussão 1	67
Figura 9 - Tarefa 3 - A máquina Mágica	68
Figura 10 - Tarefa 3 - Álgebra em festa de casamento	69
Figura 11 - Tarefa 1 – Sequência de bolinhas e suas formas	70
Figura 12 - Exercício 1	72
Figura 13 - Atividade 1	73
Figura 14 - Atividade dos alunos Janaína, Jaciara e Fernando	74
Figura 15 - Análise da tarefa 1	75
Figura 16 - Atividade da sequência didática dos alunos	78
Figura 17 - Etapa 1 da atividade investigativa	80
Figura 18 - Questão adaptada da OBMEP	81
Figura 19 - Atividade sobre a Máquina de números	82
Figura 20 - Quadro de aulas, cenários e abreviações	84
Figura 21 - Quadro aula-tema-cenário de investigação	85
Figura 22 - Print de questões do quiz	86
Figura 23 - Conexão áreas e funções do 1º e 2º graus	105
Figura 24 - Conexão raízes e expressões algébricas	105
Figura 25 - Conexão área e expressão algébrica	106
Figura 26 - Conexão de multiplicação e expressões algébricas	107
Figura 27 - Conexão padrões numérico e algébrico	107
Figura 28 - Conexão hexágonos e expressão algébrica	108
Figura 29 - Registro de dados/função Afim/Tozo	113
Figura 30 - Etapa IV/função logarítmica/Cergoli	113
Figura 31 - Empreendedorismo/lucro/Sousa	119
Figura 32 - Física/pesos suspensos/Veríssimo	119
Figura 33 - Construção de estruturas/Cergoli	122

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Dissertações e Teses mapeadas	55
Quadro 2 - Tarefa adotada x autor	88
Quadro 3 - Educação Algébrica x Competências x Autor	89
Quadro 4 - Aritmética Generalizada	102
Quadro 5 - Estudo de Relações de Grandezas	109
Quadro 6 - Estudo de Procedimentos para Resolver Problemas	115
Quadro 7 - Estudo das Estruturas	121

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Situações que permeiam o pensamento algébrico	42
Tabela 2 - Distribuição das pesquisas de acordo com as instituições	57
Tabela 3 - Tipos de pesquisa	58
Tabela 4 - Distribuição das pesquisas por região do Brasil	59

Sumário

1	INTRODUÇÃO.....	13
1.1	MINHA TRAJETÓRIA.....	18
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	31
2.1	REVISÃO DA LITERATURA.....	31
2.2	CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA.....	35
2.3	CONCEPÇÕES DE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA.....	40
2.4	TAREFAS INVESTIGATIVAS EM AULAS DE MATEMÁTICA.....	45
3	ASPECTOS METODOLÓGICOS.....	51
3.1	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	52
3.2	SELEÇÃO E BREVE DESCRIÇÃO DAS DISSERTAÇÕES E TESES.....	55
3.3	CATEGORIAS ANALÍTICAS	61
4	ANÁLISE DAS PESQUISAS.....	63
4.1	CATEGORIA 1 – TAREFAS APRESENTADAS EM AULAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS.....	63
4.1.1	Considerações analíticas sobre a Categoria 1.....	87
4.2	CATEGORIA 2 – FUNÇÕES DA ÁLGEBRA MOBILIZADAS EM AULAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS.....	92
4.2.1	Considerações analíticas sobre a Categoria 2.....	101
4.3	CATEGORIA 3 – ORGANIZAÇÃO DAS AULAS EXPLORATÓRIO- INVESTIGATIVAS: PRÁTICAS ESCOLARES E RECURSOS DIDÁTICOS.....	123
4.3.1	Considerações analíticas sobre a Categoria 3.....	133
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	141
	REFERÊNCIAS.....	147
	REFERÊNCIAS DO CORPUS DE ANÁLISE.....	150
6	APÊNDICE A.....	152
7	APÊNDICE B.....	163

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática é um assunto de grande importância para a formação acadêmica dos alunos, sendo objeto de estudo e reflexão para os educadores há muitos anos. Nesse contexto, a minha experiência de mais de 15 anos em sala de aula e a análise dos indicadores referentes às tarefas exploratório-investigativas no ensino de Matemática, destacam a importância da formação do professor com novas metodologias para subsidiar a aprendizagem no exercício da docência.

Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) ressaltam a perspectiva inovadora das aulas investigativas de Matemática para a construção de significados de ensino-aprendizagem da álgebra, enfatizando a necessidade de buscar novas perspectivas e abordagens a fim de garantir um ensino de qualidade que estimule a participação ativa dos alunos.

Nesta pesquisa, para abordar as aulas investigativas, vamos utilizar o termo aulas exploratório-investigativas em matemática, que na perspectiva de Fiorentini (2006), são vistas como:

[...] aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. [...] Dependendo da forma como essas aulas são desenvolvidas, a atividade pode restringir-se apenas à fase de explorações e problematizações. Porém, se ocorrer durante a atividade, formulação de questões ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, teremos, então, uma situação de investigação matemática (Fiorentini, 2006, p. 29).

Assim, essas aulas devem propor a busca por perspectivas inovadoras voltadas a um ensino com qualidade para propiciar a participação do aluno na ação pedagógica, sempre com um caráter investigativo. Diante deste ponto de vista, frente aos conteúdos abordados nas aulas de matemática, daremos ênfase ao ensino da álgebra.

No ensino de Matemática, é importante repensar a álgebra e a forma como ela é ensinada, usando discussões sobre pensamento, linguagem e investigação matemática. Aqui vale o esclarecimento que ensinar álgebra por meio da linguagem pode ser difícil para os alunos, devido à abstração matemática envolvida.

No entanto, isso pode ser facilitado quando os discentes têm a oportunidade

de buscar formas criativas para resolver problemas e cálculos, estudando aspectos algébricos de maneira diferente. Essa abordagem pode tornar o ensino mais interessante e significativo para os estudantes.

Para Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) é fundamental que a educação algébrica explore aspectos mobilizadores que possam ser apresentados pelos discentes por meio de tarefas exploratórias ou investigativas. Estas atividades permitem que os alunos identifiquem e desenvolvam o pensamento algébrico de forma ativa, por intermédio de suas próprias práticas e abordagens.

Frente ao exposto, o termo ensino de álgebra refere-se ao processo de instrução formal no qual os estudantes aprendem os princípios, conceitos e técnicas da álgebra. Isso inclui: aprender sobre variáveis, equações, expressões algébricas, funções e suas propriedades, por exemplo. O ensino de álgebra nas escolas, tradicionalmente, se concentra na manipulação simbólica e na resolução de equações e desigualdades. Ele é frequentemente estruturado como uma disciplina matemática específica em currículos escolares.

Enquanto a educação algébrica é um termo mais amplo que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico em um contexto mais geral. Em vez de apenas focar nas regras e procedimentos da álgebra, a educação algébrica se concentra em ajudar os alunos a desenvolverem uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos e processos algébricos. Isso envolve a capacidade dos alunos de analisar padrões, generalizar regularidades, resolver problemas complexos e comunicar suas ideias de maneira algébrica.

Em resumo, enquanto o ensino de álgebra se concentra na instrução formal dos aspectos técnicos da álgebra, a educação algébrica vai além, incentivando uma compreensão mais profunda e um pensamento crítico sobre os conceitos algébricos. A educação algébrica procura desenvolver habilidades que são aplicáveis não apenas em situações matemáticas, mas, também, em problemas do mundo real, estimulando o raciocínio algébrico em diversas áreas da vida cotidiana.

Feito estes esclarecimentos, esta pesquisa teve como objetivo analisar a produção acadêmica em um determinado período, investigando as temáticas da Educação Algébrica e das Tarefas Exploratório-Investigativas nas aulas de Matemática, bem como os limitadores estudados por muitos autores nos últimos anos.

Por meio dessa análise, foi possível compreender tanto a quantidade, quanto

a essência das tarefas, obtendo uma visão abrangente do que foi desenvolvido no nível acadêmico em relação à Educação Matemática no Brasil.

Neste contexto, a pesquisa teve como propósito identificar os principais desafios e tendências que permeavam o campo da Educação Matemática e contribuir para uma reflexão crítica sobre as metodologias e abordagens utilizadas no ensino da Matemática, especialmente no que se refere à Educação Algébrica e às Tarefas Exploratório-Investigativas.

Como mencionado anteriormente, foi importante analisar a produção acadêmica sobre a Educação Matemática no Brasil, especialmente em relação a temas como: a Educação Algébrica e as Tarefas Exploratório-Investigativas nas aulas de Matemática. Isso ajudou a entender o que estava sendo pesquisado na área e quais eram as tendências e os desafios nessas perspectivas.

Ademais, o estudo de subáreas, como o pensamento algébrico, pode integrar diferentes temáticas e permitir novas iniciativas no ensino da Matemática. A realização de mapeamentos relacionados a pesquisas, por exemplo, pode ser constante em campos variados e contribuir para verificar o grau de conhecimento disponível e direcionar pesquisas futuras.

Sendo assim, a análise da produção acadêmica e o estudo das subáreas da Educação Matemática foram importantes para compreender a área e aprimorar o ensino da Matemática. Para entender o ensino da álgebra na Educação Matemática no Brasil, foi imprescindível analisar o estado do conhecimento produzido por meio de pesquisas acadêmicas. Um recurso útil para este fim foi o mapeamento, permitindo a identificação de divergências, paralelos, interseções e tendências na área.

Diante deste olhar, foi possível utilizar diversos sustentáculos, como artigos, livros, revistas, teses, dissertações e monografias para discutir e refletir sobre a Educação Algébrica e avançar no conhecimento da área. O mapeamento é, deste modo, um auxiliar valioso no levantamento de dados e na análise do que se produz, pois permite a construção de uma base sólida para a ciência.

Nesse panorama, é visível que o mapeamento é uma técnica utilizada para analisar um estado do conhecimento sobre determinado tema. Segundo Romanovski e Ens (2006), o mapeamento tem a função de identificar as principais tendências e lacunas na produção científica de uma determinada área, permitindo assim uma compreensão mais ampla do que está sendo produzido.

Nesse sentido, a presente pesquisa utilizou o mapeamento como ferramenta para compreender a produção acadêmica sobre a temática em questão. Para a realização do estado do conhecimento em torno de teses e dissertações, foi consultado o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). Quando as referências não estavam disponíveis nesse catálogo, os repositórios das universidades foram consultados.

A busca pela análise de teses e dissertações converge para a ideia de que estes estudos são cruciais como elementos científicos importantes, devido à rigorosidade metodológica exigida em seu desenvolvimento. Nesse contexto, a análise qualitativa desses trabalhos pode revelar elementos do ambiente científico e apontar as tendências das pesquisas em determinadas áreas durante momentos específicos, bem como as situações, fatos, métodos e concepções utilizadas pelos campos do conhecimento (Polla, 2010).

Para Romanovski e Ens (2006) o estado do conhecimento é uma técnica que busca identificar e compreender o estado atual do conhecimento sobre um determinado tema, analisando a produção acadêmica e as tendências da área.

Dessa maneira, é necessário fazer a análise de conhecimento de pesquisas sobre temáticas e identificar os termos nela utilizados, envolvendo os anos finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio como uma ação útil para entender os empreendimentos feitos pela área como representação e elaboração de um caminho específico e comum de estudos.

Nessa mesma linha de pensamento, a pesquisa analisou o momento da investigação e da exploração matemática, entre os investigadores que utilizaram essa perspectiva metodológica em sala de aula.

Assim, dizemos que as pesquisas ao serem analisadas podem incentivar a reflexão sobre os diversos campos, pois estão inseridas no estudo do cotidiano educacional. Para tanto, os pesquisadores utilizam o ambiente educacional ocupado por profissionais que se interessam por estudar temáticas que consideram importantes para o progresso da educação.

A meta desta pesquisa foi, portanto, a realização do estado do conhecimento das pesquisas que tratam da Educação Algébrica nas Aulas Exploratório-Investigativas em Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Dessa intenção, surgiu a seguinte questão de investigação: **O que pode ser percebido em teses e dissertações brasileiras a respeito da Educação Algébrica, no contexto de tarefas investigativas nas aulas de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio?**

Para apoiar esta questão, o objetivo geral foi mostrar um estado do conhecimento da pesquisa brasileira sobre Educação Algébrica em Aulas Exploratório-Investigativas nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, especialmente em teses e dissertações.

Com base nesse objetivo, e para responder ao questionamento da pesquisa, os seguintes objetivos específicos foram elencados:

- Descrever as regiões brasileiras e as instituições de pesquisa no período em que essas pesquisas foram produzidas, bem como os tipos de metodologias aplicadas para o desenvolvimento de tarefas exploratório-investigativas realizadas em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio;
- Identificar os conteúdos algébricos recorrentes da Educação Básica presentes nas tarefas exploratórios-investigativas do material que compõe o *corpus* de análise, bem como suas interligações com concepções de álgebra;
- Analisar práticas escolares implementadas e recursos didáticos utilizados nas pesquisas, especificamente nas tarefas exploratório-investigativas.

O início foi dado com a introdução, na qual, além da apresentação da pesquisa, houve uma descrição da trajetória profissional e acadêmica da pesquisadora, propondo um entrelaço com algumas ideias teóricas quanto à Álgebra na Educação Básica, à Educação Algébrica e à Investigação Matemática.

Na seção seguinte, realizou-se uma revisão da literatura relevante ao tema, enfatizando os estudos que abordam as concepções de Álgebra, a Educação Algébrica e as Aulas Exploratório-Investigativas no ensino. Como resultado, a abordagem desses assuntos serviu de importância indireta para a questão de pesquisa e, diretamente, para as análises que foram empreendidas.

Na terceira seção, foram compartilhados os aspectos metodológicos, tais como: os procedimentos e os instrumentos utilizados para a coleta e análise dos dados de forma minuciosa.

Em seguida, na quarta seção, foi explicitada a seleção das dissertações e teses que compuseram o *corpus* de análise, as categorias analíticas utilizadas, além da análise e da discussão em si dos dados coletados.

Na quinta seção, foi apresentado as considerações finais da investigação, nas quais foram experimentadas as principais tendências e lacunas identificadas nas pesquisas sobre Educação Algébrica em Aulas Exploratório-Investigativas nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, bem como as instruções para a prática docente e para futuras pesquisas na área.

1.1 MINHA TRAJETÓRIA

Eu, nascida no município de Uberlândia - MG, tive a minha formação educacional iniciada no final da década de 1970 quando ingressei na Educação Infantil, em uma paróquia localizada no Bairro Martins. Naquela época, a paróquia oferecia vagas gratuitas para esta faixa etária educacional.

Durante o Ensino Fundamental I, tive a oportunidade de estudar na Escola Estadual Doutor Duarte Pimentel de Ulhoa, onde criei excelentes recordações que guardo até hoje com muito carinho. Lembro-me que, ao entrar nesta escola, dois livros principais passaram a fazer parte do nosso aprendizado: a cartilha intitulada “Caminho Suave” e a tabuada chamada “Ensino Prático para Aprender Aritmética”.

Como bons alunos, a nossa principal tarefa era decorar a tabuada e concluir toda a cartilha, para avançar até a terceira série do ensino de 1º Grau, equivalente ao segundo ano do Ensino Fundamental I. Essa metodologia de ensino, a meu ver, era influenciada pelo que Fiorentini (1995) chama de Tecnicismo Pedagógico, pois esta tendência encontra-se relacionada à técnica de ensino dirigida para a corrente psicológica denominada Instrução Programada.

Nesse cenário, o primeiro livro didático de matemática que me foi oferecido se chamava “O Caminho do Saber”. Recordo-me que, mesmo sendo um livro de nível primário, a linguagem circundava e possuía como temática primordial o conteúdo de Teoria dos Conjuntos.

Sob essa perspectiva, devido ao Movimento da Matemática Moderna, Fiorentini (1995) fala da tendência *formalista* moderna, com ênfase no rigor das transformações algébricas justificadas nas propriedades estruturais. Nesta fase do ensino matemático, há a intenção de se antecipar alguns tópicos algébricos, cabendo destaque aos conjuntos numéricos e às propriedades estruturais em detrimento de outros tópicos inevitavelmente postergados.

Durante o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio, estudei na Escola Estadual Ignácio Paes Leme, que ficava no meu bairro. Uma escolha influenciada pelo meu desejo de seguir uma carreira profissional na área da Educação. Meus irmãos também estudaram nesta escola em etapas diferentes, o que tornou tudo mais familiar aos meus olhos ainda adolescentes.

Tive a sorte de contar com bons professores e uma infraestrutura completa, com quadras esportivas, pista de atletismo, biblioteca, laboratório de ciências, oficinas de artesanato, horta e espaços de lazer. Todo o ambiente escolar contribuía, nesse sentido, para uma formação tanto intelectual, quanto humanizada.

No Ensino Fundamental II, fui instruída por docentes realmente preocupados com o aprendizado efetivo dos estudantes, muitos desses professores eram, inclusive, graduados pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Entre eles, um professor de matemática destacava-se por sua postura austera e rigorosa.

Embora respeitássemos sua autoridade, sabíamos de seu viés educacional pautado pela disciplina, sempre insistindo que aprendêssemos os conteúdos com dedicação. Sua abordagem, todavia, contrapõe-se às tendências mais recentes do ensino de matemática, que priorizam as chamadas abordagens investigativas.

Hoje, recordo-me com carinho do livro didático que usávamos, chamado “Praticando Matemática”, do autor Álvaro Andrini, e sei que com certeza a influência dos aprendizados desta época na minha futura escolha profissional.

Figura 1 – Livro didático utilizado



Fonte: Extraído do site¹

Durante o Ensino Fundamental II, este livro circulou entre os meus irmãos. Por sermos uma família numerosa, para não o danificar, era proibido escrevermos nele, o que implicava em copiar todas as perguntas e respostas em nossos próprios cadernos. O livro era simples, com textos explicativos e exemplos resolvidos e, gradualmente, de forma planejada, a dificuldade dos exercícios aumentava com a constante ênfase na Álgebra.

Segundo Fiorentini (1995), essa abordagem assemelha-se à Tendência Tecnicista, que vê a matemática como um conjunto de regras e técnicas. Logo, fazíamos muitos exercícios, tanto os do livro, quanto aqueles que o professor passava no quadro ou nas folhas mimeografadas.

Os exercícios eram parecidos, o que nos ajudava a fixar o conteúdo, mas tínhamos que ser rigorosos em seu desenvolvimento, pois qualquer resultado diferente do esperado ou falta de zero, eram motivo de duras reclamações do professor. Neste contexto,

Pesquisas indicam que as dificuldades que estudantes vivenciam com tópicos de Álgebra, nos diversos segmentos de ensino, podem advir de determinadas concepções de Educação Algébrica, tanto próprias quanto de seus professores (Figueiredo, 2007, p. 5).

Durante o Ensino Fundamental II, a Álgebra era o conteúdo principal, enquanto a geometria ficava em segundo plano, sendo apresentada somente no final do ano letivo. Apelidamos a Álgebra de "Maluca Sopa de Letrinhas", pois tínhamos que aprender conteúdos cheios de incógnitas sem saber sua aplicabilidade. Realizávamos muitos exercícios de treino, mas uma dúvida intrigava a todos os estudantes: afinal, quem era esse tal de "x"?

Embora não soubéssemos ao certo, inferíamos que a Álgebra nos ensinava a manipular símbolos e expressões matemáticas de maneira estruturada, preparando-nos para compreender conceitos mais complexos no futuro. Buscando responder um pouco a este questionamento, podemos entender que:

¹ <http://docplayer.com.br/64111387-Reginaldo-jose-dos-santos.html>

Uma das diferenças mais flagrantes entre a aritmética e a álgebra é, obviamente, a utilização, nesta última, de letras para indicar valores. As letras também aparecem em aritmética, mas de maneira bastante diferente. A letra *m*, por exemplo, pode ser utilizada em aritmética para representar 'metros', mas não para representar o número de metros, como em álgebra. A confusão decorrente dessa mudança de uso pode resultar numa 'falta de referencial numérico', por parte do aluno, ao interpretar o significado das letras em álgebra (...) (Booth, 1995, p. 30).

No Ensino Médio, anteriormente chamado de Segundo Grau, fiz um curso de três anos e, nesse mesmo período, decidi cursar o Técnico em Magistério, sempre buscando alcançar meu sonho de lecionar, principalmente a matemática, a disciplina com a qual eu mais me identificava.

No entanto, o curso de Magistério não correspondeu às minhas expectativas. Em pouco tempo, a sobrecarga de estudar em regime integral e misto - Ensino Médio e Magistério - em escolas diferentes, fez-me optar por abandonar o segundo e priorizar o primeiro, mas sem desanimar dos meus objetivos e sonhos.

Durante o Ensino Médio, tive uma experiência mais aprofundada no estudo da matemática e, naquela época, os livros didáticos eram o principal recurso de aprendizagem, juntamente com a utilização da tríade tradicional: quadro, giz e professor. No entanto, atualmente, sabe-se que essa abordagem de ensino não é a mais eficaz para despertar a curiosidade dos estudantes, conforme destacado por Fialho (2008). É necessário escolher metodologias de ensino que despertem o interesse dos alunos e incentivem a aprendizagem de maneira mais dinâmica e interativa.

Retornando aos livros, este, era um volume único, já que estudaríamos os três anos com a mesma brochura. Cada página era dividida em duas colunas e as letras eram muito pequenas, o que prejudicava alunos com patologias oftalmológicas e dislexia.

Havia poucas exceções e, basicamente, não apresentavam grandes diferenças em relação aos livros do Ensino Fundamental II, mantendo alicerces comuns, como: textos curtos, exemplos de resolução e exercícios no mesmo formato. Na época, a compra de livros era inviável financeiramente e, por esse motivo, os exemplares eram repassados dentro de uma mesma família ou entre amigos próximos, conforme mencionado anteriormente.

Por outro lado, com o professor do Ensino Médio, tínhamos autonomia para a resolução dos problemas. No entanto, a resposta do mestre permanecia incontestável,

ou seja, os caminhos para resolução eram individuais, mas a resposta deveria ser coletiva e uníssona, o que difere certamente de pensar as resoluções de questões problemáticas através da investigação matemática em sala de aula.

Na época em que eu estava no Ensino Médio, as aulas do meu professor eram muito boas porque ele tinha sim uma ótima didática, na qual costumava propor debates para encontrar diferentes formas de resolver os problemas e exercícios de matemática.

Apesar de o professor exigir que fizéssemos as coisas do jeito dele, na maioria das vezes, ele também nos permitia trabalhar em grupo e discutir as respostas dos exercícios juntos. Isso pode ser explicado da seguinte forma:

Se os alunos têm de aprender (e usar) os procedimentos mais formais, primeiro devem perceber a necessidade deles. Isso requer (a) que o professor reconheça que os alunos podem dispor de um método informal para um dado tipo de problema; (b) que o valor desse método informal para resolução de problemas simples seja reconhecido e discutido, e (c) que as possíveis limitações do método sejam consideradas, simplesmente tentando se usá-lo em problemas da mesma espécie, porém mais difíceis. Sugere-se que desse modo o aluno poderá chegar a reconhecer a necessidade de um procedimento mais geral (isto é, formal). Devem-se procurar meios de ajudar os alunos a desenvolver uma compreensão do próprio procedimento formal (Booth, 1995, p. 35).

De acordo com Booth (1995), considero que as discussões em grupo durante o Ensino Médio desempenharam um papel fundamental em meu aprendizado, principalmente no que diz respeito aos métodos, aplicações e soluções tecnológicas na área da matemática. É relevante destacar que a Álgebra foi um conteúdo central durante todo o período do Ensino Médio, assim como foi no Ensino Fundamental II.

Entretanto, com base em minha experiência, percebo que a inclusão de abordagens investigativas nas aulas de matemática poderia trazer ainda mais benefícios para a compreensão do conteúdo por parte dos alunos. Nesse sentido, é importante que os professores de matemática busquem formas de incorporar essas abordagens em suas práticas pedagógicas, a fim de enriquecer o processo de ensino-aprendizagem.

Durante o Ensino Médio, tive o privilégio de acompanhar minha mãe, professora de Geografia, em suas aulas, o que foi essencial para eu perceber o meu desejo de seguir a carreira de professora no futuro. Posteriormente, tive a oportunidade de atuar como ajudante de sala, na Escola Fazenda Rio das Pedras, onde os alunos enfrentavam situações de vulnerabilidade e recebiam aulas regulares

e práticas agrícolas. Acompanhando minha mãe três vezes por semana, pude aprender sobre a prática da docência naquele ambiente, o que fortaleceu ainda mais minha determinação em seguir carreira na Educação Básica. Durante esse período, pude compreender a importância do papel do professor na formação dos alunos e interagir com eles, o que me proporcionou experiências emocionantes e enriquecedoras.

Após essa experiência marcante, tive a oportunidade de trabalhar como ajudante de sala em outra escola. Minhas funções incluíam: apresentar o conteúdo no quadro, recolher os cadernos, auxiliar na aplicação de exames avaliativos e, quando possível, lecionar monitorias de reforço sobre conteúdos matemáticos para os alunos. Essa foi uma fase de intenso amadurecimento pessoal e intelectual, que reforçou ainda mais minhas metas e objetivos na área da Educação.

Após concluir o Ensino Médio, optei por caminhos diferentes dos que sempre sonhei, devido às necessidades financeiras mais urgentes. Trabalhei no setor terciário da economia em atividades comerciais e administrativas. Entretanto, um desses trabalhos me trouxe de volta ao ambiente escolar como supervisora de um novo projeto em minha cidade.

O projeto envolvia atividades laborais relacionadas à tecnologia da informação e à comunicação nas escolas. Iniciando por volta de 1995, como supervisora, juntamente com minha equipe, levamos computadores e cursos de informática para cidades do interior dos estados (Bahia, Espírito Santo, Goiás, Minas Gerais, Rio de Janeiro e São Paulo), em parceria com escolas locais e prefeituras.

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) afirmam que as tecnologias digitais na Educação Matemática, antes conhecidas como Tecnologias Informáticas, ganharam destaque em uma segunda fase, a partir de meados da década de 1990, com a popularização dos computadores domésticos.

Esse acesso individual às novas tecnologias gerou grandes expectativas e perspectivas para estudantes, professores e pesquisadores quanto ao uso dos computadores em suas vidas pessoais e profissionais.

Tive a oportunidade de trabalhar com as tecnologias digitais, conhecendo várias cidades, pessoas e, principalmente, escolas - o lugar onde mais gosto de estar. Em algumas cidades, fui pioneira na introdução das tecnologias digitais, ensinando noções de software e hardware, funcionamento do computador, criação e envio de e-mails, entre outras funções, para alunos, professores, funcionários de empresas,

bancos e visitantes da comunidade local. Esses aprendizados simples e corriqueiros são essenciais na nossa realidade atual, mas na época eram inovadores e necessários para atender às novas demandas sociais emergentes.

Após trabalhar com inclusão digital, conheci meu esposo, que já era professor de matemática em uma escola onde o projeto ocorria. Casei e, incentivada por ele, retornei ao meu antigo sonho de ser professora, lecionando no contra turno, na escola estadual de São Mateus - ES, na qual também atuava como fiscal tributário municipal. Ingressei na UFES (Universidade Federal do Espírito Santo) para cursar Licenciatura em Matemática, mas não pude prosseguir devido aos horários do curso.

No entanto, não desisti. Continuei lecionando e fazendo cursos de capacitação. Em 2005, surgiu a oportunidade de fazer a licenciatura na modalidade semi presencial, na UNILINHARES (Faculdade de Ciências Aplicadas "Sagrado Coração"), em parceria com a (FTC) Faculdade de Tecnologia e Ciências de Salvador – Bahia, regularizando meu currículo para concursos públicos de professores.

Durante o curso de Licenciatura em Matemática, na FTC, pude conciliar o estudo com o trabalho e o estágio supervisionado foi realizado na escola onde lecionava, unindo o conhecimento acadêmico com a experiência em sala de aula.

Como já havia trabalhado com tecnologias digitais, isso me auxiliou a ensinar matemática de maneira mais interessante e criativa, realizando projetos de inclusão digital e projetos de campo. Percebi que a matemática pode envolver trabalho investigativo tanto na esfera física, quanto virtual, o que era novidade em municípios menores naquela época.

Durante minha formação básica, aprendi a resolver exercícios de álgebra, mas, frequentemente, me inquietava com a falta de motivação sobre o pensamento por trás de uma explicação em resposta aos porquês das resoluções.

Na academia, a situação não parecia muito diferente, mas fui capaz de explorar algumas oportunidades para investigar tais questões. Durante minhas reflexões na academia, percebi que muitos professores ainda defendiam a ideia de que a álgebra e outros conteúdos matemáticos deveriam ser ensinados de forma mecânica e procedimental, tal como foi lecionado no passado.

Em conversas com meus colegas de profissão, percebi que eles acreditavam que as aulas deveriam permanecer as mesmas, evitando a formação de grupos e provas com questões de múltipla escolha. Essa postura reforçava a perpetuação de um ensino esvaziado de motivação, mais complexo, voltado apenas à mecanização e

estimativas tradicionais, sem levar em conta o conhecimento prévio dos alunos ou outros ramos da matemática. Vislumbrando essas considerações,

(...) estendemos também às concepções de Educação Algébrica que acreditamos ser possível detectar: no papel que estas desempenham ao intervirem no processo de ensino aprendizagem, nas estratégias que os professores aplicam, nos procedimentos matemáticos a que recorrem para ensinar, nos objetivos que consideram necessários ver alcançados por seus alunos, no papel que consideram caber aos alunos no processo de aprendizagem do aluno. (Figueiredo, 2007, p. 22).

Durante meu período de Mestrado, as reflexões em torno das concepções de Educação Algébrica fizeram-me questionar as diversas abordagens para ensinar os conteúdos de matemática. Em meio a essa análise, um grande obstáculo no ensino de Álgebra na Educação Básica chamou minha atenção.

Especificamente, notei que as dúvidas e as dificuldades dos alunos com relação às funções e às equações, tanto do primeiro, quanto do segundo grau, de maneira mais expressiva no 9º ano do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, deveriam ser preocupações centrais dos professores de matemática. Nesse sentido,

(...) a importância de o professor conhecer a vida de seus estudantes, (...) sobre suas experiências extraescolares, a vida familiar e seus modos de vida, conhecer toda a trajetória escolar de seu aluno, marcada em muitos casos pelo fracasso escolar, sobretudo de membros de grupos oprimidos, pode-se afirmar que tais conhecimentos possibilitam aos professores práticas pedagógicas que ensejam aos estudantes se engajarem nos estudos e ampliem seus saberes, mediante a realização de atividades de aprendizagem de contexto familiar e, sobretudo, a superarem uma visão de ensino marcada por experiências anteriores malsucedidas (Fernandes, 2019, p.81).

Assim, é necessário que o professor, além de conhecer a vida escolar do estudante, possa, também, entender o contexto social em que vive. Nesta perspectiva, a realização de atividades de aprendizagem no contexto familiar pode ser destacada por ações voltadas para situações-problema e investigativas no que diz respeito ao desenvolvimento da modelagem matemática (por exemplo, situações ligadas às compras de alimentos, pagamento de contas de água, luz, telefone e internet, ou pagamento de aluguel).

Relembrando o Estágio Supervisionado no Curso de Licenciatura em Matemática da FTC, as minhas preocupações em certos conteúdos algébricos e em outras áreas da matemática fizeram parte de conversas prévias com os professores

regentes, o que ajudou bastante no esclarecimento do meu objetivo em relação à assistência nas aulas. Nesse processo, levávamos o documento da universidade – Termo de Compromisso de Estágio – para formalizar essa etapa da formação.

Quanto aos registros das observações, eu fazia as anotações em um caderno, similar ao de campo. Gostava muito de registrar as dinâmicas e os projetos em Matemática que eram ministrados e organizados pelos professores, pois achava importante qualificá-los segundo categorias que ajudavam a pensar na minha própria prática na docência.

Muitas atividades e vários projetos matemáticos eram desenvolvidos, como por exemplo: Projeto de Jogos Matemáticos, Projeto Softwares Educativos, Projeto Inclusivo (Adote um Aluno, inclua um Colega), entre outros, que instigavam a pesquisa, uma ou outra perspectiva investigativa em sala de aula e o senso coletivo nas aulas de matemática.

Concluí minha Licenciatura em Matemática em agosto de 2008 e continuei lecionando na Escola Estadual Ceciliano Abel de Almeida até 2010. Durante o curso de licenciatura, aproveitei a oportunidade para aprimorar minha formação e me especializei em Docência do Ensino Superior, na Univc (Universidade Vale do Cricaré), concluindo o curso em 2009.

No ano de 2010, mudei para a cidade de Guaçu - ES para acompanhar meu marido em seu novo emprego e, ao chegar nesse município do sul do estado, fui contratada para lecionar as disciplinas de Matemática e Física, e atuar no 2º Pré-Enem na mesma escola.

Neste período, fiz o Curso de Capacitação em Práticas de Educação a Distância no IFES (Instituto Federal do Espírito Santo), uma instituição muito importante em minha formação, tendo em vista que me deu condições de sanar dúvidas relativas ao AVA (Ambiente Virtual de Aprendizagem), especialmente o *Moodle*, *Chat* e *Wiki*. Logo, esse novo conhecimento adquirido ajudou-me em tutorias virtuais, pois consegui permissão para atuar em cursos de Ensino a Distância.

Em meados de 2013, mudei-me para a cidade de Uberaba - MG, novamente para acompanhar meu marido que veio lecionar na Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM). Neste mesmo ano, iniciei um contrato temporário em Uberaba, lecionando Matemática para turmas de 8º ano da Escola Estadual América.

No decorrer de 2014, fui contratada como professora no Projeto de Tempo Integral, na disciplina de Matemática. Neste projeto, pude trabalhar a Matemática de

forma mais criativa, tendo mais tempo e dinamismo para trabalhar os conteúdos.

Em 2015, comecei a lecionar em outra escola estadual, onde tive a oportunidade de trabalhar com alunos do 7º ano e do Ensino Médio. Nessa instituição, pude perceber a eficácia do meu trabalho, pois as condições infraestruturais, trabalhistas e administrativas eram mais eficientes, o que me permitiu desenvolver diversas atividades que realmente cumpriram o papel de ensinar Matemática. Permaneci nessa escola até o ano de 2016.

Ainda nessa época, fui convidada a atuar como professora formadora no Curso de Aperfeiçoamento em Gênero e Diversidade na Escola, promovido pela Renafor (Rede Nacional de Formação de Profissionais da Educação) na UFTM. Essa experiência foi extremamente valiosa para minha formação, pois me ensinou a oportunidade de trabalhar temas relacionados a gênero e diversidade na Educação Básica de maneira mais consciente, dando-me um novo olhar para atender a diversas situações encontradas no ambiente escolar, de acordo com essa temática.

Em 2017, assumi um cargo efetivo como professora de matemática do município de Uberaba e fui trabalhar na Escola Municipal Professora Geni Chaves. Nesta escola, em 2018, além de ministrar conteúdos matemáticos, comecei a atuar como professora de apoio para dois alunos com necessidades especiais.

De modo geral, o trabalho que fiz nesta escola foi muito proveitoso, principalmente porque comecei a usar, no ensino matemático, as tecnologias digitais, por meio de plataformas educacionais. Essas tecnologias digitais foram primordiais para o ensino presencial de matemática, pois possibilitaram a inclusão da maioria dos alunos – com ou sem necessidades especiais – no entendimento de conteúdos matemáticos abstratos em muitos casos. Fiquei nesta instituição até o ano de 2018.

Neste período, apesar da existência dos Parâmetros Curriculares Nacionais, com a ascensão da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2017), pude perceber entre algumas leituras que no estudo da álgebra no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio, no que tange às equações e às funções, na perspectiva da Educação Algébrica, é fundamental compreender os modelos e as estruturas matemáticas no uso de incógnitas. Esta racionalização requer algumas competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos docentes e pelos discentes.

Aqui merece a observação sobre a importância dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o ensino da Matemática. Esses documentos (Brasil, 1998) foram elaborados pelo Ministério da Educação como diretrizes separadas por

disciplinas.

Esses parâmetros buscavam orientar a elaboração curricular, a formação inicial e continuada dos professores, fomentar as discussões pedagógicas internas das instituições de ensino, produzir materiais didáticos (como livros, por exemplo) e promover avaliações educacionais.

Os PCNs devem, nesse panorama, continuar existindo, mas somente como diretrizes de orientação e não obrigatórias. A BNCC, no entanto, é mais específica, determinando os objetivos de aprendizagem de cada ano escolar. Esta, por sua vez, é obrigatória para todos os currículos de todas as redes do Brasil, públicas e particulares. Os conteúdos que a totalidade dos estudantes das escolas do país na Educação Básica devem estudar estão na BNCC.

Com o detalhamento dos conteúdos presentes na BNCC (Brasil, 2017), entendo que a Educação Algébrica deve ser uma preocupação constante da Educação Matemática, tanto nos aspectos pedagógicos em sala de aula, quanto nas práticas pedagógicas na escola. Para Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), nesse sentido, a investigação matemática nas aulas é uma vertente da prática pedagógica que o docente pode fazer uso para desenvolver atividades em torno do pensamento algébrico.

Neste cenário, em 2019, pedi minha remoção para a Escola Municipal de Uberaba. Nesta instituição de ensino, fui acolhida de forma formidável e pude trabalhar mais incisivamente, ou seja, ensinar Matemática junto e através das tecnologias digitais.

Iniciamos um trabalho em parceria com os estagiários do curso de Licenciatura em Matemática da UFTM, em um projeto piloto chamado: “O uso das Tecnologias Digitais no Ensino-Aprendizagem na Escola Municipal Uberaba” (Vieira, R; Vieira, C 2020).

Este projeto tinha a concepção na qual eu realmente queria: usar computadores, *WhatsApp*, celulares e Plataformas Digitais para contribuir no processo de ensino-aprendizagem de Matemática. Fizemos esse trabalho junto ao 9º ano do ensino fundamental.

Pude ver os resultados estampados na avaliação do aumento do rendimento dos estudantes, nas aprovações dos discentes nos cursos do IFTM (Instituto Federal do Triângulo Mineiro) da Escola Municipal Uberaba e na participação no I Seminário Internacional em Tecnologias, Comunicação e Educação, ocorrido em 2019, na

cidade de Uberlândia.

Além das atividades mencionadas acima, comecei no decurso de 2019 uma Especialização *Lato Sensu* em Educação Profissional e Tecnológica Inclusiva do IFTM, onde tive um aprendizado que ampliou minha formação sobre o uso das tecnologias e, além disso, na educação inclusiva, tendo em vista o estudo sobre as Tecnologias Assistivas.

Nesta especialização, apresentei meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) em forma de artigo e, após a aprovação e ajustes necessários, publiquei em 2020 na Revista de Matemática Aplicada e Interdisciplinar – INTERMATHS – “Ensino da Matemática com Apoio de Tecnologias Digitais como Abordagem Inclusiva ao Aluno com Paralisia Cerebral: um relato de experiência no 9º ano do ensino fundamental em uma Escola Municipal de Uberaba/MG” (Vieira; Gonçalves, 2020).

Nesta mesma linha, em 2020, fizemos o registro do projeto de ensino junto à UFTM: “Tecnologias Digitais no Ensino e Aprendizagem de Matemática na Escola Municipal Uberaba”, onde continuamos o trabalho iniciado em 2019. Inicialmente, o projeto seria desenvolvido no ensino presencial, porém, com o advento da Pandemia da COVID-19, a proposta foi desenvolvida de forma remota.

Em 2020, participei da Seleção para Mestrado em Educação em Ciências e Matemática da UFTM, apresentei o Projeto, fiz a arguição e avaliação de títulos. Fui aprovada e cursei a pós-graduação esperando que esta pudesse acrescentar algo novo e satisfatório à minha prática e investigação como professora da educação básica e na minha formação como pesquisadora.

Ademais, somei outros conceitos e iniciativas que poderão incrementar o processo de ensino-aprendizagem em matemática, focando meus esforços, minha pesquisa e meu conhecimento no entendimento de abordagens de investigações no âmbito da Educação Algébrica em aulas exploratório-investigativas, tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio.

Ao longo da minha trajetória acadêmica e profissional, sempre busquei inovar nas práticas de ensino de matemática, especialmente na abordagem da álgebra, procurando instigar o pensamento crítico dos alunos e fornecer um entendimento mais profundo dos conteúdos.

Como pesquisadora, tenho a constante busca por novas formas de ensinar e repensar o processo de aprendizagem, em especial através das Aulas Exploratório-Investigativas em Matemática, com foco na Educação Algébrica. Nesse sentido, o

Mestrado em Educação em Ciências e Matemática pôde contribuir para a análise das metodologias de ensino.

Para aprofundar as reflexões sobre Álgebra, Educação Algébrica e Aulas Exploratório-Investigativas, foi fundamental realizar uma revisão da literatura, discutir os aspectos teóricos relevantes e realizar mapeamentos e análises dos conteúdos relacionados.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Nos fundamentos teóricos, apresento uma revisão da literatura pertinente ao tema da pesquisa. Logo após, é dada ênfase ao estudo das concepções de Álgebra e de Educação Algébrica, para, por fim, abordar o tema Investigações Matemáticas em Sala de Aula, procurando trazer elementos para facilitar as escolhas das categorias e as análises das teses e dissertações mapeadas.

2.1 REVISÃO DA LITERATURA

Para que a pesquisa empreendida siga um caminho no âmbito do tema escolhido, é necessário verificar a literatura existente nos estudos que estão interligados ao que será realizado. No contexto desta linha, como etapa preliminar da pesquisa, é possível classificar a revisão da literatura como uma busca por fontes recomendadas por especialistas que já investigaram o tema (Gil, 2008).

Com base nos estudos do estado do conhecimento, é possível analisar de forma ampla e sistemática a produção acadêmica sobre determinada temática na área da Educação. Esses estudos coletam dados sobre pesquisas realizadas em um período específico, indicando a atenção que os pesquisadores têm dado ao tema em questão e os aspectos mais relevantes da área.

Segundo Romanowski e Ens (2006) os estudos do estado do conhecimento se mostram extremamente relevantes para a compreensão do estado atual da pesquisa em uma área determinada. Eles apontam os temas, subtemas e conteúdos prioritários nas pesquisas, além de evidenciar a necessidade de algumas pesquisas que ainda não foram desenvolvidas.

Outra contribuição importante dos estudos do estado do conhecimento é o apontamento de temas que são pouco explorados ou até mesmo ignorados pelos pesquisadores. Com isso, é possível identificar lacunas no conhecimento e incentivar o desenvolvimento de novas pesquisas sobre esses temas negligenciados.

Por fim, vale destacar que os estudos do estado do conhecimento evocam aspectos pontuais, como um curso ou uma área de formação com sua proposta específica, além de evidenciar os temas que preocupam o investigador. Com base nessas análises, é possível direcionar pesquisas futuras e contribuir para o desenvolvimento do conhecimento científico na área da Educação Matemática.

De acordo com Kumar (2005), a análise do que já foi investigado sobre algum tema auxilia no aprimoramento da metodologia de um estudo por meio da revisão da literatura, pois esse tipo de modelo de trabalho mostra como esses estudos contribuíram para o conhecimento.

Nesta revisão da literatura, foi considerado o estado do conhecimento e o panorama de pesquisas sobre ensino-aprendizagem nos anos finais do Ensino Fundamental e Médio. Para isso, foram analisados os estudos de Polla (2010), Alvarenga (2016), Baqueiro (2016) e Borges (2018), que também realizaram mapeamentos de produções acadêmicas sobre o tema.

Em Polla (2010) a autora apresentou um mapeamento de teses e dissertações sobre ensino-aprendizagem de Álgebra, nos anos finais do Ensino Fundamental, no período de 1998 a 2007. Nesse sentido, foi levantado no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e em dados de bibliotecas digitais de algumas instituições de pós-graduação.

Polla (2010) estabeleceu como ponto de partida os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), discutindo sobre a relevância da Álgebra. Para tanto, utilizou alguns aspectos históricos que tinham relação com os trabalhos de composição da pesquisa, realizando o trabalho através de sites das principais instituições e de grupos de pesquisa que tiveram um vínculo colaborativo na produção de estudos.

Em suas conclusões, Polla (2010) destaca que houve uma diversidade de temáticas com olhares voltados para a aprendizagem de alunos, professores e metodologias utilizadas no que diz respeito à aprendizagem e aos materiais didáticos adotados ou direcionados às escolas pelas Secretarias de Educação.

Desta forma, a pesquisa permitiu concluir a necessidade de estudos que tenham enfoque em alunos e professores nos anos finais do Ensino Fundamental, com a vertente no trabalho colaborativo, para o ensino de Álgebra em sala de aula.

Alvarenga (2013) fez um estudo de caráter bibliográfico buscando mapear e refletir sobre a produção acadêmica que aborda ensino-aprendizagem de inequações. Neste trabalho, o autor emprega métodos mistos, nos moldes da análise de conteúdos para a análise dos dados.

Alvarenga (2013) faz um mapeamento de eventos nacionais e internacionais, periódicos e trabalhos obtidos em bibliotecas, além de contato direto com alguns autores da pesquisa. Em 2010, no grupo de pesquisa Ensino de Álgebra (GPEA), o autor, frente a assuntos algébricos e a seus objetivos de pesquisa, resolveu:

(...) continuar com o mesmo tema, porém, desta vez, analisando o estado do conhecimento de pesquisas sobre tal assunto, pois muitos anos se passaram, e entender o que foi desenvolvido e o movimento realizado pelos trabalhos investigativos era importante nessa época. (...) - Caracterizar e inter-relacionar aspectos relativos ao estado do conhecimento sobre o ensino e aprendizagem de inequações. (Alvarenga, 2013, p.28;251)

Com o objetivo de relacionar várias características, principalmente aquelas emitidas pelos trabalhos inventariados, traçando linhas gerais para a investigação, Alvarenga (2013) organizou sua pesquisa em categorias a priori e emergentes.

Diante da organização empreendida, o autor refletiu sobre a gênese do tema, os enfoques, as metodologias de pesquisa, os referenciais teóricos adotados, os tipos de inequações e o nível escolar dos participantes das coletas.

Os resultados giraram em torno da leitura dos trabalhos, permitindo aprofundar e conhecer os objetivos das publicações, os referenciais teóricos educacionais e matemáticos, bem como as metodologias de pesquisa. Foi pontuado ainda, indicando as formas de abordagem das inequações, a natureza dos erros, os aspectos metodológicos de ensino e as questões reflexivas e investigativas.

Como conclusão, Alvarenga (2013) mostrou que prevaleceu nas publicações o enfoque nos erros, no modo de resolver e de interpretar as inequações feitas pelos estudantes. As investigações estão espalhadas em todos os lugares, mas continuam sendo um tema que instiga novas pesquisas.

Neste intento, Alvarenga (2013) afirmou que as investigações sobre ensino-aprendizagem de álgebra podem e devem ser ampliadas e aprofundadas pelos pesquisadores em Educação Matemática.

A pesquisa realizada por Baqueiro (2016) foi do tipo documental, relacionada com o tema *"Achados sobre generalização de padrões ao 'garimpar' pesquisas brasileiras de educação matemática (2003-2013)"*. Nesta pesquisa, houve um grande interesse pelas teses e dissertações disponíveis no portal da CAPES e de mais 23 instituições brasileiras com cursos de Pós-Graduação *stricto sensu* da Área de Ensino, concluindo que os estudos apresentaram as seguintes contribuições:

(1) a capacidade que atividades de generalização de padrões têm de desafiar a curiosidade dos sujeitos, possibilitando o desenvolvimento do pensamento algébrico, principalmente no que tange à própria generalização, característica dos processos do pensamento matemático avançado (visualização, validação, investigação, representação, indução, síntese e abstração, entre outros), e de proporcionar meios para o sujeito construir conceitos

matemáticos (como por exemplo o de função); (2) a importância de que as atividades de generalização de padrões estejam presentes em todas as etapas da educação básica, já desde as séries iniciais, uma vez que possibilitam a professores e alunos concepções variadas de álgebra (principalmente a de álgebra como modo de pensar), inter-relacionando os diversos aspectos do pensamento algébrico (Baqueiro, 2016, p. 8).

Para Baqueiro (2016), na categoria 2, que englobava a subcategoria GAP, as análises das pesquisas revelaram que as discussões que promovem a prática investigativa e exploratória, incluindo a observação e generalização de padrões, são um meio importante de condução dos alunos ao desenvolvimento de processos cognitivos que levam à descoberta de conceitos matemáticos.

Isso destaca a importância de se incentivar atividades que envolvam a exploração e a investigação na educação matemática, como forma de promover uma aprendizagem significativa e duradoura.

Borges (2018) apresentou estudos cuja temática envolve um *mapeamento de pesquisas a respeito do estudo de álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio (2008 – 2017)*. Nesta investigação, foram analisadas 42 pesquisas, obtidas por meio digital, a partir do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e repositórios de teses e dissertações dos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática.

A análise das produções foi realizada por meio das seguintes categorias: linguagem e pensamento algébrico; relação entre álgebra, aritmética e geometria; múltiplas representações; materiais/recursos didáticos; concepções/conhecimento; metodologia de ensino e prática pedagógica.

Após a análise, Borges (2018) concluiu que alguns trabalhos que tratam de formação de professores apontaram a existência de insatisfações com a falta de conexão entre formação inicial e prática em sala de aula, bem como divergências quanto a conhecimentos para o ensino da Álgebra.

Em outros poucos trabalhos, Borges (2018) considerou que se discutem os documentos oficiais ou livros didáticos a respeito da Álgebra. Já nos trabalhos que discorrem sobre conteúdos específicos, ficou nítido que alguns são mais abordados nos planos de ensino, como por exemplo, equações do primeiro e segundo grau.

Borges (2018) reforçou que, para o melhor entendimento do estado de ensino-aprendizagem em Álgebra, é preciso o desenvolvimento de pesquisas que abordem ensino-aprendizagem de outros temas algébricos da educação básica, bem como compreensões mais aprofundadas em relação ao currículo disposto em documentos

oficiais ou livros didáticos. Diante deste olhar, é preciso estudar os conhecimentos necessários para que os docentes possam ensinar os assuntos, bem como outros temas possíveis.

Na pesquisa de Borges (2018), em uma das categorias, *o estudo da linguagem e do pensamento algébrico no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra*, apresentadas no mapeamento, apareceram duas dissertações que foram objetos para a nossa investigação. São elas: Déchen (2008), que trata das Tarefas exploratório-investigativas para o ensino de álgebra na 6ª série do Ensino Fundamental: indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico. Enquanto Fernandes (2011) trata da iniciação a práticas de letramento algébrico em aulas exploratório-investigativas.

Dada a revisão da literatura pertinente, discorreremos na subseção abaixo sobre as concepções de Álgebra, uma vez que os estudos pesquisados estão intimamente ligados este conteúdo.

Logo após, discutiremos a respeito da Educação Algébrica, tendo em vista a busca por entender os meandros de ensino-aprendizagem da Álgebra e, para finalizar, daremos um enfoque nas tarefas investigativas em aulas de matemática.

2.2 CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA

Para falar sobre concepções de Álgebra, trazemos como autores principais Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Usiskin (1995) e Lins e Gimenez (1997), procurando entender as abordagens desses autores em relação ao assunto, bem como as intersecções que existem entre suas compreensões.

Segundo Usiskin (1995), não é uma tarefa fácil definir o que é Álgebra, pois, do ponto de vista do autor, na escola média, a Álgebra tem uma definição muito diferente daquela destinada ao ensino superior de matemática.

O modelo implícito que se impõe no cerne da escola, no ensino da Matemática, é o da Álgebra como uma aritmética generalizada (Usiskin, 1995). Neste caso, a aritmética depende seguramente da Álgebra. A transição da aritmética para a Álgebra não pode se ater simplesmente à aplicação de propriedades, mas sim à maneira de descrevê-la e executá-la, o que em linhas gerais significa dizer que a escrita na Álgebra se diferencia pela manipulação, sobretudo das incógnitas.

Frente a este contexto, a Álgebra pode apresentar concepções que envolvem

iniciativas que são estudadas por pesquisadores que procuram verificar fatos que interferem no processo de ensino-aprendizagem. Por exemplo, as concepções de variável vão mudando com o tempo, ou seja:

Num texto da década de 50 (Hart, 1951a), só se menciona a palavra variável quando da discussão de sistemas (p. 168), sendo descrita então como 'um número mutável'. No segundo livro da série (Hart, 1951b), há uma afirmação mais formal de variável (p. 91): 'uma variável é um número literal que pode assumir dois ou mais valores durante uma determinada discussão'. (...) Textos modernos do final daquela década tinham uma concepção diferente, representada pela seguinte citação de May e Van Engen (1959) como parte de uma cuidadosa análise desse termo: (...) Uma variável, grosso modo, é um símbolo pelo qual se substituem os nomes de alguns objetos, comumente números, em álgebra. Uma variável está sempre associada a um conjunto de objetos cujos nomes podem ser substituídos por ela. Esses objetos chamam-se valores de variável (p. 70). (...) Hoje em dia a tendência é evitar a distinção 'nome-objeto' e pensar numa variável simplesmente com um símbolo pelo qual se podem substituir coisas (mais precisamente, coisas de um determinado conjunto, enquanto consideradas indistintas) (Usiskin, 1995, p. 11).

Nesse sentido, Usiskin (1995) afirma que a variável está associada à representação de um conjunto de objetos que são considerados como valores da variável. Além disso, quando se pensa em uma variável como um símbolo "x", por exemplo, ela pode representar um conjunto de coisas.

Usiskin (1995) desenvolveu a definição de Álgebra no que diz respeito à utilização das variáveis e suas aplicações na educação básica, dividindo-as em quatro concepções. A primeira delas é nomeada por Usiskin (1995) como a Concepção de Álgebra como aritmética generalizada, na qual as variáveis são vistas como generalizadoras de modelos, ou seja, trata-se de uma perspectiva generalista dos conhecimentos aritméticos.

Assim, nesta concepção, "é natural pensar as variáveis como generalizadoras de modelos" (Usiskin, 1995, p. 13). Neste intento,

Por exemplo, generaliza-se $3 + 5 \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 3$ como $a + b = b + a$. O modelo (...) $3 \cdot 5 = 15$ (...) $2 \cdot 5 = 10$ (...) $1 \cdot 5 = 5$ (...) $0 \cdot 5 = 0$ (...) é entendido de modo a abranger a multiplicação por números negativos (o que, nesta concepção, muitas vezes é considerado álgebra e não aritmética): (...) $-1 \cdot 5 = -5$ (...) $-2 \cdot 5 = -10$. (...) Generaliza-se essa ideia de modo a tirar propriedades como (...) $-x \cdot y = -xy$ " (Usiskin, 1995, p. 13).

Nesta concepção, segundo Usiskin (1995), as instruções básicas para o estudante são simplesmente traduzir e generalizar, tidos como procedimentos primordiais tanto para a Álgebra, quanto para a Aritmética.

Continuando nas concepções de Usiskin (1995) sobre a Álgebra, temos a segunda, denominada Concepção de Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver problemas, em que as letras são entendidas como variáveis com o objetivo de buscar soluções para o valor da incógnita, visando resolver os problemas.

Como exemplo foi enunciado por Usiskin (1995):

Consideremos o seguinte problema: (...) Adicionando 3 ao quádruplo de um certo número, a soma é 40. Achar o número. (...) Facilmente se traduz o problema para a linguagem da álgebra: (...) $5x + 3 = 40$. (...) Dentro da concepção da álgebra como generalizadora de modelos, não temos incógnitas. Generalizamos relações conhecidas entre números e, assim sendo, não tendo sequer a sensação de incógnitas. Sob essa concepção, o problema terminou, pois já encontramos o modelo geral. Porém, dentro da concepção da álgebra como um estudo de procedimentos, estamos apenas começando. (...) Vamos resolver a equação com um procedimento. Somemos, por exemplo, -3 a ambos os membros: (...) $5x + 3 + (-3) = 40 + (-3)$. (...) $5x = 37$ (...) $x = 7,4$ (Usiskin, 1995, p. 14).

Nesta definição de Álgebra, as variáveis ou incógnitas são basicamente consideradas como modelos com a intenção de simplificar e resolver - dois termos com a mesma ideia - (Usiskin, 1995). Nesse sentido, a variável é representada por uma letra, por exemplo, e, quando assume a ideia de número desconhecido, como na equação, passa a ser conhecida como incógnita.

A terceira concepção, batizada por Usiskin (1995) como Álgebra como estudo de relações de grandezas, está vinculada às fórmulas e, nessa vertente, não busca generalizar elementos aritméticos nem resolver problemas.

Nessa perspectiva, as variáveis mudam (configuradas em argumento, parâmetro, etc.) como dependentes e independentes. Concretamente falando, "as funções surgem quase imediatamente, pois necessitamos de um nome para os valores que dependem do argumento ou parâmetro x" (Usiskin, 1995, p. 16).

Quando escrevemos $A = bh$, fórmula da área de um retângulo, estamos expressando uma relação entre três grandezas. Não se tem a sensação de estar lidando com uma incógnita, pois não estamos resolvendo nada. Fórmulas com $A = bh$ transmitem uma sensação diferente de generalizações com $1 = n$. $(1/h)$, embora se possa pensar numa fórmula como um tipo especial de generalização (Usiskin, 1995, p. 15).

Para Usiskin (1995) a diferença entre esta concepção e a segunda é que as variáveis variam, ou seja, "O que ocorre com o valor de $1/x$ quando x se torna cada vez maior? (p. 15) como uma pergunta que tem significado neste contexto, em contraponto a simplesmente perguntar: "o que aconteceria com o valor de $1/2$ quando

2 se torna cada vez maior” (p. 16).

Na quarta e última concepção, chamada *Álgebra como estudo das estruturas*, a variável não se mostra como incógnita, argumento, parâmetro ou generalização da aritmética. Nessa concepção:

(...) reconhecemos a álgebra como o estudo das estruturas pelas propriedades que atribuímos às operações com números reais e polinômios. Consideremos o seguinte problema: (...) Fatorar $3x^2 + 4ax - 132a^2$ (...) A concepção de variável nesse caso não coincide com nenhuma daquelas discutidas anteriormente. Não se trata de nenhuma função ou relação; a variável não é um argumento. Não há equação alguma a ser resolvida, de modo que a variável não atua como uma incógnita. Também não há nenhum modelo aritmético a ser generalizado (Usiskin, 1995, p. 18).

Neste contexto, Usiskin (1995) chama a atenção para a noção de números reais ao se utilizar variáveis, como também deseja que se trabalhe com variáveis sem precisar retornar ao nível de conhecimento anterior, ou seja, como modelo aritmético a ser generalizado.

De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), há quatro concepções de Álgebra, a saber: concepção processológica, concepção linguística-estilística, concepção linguístico-sintático-semântica e concepção linguístico-postulacional.

A primeira, vista como uma concepção processológica, consiste em um conjunto de técnicas, métodos e artifícios, pois relaciona-se ao bojo de técnicas algorítmicas ou aos processos interativos aplicados a questões com resoluções que se configuram.

A segunda concepção, a linguístico-estilística, pode ser considerada como mais exigente do que a concepção processológica, na qual a Álgebra, como linguagem específica, é dotada como a expressão concisa de procedimentos específicos, como algorítmicos e interação processual.

Outra concepção para Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) é a linguístico-sintático-semântica, sendo a Álgebra entendida como linguagem concisa e com a característica principal da dimensão sintático-semântica, como utilização da dimensão sintática quando do processo do transformismo algébrico ligado ao simbolismo, bem como pelo nível semântico que permite a evolução da linguagem ao nível sintático, com dimensão instrumental.

Por fim, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) trazem a concepção linguístico-postulacional, que entende a Álgebra como linguagem simbólica com alto grau de abstração e generalidade em todas as áreas da Matemática, em que a simbologia é

amplificada como estruturas, tais quais as topológicas e o espaço vetorial.

Outros autores que abordam concepções de Álgebra são Lins e Gimenez (1997), que também apresentam quatro concepções a partir das atividades Algébricas. A primeira, chamada Concepção Letrista, está ligada à evolução histórica das noções algébricas e descreve a Álgebra como desenvolvimento histórico no qual há representação ou cálculo de letras, com exceção da história da Matemática clássica chinesa e a islâmica medieval.

A segunda concepção é denominada de Conteudista (Lins; Gimenez, 1997), caracterizada a partir de conteúdos algébricos. A Álgebra, nesta concepção, é representada por uma lista de temas matemáticos que são compreendidos como Álgebra, incluindo nessa lógica a decisão se alguns tópicos deveriam ou não estar nesse bojo e a dificuldade de organizar um currículo para Educação Algébrica.

Quanto à terceira, chamada de Concepção Ação, Lins e Gimenez veem a Álgebra como resultado da ação da formalização no pensamento, onde nascem as reflexões em relação às operações utilizadas nas questões.

No aspecto que tange à formalização do pensamento, não se pode negar que, ao resolvermos uma expressão algébrica, devemos ter a ideia de quais operações são necessárias para achar a solução da atividade proposta.

Para Lins e Gimenez (1997, p. 100) "por exemplo, se uma criança de 10 anos resolve uma equação, mas fracassa em dar quaisquer sinais de ter atingido o estágio operatório formal piagetiano, vamos negar a esse episódio o status de atividade algébrica?".

Por fim, a quarta concepção é chamada de Conceitual, que é baseada na proposta encaminhada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, envolvendo anotações, conceitos, esquemas operacionais e conjunto de problemas.

Vale destacar que as concepções de Álgebra elencadas por Usiskin (1995) nos dão uma ideia de que a utilização de variáveis em diversos contextos pode ocorrer no decorrer do processo de ensino-aprendizagem sobre um conteúdo algébrico, ampliando aplicações e dando significados às aplicações propostas.

Já nas concepções de Lins e Gimenez (1997) sobre Álgebra, é proposto um planejamento baseado na educação algébrica, buscando que os alunos procurem dar significados para os conteúdos algébricos na perspectiva do pensamento algébrico.

Frente a esta rápida reflexão, no próximo tópico faremos uma discussão sobre Educação Algébrica, buscando autores que possam esclarecer mais sobre este tema

muito importante em nosso estudo.

2.3 CONCEPÇÕES DE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA

Visando analisar as concepções de Educação Algébrica que estão presentes nas práticas dos docentes, no Ensino Fundamental II e Ensino Médio, precisamos dialogar com os autores que abordam esse tema, entre eles Lins e Gimenez (1997) e Fiorentini, Miorim e Miguel (1993).

Na perspectiva de Lins e Gimenez (1997), algumas concepções de Educação Algébrica podem ser elencadas nas seguintes vertentes: a) Letrista: As atividades algébricas são fundamentadas em operações com variáveis, com sequências de exercícios e algoritmos. b) Letrista Facilitadora: Propõe atividades de situações concretas para lidar com expressões algébricas, buscando o manuseio do que é concreto como uma possibilidade de abstração transformada em formalidade. c) Modelagem Matemática: A atividade algébrica deve ocorrer na produção do conhecimento algébrico com o propósito de organizar uma situação realística, ou seja, com atividades de investigações em situações reais.

Na compreensão dos autores, essas concepções de Educação Algébrica sofrem de incongruências, sendo que a concepção Letrista embarca na ótica que está explícita na maior parte dos livros didáticos, devido à falta de preparação dos professores para essa prática.

Enquanto na concepção Letrista Facilitadora, Lins e Gimenez (1997) afirmam que o uso de situações concretas, algumas vezes, auxilia na transformação de atividades concretas para as formais, acreditando que a Educação Algébrica deve permitir o desenrolar dos diversos meios de construir e produzir significados.

Para Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), as concepções de Educação Algébrica são nomeadas como: Linguístico-Pragmática, Fundamentalista-Estrutural e Fundamentalista-Analógica.

Quanto à Concepção Linguístico-Pragmática, praticada tanto no Brasil, quanto em outros países, no século XIX e na primeira metade do século XX, há o vínculo do papel pedagógico da Álgebra como instrumento de resolução de problemas (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993). Neste sentido, esta concepção está relacionada a:

(...) um transformismo algébrico totalmente independente de objetos

concretos, de figuras ou ilustrações e de problemas antepunha-se como condição necessária, isto é, como pré-requisito, a 'uma álgebra aplicada', ou seja, aos tais, 'problemas'. Esse 'transformismo algébrico' caracteriza-se, quase invariavelmente, por uma sequência de tópicos que, partindo dos estudos das expressões algébricas, passava pelas operações com essas mesmas expressões para, finalmente, utilizá-las na resolução de problemas (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993).

Ressaltamos que a Concepção linguístico-pragmática surgiu antes do Movimento da Matemática Moderna (MMM). Durante este movimento, prevaleceu a Concepção Fundamentalista-estrutural. Para ressaltar, no MMM o ensino da Álgebra estava voltado para o desenvolvimento da capacidade dos estudantes quanto ao uso da transformação algébrica em expressões e resoluções de equações, mesmo que de forma mecânica.

Quanto à Concepção Fundamentalista-estrutural, o papel pedagógico da Álgebra "passa a ser de fundamentador dos vários campos da matemática escolar" (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993, p. 84), destacando ainda a valorização do simbolismo e de exaustivos cálculos algébricos advindos do MMM, ou seja, o ensino da álgebra acaba perdendo o seu viés pragmático e privilegia os aspectos estruturais dos conteúdos e a linguagem precisa. Neste aspecto,

no que se refere, particularmente, a forma de abordagem daqueles conteúdos classicamente ditos algébricos, prevaleceu a crença de que a introdução de propriedades estruturais das operações, que justificassem logicamente cada passagem presente no transformismo algébrico, capacitaria o estudante a identificar e aplicar essas estruturas em diferentes contextos em que estivessem subjacentes (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993, p. 84).

A consequência na Concepção Fundamentalista-estrutural foi o fato de antecipar tópicos algébricos como: expressões algébricas, valores numéricos, operações e fatoração, por exemplo, por tópicos fundamentadores, como: conjuntos numéricos e propriedades estruturais, deixando para depois as funções de 1º e 2º grau.

A terceira concepção, chamada de Fundamentalista-analógica, surgiu após o MMM, buscando uma síntese em torno das duas concepções anteriores, instigando o uso de materiais concretos, mesmo usando a linguagem simbólica. A perspectiva analógica se deve ao fato de associar a geometria para promover a explicação de alguns entes algébricos, como: a ideia de comprimento, área e volume, valorizando o transformismo algébrico. Nesta Concepção, ocorreu a volta do papel pedagógico da Álgebra, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), para a resolução de problemas.

Nesse sentido, essa concepção acredita que uma 'álgebra geométrica', por tornar visível certas identidades algébricas, seria didaticamente superior a qualquer forma de abordagem estritamente lógica-simbólica. Isso, porém, não significa defender a tese determinística da impossibilidade de acesso do estudante a uma forma de abordagem meramente simbólica e mais abstrata (...) (Fiorentini, Miorim e Miguel 1993, p. 84).

Destaca-se, na concepção Fundamentalista-analógica, a utilização de leis de equilíbrio físico, ao utilizar materiais concretos, como as balanças, dando destaque ao processo de resolução de equações, vislumbrando o sentido mais palpável em relação a igualdade de membros.

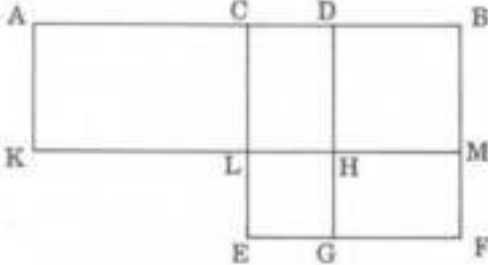
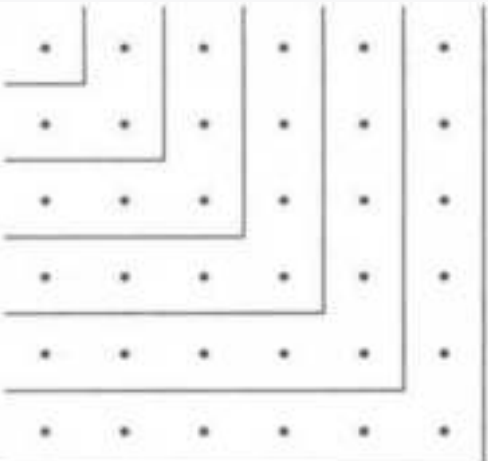
Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) consideram que estas concepções levam a aprendizagem da Álgebra à simples transformação algébrica, atendendo a linguagem (principalmente, a simbólica) em contraposição ao pensamento algébrico.

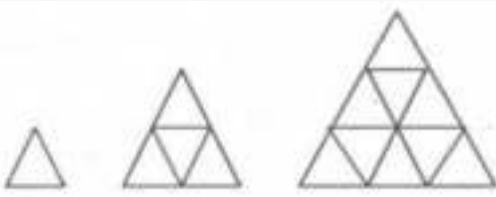
Acreditamos subsistir entre pensamento algébrico e linguagem não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética, o que nos obriga, para melhor entendê-los, a colocar a questão de quais seriam os elementos caracterizados de um tipo de pensamento que poderia ser qualificado de algébrico (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993, p.85).

Deste modo, na Tabela 1 buscaremos mostrar exemplos de situações na perspectiva de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) que permeiam o pensamento considerado como algébrico.

Tabela 1 - Situações que permeiam o pensamento algébrico

Situação	Ilustração da Situação	Enunciado da Situação
1ª Extraída das páginas 85-86	Descobrir o dia e o mês em que deve ser celebrada uma cerimônia religiosa, a partir da declaração de um feiticeiro.	"Vários sóis e várias luas" — declarou ele — "deverão aparecer e desaparecer antes da chegada da festa. A lua que acaba de nascer deverá encher-se e depois esvaziar completamente. Depois ela deverá renascer tantas vezes quantas puder, desde o dedo mindinho de minha mão direita até o cotovelo do mesmo lado. Depois o sol deverá levantar-se e pôr-se tantas vezes quantas puder desde o dedo mínimo de minha mão direita até a boca. Só então se levantará o sol em que comemoraremos juntos a cerimônia do Grande Totem" (IFRAH, 1989:37).

2ª Extraída da página 86	Do Livro II dos Elementos de Euclides extraiu-se a proposição 5 escrita em linguagem atual.	<i>2ª situação. Do Livro II dos Elementos de Euclides extraímos a proposição 5, que escrevemos na linguagem atual: "Se os pontos C e D dividem o segmento de reta AB dado em partes iguais e desiguais, respectivamente, então, a área do retângulo ADHK mais a área do quadrado LHGE é igual à área do quadrado CBFH".</i> 
3ª Extraída da página 86	Galileu afirma que ela havia descoberto algumas propriedades que até então não se tinha observado ou demonstrado.	refere-se ao movimento de um corpo em queda livre. Alguns haviam observado que esse movimento era acelerado. Galileu, porém, descobriu de que maneira a velocidade variava em função do tempo e expressou essa dependência através de uma "fórmula", ainda que de forma retórica. O mesmo pensamento é expresso em relação ao movimento de projéteis. Outros já haviam observado que os projéteis descrevem uma trajetória curva, mas Galileu demonstrou que tal trajetória deveria ser uma parábola (Burt, 1983:60).
4ª Extraída da página 86	Com base na figura explique como se pode calcular a soma de uma quantidade qualquer de números consecutivos a partir do 1.	

5ª Extraída da página 86	Colocar mais dois elementos na série e assim saber quantos triângulos existiriam em um elemento qualquer da série.																												
6ª Extraída das páginas 86-87	Resolver um problema que foi extraído de um velho texto hindu de 450 d.C.	"Um mercador paga direitos sobre certas mercadorias em três lugares. No primeiro entrega $\frac{1}{3}$ de sua mercadoria, no segundo, $\frac{1}{4}$ do restante, no terceiro, $\frac{1}{5}$ do que lhe sobra. O imposto total é de 24 moedas. Quanto tinha o mercador ao iniciar a viagem?" (HOG BEN, 1958:328)																											
7ª Extraída da página 87	Verificar se existe alguma analogia lógica entre as tabelas 1, 2 e 3. Se for, dizer como a analogia pode ser estabelecida.	<table> <tr><td>+</td><td>par</td><td>ímpar</td></tr> <tr><td>par</td><td>par</td><td>ímpar</td></tr> <tr><td>ímpar</td><td>ímpar</td><td>par</td></tr> </table> Tabela 1 <table> <tr><td>x</td><td>+</td><td>-</td></tr> <tr><td>+</td><td>+</td><td>-</td></tr> <tr><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr> </table> Tabela 2 <table> <tr><td>*</td><td>a</td><td>b</td></tr> <tr><td>a</td><td>a</td><td>b</td></tr> <tr><td>b</td><td>b</td><td>a</td></tr> </table> Tabela 3	+	par	ímpar	par	par	ímpar	ímpar	ímpar	par	x	+	-	+	+	-	-	-	+	*	a	b	a	a	b	b	b	a
+	par	ímpar																											
par	par	ímpar																											
ímpar	ímpar	par																											
x	+	-																											
+	+	-																											
-	-	+																											
*	a	b																											
a	a	b																											
b	b	a																											

Fonte: Adaptado pela autora (2022).

Segundo os autores, se considerarmos os aspectos linguísticos das situações apresentadas na Tabela 1, aparecerão elementos do pensamento algébrico, como: "percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização" (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993, p. 87), que são melhor expressos na coluna 3 da Tabela 1.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) defendem que a Educação Algébrica deve começar com situações-problemas, garantindo o exercício dos elementos imbricados no pensamento algébrico, sendo eles: a) Não há motivo para sustentação tardia da Álgebra no processo de ensino-aprendizagem. b) Desempenho da linguagem simbólica na Educação Algébrica, pois a linguagem simbólica-formal constitui-se como fundamental na composição do pensamento algébrico formal, o que pode facilitar e simplificar os cálculos. c) A amplitude do pensamento algébrico como base da construção e compreensão dos conceitos ligados aos campos e áreas, perpassando a produção do conhecimento nos diversos domínios. d) O modo de

conduzir e expressar o pensamento, buscando a resolução das diversas situações que permitam a construção da linguagem simbólica significativa para o aluno.

Com a necessidade do desenvolvimento da interdependência entre pensamento algébrico e linguagem algébrica, surgem uma concepção de Educação Algébrica vislumbrada como um ensino que proceda através de atividades abertas com tarefas exploratório-investigativas em Matemática que admitam trabalhar e refletir sobre o pensamento algébrico (Fioreninti, Fernandes e Cristovão, 2005).

2.4 TAREFAS INVESTIGATIVAS EM AULAS DE MATEMÁTICA

A educação instigada pela exploração e pela investigação matemática é uma tendência que tem início em situações de investigação no campo científico e aprofunda o desenvolvimento na proposição de problemas de caráter aberto, no intuito de levantar, analisar e construir dados baseados em argumentos plausíveis.

Temos a intenção de buscar e indicar elementos que mostrem, no âmbito da exploração, o quanto às Investigações Matemáticas implementadas nas aulas desse campo do saber. As Investigações Matemáticas ocorrem como uma ação de práticas que podem ser descritas a partir de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) nos seguintes momentos de realização da investigação:

- ✓ Explorações e formulações de questões: Reconhecimento de uma situação problemática, exploração a situação problemática e formulação de questões;
- ✓ Conjecturas: Organização de dados, formulação e levantamento de afirmações sobre as conjecturas;
- ✓ Testes e reformulações: Realização de testes e refinação de uma conjectura;
- ✓ Justificativa e avaliação: Justificação de uma conjectura e avaliação do resultado e o raciocínio desenvolvido.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) uma Aula Investigativa é aquela que pressupõe o envolvimento dos estudantes em tarefas e atividades investigativas e que pode ajudar em sala de aula para uma atitude de atividade matemática genuína.

Nessa perspectiva, a resolução de problemas, por exemplo, envolve uma gama de tarefas, no que concerne tanto as situações fechadas, como às situações abertas.

As Investigações Matemáticas dão ênfase a processos matemáticos relacionados à procura de regularidades, de formulações, de testes, de justificativas, de reflexões e de generalizações.

Desse modo, Ponte et al. (1998) afirmam que as Investigações Matemáticas têm aspectos mais abertos e relacionam-se a conceitos variados, que podem ter como início questões ou situações propostas pelo docente, ou até mesmo pelos alunos. Mais objetivamente falando, as atividades de investigação em relação à resolução de problemas estão na forma como se faz ou como se estuda.

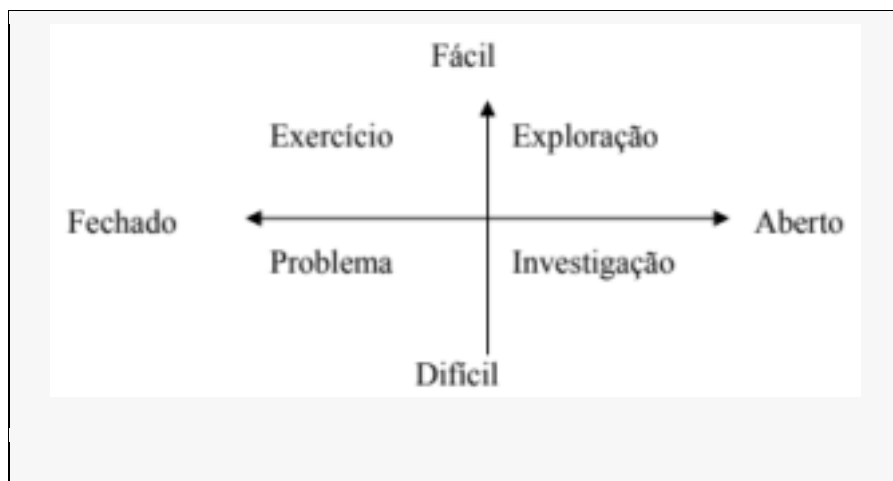
Assim, na resolução de problemas, a questão é apresentada por completo ao aluno, enquanto, na investigação matemática, as questões inicialmente são apresentadas de forma mais ampla, o que torna necessário serem trabalhadas, desenvolvidas e construídas em questões e respostas concretas pelo próprio estudante. Santos (2000) diz que as dimensões envolvidas na atividade de resolução de problemas estão em: conhecimento matemático, domínio de estratégias e controle sobre o ato de trabalhar um processo.

Segundo Ponte et al. (1998), numa investigação matemática, é primordial que exista a motivação e o desafio, não sendo tão acessível ao aluno o processo de resolução, como também a solução da questão. Nesse sentido, as atividades de investigação são muito mais abertas, fazendo com que o aluno influencie suas próprias ideias, questões e o caminho a seguir.

Nessa direção, a Investigação Matemática trata de problemas desafiantes e abertos, que conduzem o estudante a diversas alternativas de exploração e investigação. Nesta lógica, até mesmo o termo "Exploratório" deve ser entendido de forma mais clara, pois, quando aliado às Investigações Matemáticas, passa a ser entendido como um tema mais livre e menos sistemático, tendo seu uso como uma ação para problematizar e produzir novos significados a determinado conceito matemático (Ponte, 2003).

Ponte (2003) entende que existem diversos tipos de tarefas, entre elas as investigativas, com seu próprio grau de dificuldade. Na Figura 2, o autor apresenta o que pode clarear melhor uma Tarefa Investigativa frente a outros tipos de tarefas matemáticas:

Figura 2 - Tarefas Matemáticas



Fonte: Ponte (2003, p. 4)

A preparação de aulas investigativas pelo professor pode, de um modo ou de outro, confluir para temas relacionados ao currículo. Nesse sentido, as atividades propostas pelo docente ao aluno podem gerar implicações, de acordo com as questões levantadas pelos alunos, que levam a outros temas. O fator importante está na necessidade de se procurar o equilíbrio entre a preocupação de decidir uma organização curricular e a natureza aberta das Investigações Matemáticas (Ponte et al., 1998).

Nesse contexto, o professor tem um papel fundamental na orientação de tarefas em sala de aula, sendo assim, a ele cabe a responsabilidade de selecionar as propostas e de estabelecer os objetivos, vislumbrando a especificidade de cada turma. Assim, o papel do docente é procurar delinear objetivos, metodologias e estratégias que promovam as atitudes de reflexão sobre a prática.

Outro fato importante para a orientação do professor é a articulação da Investigação Matemática com os conteúdos que são propostos via currículo, exigindo o momento correto do ano letivo para propor uma tarefa investigativa.

Nesse cenário, o professor precisa entender que uma tarefa investigativa em matemática exige tempo adequado, devido à atitude que é requerida para a própria tarefa, da turma e da familiaridade com as investigações matemáticas. Desta forma, são consideradas as seguintes fases (Ponte et al., 1998):

- Introdução da tarefa pelo professor como ponto de partida ou uma questão indefinida, bem como arranque da sua realização pelos estudantes, buscando a interpretação da situação e definição do que se deve seguir;

- Realização da tarefa, quando o professor faz a interação com os estudantes em grupo ou individualmente;
- Apresentação dos resultados pelos estudantes e discussão para comparação dos entendimentos, estratégias e resultados obtidos na tarefa. Frequentemente, neste ponto, surgem outras questões que podem ser tratadas em investigações futuras.

Reforçando as reflexões em torno dessas três fases, Ponte, Fonseca e Brunheira (1999) afirmam que, na primeira fase, a tarefa e o tipo de trabalho podem ser feitos com enunciado escrito com apresentação oral. Em seguida, o professor vai registrando em quadro próprio as informações importantes que surgem, de forma espontânea, advindas das iniciativas dos estudantes.

No que se refere à segunda fase (Ponte et al., 2015), os autores Ponte, Fonseca e Brunheira (1999) reforçam que, no desenvolvimento do trabalho, os estudantes (em grupo ou individualmente) são inquiridos a iniciativas investigativas, com o professor procurando centrar a aula na atividade e interesse dos alunos, nas reflexões, ideias e pesquisas.

Nessa fase, o docente deve ainda ter uma atitude de questionador frente às solicitações dos alunos. Neste momento, seria interessante propor questionamentos relativos ao que foi feito, solicitar a análise dos dados obtidos e fazer sugestões de organização diferente daquilo que já foi feito, entre outras atitudes.

Por fim, na terceira fase, Ponte, Fonseca e Brunheira (1999) reforçam que a discussão final sobre a atividade é uma oportunidade de promover a reflexão sobre a tarefa desenvolvida, o que auxilia os alunos na valorização dos processos de resolução em relação às atividades, mesmo não tendo uma resposta única e com a possibilidade de abrir uma ótica de Matemática mais reflexiva.

Para Skovsmose (2000), um ambiente de Investigação Matemática se constitui como espaço de postura investigativa tanto para o aluno, quanto para o professor. Nesse sentido, é necessário que o docente, dentre as boas intenções dos alunos, convide os seus estudantes para aceitar o desafio investigativo, dando razões para que reformulem seus conceitos e o modo de ver as situações apresentadas.

Assim, para Ponte et al. (2015), a tarefa como investigação pode ser apresentada ao estudante como constituinte de um elemento fundamental para uma nova postura metodológica do professor em sala de aula. Mesmo o professor criando,

recriando ou refazendo uma situação sob a forma de questão, não significa que o aluno percorrerá os mesmos caminhos.

Deste modo, o aluno refletirá a proposta de trabalho como um conjunto de tarefas específicas que poderão ser resolvidas. Evidentemente, o grau de abertura das situações, bem como a abordagem escolhida pelo professor ditarão o tom da investigação.

Para Ponte et al. (2015), os alunos, ao iniciarem a atividade, necessitarão do apoio do professor no sentido de diluir bloqueios, ou tornar a investigação mais rica, de modo que o docente, na intervenção necessária, deverá manter certa discricção. Portanto, as questões propostas devem levar o aluno à reflexão sobre o modo como se comporta ao abordar a situação, recomendando-se moderação no fornecimento de informações a fim de que não sejam dadas de forma precipitada as soluções.

De tal forma, um dos grandes objetivos das tarefas investigativas é a condução dos alunos a graus progressivos de generalização e de abstração (Ponte et al., 1998). Consequentemente, a discussão final sobre a atividade dos alunos será de suma importância. Nesta fase, serão confrontadas as estratégias, as hipóteses e as justificações que os alunos ou o coletivo de alunos conseguirão construir.

Nesses momentos, o professor passa a ser visto como moderador. Ele chama atenção dos alunos para aspectos importantes que foram desenvolvidos, estimulando os estudantes a questionarem as afirmações ou informações de seus colegas.

Evidentemente, algumas dificuldades aparecem na promoção de Aulas Investigativas em Matemática. As dificuldades merecem destaque para o docente na articulação das atividades com os conteúdos programáticos, o que pode conflitar com o tempo que o professor tem para lecionar nas aulas.

Além disso, há ainda uma questão ligada à organização dos alunos: se o trabalho será individual ou em grupo, como serão formados os grupos, qual será o tempo necessário para fazer a atividade e qual será o tipo de avaliação relacionada à atividade desenvolvida.

Alguns impedimentos à realização de atividade de investigação advêm da falta de preparação que o professor possa sentir para ultrapassar os diversos obstáculos com que se depara. Outros problemas podem decorrer do fato do professor possuir uma visão parcial ou redutora do que significa investigar. Torna-se, assim, imprescindível que ele tenha acesso a material diversificado e que sejam criadas condições para que possa discutir em conjunto com outros colegas sobre essa problemática (Ponte et al, 1998, p.19).

Portanto, as Aulas Investigativas, mesmo com algumas dificuldades tanto para o professor, quanto para o aluno, podem ser um espaço de promoção a uma viagem ao desconhecido (Ponte, Fonseca e Brunheira, 1999) como potencial à promoção de maior envolvimento, participação e desenvolvimento ativo dos alunos nas atividades.

Nesta ótica, considera-se que uma prática em sala de aula quando é restrita a uma ação fechada, sendo possível condicionar as oportunidades dos alunos na obtenção de significados matemáticos.

Assim, tendo feito a revisão da literatura, além de abordar aspectos teóricos da investigação, vamos apresentar a metodologia e os procedimentos metodológicos que irão permitir a elaboração do mapeamento relacionado ao levantamento e à análise dos dados.

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

A metodologia da investigação empreendida auxilia nos caminhos que visam à elaboração e desenvolvimento do estudo. Nesse sentido, a metodologia a ser utilizada pelo pesquisador tende a permitir a organização da coleta e análise dos dados, bem como dos resultados da pesquisa.

Com o avanço de novos programas de pós-graduação em Educação Matemática, as pesquisas também avançaram de forma significativa. Estudos são necessários para entender as produções brasileiras em Educação Matemática.

No intento discorrido, esta pesquisa tende a ser um tipo de trabalho que buscará pontuar áreas específicas da produção acadêmica - Educação Algébrica, Aulas Exploratório-investigativas, Anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio - seccionando uma abrangência.

Neste contexto, a delimitação do nosso objeto de estudos está imbricada em ensino-aprendizagem de álgebra no contexto de aulas exploratório-investigativas, no qual buscamos responder à questão de pesquisa. Após o levantamento das produções relacionadas ao tema, buscamos organizar essas pesquisas por categorias, identificar e analisar suas tendências e contribuições na confluência das concepções bibliográficas.

A pesquisa será bibliográfica, o que, segundo Ferreira (2002), deve utilizar a revisão e análise dos resumos e trabalhos na íntegra de dissertações e teses localizadas no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, por entendermos ser esta uma das principais instituições que possuem acervos com grande número de pesquisas digitalizadas.

Nesse caminho, esta investigação é cunho qualitativo, o que, para Gibbs (2009), procura interpretar, descrever e explicar certas situações sociais, diferentes práticas de pessoas, no bojo de seus conhecimentos e histórias do cotidiano, colocando frente a frente fatores semelhantes para, em seguida, analisá-los.

Neste intento, as pesquisas que se utilizam do Estado do Conhecimento são pesquisas que podem ser chamadas também de "estado da arte", pois tendem a discutir uma certa produção em determinada área de conhecimento, buscando responder algumas questões, permeando certo período e lugar, as formas e condições que são abordadas em dissertações e teses (Ferreira et al. 2002), auxiliando outros investigadores, apontando novos sentidos e direções a serem

percorridos.

Segundo Romanovski e Ens (2006), é preciso diferenciar estado da arte de estado do conhecimento. Para falar de estado da arte, é necessário considerar, no bojo da pesquisa, todo tipo de publicação acadêmica relacionada à temática: artigos publicados, anais de eventos científicos, dissertações, teses, etc.

Em relação ao estado do conhecimento, a pesquisa deve se ocupar com uma instância de publicações disponibilizadas - este é o caminho que vamos seguir nesta dissertação.

Romanovski e Ens (2006) disponibilizam alguns procedimentos para a realização de pesquisas sobre estado do conhecimento. O pesquisador, para realizar esse tipo de investigação, precisa definir:

- a) Os Descritores ou termos padronizados;
- b) Os Bancos de dados;
- c) Os Critérios para escolha do material;
- d) A Coleta de dados;
- e) Como será a leitura dos dados e a elaboração de fichamento, por exemplo;
- f) Como será a elaboração de relatório de sistematização;
- g) Como será a análise dos dados.

A pesquisa proposta, nos procedimentos metodológicos a seguir, buscou considerar os procedimentos listados acima, com as adaptações necessárias dado o caráter das teses e dissertações, *corpus* desta investigação.

3.1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Na investigação, começamos por fazer uma busca no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, na Plataforma Sucupira, procurando por pesquisas que abordem o assunto "Álgebra" junto ao tema "Aulas Exploratório-Investigativas", aglutinado ao nível dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, através do refinamento permitido pelo repositório. Esta busca facilitou a coleta das produções.

No site da CAPES, encontramos os resumos e o link para download das teses e dissertações, somente para pesquisas a partir do ano de 2013, bem como aquelas autorizadas para publicação por seus autores. Pesquisas realizadas antes desse

período exigiram a necessidade de fazer uma busca nos repositórios das instituições acadêmicas e outras buscas na internet.

Nesse sentido, os termos da busca foram: "Investigações Matemáticas" OR "Tarefas Exploratório-Investigativas" OR "Aulas Exploratório-investigativas" OR "Aulas Investigativas" OR "Tarefas Investigativas".

Foram encontrados 124 trabalhos, dos quais 74 abordam Álgebra na Educação Básica e Ensino Superior (incluindo formação inicial e continuada do professor), e 17 desses últimos abordam Álgebra nas séries finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) e no Ensino Médio.

Ferreira (2002) diz que, inicialmente, o pesquisador se depara com uma quantidade razoavelmente grande de pesquisas nesses repositórios, por isso é preciso inventariar as que atendem aos objetivos da pesquisa. Outra exigência é que o pesquisador faça a leitura do título, dados bibliográficos, resumo e palavras-chave para que o estudo não possibilite dados equivocados.

Cada resumo deve ser lido e analisado numa relação de dependência com o trabalho na íntegra, mas também como realidade relativamente independente, produto de uma tensão construída na continuidade e na ruptura com o trabalho que lhe dá origem, numa relação dialética entre os gêneros, entre as condições de sua produção e práticas discursivas (Ferreira, 2020, p. 270).

O exame do que foi escrito pode ser uma técnica pragmática para construir categorias de análise que visam a estruturação, tendo como início a leitura dos textos. Entretanto, essas categorias devem atender às intenções da pesquisa (Fiorentini; Lorenzato, 2012).

Fizemos também a leitura e organização das pesquisas, na perspectiva de Laville e Dionne (1999), tratando-se de uma construção interativa e explicativa como direção para a construção das categorias de análise. Buscamos efetuar um recorte dos conteúdos como elementos de análise, seguindo a ordenação no âmbito das categorias. Por fim, realizamos a análise propriamente dita, buscando convergências e divergências entre os estudos investigados.

Para realizar o agrupamento por categorias, foram feitas leituras das teses e dissertações, que serão sistematizadas em um formulário do Google *Forms*, em um modelo de fichamento que pode ser encontrado no Apêndice A.

No formulário, além de responder sobre autor(a), título, nível (dissertação ou tese), instituição, orientador(a), modalidade de ensino e ano da defesa das pesquisas, procuramos também descrever o resumo, palavras-chave, foco principal,

objetivos, tipo(s), contexto, sujeito(s) e questão(ões) das pesquisas. Além disso, procuramos as ideias principais e questionamentos que tivemos de responder no mapeamento, sendo:

a) Quais métodos e procedimentos foram utilizados nas metodologias nos estudos?

b) Quais os fundamentos teóricos, indicações e preocupações do(a) autor(a) que trazem situações/fatos/processos que abordam a temática Educação Algébrica?

c) Quais autores presentes na pesquisa abordam a temática Educação Algébrica?

d) Quais os fundamentos teóricos, indicações e preocupações do(a) autor(a) que trazem situações/fatos/processos que abordam a temática “aulas investigativas” em Matemática?

e) Quais autores presentes na pesquisa abordam a temática Aulas Investigativas em Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio?

f) Quais os principais resultados da pesquisa no que se refere à Educação Algébrica?

g) Quais os principais resultados da pesquisa no que se refere às aulas investigativas em Matemática?

h) O(a) autor(a) faz imbricações entre Educação Algébrica e Aulas Investigativas em Matemática nas recomendações?

i) No desenvolvimento das Aulas Investigativas em Matemática, quais conteúdos e tarefas são adotados pelo(a) autor(a)?

j) No desenvolvimento das Aulas Investigativas em Matemática, quais práticas e recursos materiais (calculadora, tic, roteiros, entre outros), organização e desenvolvimento das práticas são adotados pelo(a) autor(a)?

Utilizamos ainda as ferramentas de busca na escrita das pesquisas e os principais termos das perguntas. Além disso, procuramos no sumário indicações do local onde é possível dar resposta às perguntas do formulário, bem como uma verificação na introdução e/ou conclusão para sanar todas as dúvidas que porventura surgirem.

A partir das leituras feitas e do fichamento no formulário *Forms*, foi feita a análise de dados, o que suscitou categorias emergentes, “quando são obtidas, mediante um processo interpretativo, diretamente do material de campo” (Fiorentini;

Lorenzato, 2009, P. 135), devido às características em torno da aplicação de tarefas exploratório-investigativas, no que tange o desenvolvimento e tipos de tarefas investigativas, dos conteúdos algébricos trabalhados junto aos alunos nas tarefas e, finalmente, nas práticas escolares e recursos utilizados para a praticabilidade das tarefas.

3.2 SELEÇÃO E BREVE DESCRIÇÃO DAS DISSERTAÇÕES E TESES

A seguir apresentaremos o Quadro 1 com títulos das dissertações e a tese que compõem o *corpus* de análise, com destaque ao ano de defesa, instituições de ensino, autores e os títulos.

Quadro 1 - Dissertações e Teses mapeadas

Ano de defesa	Instituição de Ensino/Tipo de Pesquisa	Autor	Título
2007	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Dissertação	RODRIGUES, Márcio Urel	Narrativas no Ensino de Funções por Meio de Investigações Matemáticas
2008	Pontifícia Universidade Católica - SP Dissertação	MELO, Antônio José Fernandes de	O Ensino de Potências e Raízes com Auxílio da Calculadora: Uma Experiências Investigativa em Sala de Aula
2008	Universidade Federal do Paraná Dissertação	TRINDADE, Ângela Ferreira Pires da	Investigações Matemáticas e Resolução de Problemas – Que Fronteiras?
2008	Universidade Federal de São Carlos Dissertação	DÉCHEN, Tatiane	Tarefas Exploratório-investigativas para o ensino de Álgebra na 6ª. série do Ensino Fundamental: indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos
2011	Universidade Estadual de Campinas Dissertação	FERNANDES, Fernando Luís Pereira	Iniciação a Prática de Letramento Algébrico em Aulas Exploratório-Investigativas
2012	Universidade	FERREIRA,	A Produção de Significados Matemáticos em um Contexto de

	Federal de Minas Gerais Tese	Adriana Assis	Aulas Exploratório-Investigativas
2013	Universidade Federal de Ouro Preto Dissertação	CORRADI, Daiana Katiúscia Santos	Investigações Matemática Mediadas pelo Pensamento Reflexivo no Ensino e Aprendizagem das Funções Seno e Cosseno: Uma Experiências com Alunos do 2º Ano do Ensino Médio
2015	Centro Universitário Franciscano Dissertação	BONOTTO, Aline Kempa	Ensino e Aprendizagem da Função Exponencial por Meio de Atividades Investigativas e do Uso de Objeto de Aprendizagem
2016	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Dissertação	LITOLDO, Beatriz Fernanda	As Potencialidades de Atividades Pedagógicas Envolvendo Problemas Criptográficos na Exploração das Ideias Associadas à Função Afim
2016	Universidade Federal de São Carlos Dissertação	TOZO, Fábio Luiz Dias	Tarefas Exploratórias- Investigativas para a Aprendizagem da Função Afim
2017	Universidade de São Paulo Dissertação	CERGOLI, Daniel	Ensino de Logaritmos por meio de Investigações Matemáticas em Sala de Aula
2018	Universidade Federal da Paraíba Dissertação	SOUSA, Ivan Bezerra	Produção de Significados a partir de Investigações Matemáticas: Função Afim e Contextos Cotidianos
2018	Universidade Estadual de Maringá Dissertação	VERÍSSIMO, Wanderlei	Investigação Matemática: uma Abordagem das Questões de Álgebra e da OBMEP para o Ensino Médio
2019	Universidade Federal do Acre Dissertação	ALENCAR, Silas Senhorinha de	O Uso da Investigação Matemática na Aprendizagem de Equação do Primeiro Grau no 7º Ano
2019	Universidade Federal do Pampa Dissertação	GUIMARÃES, Débora Sudatti	Cenários para Investigação Matemática no Ensino Fundamental: Uma Experiência com Ensino Híbrido na Modalidade Rotação por Estações

2020	Universidade Federal de Goiás Dissertação	FERREIRA, Sérgio Muryllo	Cenários para Investigação Matemática: Uma proposta Didática para Trabalhar Sequências Numéricas nas Séries Finais do Ensino Fundamental
2021	Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia Fluminense Dissertação	PAULA, Carla Mara Martins de	Investigações Matemáticas com o Apoio do Geogebra, em Smartphone: um Estudo da Função Exponencial e de sua Inversa

Fonte: Elaborado Autoral, 2022.

Nota: Com base no banco da Plataforma Sucupira - dissertações e teses da CAPES.

Das 17 pesquisas selecionadas, 13 estão entre instituições de ensino superior diferentes. Assim, quanto à origem institucional, temos a seguinte distribuição:

Tabela 2 - Distribuição das pesquisas de acordo com as instituições

Instituição	Quantidade
Centro Universitário Franciscano	1
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense	1
Pontifícia Universidade Católica - São Paulo	1
Universidade Estadual de Campinas	1
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho	2
Universidade Estadual de Maringá	1
Universidade Estadual da Paraíba	1
Universidade de São Paulo	1
Universidade Federal do Acre	1
Universidade Federal de Goiás	1
Universidade Federal de Minas Gerais	1
Universidade Federal de Ouro Preto	1
Universidade Federal do Pampa	1
Universidade Federal do Paraná	1

Universidade Federal de São Carlos	2
------------------------------------	---

Fonte: Elaboração autoral, 2022.

Vale destacar na Tabela 2 que na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho que as duas dissertações foram apresentadas ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, com orientadores diferentes. Enquanto na Universidade Federal de São Carlos, das duas dissertações, uma foi apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação e a outra foi apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

Da ótica do tipo de pesquisa, são elas: dissertações de mestrado acadêmico, mestrado profissional e tese de doutorado, de acordo com a Tabela 3:

Tabela 3 - Tipos de pesquisa

Tipos de Pesquisa	Tipo de universidade	Quantidade
Dissertações Acadêmicas	Pública	10
Dissertações Profissionais	Pública	4
Dissertações Profissionais	Privada	2
Teses	Pública	1

Fonte: Elaboração Autoral, 2022.

Das pesquisas da Tabela 3, temos seis dissertações de mestrado profissional, uma modalidade de pós-graduação *stricto sensu* direcionada para diversas áreas de educação ou ensino, com a produção de um produto educacional. As demais são acadêmicas.

Destaca-se que, dos 17 trabalhos selecionados, há apenas uma tese e, neste caso, é possível prever que muitas dissertações não tiveram desdobramentos em pesquisa no doutorado, o que se configura como uma descontinuidade, ou não há preocupação em desenvolver pesquisas de doutorado em aulas de matemática na educação básica.

Observamos ainda que dos 17 trabalhos, 10 deles foram produzidos em mestrados acadêmicos, o que revela que nessa modalidade de mestrado há

preocupações em desenvolver pesquisas com intervenção em aulas de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Em relação ao número de teses e dissertações por região do Brasil, obtivemos as informações socializadas na Tabela 4:

Tabela 4 - Distribuição das pesquisas por região do Brasil

Região do Brasil	Quantidade
Região Centro-Oeste	1
Região Nordeste	1
Região Norte	1
Região Sudeste	10
Região Sul	4

Fonte: Elaboração autoral, 2022

Destas regiões, o estado de São Paulo concentra a maioria da produção, contabilizando sete trabalhos ao todo. Acre, Goiás, Paraíba e Rio de Janeiro ficam com uma produção cada. Minas Gerais, Paraná e Rio Grande do Sul, ficam com duas produções cada. É perceptível que a Região Sudeste e a Região Sul concentram a maioria dos trabalhos, o que pode ocorrer devido ao fato de muitos programas de pós-graduação na área de Educação e Ensino estarem nestas regiões.

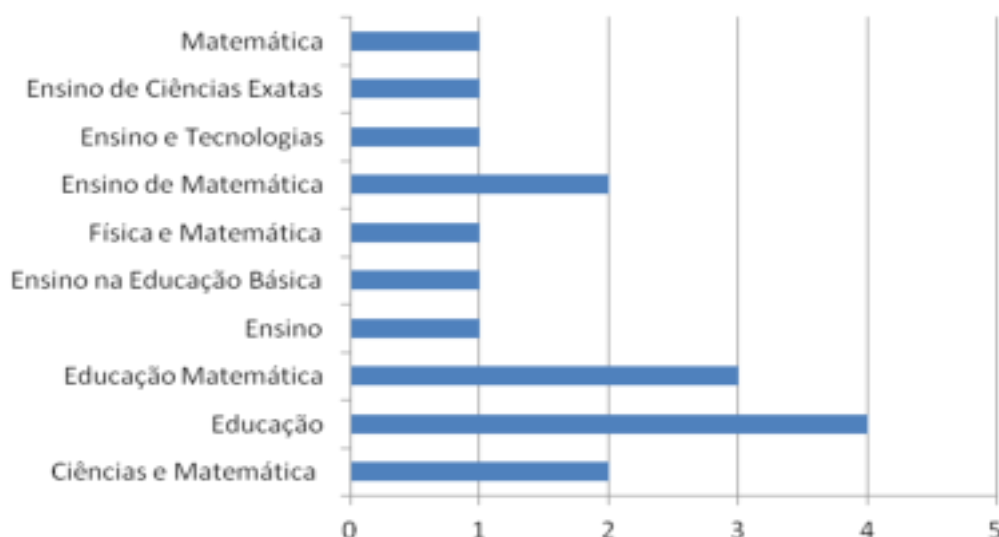
Na Figura 3, apresentamos a distribuição das teses e dissertações por programa de Pós-graduação e observamos que as pesquisas estão dispostas em cinco programas e a maior concentração das pesquisas está no Programa de Pós-graduação em Educação (23%), seguido do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (17%).

Logo após vem o Programa de Pós-graduação em Ensino, os Programas de Pós-graduação em Ensino de Matemática e Ensino de Ciências e Matemática (12,0%) cada e, por fim, os Programas de Pós-graduação em Matemática, Ensino de Ciências Exatas, Ensino e Tecnologias, Física e Matemática, Ensino na Educação Básica (6%) cada.

Como podemos ver, são muitos Programas de pós-graduação batizados com várias áreas e que discutem Álgebra, Educação Algébrica e Aulas, tarefas ou

atividades investigativas em Matemática ou Exploratório-Investigativas em Matemática.

Figura 3 - Gráfico de Distribuição de pesquisa por programa

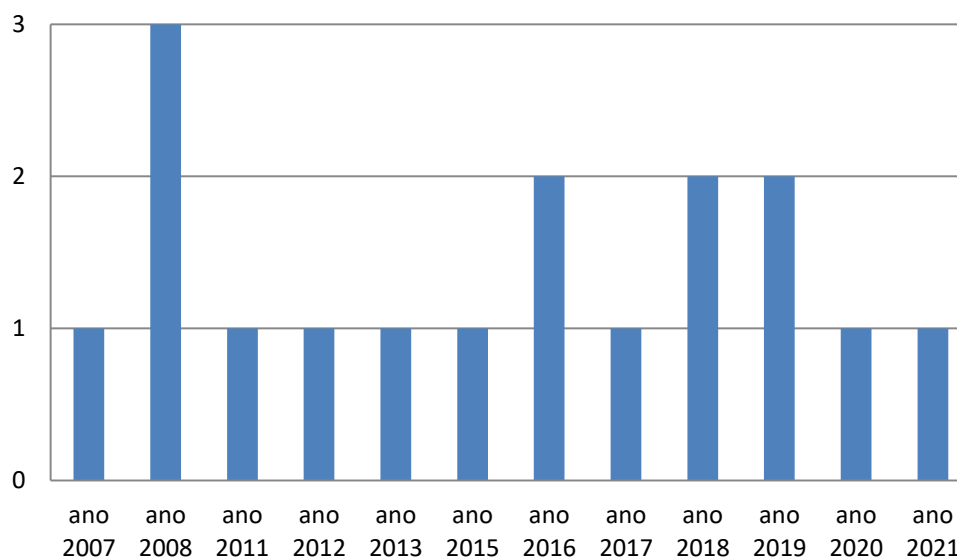


Fonte: Elaboração Autoral, 2022.

Destacamos que oito dos Programas de Pós-Graduação elencados no gráfico da Figura 3 estão ligados à Área de Ensino – área do Mestrado do PPGECM o qual estamos matriculados e realizando esta pesquisa.

Na Figura 4, as pesquisas estão distribuídas de acordo com o ano da publicação. Convém destacar que as produções foram realizadas de 2007 a 2021, uma média próxima a um trabalho por ano.

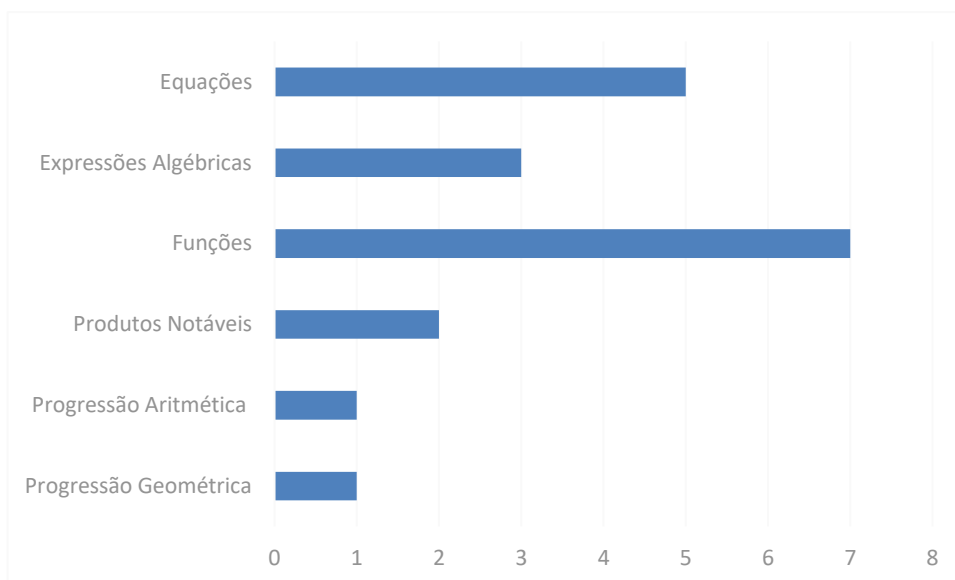
Figura 4 - Gráfico de Distribuição das pesquisas por ano



Fonte: Elaboração Autoral, 2022.

A Figura 5 contém os conteúdos matemáticos ligados ao estudo da Álgebra nas pesquisas que compõem o *corpus* de análise.

Figura 5 - Gráfico de Distribuição por conteúdo matemático²



Fonte: Elaboração Autoral, 2023

Vemos que o conteúdo mais abordado nas pesquisas foi “Funções”, com seis menções; “Equações”, com cinco menções; Expressões Algébricas com três menções; Produtos Notáveis com duas menções e Progressão Aritmética e Progressão Geométrica aparecem apenas uma vez cada.

Uma pesquisa abordou mais de um conteúdo. Neste caso, foi um estudo que trabalhou a investigação matemática com questões relacionadas à Álgebra na OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas).

○ 3.3 CATEGORIAS ANALÍTICAS

Para a análise dos dados, contaremos com três categorias analíticas, sendo duas delas concebidas *a priori*, a partir de um modelo teórico prévio, e uma categoria emergente, construída a partir do contato com o material que compõe o *corpus* de análise. As duas categorias *a priori* são as seguintes:

² O valor total dos conteúdos algébricos destacados no gráfico é maior que o número de pesquisas analisadas, pois algumas têm mais de um conteúdo abordado.

a) A Categoria 1 - Tarefas apresentadas em aulas Exploratório-Investigativas: Essa categoria foi concebida a partir das discussões realizadas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006). Por meio desta categoria, a análise foi desenvolvida a partir da percepção de que todas as pesquisas procuraram propor alguma tarefa com distinção de nomenclatura (Exploratório-investigativa, Atividade investigativa, Discussão, Exercício e Cenários para investigação), no entanto, seguiram um determinado padrão. Ou seja, essas tarefas foram planejadas e aplicadas para trabalhar conceitos matemáticos individualmente ou em grupos.

b) A Categoria 2 - Funções da Álgebra mobilizadas em Aulas Exploratório-Investigativas. Com base em Usiskin (1995), essa categoria foi constituída pelo fato de que em todas as pesquisas destacaram-se alguns conteúdos algébricos como Equações do 1º grau e do 2º grau, expressões algébricas, funções, produtos notáveis e progressões aritméticas e geométricas cujas aplicações nas aulas estão relacionadas às funções da álgebra (Usiskin, 1995).

No que se refere à categoria emergente, concordamos com Fiorentini e Lorenzato (2006), que afirmam que essas categorias desempenham um papel significativo na Educação Matemática, pois permitem identificar temas e padrões relevantes que podem auxiliar na melhoria das práticas pedagógicas e na formação de professores. Além disso, o estudo dessas categorias pode fornecer uma compreensão mais profunda dos desafios enfrentados pelos educadores e contribuir para o desenvolvimento de estratégias eficazes para enfrentá-los.

O termo "categoria emergente" refere-se a temas, padrões ou fenômenos que surgem durante a análise de dados em pesquisas qualitativas. Essas categorias são construídas com base nas evidências coletadas e podem oferecer insights valiosos sobre o objeto de estudo. Nesse sentido, as evidências identificadas na análise nos remeteram a construir uma categoria emergente, a saber:

c) A Categoria 3 - Organização das aulas Exploratório-Investigativas: práticas escolares e recursos didáticos. Essa categoria foi idealizada a partir do fato de que nas pesquisas analisadas havia sempre a preocupação de roteirizar a organização das aulas, que geralmente foram apresentadas com dinâmicas diferenciadas, utilizando recursos como tecnologia digital da informação e comunicação e materiais concretos para explorar conceitos matemáticos.

4 ANÁLISE DAS PESQUISAS

Neste capítulo, trataremos da análise, onde discutiremos as três categorias: a) Tarefas apresentadas em aulas Exploratório-Investigativas, b) Funções da Álgebra mobilizadas em Aulas Exploratório-Investigativas e c) Organização das aulas Exploratório-Investigativas: práticas escolares e recursos didáticos.

4.1 CATEGORIA 1 – TAREFAS APRESENTADAS EM AULAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS

A categoria “Tarefas apresentadas em aulas de Exploratório-Investigativas” refere-se a situações-problema propostas aos alunos durante as aulas de Matemática com o objetivo de incentivar a investigação e a exploração de conceitos matemáticos. Essa categoria emergiu dos dados construídos a partir do corpus de análise da pesquisa.

Ponte et al. (1999) apontaram que as atividades de investigação devem ter um papel central nas aulas de Matemática, permitindo que os alunos construam seu próprio conhecimento. Os autores destacam a importância do professor como mediador nesse processo, criando um ambiente favorável à aprendizagem e fornecendo orientações aos alunos. Além disso, as atividades de investigação devem ser flexíveis, permitindo que os alunos tenham liberdade para explorar diferentes estratégias e soluções para os problemas propostos.

Ponte et al. (2015) analisaram as perspectivas de professoras em relação aos exercícios, problemas e explorações em aulas de Matemática, bem como a aplicação das tarefas. Os resultados indicaram que as professoras valorizavam a utilização de atividades investigativas, mas tinham dificuldades em selecionar e adaptar as tarefas para as necessidades de seus alunos. As professoras também relataram a importância de fornecer *feedbacks* frequentes aos alunos e de utilizar diferentes estratégias para avaliar o processo de aprendizagem.

A importância das tarefas exploratório-investigativas como uma estratégia pedagógica para promover a aprendizagem de conceitos matemáticos deve ser desafiadora e significativa para os alunos, permitindo que eles explorem e construam seu próprio conhecimento. Além disso, é fundamental que o professor exerça um papel mediador nesse processo.

Rodrigues (2007) apresenta uma análise de oito tarefas exploratório-

investigativas que foram elaboradas com o objetivo de ensinar o conceito de função para alunos. Cada tarefa é descrita brevemente em relação ao seu propósito e como ela foi realizada.

A primeira tarefa, intitulada "Uma Fábula Matemática", tinha como objetivo permitir que os alunos entendessem a relação de dependência entre duas grandezas. Uma ideia fundamental para a noção de função.

A segunda tarefa, "Trajeto de Casa a Escola", tinha como objetivo levar os alunos a ler e interpretar gráficos cartesianos, além de familiarizá-los com esse tipo de representação.

A terceira tarefa, "A Rivalidade entre Brasil e Argentina", utilizou uma situação real de uma partida de futebol buscando permitir que os alunos desenvolvessem habilidades de interpretação de gráficos a partir do conceito de função, bem como recursos de fundamentação de suas opiniões, reflexão e interpretação sobre a situação com a qual estavam sendo confrontados.

A quarta tarefa, "A Lenda do Jogo de Xadrez e as Funções", utilizou a história do jogo de xadrez para que os alunos pudessem generalizar leis de diferentes tipos de funções e entender que uma função pode ser representada de diversas formas, inclusive por meio de uma expressão analítica.

A quinta tarefa, "As Funções vão até a Lanchonete", criou um cenário em torno de uma situação em que os alunos puderam desenvolver suas narrativas e argumentações, além de desenvolver a linguagem e o pensamento algébrico.

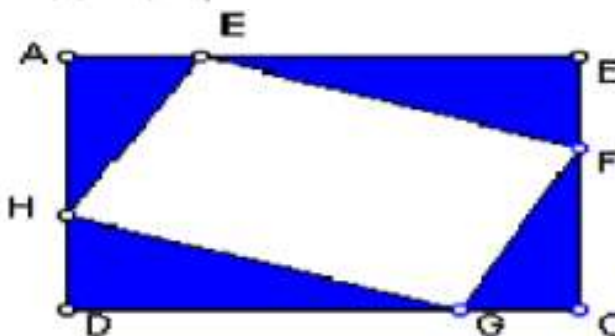
A sexta tarefa, "Função Área - Respeite o Seu Número", fez a relação entre a Álgebra das Funções e a Geometria das áreas e perímetros. Nesse ambiente, os alunos tiveram a oportunidade de desenvolver suas narrativas escritas e orais para a turma toda em suas apresentações e argumentações.

A sétima tarefa, "Área de um Quadrilátero em Função de X", estudou o comportamento de uma função denominada função área, no contexto de um problema real envolvendo áreas e perímetros de polígonos. Essa tarefa fez a relação entre a álgebra das funções e a geometria das áreas e limites das medidas dos lados das figuras.

Figura 6 - Tarefa 7 - Área de um quadrilátero em função de X

Tarefa Exploratório-Investigativa Área de um Quadrilátero em Função de X

Na figura seguinte está representado um retângulo com 6 cm de comprimento e 4 cm de altura. Sobre os lados marcam-se os pontos E, F, G e H, tais que $AE = BF = CG = DH = X$.



Sendo A, a função que a cada x faz corresponder à área do quadrilátero EFGH, consegues escrever uma expressão que traduz a área do quadrilátero em função de x ?

No contexto do nosso problema quais são os valores que a variável x pode tomar ou adotar.

Com base na lei encontrada anteriormente, consegues montar uma tabela de valores para as duas grandezas em questão e representar graficamente os valores da tabela que apresenta a função A.

Com base no gráfico representado anteriormente, faça uma investigação sobre a monotonia da função no seu domínio. O que você entende por monotonia e por domínio e no contexto do nosso problema qual é o seu Domínio?

Para você quais são os extremos da função? Justifique o seu posicionamento.

Como você faria para determinar os valores de x , tais que: (a) $A(x) = 16$; (b) $A(x) \geq 22$

Consegues encontrar o perímetro do quadrilátero que tem a área mínima e a área máxima?

Consegues encontrar alguma lei que determina o perímetro do quadrilátero EFGH em função de X ?

Com base nessas questões e nas questões discutidas no grupo, elaborem um relatório, descrevendo todos os passos que realizaste ao longo da resolução desta tarefa.

Fonte: (Rodrigues, 2007, p. 178-179)

Por fim, a oitava tarefa, intitulada "Criptografando Mensagens e as Funções", apresentou aos alunos um ambiente em torno das relações existentes entre sequências de números e as leis que regem uma função. O objetivo era levar os alunos a compreender o conceito de função como correspondência e transformação, além da noção de uma função inversa.

As tarefas, denominadas por Melo (2008) como atividades investigativas, buscaram trabalhar com diferentes conceitos matemáticos, desde potências e expoentes, até raízes cúbicas e operações com radicais. Em todas as atividades, houve uma preocupação em desenvolver a escrita da linguagem matemática, o que foi fundamental para uma aprendizagem significativa.

A primeira atividade investigativa trabalhou com potências e expoentes de 2, buscando estimular o aluno a refletir sobre as relações entre os números e desenvolver suas habilidades de cálculo e escrita matemática. Já na segunda atividade, o foco foi nos conceitos de raiz cúbica e potência de expoente 3, buscando um maior entendimento dos conceitos de índices ímpares.

Na terceira atividade investigativa, o aluno foi desafiado a trabalhar com potências e raízes de índices acima de 3, deixando em aberto o índice a ser trabalhado. Isso possibilitou a verificação de regularidades e estimulou a reflexão sobre a linguagem matemática. A parte aberta de questões também buscou desenvolver nos alunos a reflexão e a anotação de suas verificações e discussões, além de incentivar possíveis representações de números reais.

A última atividade investigativa tratou das operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão com radicais, utilizando a calculadora como ferramenta. O objetivo foi estimular o aluno a conjecturar relações de igualdade ou desigualdade entre as colunas de radicais, desenvolvendo suas habilidades de cálculo e análise.

Figura 7 - Tabela da Atividade 4

O objetivo era verificar se o aluno, pela observação das colunas: I e II, III e IV, V e VI, VII e VIII, conjecturava relações de igualdade ou desigualdade, pertinentes a essas colunas. A seguir temos a tabela a ser completada pelos alunos:

Usando uma calculadora, complete a tabela

a	b	$\sqrt[3]{a+b}$	$\sqrt[3]{a-b}$	$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$
3	2							
5	3							
17	10							
49	34							
135	121							
68	32							
500	212							
1428	386							
		I	II	III	IV	V	VI	VII

Quadro 10 – Tabela da Atividade 4

Fonte: (Melo, 2008, p. 52-53)

Trindade (2008), em sua pesquisa, destacou uma Tarefa em forma de *duas discussões* em sala de aula sobre matemática, nas quais uma professora intervém com a intenção de incentivar os alunos a pensarem sobre os problemas e desenvolverem o raciocínio matemático.

Nas duas discussões, a professora faz perguntas aos alunos, ouvindo suas respostas e encorajando-os a explorar suas ideias, conforme apresentado na Figura

8:

Figura 8 - Discussão 1

Sara — *Aqui, eu não percebo. $(-5)^0$, o que é que é?* Professora — *Não sei. Vocês é que escreveram $(-5)^0$.* Susana — *Eu acho que é -5...*
Professora — *“-5”.*
Margarida — *Eu acho que não.*
Professora — *E então se fosse -5 elevado a...* Margarida (interrompendo) — *Se fosse $(-5)^1$ é que é -5.* Professora — *Exatamente.*
Sara — *$(-5)^0$ é outro número. Acho que é 1.*
Professora — *Achas que é 1, porquê?*
Margarida — *Não percebo.*
Professora — *Vocês é que têm 1.* Carolina — *Eu pus $(-5)^0$ que é o que dá! (...)*
Professora — *OK, por que é que acham que isto dá 1?*
Susana — *Isto não dá 1!* Carolina — *Dá, sim senhora!*
Margarida — *Dá, dá.*
Professora — *Dá ou não dá?*
Margarida — *Dá. Dá.*
Sara — *Professora, $(-5)^0$ é 1. E 1 elevado a 3 é 1.*
Fonte: (Trindade, 2008, p. 103-104)

Na primeira discussão, a professora intervém quando os alunos estão tentando resolver uma questão sobre potências, e na segunda discussão, os alunos estão tentando encontrar uma expressão geral para uma sucessão de números. As Tarefas Exploratório-Investigativas, denominadas por Déchen (2008), apresentaram diferentes desafios matemáticos aos alunos, possibilitando o desenvolvimento de investigação e análise. As três tarefas selecionadas para análise possuem diferentes focos e objetivos.

A Tarefa 1, intitulada “A LANCHONETE DO ALAN XONETE”, é uma introdução aos conceitos de incógnita e variável, além de métodos possíveis para a resolução de uma equação do primeiro grau.

A tarefa envolveu a resolução de um problema contextualizado, no qual os alunos tinham que descobrir o preço de um lanche em uma lanchonete, conhecendo o preço de outros itens e o total gasto por um grupo de amigos.

Essa tarefa possibilitou, segundo Déchen (2008), a compreensão do conceito de incógnita e variável, além de incentivar o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático.

A Tarefa 2, intitulada “Cubolino e seus cubos...”, envolveu a construção de uma sequência numérica a partir de uma proposta feita pelo personagem Cubolino. Os alunos precisavam analisar as informações dadas e deduzirem qual a sequência

correta. Além disso, a tarefa trouxe uma situação-problema que envolveu o desafio de reconstruir a sequência após ela ter sido desmontada repentinamente.

Por fim, a Tarefa 3, intitulada “A Máquina Mágica”, apresentou a álgebra como expressão da variação de grandezas. Nessa tarefa, os alunos deveriam investigar a relação entre a entrada e a saída de números em uma máquina mágica, a partir de diferentes valores de entrada, conforme ilustrado na Figura 9.

A tarefa permitiu a compreensão do conceito de função e a análise da variação de grandezas. Além disso, incentivou o desenvolvimento do pensamento em torno da relação entre grandezas.

Figura 9 - Tarefa 3 - A máquina Mágica



Fonte: (Déchen, 2008, p. 126)

Fernandes (2011) apresentou três tarefas exploratório-investigativas aplicadas com seus objetivos e focos específicos. Na primeira tarefa “Uma tabela diferente”, fez-se uma explicação do funcionamento da tabela, o que foi importante para alunos que ainda não sabiam o que investigar.

Essa primeira tarefa serviu para introduzir aos alunos outro tipo de prática matemática escolar, permitindo que as duplas estabeleçam uma relação mais exploratória de produção e negociação de sentidos.

Na segunda tarefa “A Investigação de Sequências e a Busca por Padrões”, o objetivo era contemplar uma das funções da Álgebra: a generalização. Esperava-se que os alunos relacionassem a posição e a correspondente quantidade de quadrados, explorando, assim, a ideia de variável e percebendo regularidades ou permanências em situações que variavam. Com esta atividade, os alunos poderiam compreender como era possível generalizar padrões, uma das habilidades fundamentais da álgebra.

A terceira tarefa, intitulada “Álgebra em festa de casamento?”, foi elaborada

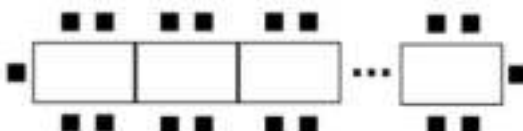
com o intuito de contemplar a questão da relação entre grandezas, a quantidade de cadeiras e a quantidade de mesas. Este exercício permitiu que os alunos explorassem a relação entre as grandezas e, assim, desenvolvessem a habilidade de expressar a variação de uma grandeza em função da variação de outra, fundamental na álgebra.

Figura 10 - Tarefa 3 - Álgebra em festa de casamento

Tarefa Investigativa 3: Álgebra em festa de casamento?

A Tarefa Proposta

Em uma determinada festa de casamento, cada mesa comporta 6 pessoas. Esperando que houvesse uma aproximação e união dos convidados presentes para a confraternização, esses resolveram juntá-las na seguinte disposição¹⁸:



Será que há Álgebra numa festa de casamento?

Vejam... Seguem algumas questões para a nossa investigação: **(Lembrem-se!**

Todas as respostas devem ser justificadas, com cálculos ou desenhos!)

- Construam uma tabela que relaciona a **quantidade de mesas** e a **quantidade de cadeiras** utilizadas. Encontrem o número de cadeiras utilizadas com, pelo menos, 6 mesas. Observem as possíveis relações entre **mesas** e **cadeiras**...
- Qual o número máximo de mesas que deve ser usado para formar essa fileira de mesas? E de cadeiras? Expliquem o raciocínio da equipe.
- Usando 15 mesas, quantas cadeiras são necessárias? Justifiquem.
- Se houver 42 cadeiras, quantas mesas serão necessárias? Justifiquem.
- É possível constituir uma fileira de mesas que tenha 100 cadeiras? Se possível, quantas mesas seriam necessárias? Por quê?
- Investigando a sequência, a partir do desenho e/ou da tabela construída no item a), expliquem, com as suas palavras, como ela é constituída. Qual é o padrão existente?
Escrevam uma **expressão matemática** que relaciona o número de mesas e o número de cadeiras. **É importante o uso de uma linguagem mais elaborada, aproximando-se de uma fórmula...** Que letras poderiam ser usadas?

Bom Trabalho, caros detetives!

Fonte: (Fernandes, 2011, p. 91)

As Tarefas Exploratório-Investigativas propostas por Ferreira (2012), consistiram em três tarefas. Na tarefa 1 “Sequências de Bolinhas e suas Formas”, os alunos foram desafiados a investigar as relações entre a forma como uma sequência é construída, a quantidade de bolinhas em determinada posição e sua posição na sequência.

A ideia era que os discentes continuassem a sequência, desenhando até a 10ª

posição, buscando padrões e regularidades que poderiam ajudá-los a prever as preferências futuras na sequência. Essa tarefa estimulou, segundo Ferreira (2012), o pensamento algébrico e a capacidade de identificar padrões matemáticos.

Figura 11 - Tarefa 1 – Sequência de bolinhas e suas formas

Tarefa Investigativa 1: Sequências de Bolinhas e suas Formas

Que tal descobrir relações entre a forma como a sequência é construída, a quantidade de bolinhas em determinada posição e a sua posição nessa sequência? *Desafio vocês a investigar e descobrir as próximas posições da sequência!*

Dê uma olhada nas duas primeiras posições da sequência de bolinhas abaixo:



(1) (2)

O grupo achou complicado? A seguir, encontram-se algumas questões para a orientação do estudo:

1. Continue a sequência, desenhando até a 10ª posição.
2. O grupo seria capaz de encontrar outras maneiras de continuar essa sequência? Quais seriam?
3. Se o grupo pensou em mais de um tipo de sequência, escolha a que mais lhe agrada para encontrar um jeito de dizer por escrito como seria a sua 100ª posição. Além disso, seria capaz de dizer quantas bolinhas terá a 100ª posição?
4. Vocês conseguem agora escrever uma regra que pudesse representar o número de bolinhas ou a forma de uma posição qualquer (indefinida) da sequência?

Fonte: (Ferreira, 2012, p. 246)

Na tarefa 2 “Álgebra em Festa de Casamento?”, os alunos foram convidados a pensar em como organizar mesas em uma festa de casamento, de modo que cada mesa comportasse 6 pessoas. A proposta era que os alunos encontrassem uma disposição adequada para as mesas, incentivando a aproximação e a interação entre os convidados.

Essa tarefa trabalhou a habilidade de resolver problemas utilizando conceitos de álgebra e combinatória, além de desenvolver o pensamento espacial e a

capacidade de planejar e organizar. Tal atividade, proposta por Fernandes (2010), criou um contexto propício à comparação das intuições acerca dos resultados com a confirmação dada pela manipulação do material concreto (adotado na presente pesquisa)” (Ferreira, 2012, p. 167).

Na tarefa 3 “A Máquina Mágica”, foi apresentado aos alunos a máquina mágica, que transformava números em outros números por meio da magia. O mecanismo da máquina é simples e funciona para qualquer número que passe por ela. Uma particularidade desta máquina era que ela não possui um único segredo, ou seja, há várias formas de transformação.

Os alunos foram desafiados a descobrir as mágicas da máquina, estimulando a curiosidade e o raciocínio algébrico. Essa tarefa “utilizada por Déchen (2008) é similar à adotada nesta tese, mas propõe que cada mesa comporte quatro cadeiras (e não seis como é o nosso caso)” (Ferreira, 2012, p. 169).

Vale destacar que a tarefa da Máquina Mágica foi elaborada por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) com os seguintes objetivos:

Desenvolver a linguagem e o pensamento algébricos através de tarefas e atividades exploratório-investigativas, as quais visam instigá-los a fazer explorações, descobertas, conjecturas e argumentações que comprovem ou não as conjecturas. justificativas a comunicar-se e a argumentar matematicamente.

Utilizar-se da escrita na elaboração de relatórios, além de dar significado e forma às

interpretações, conjecturas, descobertas e justificativas.

Utilizar-se da linguagem oral para relatar, socializar e justificar aos colegas a descobertas e resultados de seu grupo.

Desenvolver a capacidade de trabalho investigativo em colaboração com os colegas (Fiorentini, Fernandes e Cristóvão, 2005, p. 12).

Corradi (2013) traz uma tarefa exploratório-investigativa em seu texto, denominando os seus desdobramentos em atividades na forma de exercícios, apresentando-os na perspectiva do ensino de funções trigonométricas, em que ambos abordavam os parâmetros das senoides, porém com objetivos diferentes.

Enquanto no Exercício 1 os discentes foram desafiados a preencher uma tabela com os parâmetros de senoides, no Exercício 2 foram convidados a criar sua própria função senoidal a partir de critérios definidos.

Figura 12 - Exercício 1

Exercício1: Tendo por base o estudo dos parâmetros das senóides, preencha a tabela para itens a - e.

	$f(x)$	Imagem	Período
a	$\text{sen}(\frac{1}{2}x)$		
b	$\cos(\pi x)$		
c	$3\text{sen}(4x)$		
d	$2\text{sen}(x)+3$		
e	$6\cos(7x)+1$		

Exercício2: Utilize a última linha em branco da tabela para criar sua senoide $f(x) = A\text{sen } B(x - C) + D$ ou $f(x) = A\cos B(x - C) + D$; encontre sua imagem e período. Você deverá trocar com outro grupo a sua imagem e período encontrados, tendo por base sua função criada e o outro grupo deverá encontrar essa função, sendo $A, B, C, D \in \mathbb{R}$; $A, B \neq 0$

Fonte: (Corradi, 2013, p. 90)

Ambos os exercícios propuseram situações-problemas, com a manipulação de conceitos abstratos, a interpretação de dados e a generalização de padrões. Além disso, as tarefas possibilitaram a utilização de diferentes representações, como tabelas e gráficos, o que estimulou, segundo Corradi (2013), a compreensão de diferentes linguagens e a aplicação de múltiplas estratégias na resolução dos problemas propostos.

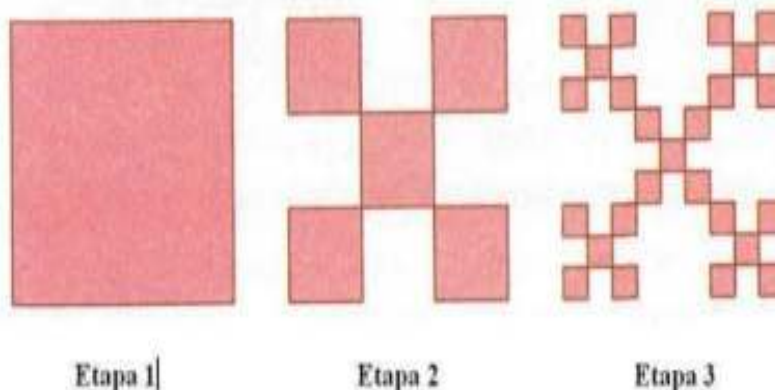
O estudo apresentado pela autora Bonotto (2015) teve como objetivo promover a aprendizagem dos alunos sobre a função exponencial no ensino médio. Para isso, foram aplicadas oito tarefas denominadas *atividades*, divididas em três blocos, cada um com sua especificidade.

O Bloco I teve como objetivo a identificação de padrões e a generalização da função exponencial. Para isso, foram adaptadas atividades propostas por Souza (2013) e Paiva (2009). Nesse bloco, os alunos foram instigados a identificar padrões em uma sequência numérica e, a partir disso, chegar a uma generalização da função exponencial.

Figura 13 - Atividade 1

Atividade 1 – (Duração de 2 horas e 30 minutos)

A sequência de figuras apresenta as etapas da composição de uma figura geométrica.



- Utilizando a malha quadriculada construa a figura correspondente à próxima etapa dessa sequência.
- Faça uma tabela relacionando a etapa e o número de quadradinhos necessários para a sua construção.
- Qual o total de quadradinhos na etapa 4 e 5? E na etapa 6?
- Construa uma tabela indicando a etapa e o número de quadradinhos em cada etapa.
- É possível generalizar uma lei para obter o número de quadradinhos existentes na figura da n -ésima etapa?
- Represente graficamente os valores obtidos na tabela no item (d).

Fonte: (Bonotto, 2015, p. 43-44)

O Bloco II foi destinado à análise das características e das propriedades da função exponencial por meio da representação gráfica, explorada no *software* Geogebra. As atividades desse bloco foram elaboradas pela própria pesquisadora e tiveram como objetivo aprofundar o estudo da função exponencial e suas propriedades.

Por fim, o Bloco III foi dedicado à matemática financeira e sua relação com a função exponencial. Para ele, foi utilizado um objeto de aprendizagem para explorar as características e propriedades da função exponencial no contexto financeiro.

As tarefas propostas por Litoldo (2016) tiveram a estruturação com denominação de atividades. As oito atividades seguiam uma progressão natural, partindo da introdução do tema até a consolidação dos conceitos trabalhados.

A utilização da criptografia como ponto de partida para a introdução dos conceitos de função afim, pode ser considerada uma abordagem interessante e

atraente para os alunos. Além disso, para o autor, essa perspectiva contextualizada pode contribuir para tornar o conteúdo mais significativo para os alunos.

As atividades 2 a 4 destinavam-se a abordar a definição de função afim e suas particularidades, tais como: função linear, função identidade e função constante. Essas atividades, de acordo com Litoldo (2016), foram fundamentais para que os alunos pudessem compreender as características básicas da função afim, como: a sua representação gráfica e os valores de seus coordenadores.

A Figura 14, por exemplo, mostra o que ocorreu com alguns alunos quanto ao desenvolvimento da segunda atividade (utilizando o episódio: *um caso de sequestro*):

Figura 14 - Atividade dos alunos Janaína, Jaciara e Fernando

Janaína, Jaciara e Fernando

Para iniciar a resolução da atividade, Jaciara e Janaína escreveram em seu rascunho o alfabeto e perceberam que o símbolo asterisco (*), que aparecia na carta, representava o espaço entre as palavras. Logo em seguida, as meninas enumeraram o alfabeto ($A = 1, B = 2, \dots, Z = 26$) e perceberam que o número dezenove correspondia à letra S, e concluindo que não era essa a numeração que havia sido utilizada na carta. Jaciara sugeriu que elas comessem a numeração de trás para frente ($A = 26, B = 25, \dots, Z = 1$), mas, com esse novo alfabeto, elas também perceberam que não fazia sentido, pois o número dezenove correspondia à letra *h*.

Enquanto as meninas discutiam outra forma de enumerar o alfabeto, Fernando pensava em decifrar a carta por meio da cifra de César. Ele escreveu, em seu rascunho, o alfabeto original e logo abaixo o mesmo alfabeto, só que deslocado para a direita (Figura 18).

Figura 18 - Esquema escrito pelo aluno Fernando.



Fonte: Dados da pesquisa (2015).

Fonte: (Litoldo, 2016, p. 131)

As atividades 5 e 6, por sua vez, foram destinadas a trabalhar o conceito gráfico

da função afim. Essas atividades permitiram que os alunos compreendessem melhor como as mudanças nos parâmetros da função afim modificavam sua representação gráfica. Além disso, essa abordagem gráfica pode ser uma forma mais intuitiva e visual de compreender o conceito de função afim.

A atividade 7 abordou a definição de função inversa, um conceito importante e fundamental no estudo das funções. Essa atividade permitiu que os alunos compreendessem como determinar a função inversa de uma função afim e como essa função poderia ser representada graficamente.

Por fim, a atividade 8 foi destinada a uma síntese do trabalho desenvolvido com os alunos, permitindo, de acordo com o autor, que os alunos revisassem os conceitos aprendidos ao longo da sequência, consolidando seus conhecimentos.

As quatro tarefas exploratório-investigativas descritas no texto de Tozo (2016) possuíam como objetivo principal, incentivar os alunos a investigar e explorar conceitos matemáticos por meio de situações-problema contextualizadas e desafiadoras. Cada uma das tarefas propunha um problema que requeria a utilização de conceitos matemáticos específicos, como função afim, gráficos e análise de dados.

Na primeira tarefa foi apresentado um problema que envolvia o cálculo do consumo médio de combustível de um carro modelo, *flex* e o valor gasto com combustível em determinado posto.

Foi possível observar que a tarefa estava estruturada em etapas, desde o cálculo do consumo médio de combustível, até a construção de fórmulas matemáticas e esboços gráficos.

Destaca-se a importância da contextualização do problema em situações cotidianas e a utilização de recursos digitais, como o papel milimetrado para auxiliar na construção de gráficos.

Figura 15 - Análise da tarefa 1

5.1. Analise a priori da tarefa 1

Uma montadora de automóveis testou o desempenho de seu novo carro modelo flex (bi combustível). Na avaliação do consumo, as médias foram de 9 e 12 km/l na estrada, com etanol e gasolina, respectivamente.

a) João após comprar tal carro, fará três percursos, com distâncias de 36 km, 72 km e 108 km cada. Para estes casos, quantos litros de gasolina e etanol serão gastos, em média?

Resposta:

Km	Etanol	Gasolina
36	$x = \frac{36}{9} \Rightarrow x = 4l$	$y = \frac{36}{12} \Rightarrow y = 3l$
72	$x = \frac{72}{9} \Rightarrow x = 8l$	$y = \frac{72}{12} \Rightarrow y = 6l$
108	$x = \frac{108}{9} \Rightarrow x = 12l$	$y = \frac{108}{12} \Rightarrow y = 9l$

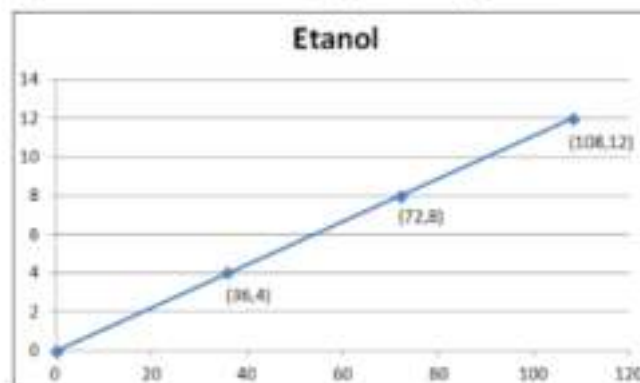
b) Sabendo que em determinado posto o preço do etanol é R\$2,09 e o da gasolina R\$3,17, qual é o valor gasto com combustível para cada situação descrita no item anterior?

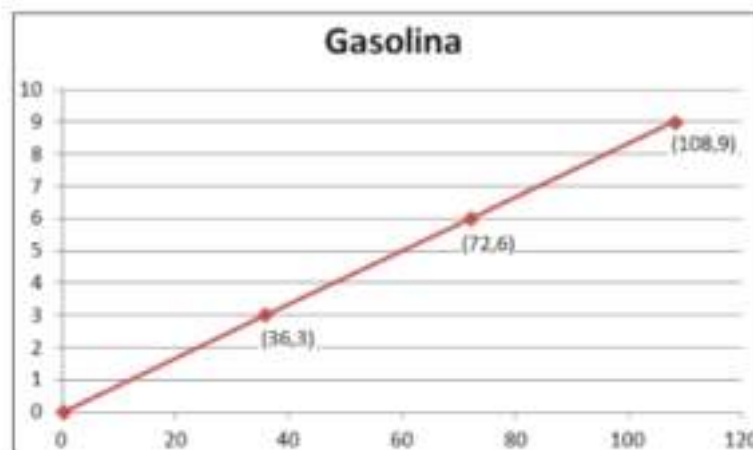
Valor (em R\$) consumido com Etanol	Valor (em R\$) consumido com Gasolina
$4 \times 2,09 = 8,36$	$3 \times 3,17 = 9,51$
$8 \times 2,09 = 16,72$	$6 \times 3,17 = 19,02$
$12 \times 2,09 = 25,08$	$9 \times 3,17 = 28,53$

c) Levando em conta os cálculos já realizados nos itens a e b, é possível elaborar uma fórmula matemática sabendo que o gasto com combustível depende da distância (x) percorrida?

Etanol	$f(x) = \frac{x}{9}$
Gasolina	$f(x) = \frac{x}{12}$

d) Para cada fórmula do item c, faça um esboço gráfico.





e) Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparação deles, quais as relações que você pode estabelecer?
 Fonte: (Tozo, 2016, p. 46-48)

Na segunda tarefa, foi apresentado um problema que envolvia o cálculo do valor a ser pago por colheitas de serviço, considerando a taxa fixa e o valor por hora trabalhada. Novamente, foi possível observar a utilização de conceitos matemáticos, como: função afim e gráficos para a resolução do problema.

A contextualização do problema em situações cotidianas é, novamente, ressaltada, assim como a possibilidade de interpretar os gráficos resultantes das fórmulas matemáticas.

Na terceira tarefa, foi proposto o uso do papel milimetrado para a construção de gráficos a partir de registros tabulares. Foi possível observar a importância da compreensão da relação entre os registros tabulares e os gráficos, assim como a necessidade de converter esses registros em diferentes formas, como gráficos e fórmulas matemáticas.

Por fim, na quarta tarefa, foi apresentado um problema que requeria a análise de dados e a compreensão do conceito de função afim. Foi possível observar que a tarefa busca validar o objeto matemático estudado por meio da análise de dados e da utilização de conceitos matemáticos específicos.

As duas sequências didáticas propostas pelo autor Cergoli (2017) tiveram como objetivo a aplicação de Tarefas Exploratório-Investigativas para o estudo dos logaritmos. Primeiramente, foi aplicada uma sequência didática sobre ensino de logaritmos - com 18 atividades - para professores e reformulada a partir dos resultados obtidos da aplicação - com 25 atividades.

Depois, a partir do que foi trabalhado com os professores, foi elaborada uma

sequência didática com o conteúdo logaritmo – com onze atividades - para alunos do ensino médio. Dividida em quatro etapas, a sequência didática, destinada aos alunos, buscou uma abordagem mais contextualizada e prática dos conceitos matemáticos, permitindo a compreensão e a aplicação dos logaritmos em situações do cotidiano.

Na primeira etapa, os alunos foram convidados a descobrir as propriedades dos logaritmos, por intermédio da análise de mesas e do uso da calculadora. Essa atividade permitiu, segundo Cergoli (2017), aos alunos a compreensão das propriedades matemáticas dos logaritmos de forma mais prática e intuitiva.

Na segunda etapa, foi apresentada uma definição formal de logaritmo, a partir da análise das propriedades descobertas na etapa anterior. Essa abordagem permitiu uma compreensão mais precisa e formal dos conceitos matemáticos estudados.

Figura 16 - Atividade da sequência didática dos alunos

ATIVIDADE 8

Objetivo:

Construir uma tábua de logaritmos adequada para se calcular as operações propostas.

Enunciado:

Calcular as operações indicadas sem efetuar-las diretamente, mas usando uma tábua de logaritmos que você construirá.

- a) $256 \times 4 =$
- b) $8^3 =$
- c) $1.024 \div 256 =$
- d) $512 \div 32 =$
- e) $\sqrt[3]{512} =$
- f) $1.024^{\frac{1}{3}} =$

Comentários:

Cerca de 75% dos alunos fizeram a atividade. Daqueles que terminaram a atividade, aproximadamente 16% a fizeram de forma errada, outros 16% acertaram totalmente a atividade e os demais alunos não fizeram a atividade por completo.

Novamente os problemas com o sinal de igualdade e com potenciação e, especialmente, radiciação, foram recorrentes. Além disso, 2 alunos construíram equivocadamente a tabela de PA e PG, começando por 0 e 0.

Na figura 26, observávamos que o aluno empregou o sinal de igual de forma equivocada e, além disso, não associou o resultado encontrado na coluna da PA, com o termo correspondente na coluna da PG.

Atividade 8

Calcular as operações indicadas sem efetuar-las diretamente, mas usando uma tabela de logaritmos que você construír.

a) $256 \times 4 = 3 + 2 = 10 (PA)$
b) $8^3 = 3 + 3 + 3 = 9 (PA)$
c) $1.024 \div 256 = 10 - 8 = 2 (PA)$
d) $512 \div 32 = 9 - 5 = 4 (PA)$
e) $\sqrt[3]{512} = 8$
f) $1024^{\frac{1}{2}} = 4$

PA	PG
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11

Fonte: (Cergoli, 2017, p. 102-103)

Na terceira etapa, os alunos foram desafiados a inserir outras linhas nas tabelas, explorando diferentes situações e contextos que envolviam os logaritmos. Essa atividade permitiu aos alunos, na consideração do autor, a aplicação dos conceitos matemáticos em situações práticas e concretas do cotidiano.

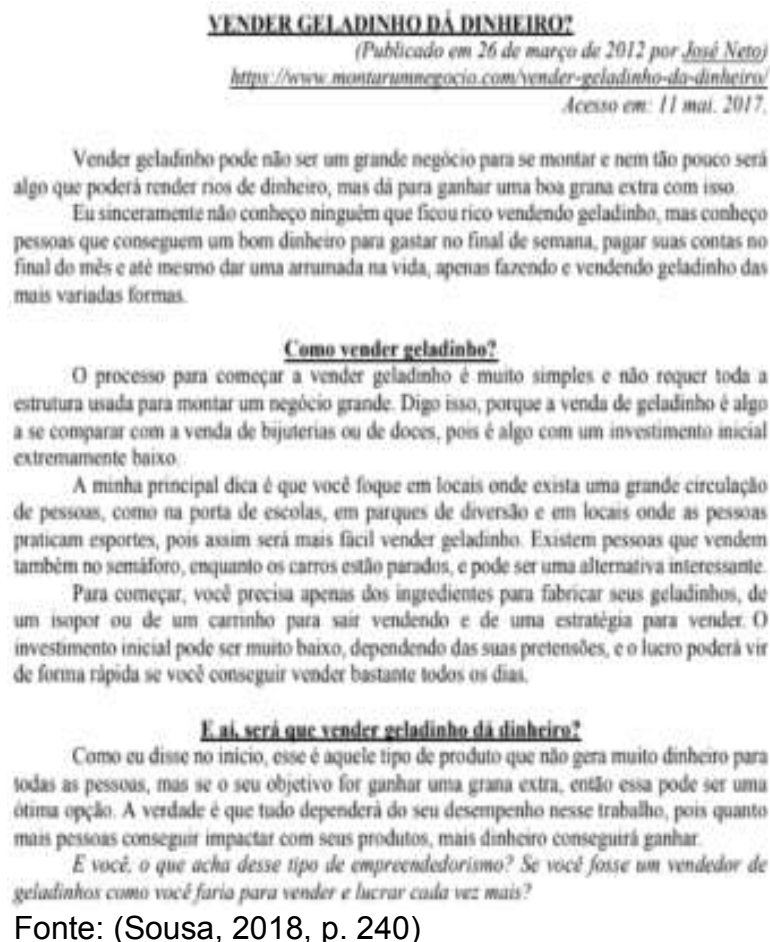
Por fim, na quarta etapa, foi apresentado o estudo das funções logarítmicas e a resolução de problemas clássicos que envolviam logaritmos. Essa atividade permitiu a aplicação dos conceitos matemáticos em situações mais complexas e desafiadoras.

Sousa (2018) propôs uma tarefa, com o nome de atividade investigativa, com o objetivo utilizar o conteúdo de função afim para a modelagem dos gráficos com base na produção, venda e lucro de geladinhos. A atividade foi dividida em três etapas, iniciando com uma discussão sobre empreendedorismo e venda do produto.

Na segunda etapa, foi explorado um quadro com os ingredientes de nove sabores diferentes de geladinhos, enquanto a terceira etapa foi focada na criação de estratégias para as vendas, descoberta dos valores do custo de produção, do preço

de venda e do lucro com dois tamanhos diferentes de geladinhos.

Figura 17 - Etapa 1 da atividade investigativa



Um ponto interessante da atividade foi uma discussão sobre empreendedorismo, trazendo um olhar crítico sobre o capitalismo e o neoliberalismo. Essa discussão contribuiu para uma reflexão sobre o papel do empreendedorismo na sociedade, os desafios enfrentados pelos empreendedores e as possibilidades de empreendedorismo social.

Veríssimo (2018) propôs quatro tarefas, denominadas como atividades de investigação, acerca dos seguintes assuntos: Notação Científica, Mágicas e Adivinhações, Padrões de Sequências Numéricas e Relações em Tabelas Numéricas. Em Notação Científica, na atividade do Conjunto de Pesos Suspensos, a figura estimulava a investigação para descobrir o peso do triângulo, utilizando o conhecimento de equilíbrio de forças e o uso de funcionamento algébrico. Já na atividade da Balança Equilibrada, o objetivo era desenvolver o pensamento algébrico

através da representação e da comparação para encontrar uma solução geral para as balanças em equilíbrio.

Veríssimo (2018), em *Mágicas e Adivinhações*, propôs a Brincadeira de adivinhar o resultado final e a Mágica com Dominós, com jogos e truques com números para estimular o pensamento lógico e a resolução de problemas. Enquanto isso, nas atividades de Padrões de Sequências Numéricas, disponibilizou o Somando Pecinhas, utilizando uma identificação de padrões em sequências numéricas para chegar à solução do problema.

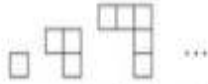
Figura 18 - Questão adaptada da OBMEP

Questão retirada e adaptada do Banco de Questões 2016, Nível 1 - Obmep

Questão: Considere a seguinte sequência de pecinhas, em que a pecinha de número 1 é um quadradinho.

16 Somando pecinhas

Considere a seguinte sequência de pecinhas, em que a pecinha de número 1 é um quadradinho.



(a) Quantos quadradinhos formam a pecinha de número 50?

(b) Quantos quadradinhos existem na união das pecinhas de número 1 a 50?

(c) Observando o resultado do item b, calcule

$$2 + 4 + 6 + \dots + 96 + 98 + 100.$$

(d) Calcule

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100.$$

Fonte: (Veríssimo, 2018, p. 56)

Veríssimo (2018) propôs ainda, em *Padrões de Sequências Numéricas*, as questões Quadrados Preenchidos com Quadradinhos e Construindo Escadas, utilizando a representação visual para desenvolver o raciocínio espacial e a sinalização de padrões geométricos.

Nas atividades relacionadas às Relações de Tabelas Numéricas, Veríssimo (2018) propôs Tabela de Pitágoras, Identificando Relações em Tabelas e Quadrado Medimágico.

Alencar (2019) descreveu uma tarefa apresentando-a em etapas de uma pesquisa investigativa que teve como objetivo analisar o desenvolvimento do raciocínio algébrico em estudantes do Ensino Fundamental. A etapa 1 consistiu na

caracterização da turma por meio de um aprendizado que buscou conhecer alguns aspectos dos alunos e a visão destes em relação à disciplina de Matemática. Também foi lançado um desafio, na forma de uma atividade inicial, para que os alunos tivessem o primeiro contato com uma atividade investigativa.

Na etapa 2, foram aplicadas as atividades "Escrevendo em linguagem algébrica" e "Máquina de números - letras em lugar de números", com duração de 120 minutos e 60 minutos, respectivamente.

A etapa 3 teve como foco a atividade "Explorando a ideia de equilíbrio", realizada em um único dia. Nas próximas etapas, foram investigados temas como a resolução de equação do 1º grau, a utilização da linguagem algébrica para representar áreas e perímetros de regiões planas e resolução de problemas envolvendo equações do 1º grau.

Alencar (2018), por exemplo, traz nas atividades aplicadas a "Máquina de números - letras em lugar de números":

Figura 19 - Atividade sobre a Máquina de números

ATIVIDADE 2: MÁQUINA DE NÚMEROS – LETRAS EM LUGAR DE NÚMEROS

André e Emilia resolveram brincar de inventar "máquinas de números que legal!

André inventou uma máquina programada para dobrar números. A cada número entra, a máquina fornece o dobro dele. Você se lembra: para encontrar o multiplicamos por 2.

Agora, considere a máquina aperfeiçoada por Emilia e depois responda as questões propostas.



Fonte: Livro Projeto Teláris, 2015

- a) Se entrasse o número 20, que número sairia?
- b) Se entrasse o número - 5, que número sairia?
- c) Se entrasse o número 3,5, que número sairia?
- d) Se entrasse um número y qualquer, que número sairia?

Fonte: (Alencar, 2018, p. 86-87)

A Tarefa proposta por Guimarães (2019) baseou-se nas atividades “Rotação por Estações” que tiveram como objetivo proporcionar aos alunos uma aprendizagem por meio de cenários para investigação que procurava envolver os alunos em atividades que promoviam a pesquisa, a reflexão, a resolução de problemas e a criatividade.

Na primeira aula, o autor trouxe cenários e, em um deles, utilizou um vídeo sobre a Fórmula de Bháskara para apresentar o tema aos alunos. A análise do livro didático e escrita coletiva sobre a pesquisa realizada buscou estimular o pensamento crítico e reflexivo dos estudantes.

Na segunda aula, trouxeram o *lapbook* e o jogo sobre os tipos de pensamento do segundo grau incentivando a participação ativa dos alunos na construção do próprio conhecimento por meio de uma abordagem lúdica e interativa. Na terceira aula, foi feita uma pesquisa *online*, a solução por meio de fichas e a análise diferentes de um poema matemático, apresentando aos alunos formas de representação e

compreensão do mesmo tema.

Na quarta aula, os cenários propostos incentivaram a construção de uma história em quadrinhos e a entrevista com os colegas promoveu a interação e a comunicação entre os estudantes, além de estimular a reflexão sobre a aplicação das equações de segundo grau em diferentes contextos.

Na quinta aula, a produção de pensamentos semelhantes às do livro e a resolução de problemas incentivavam os alunos a aplicar os conceitos ensinados de forma prática e desafiadora.

Na sexta e última aula, os cenários permearam a resolução de equações do 2º grau mencionadas em um livro específico e a citação dos sites utilizados durante o processo para consolidar os conhecimentos adquiridos e estimular a pesquisa autônoma dos alunos.

A Figura 20 ilustra todas as aulas com seus respectivos cenários:

Figura 20 - Quadro de aulas, cenários e abreviações

Quadro 1– Aulas, Cenários e Abreviações		
Aulas	Cenários que compõem cada aula	Abreviações
Aula 1	Cenário 1: Vídeo "Para que serve a fórmula de Bhaskara?"	(A1Ce1)
	Cenário 2: Análise de Livro didático	(A1Ce2)
	Cenário 3: Escrita coletiva (Sobre a pesquisa realizada)	(A1Ce3)
	Cenário 4: Resolução de problemas	(A1Ce4)
Aula 2	Cenário 1: Lapbook: Onde encontro equações do segundo grau?	(A2Ce1)
	Cenário 2: Tipos de equações do segundo grau. (Destacar)	(A2Ce2)
	Cenário 3: Jogo: Perfil das Equações do 2º grau.	(A2Ce3)
Aula 3	Cenário 1: Pesquisa online sobre os três tipos de resolução de uma Equação do 2º grau.	(A3Ce1)
	Cenário 2: Solução de uma Equação do 2º grau por meio de fichas.	(A3Ce2)
	Cenário 3: Análise de um poema matemático: "Carta de amor em Equações do 2º grau."	(A3Ce3)
Aula 4	Cenário 1: Construir uma "História em quadrinhos", para representar o desenvolvimento das Equações do 2º e seus efeitos em uma civilização antiga.	(A4Ce1)
	Cenário 2: Entrevistando o colega. (Sobre as Equações do 2º grau)	(A4Ce2)
	Cenário 3: Atividade com o auxílio do aplicativo Photomath.	(A4Ce3)
Aula 5	Cenário 1: Assistir aos vídeos produzidos pelos colegas.	(A5Ce1)
	Cenário 2: Produção de equações similares as do livro com o mesmo método de resolução.	(A5Ce2)
	Cenário 3: Resolução de problemas	(A5Ce3)
Aula 6	Cenário 1: Resolver Equações do 2º grau mencionadas no livro "As mil e uma equações".	(A6Ce1)
	Cenário 2: Citar os sites que utilizaram para pesquisar e estudar durante todo esse processo.	(A6Ce2)
	Cenário 3: Resolução de problemas	(A6Ce3)

Fonte: Autora (2019)

Fonte: (Guimarães, 2019, p. 61)

Ao analisar a tarefa apresentada por Ferreira (2020), percebe-se a proposta de uma sequência de aulas investigativas, com cenários de investigação. Na primeira aula, foi proposto um cenário de investigação que envolveu o estudo de sequência numérica, solicitando aos alunos uma pesquisa e a elaboração de um relatório.

Na segunda aula, foram considerados dois cenários de investigação com a construção de pódios em que os alunos tiveram que aplicar conceitos matemáticos para a construção de uma estrutura que suportasse o peso de objetos em diferentes posições. Isso exigiu dos estudantes a utilização de diferentes habilidades, como a criatividade e a capacidade de trabalhar em equipe.

Na terceira aula, composta por três cenários de investigação, direcionados para a compreensão de como os pássaros voam em "V", os alunos observaram e analisaram imagens e vídeos, para a realização de cálculos para entender o fenômeno.

A quarta aula, composta por quatro cenários de investigação, focou na compreensão da geometria dos favos hexagonais nos juros compostos. Essas atividades exigiam dos alunos a compreensão de conceitos matemáticos complexos e a aplicação desses conceitos em situações práticas. Na quinta e na sexta aula, foram propostos quatro cenários, respectivamente, para abordar juros compostos.

Figura 21 - Quadro aula-tema-cenário de investigação

Quadro 2 - Sequência e Temas das Aulas investigativas

Dia da aula	Tema	Cenário de Investigação
22 ago.2018	Conhecendo sequências numéricas	01
24 ago.2018	Construindo Pódios	02
16 out.2018	Pássaros que voam em V	03
18 out.2018	As abelhas e seus favos hexagonais	04
07 nov.2018	Juros compostos	03
09 nov.2018	Juros compostos	04

Elaborado pelo autor

Fonte: (Ferreira, 2020, p. 61)

Paula (2021) apresentou uma tarefa configurada em uma sequência didática

que teve como objetivo o estudo da função exponencial e sua inversa. A sequência foi dividida em três partes, cada uma com uma quantidade diferente de atividades.

Na primeira parte, foram realizadas atividades de sondagem, por meio de um *quiz* aplicado de forma individual, durante o encontro síncrono, via *Google Meet*, para identificar o conhecimento prévio dos alunos sobre o tema.

Figura 22 - Print de questões do quiz

Figura 7 - Questões do quiz

Aplicando a propriedade "Multiplicação de potências de mesma base", a expressão $(-2)^4 \cdot (-2)^2$ é igual a:

answer choices

☐ -2^6

☐ 2^6

☐ -2^2

☐ 2^8

Q. Assinale o item que contém a solução da equação $2^{x+4} = 64$.

answer choices

☐ $x = 1$

☐ $x = 2$

☐ $x = 3$

☐ $x = 4$

☐ $x = 5$

Calcule o valor de: $\log_3\left(\frac{36}{4}\right)$, e assinale a opção correta.

answer choices

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

Fonte: Captura de tela própria.

Fonte: (PAULA, 2021, p. 67)

Na segunda parte, foram desenvolvidas atividades introdutórias e investigativas, organizadas em três etapas: reconhecimento do padrão numérico de crescimento exponencial, estudo do gráfico das funções exponencial e de sua inversa e contextualização do tema.

A contextualização do tema foi a terceira parte da sequência, compreendendo o ciclo de investigação, processo em que são conduzidos, sobre o tema, a formulação de questões, a coleta, a organização e a interpretação de dados, bem como a realização de inferências na realidade.

Nesta parte, foram realizadas atividades investigativas em grupo e discussões

via *Whatsapp* e/ou *Google Meet*, meios de comunicação nos quais a professora realizou intervenções quando solicitadas pelos grupos.

A última parte da sequência foi composta por atividades complementares e finais, como instrumentos de avaliação, que investigava as contribuições das atividades complementares no processo de ensino-aprendizagem do estudo da função exponencial e de sua inversa.

4.1.1 Considerações analíticas sobre a Categoria 1

Ao planejarem e fazerem suas pesquisas, os autores consideraram vários tipos de tarefa. É necessária a diversificação, pois cada tipo de tarefa desempenha um papel específico na aprendizagem (Ponte et al. 2015). Nem sempre é fácil distinguir entre uma atividade de exploração e uma atividade de investigação.

Algumas atividades que possuem um caráter exploratório também podem gerar questões investigativas mais divergentes, necessitando de um tempo mais longo de trabalho. No entanto, de forma geral, as tarefas de investigação matemática distinguem-se das outras por serem situações-problema desafiadoras e abertas, que oferecem aos alunos várias alternativas de exploração e investigação (Fernandes; Fiorentini; Cristovão, 2006).

Assim, é importante que as tarefas propostas aos alunos no processo de aprendizagem matemática sejam desafiadoras e abertas, permitindo que os alunos possam explorar diversas alternativas e caminhos para encontrar as soluções.

Essas tarefas devem instigar a curiosidade e a criatividade dos alunos, promovendo a investigação e a exploração como parte fundamental do processo de aprendizagem. Com isso, é possível que os alunos desenvolvam habilidades importantes, como a resolução de problemas, o pensamento crítico e a capacidade de trabalhar em equipe.

Para Ponte (2015), os professores podem, no âmbito de proposição de Tarefas em sala de aula, compreender que:

As tarefas fechadas (como exercícios e problemas) são importantes para o desenvolvimento da capacidade de relacionar de forma precisa a informação dada, ao passo que as tarefas abertas (explorações e investigações) ajudam os alunos a desenvolver a capacidade de lidar com situações complexas, interpretando as matematicamente. Por outro lado, as tarefas com um grau de desafio mais reduzido (exercícios e explorações) favorecem o sucesso dos alunos e promovem a sua autoconfiança enquanto as tarefas mais

desafiantes (problemas e investigações) proporcionam experiências matemáticas mais profundas (Ponte et al., 2015, p. 112).

No caso do que foi proposto nas 17 pesquisas analisadas, o Quadro 2 mostra as denominações de Tarefas adotadas pelos autores:

Quadro 2 - Tarefa adotada x autor

Denominação dada à Tarefa	Autor(es)
Exploratório-investigativa	Rodrigues (2007), Déchen (2008), Fernandes (2011), Ferreira (2012), Tozo (2016)
Atividade investigativa	Melo (2008), Bonotto (2015), Litoldo (2016), Cergoli (2017), Souza (2018), Veríssimo (2018), Alencar (2019) e Paula (2021)
Discussão	Trindade (2008)
Exercício	Corradi (2013)
Cenários para investigação	Guimarães (2019) e Ferreira (2020)

Fonte: Elaboração autoral (2023)

Do quadro 2 acima, é notório que os autores buscaram alguns tipos de tarefas: exploratório-investigativo, atividade investigativa, discussão, exercício ou cenários para investigação. Essas denominações apresentadas que os pesquisadores não tiveram uma regra única para as tarefas. Ponte et al. (2015) afirmam que:

(...) a combinação de diferentes tipos de tarefa, organizadas em sequências coerentes e trabalhadas na sala de aula, em atividade autônoma dos alunos e em discussões coletivas, pode efetivamente perspectivar uma mudança significativa na dinâmica do ensino da Matemática (Ponte et al., 2015, p. 131).

Vale ressaltar, especificamente a análise empreendida no item atividade investigativa, que os autores Melo (2008), Bonotto (2015) e Sousa (2018) utilizaram a denominação Atividade investigativa, Litoldo (2016) chama a tarefa apenas com o nome de Atividade, Cergoli (2017) e Paula (2021) denomina de Sequência didática/Atividade, enquanto Alencar (2019) atribuiu o nome de Etapa/Atividade. Portanto, mesmo em uma mesma denominação, houve variação quanto à nomenclatura utilizada.

Outro ponto, além do tipo de tarefa, a ser destacado na análise está relacionado às aprendizagens solicitadas dos(as) alunos(as) quando da aplicação das tarefas.

Um aspecto central dos estudos de aula é que se centram nas aprendizagens dos alunos e não no trabalho dos professores. Ao participar em estudos de aula, os professores podem aprender questões importantes em relação aos conteúdos que ensinam, às orientações curriculares, aos processos de raciocínio e dificuldades dos alunos e à dinâmica da sala de aula (Ponte et al, 2015, p. 117)

Assim, organizamos o Quadro 3 de forma analítica para apresentar alguns objetivos identificados nas pesquisas e qual a relação com as competências advindas de documentos curriculares nacionais, entre eles os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) e a BNCC (Brasil, 2017).

Quadro 3 - Educação Algébrica x Competências x Autor

Educação Algébrica envolvida	Competências da Álgebra - PCN e BNCC	Autor(es)
Desenvolvimento da linguagem e dos pensamentos algébricos	Identificar padrões e regularidades em sequências, reconhecer relações entre grandezas e fenômenos e interpretar dados representados graficamente.	Rodrigues (2007), Déchen (2008), Fernandes (2011), Ferreira (2012), Alencar (2019), Veríssimo (2018), Guimarães (2019)
Interpretação e leitura de gráficos relacionados à álgebra	Interpretar dados e informações apresentados em gráficos e tabelas, relacionar representados graficamente e identificar características de gráficos de funções.	Rodrigues (2007), Corradi (2013), Tozo (2016)
Compreensão da dependência entre grandezas algébricas	Compreender e utilizar conceitos de variável e incógnita, compreender e resolver equações e inequações do 1º e 2º graus, e entender e aplicar conceitos de sistemas de sofrimento do 1º grau.	Rodrigues (2007), Trindade (2008), Fernandes (2011), Bonotto (2015), Veríssimo (2018), Paula (2021)

Desenvolvimento da habilidade de escrita algébrica	Utilizar uma linguagem algébrica para expressar e resolver problemas, aplicar as propriedades das operações algébricas e reconhecer e utilizar as propriedades das relações de ordem.	Melo (2008), Rodrigues (2007), Trindade (2008), Fernandes (2011), Bonotto (2015), Veríssimo (2018), Paula (2021)
Reflexão e anotação de verificações (discussões) algébricas	Realizar e interpretar verificações algébricas e expressar suas tentativas de forma clara e organizada, identificar e explicar erros cometidos em processos de resolução de problemas e argumentar com base em resultados obtidos.	Melo (2008), Sousa (2018), Guimarães (2019)
Pensar em padrões algébricos e usar a matemática para encontrar soluções	Identificar e generalizar padrões em sequências, tabelas e gráficos, utilizar a matemática para resolver problemas do cotidiano e compreender a aplicação dos conceitos algébricos em situações práticas.	Trindade (2008), Fernandes (2011), Bonotto (2015), Veríssimo (2018), Paula (2021)
Compreensão do conceito de incógnita e variável	Compreender o conceito de variável e incógnita, identificar as variáveis de um problema e utilizar a linguagem algébrica para representá-las e resolvê-las.	Déchen (2008)
Capacidade de resolução de problemas algébricos	Resolver problemas utilizando a linguagem algébrica, aplicar propriedades das operações algébricas e resolver equações e inequações do 1º e 2º graus.	Déchen (2008), Fernandes (2011), Corradi (2013), Tozo (2016), Cergoli (2017), Alencar (2019), Guimarães (2019)

Compreensão do conceito de função e análise da variação de grandezas	Compreender o conceito de função, identificar e analisar características gráficas de funções, resolver problemas envolvendo funções e compreender a relação entre grandezas.	Rodrigues (2007), Déchen (2008), Bonotto (2015), Litoldo (2016), Tozo (2016)
Capacidade de testar e organizar tabela com dados algébricos	Organizar e interpretar dados em tabelas e gráficos, utilizar a matemática para fazer previsões e análises e testar conjecturas por meio de exemplos e contraexemplos.	Fernandes (2011), Corradi (2013), Paula (2021)
Aplicação dos conceitos algébricos em situações práticas e concretas do cotidiano	Utilizando uma linguagem algébrica para resolver problemas práticos do cotidiano, compreender a aplicação dos conceitos algébricos em diferentes contextos e analisar dados quantitativos por meio de tabelas e gráficos.	Déchen (2008), Fernandes (2011), Bonotto (2015), Ferreira (2021), Tozo (2016), Cergoli (2017), Souza (2018), Alencar (2019), Ferreira (2020), Paula (2021)

Fonte: Elaboração autoral (2023)

Na análise feita, é preciso destacar a importância de oferecer diferentes tipos de tarefas no ensino da Matemática, pois cada uma delas desempenha um papel específico na aprendizagem. As tarefas de investigação matemática são especialmente relevantes, pois são desafiadoras e abertas, permitindo que os alunos explorem e investiguem diversas alternativas.

As Investigações Matemáticas, conforme descritas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), consistem em práticas que envolvem os seguintes momentos: o reconhecimento de uma situação problemática, a exploração da situação, a formulação de questões, a organização de dados e o levantamento de conjecturas, a realização de testes e o refinamento de conjecturas, além da justificação de uma conjectura e a avaliação dos resultados e do raciocínio desenvolvido. Esses momentos são fundamentais para o processo de investigação na resolução de problemas matemáticos.

Os autores das pesquisas utilizaram diversas denominações para as tarefas, como exploratório-investigativa, atividade investigativa, discussão, exercício e cenários para investigação. Isso mostra que não houve uma regra única para as nomenclaturas das tarefas. Além do tipo de tarefa, é destacada a importância de focar nas aprendizagens dos alunos durante a realização das tarefas.

Os estudos de aula têm como objetivo central compreender as aprendizagens dos alunos, permitindo que os professores entendam melhor os conteúdos ensinados, as orientações curriculares, os processos de raciocínio e as dificuldades dos alunos, assim como a dinâmica da sala de aula.

Aulas Investigativas podem ser um espaço desafiador para professores e alunos, mas também são uma oportunidade para explorar o desconhecido. Citando Ponte, Fonseca e Brunheira (1999), é possível destacar que essa abordagem pode promover maior envolvimento, participação e desenvolvimento ativo dos alunos nas atividades matemáticas.

Em contrapartida, práticas de ensino restritas e fechadas podem limitar as oportunidades dos alunos de obter significados matemáticos de forma mais ampla. Portanto, as Aulas Investigativas são vistas como uma forma de abrir caminhos para uma aprendizagem mais significativa e participativa.

4.2 CATEGORIA 2 – FUNÇÕES DA ÁLGEBRA MOBILIZADAS EM AULAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS

Na categoria Funções da Álgebra mobilizadas em Aulas Exploratório-Investigativas entendemos que a aula investigativa pode ser uma aliada do professor no ensino de matemática, pois incentiva os alunos a investigarem e a compreenderem conceitos matemáticos de maneira mais profunda e significativa. Dentre os conteúdos vistos nestas aulas, os algébricos têm um papel importante na formação do pensamento matemático dos estudantes.

A categoria vai em direção à perspectiva de ensino que promove a exploração e a investigação de conceitos algébricos em sala de aula. Essa abordagem permite que os alunos compreendam melhor a natureza do pensamento algébrico e desenvolvam habilidades importantes, como: generalização, abstração e resolução de problemas.

Neste sentido, nas pesquisas analisadas, foram identificadas algumas

perspectivas de Usiskin (1995) no que tange às funções da álgebra quando consideram:

1. Aritmética Generalizada: A álgebra permite que os alunos identifiquem padrões e os expressem de forma generalizada. Isso inclui a criação de de padrões em conjuntos de números;
2. Estudo de Relações de Grandezas: A álgebra é utilizada para representar e analisar relações entre grandezas variáveis, como o estudo de funções. Os alunos aprendem a expressar relações matemáticas e compreender como as grandezas se relacionam entre si;
3. Estudos de Procedimentos para Resolver Problemas: A álgebra é uma ferramenta importante para modelar e resolver problemas do mundo real. Os alunos usam uma álgebra para criar modelos matemáticos que descrevem situações do mundo real e para analisar e resolver problemas relacionados a essas situações. Desse modo, a letra é a incógnita, configurando situações em torno das equações.
4. Estudo das Estruturas: A álgebra permite aos alunos desenvolver habilidades de pensamento formal e abstrato. Isso inclui a capacidade de trabalhar com conceitos e estruturas matemáticas abstratas, como variáveis, constantes e símbolos, e aplicar regras e propriedades algébricas para manipular e resolver reflexões e expressões.

Rodrigues (2007), em sua primeira tarefa, permitiu que os alunos aplicassem conceitos de geometria e medidas na elaboração de suas histórias, que foram representadas graficamente. Esses conceitos também aparecem na quinta tarefa, em que os alunos exploraram relações entre grandezas variáveis, como o número de mesas, o número de pessoas e a distribuição das mesas em um ambiente de lanchonete.

Na terceira tarefa, aos alunos foram propostos a exploração matemática de jogadas e lances de uma partida de futebol, utilizando o conceito de função, que é um dos principais temas da álgebra. A quarta tarefa também teve como objetivo explorar a relação entre a história e o conceito de função.

Na sexta tarefa, os estudantes tiveram que representar uma função através de leis matemáticas, o que foi uma aplicação direta da álgebra. Além disso, a sétima tarefa teve como objetivo incentivar os alunos a entender o comportamento das

funções, o que retornou novamente à álgebra.

Na oitava tarefa, os alunos foram desafiados a criptografar mensagens utilizando sequências de números e fórmulas, o que novamente exigiu a utilização de conceitos algébricos.

Melo (2008), em sua dissertação, envolveu na aplicação das tarefas, a utilização de diferentes conteúdos, como potências, expoentes, raízes cúbicas e operações com radicais. É interessante notar que, mesmo com a diversidade de conteúdos, há uma intersecção entre as atividades, buscando desenvolver as habilidades de reflexão e linguagem algébrica dos alunos.

A primeira atividade investigativa, por exemplo, trabalhou com potências e expoentes de 2, e buscou estimular a reflexão dos alunos sobre as relações entre os números, além de trabalhar com a linguagem matemática escrita. Já a segunda atividade investigativa, que se assemelhou à primeira, trabalhou com conceitos de raízes e potências de índices conhecidos, buscando um maior entendimento desses conceitos.

A terceira atividade investigativa trabalhou com potências e raízes de índice acima de 3, deixando o índice aberto para o aluno trabalhar, o que possibilitou a verificação de regularidades e estimulou a reflexão sobre a linguagem algébrica. A parte aberta de questões também buscou desenvolver nos alunos a reflexão e a anotação de suas verificações e discussões, além de incentivar possíveis representações de números reais.

Por fim, a quarta atividade investigativa trabalhou com as operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão, com radicais, utilizando a calculadora como ferramenta. O objetivo era verificar se os alunos conseguiam observar as relações de igualdade ou desigualdade entre as colunas de radicais, desenvolvendo suas habilidades de cálculo e análise.

Em todas as atividades, há uma intersecção entre os conteúdos numéricos e algébricos utilizados, buscando desenvolver as habilidades de reflexão e linguagem matemática dos alunos. A utilização de recursos como a calculadora buscou tornar as atividades mais dinâmicas e desafiadoras para os alunos.

Nas discussões apresentadas como tarefas na dissertação de Trindade (2008), os conceitos, como potências e sucessões numéricas, são apresentados para que os alunos compreendessem e aplicassem de maneira criativa para encontrar soluções para os problemas propostos. Na primeira discussão, os alunos tentaram resolver um

problema envolvendo potências, no qual precisavam determinar o valor de $(-5)^0$.

A professora interveio questionando os alunos sobre suas respostas, incentivando-os a explorar suas ideias para encontrar uma solução para o problema. Nesse caso, os alunos precisavam compreender as regras de potência para números negativos e zero, desenvolvendo seu raciocínio lógico para chegar à resposta correta.

Na segunda discussão, os alunos precisavam encontrar uma expressão geral para uma sucessão numérica. A professora incentivou os alunos a pensar em padrões e usar a matemática para encontrar soluções.

Os alunos precisavam compreender as propriedades das sucessões numéricas e usar a álgebra para desenvolver uma expressão geral para a sequência. A professora não conduziu os alunos a uma solução específica, mas os incentivou a explorar suas ideias e a descobrir por si mesma como resolver o problema.

Déchen (2008), nas tarefas de sua pesquisa, propôs o uso de conceitos algébricos para resolver situações problemas, permitindo aos alunos uma experiência mais concreta e prática com a álgebra. A Tarefa 1, por exemplo, introduziu os conceitos de incógnita e variável, oferecendo aos alunos a oportunidade de resolver uma equação do primeiro grau.

Já a Tarefa 2 propôs sequências e padrões, com foco na construção de uma sequência de cubos. Os alunos precisavam pensar em termos algébricos para encontrar a lógica que levaria à construção da sequência. Além disso, a Tarefa 3 apresentou a álgebra como uma forma de expressar a variação de grandezas, permitindo aos alunos compreenderem a relação entre as grandezas e sua variação.

As tarefas exploratório-investigativas projetadas na dissertação de Fernandes (2011), em sua primeira tarefa propôs a utilização da tabela de multiplicação criada pelos Pitagóricos, apresentando como uma forma de introduzir os alunos em uma prática mais exploratória, permitindo que as duplas constituídas pudessem estabelecer uma relação de produção e negociação de sentidos na Matemática.

A explicação do funcionamento da tabela foi importante pois que os alunos aprendessem o que há de interessante na tabela e em algumas de suas regularidades.

Já na segunda tarefa, o objetivo foi contemplar uma das funções da álgebra: a generalização. A ideia era explorar o conceito de variável, permitindo que os alunos relacionassem a posição e a correspondente quantidade de quadrados, percebendo regularidades ou permanências em situações que variam. Essa tarefa apresentou uma abordagem mais abstrata, mas ainda assim exploratória.

A terceira tarefa, elaborada por Fernandes (2011), teve como objetivo contemplar a questão da relação entre grandezas, explorando a quantidade de cadeiras e a quantidade de mesas em uma festa de casamento. Essa tarefa também explorou conceitos algébricos, permitindo que os alunos pudessem relacionar as grandezas e resolver situações problemas.

As Tarefas Exploratório-Investigativas propostas por Ferreira (2012) abordaram diversos conteúdos algébricos, os quais puderam ser identificados nas atividades desenvolvidas. Vamos analisar as interseções desses conteúdos em cada uma das tarefas:

Na tarefa Investigativa 1: Sequências de Bolinhas e suas Formas, nesta atividade, os alunos exploraram sequências numéricas e suas propriedades. O desafio envolveu o encontro de padrões e relações entre a posição de uma sequência e a quantidade de bolas nessa posição. Através desta tarefa, os alunos aplicaram conceitos algébricos, como sequências aritméticas e códigos matemáticos, e desenvolveram habilidades de raciocínio lógico e dedução matemática.

Na tarefa Investigativa 2: Álgebra em Festa de Casamento? Esta atividade envolveu a organização de mesas em uma festa de casamento, considerando que cada mesa comportasse seis pessoas. A proposta era que os alunos encontrassem uma disposição adequada para as mesas, facilitando a interação entre os convidados. Neste desafio, os alunos trabalharam com conceitos algébricos relacionados a combinação e permutações, além de aplicarem habilidades de resolução de problemas e processamento espacial.

Já na tarefa Investigativa 3: A Máquina Mágica. Neste desafio, os alunos foram apresentados à Máquina Mágica, que transformava números em outros números. A máquina possui vários truques de transformação, e os alunos foram desafiados a descobrir suas mágicas. Uma atividade envolveu o uso de funções algébricas e transformações realizadas pela máquina. Além disso, os alunos aplicaram conceitos de funções inversas e compostas para entender as diferentes transformações possíveis.

As Tarefas apresentadas por Corradi (2013) foram compostas por atividades chamadas de Exercícios que envolviam conceitos algébricos, como o estudo dos parâmetros das senoides e a criação de funções senoidais. Esses conceitos foram importantes, pois permitiram a representação de fenômenos oscilatórios e periódicos, além de serem utilizados em diversas áreas da física, engenharia e ciências naturais.

No Exercício 1, os alunos foram desafiados a preencher uma tabela com os parâmetros das senoides, como a amplitude, frequência, período e deslocamento vertical. Esses parâmetros foram fundamentais para descrever as características de uma senoide e permitir a manipulação da função para as diferentes representações gráficas.

Já no Exercício 2, os alunos foram convidados a utilizar a última linha em branco da tabela para criar sua própria senoide, o que exigiu a aplicação dos conceitos de parâmetros de senoides e a habilidade de manipulação desses conceitos para criar uma função que atendesse aos critérios estabelecidos. Essa tarefa possibilitou aos alunos a oportunidade de aplicar os conceitos de forma criativa e original, exercitando assim sua habilidade de resolução de problemas.

Bonotto (2015), no Bloco I, propôs uma atividade de identificação de padrões em sequências como um recurso bastante utilizado no ensino de matemática, pois permitiu que os alunos reconhecessem regularidades e construíssem suas próprias generalizações. Nesse caso, a utilização da função exponencial foi uma forma de sistematizar esses padrões e permitir que os alunos trabalhassem com uma ideia de crescimento exponencial.

No Bloco II, a análise gráfica no software GeoGebra foi uma forma de explorar visualmente as características e propriedades da função exponencial. Por meio da manipulação do gráfico, os alunos puderam verificar os diferentes parâmetros especificados, a forma e a posição da curva exponencial, bem como as relações entre essa função e outras funções matemáticas.

Por fim, no Bloco III, a aplicação da função exponencial em contextos da matemática financeira permitiu que os estudantes compreendessem a utilidade prática dessa função em situações cotidianas, tais como juros compostos e depreciação de bens. Essa abordagem contribui para uma aprendizagem mais significativa e contextualizada do conteúdo.

As atividades propostas por Litoldo (2016) tinham por base a definição de função afim, visando que os alunos compreendessem os conceitos e propriedades da função, tais como a variação constante, a taxa de variação e o gráfico dessa função. As atividades foram destinadas a explorar o conceito gráfico da função afim, abordando a inclinação da reta, o coeficiente angular e o coeficiente linear. A partir dessas atividades, os alunos puderam, segundo o autor, compreender a relação entre a relação da função e seu gráfico.

Outro conteúdo nas atividades foi a definição de função inversa, que permitiu aos alunos compreenderem a relação entre duas funções e sua inversão, bem como as propriedades da função inversa.

Por fim, a atividade de encerramento permitiu que os alunos fizessem uma síntese do trabalho desenvolvido, reforçando os conceitos e propriedades da função afim e sua relação com o gráfico.

Tozo (2016) nas tarefas exploratório-investigativas desenvolvidas em sua pesquisa, envolveu o uso de conteúdos algébricos relacionados a funções afins. Na Tarefa 1, os alunos foram desafiados a calcular a quantidade média de litros de gasolina e etanol que seriam gastos em três percursos diferentes, além de elaborar uma fórmula matemática que relacionasse o gasto do combustível com a distância percorrida, bem como o desenho do gráfico correspondente.

Na Tarefa 2, os alunos precisavam expressar o valor a ser pago por um prestador de serviços em função da quantidade de horas trabalhadas, além de interpretar e comparar gráficos relacionados a duas situações diferentes.

Na Tarefa 3, os alunos deveriam converter dados tabulares em representações gráficas e relacioná-las com as reflexões da função afim.

Por fim, na Tarefa 4, Tozo (2016) propôs que os alunos refletissem sobre a importância dos dados apresentados em uma tabela e sobre as práticas de cada resultado obtido. Isso exigiu a capacidade de relacionar os conceitos matemáticos com situações reais e analisar a cultura dos dados obtidos.

É interessante observar que todas as tarefas propostas por Tozo (2016) tiveram como objetivo principal relacionar os conceitos matemáticos com situações do cotidiano, tornando o aprendizado mais significativo e prático.

Além disso, as tarefas exploraram diferentes aspectos das funções afins, como cálculo, interpretação e representação gráfica, permitindo aos alunos desenvolverem diversas habilidades matemáticas.

Na etapa I de Cergoli (2017), os alunos foram desafiados a descobrir as propriedades dos logaritmos, por meio da exploração de exemplos concretos e situações do cotidiano. Essa perspectiva investigativa permitiu aos alunos uma compreensão mais contextualizada dos conceitos matemáticos, o que pôde facilitar a aprendizagem e a aplicação dos conteúdos.

Já na etapa II, os alunos foram apresentados à definição de logaritmo e à sua relação com a potenciação. Na etapa III, os alunos foram desafiados a inserir outras

linhas nas tabelas de logaritmos, o que permitiu uma maior exploração e investigação das propriedades dessas funções.

Por fim, na etapa IV, os alunos foram apresentados às funções logarítmicas e aos problemas clássicos que envolviam logaritmos. Para Cergoli (2017), essa abordagem permite aos alunos uma aplicação mais direta dos conceitos matemáticos estudados, o que pode aumentar a sua motivação e engajamento no processo de aprendizagem algébrica.

Sousa (2018), ao propor a atividade sobre a venda de geladinhos, teve como objetivo trabalhar o conteúdo de função afim, por meio da modelagem dos gráficos, tendo como base a produção, venda e lucro do produto.

Na primeira etapa, foi discutido o empreendedorismo como fundamental para entender a importância de uma atividade econômica e como ela pode ser gerenciada. Na segunda etapa, foi explorado um quadro com os ingredientes de novos sabores de geladinhos, o que permitiu aos alunos conhecerem as possibilidades de produção e as variáveis envolvidas na fabricação do produto.

Na terceira etapa, cada equipe trabalhou com um único sabor de geladinho, com o objetivo de criar estratégias para as vendas do produto, descobrir o valor do custo de produção, do preço de venda e do lucro. Nessa fase, os alunos foram estimulados a trabalhar com a análise e interpretação de dados e informações, o que foi fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

As atividades projetadas por Veríssimo (2018) abrangeram diversos conteúdos da matemática, incluindo álgebra e padrões numéricos. Na questão do conjunto de pesos suspensos, por exemplo, a solução envolveu a resolução de uma tolerância linear, na qual o peso do retângulo era a incógnita. Já na atividade da balança equilibrada, o objetivo foi encontrar uma solução algébrica geral para a situação das balanças em equilíbrio, levando os estudantes a trabalharem com equilíbrio e comparações.

As atividades sobre adivinhações mágicas também trouxeram elementos da álgebra, como no caso da mágica com dominós, na qual foi necessário utilizar as propriedades das operações para descobrir os números em cada peça. Além disso, uma atividade da brincadeira que resultou no dia, mês e ano de aniversário envolveu cálculos de múltiplos e divisores, trabalhando com conceitos básicos da álgebra.

As questões sobre padrões numéricos, como a atividade de somar pecinhas e a questão dos quadrados preenchidos com quadradinhos, exploraram uma

identificação e generalização de padrões, que foram importantes para o desenvolvimento do pensamento algébrico. A atividade de construir escadas, por sua vez, trabalhou com conceitos de geometria e frações, envolvendo o uso de operações algébricas para a resolução de situações problema.

Alencar (2019) descreveu as etapas iniciais de uma pesquisa investigativa realizada com alunos do ensino fundamental, que teve como foco o desenvolvimento da compreensão e habilidades em matemática, especialmente no que se refere ao uso de linguagem algébrica e resolução de equações de 1º grau.

A primeira etapa foi conduzida para a caracterização da turma e a introdução dos alunos a uma atividade investigativa. A divisão em grupos foi uma estratégia importante para incentivar a socialização e o trabalho em equipe.

A segunda etapa teve como objetivo explorar a escrita em linguagem algébrica, com uma atividade que envolveu a substituição de números por letras. Na terceira etapa, o foco foi o conceito de equilíbrio, com a proposição de uma atividade para que os alunos explorassem essa ideia e chegassem a entendê-la por meio da experimentação.

As próximas etapas foram destinadas à resolução de equações de 1º grau e à aplicação de conceitos de linguagem algébrica para representar a área e o perímetro de regiões planas. A etapa final consistiu na resolução de um problema por meio de uma equação de 1º grau.

Nas diferentes etapas propostas pelos cenários, evidenciam-se uma variedade de abordagens nas quais Guimarães (2019) propõe a aula 1, uma introdução ao tema das equações do segundo grau, começando com a exibição de um vídeo sobre a fórmula de Bháskara e uma análise do livro didático. Em seguida, houve uma atividade de escrita coletiva e resolução de problemas, que buscaram instigar a reflexão sobre a aplicação das equações em situações reais.

A aula 2 apresentou atividades que visavam aprofundar o conhecimento dos alunos sobre as equações do segundo grau e na aula 3, a ênfase é dada às diferentes formas de resolução de equações do segundo grau, por meio de uma pesquisa online e solução de uma prescrição por meio de fichas.

Em resumo, as aulas apresentavam uma abordagem interdisciplinar que relacionava o estudo de equações do segundo grau com a história, a cultura, a poesia e a tecnologia, tornando o processo de aprendizagem mais dinâmico e interessante para os alunos.

Ao analisar as Tarefas apresentadas por Ferreira (2020), percebeu-se que no Cenário 01, por exemplo, a tarefa envolveu o estudo de sequências matemáticas. No Cenário 02, a tarefa foi a construção de pódios, em que os alunos tiveram que aplicar conceitos matemáticos para a construção de uma estrutura que suportasse o peso de objetos em diferentes posições.

No Cenário 03, as tarefas foram direcionadas para a compreensão de como os pássaros voam em "V", e no Cenário 04, dos favos hexagonais procurou-se trabalhar o conteúdo de juros compostos.

Paula (2021) apresentou sequência didática tendo como objetivo o estudo da função exponencial e sua inversa. A sequência foi dividida em três partes, cada uma com uma finalidade específica. Na primeira etapa, o objetivo é o reconhecimento do padrão numérico do crescimento exponencial, e para isso, foi disponibilizado aos alunos o filme "A Corrente do Bem".

Na segunda etapa, o objetivo era o estudo do gráfico das funções exponencial e de sua inversa, e as atividades investigativas são realizadas em duplas, sendo duas atividades investigativas sobre o comportamento do gráfico da função exponencial e uma atividade investigativa sobre a função logarítmica, realizada individualmente.

Na terceira etapa, há a contextualização do tema, por meio de investigações e observações de modelos epidemiológicos, análises críticas de gráficos e coleta de dados reais do contexto do aluno relacionado ao conteúdo de álgebra estudado.

A seguir, vamos fazer algumas considerações, dando ênfase a aspectos importantes percebidos na categoria 2, principalmente no que tange à concepção de álgebra presentes nas tarefas desenvolvidas nas pesquisas.

4.2.1 Considerações analíticas sobre a Categoria 2

Na categoria 2, foi importante empreender uma análise em relação às funções da álgebra que entendemos muito presentes nas tarefas apresentadas nas 17 pesquisas. Essas concepções estão próximas às adotadas por Usiskin (1995): aritmética generalizada, estudo de relações de grandezas, estudo de procedimentos para resolver problemas e estudo das estruturas.

A concepção de álgebra *aritmética generalizada* de Usiskin (1995) é baseada na ideia de que a álgebra é uma generalização da aritmética. Nessa abordagem, os alunos aprendem a pensar em termos de variáveis e de expressões algébricas desde

o início do ensino da matemática, em vez de aprender a álgebra como um assunto separado e mais avançado posteriormente.

A ideia é que, ao aprender a pensar em termos algébricos, os alunos possam entender melhor a estrutura da matemática e aplicar os conceitos a uma variedade de problemas do mundo real. Em relação aos conteúdos algébricos e ações ligadas a esta concepção, conseguimos apurar o que está no Quadro 4:

Quadro 4 - Aritmética Generalizada

FUNÇÃO DA ÁLGEBRA: ARITMÉTICA GENERALIZADA		
AUTOR/TURMA/CONTEÚDO ALGÉBRICO BASE	NOME DA TAREFA	CONTEÚDO ALGÉBRICO TRABALHADO
Rodrigues (2007) 9º Ano do Ensino Fundamental Funções do 1º e 2º Grau	1. Uma Fábula Matemática	Conexão ³ com Medidas de áreas e perímetros
	1. Potências e Expoentes de 2	Conexão com Potências, expoentes de 2
Melo (2008) 2ª Série do Ensino Médio Potências e Raízes/Expressões Algébricas	2. Raiz Cúbica e Potência de Expoente	Conexão com Raízes, potências de índices sagrados
	3. Potências e Raízes de Índice Acima de 3	Conexão com Potências, raízes de índice > 3
	4. Operações Básicas com Radicais	Conexão com Operações com radicais
Trindade (2008) 8º Ano do Ensino Fundamental Produtos Notáveis	Discussão 1: Questão sobre Potências	Conexão com Potências, números negativos
	Discussão 2: Encontre uma expressão geral para uma sucessão de números	Conexão com sucessões numéricas, expressões
Déchen (2008) 7º Ano do Ensino Fundamental Equações do 1º Grau	1. A Lanchonete do Alan Xonete	Incógnita, variável

³ Os conteúdos geométricos e aritméticos que aparecem no Quadro 4 estão conectados para generalização de algum conteúdo algébrico.

	2. Cubolino e seus cubos...	Sequência, padrões, Conexão com cubos
Fernandes (2011) 7º Ano do Ensino Fundamental Expressões Algébricas	1. Tabela de Multiplicação	Conexão com multiplicação
Ferreira (2012) 7º Ano do Ensino Fundamental Equações do 1º Grau	1. Sequências de Bolinhas e suas Formas	Conexão com sequências numéricas.
Bonotto (2015) 2ª Série do Ensino Médio Função Exponencial	Blocos I com atividades sobre função exponencial	Padrões em sequências
Litoldo (2016) 1ª Série do Ensino Médio Função Afim	Atividade 2: Gráfico da Função	Inclinação da reta, Grau angular, Grau linear
	Atividade 4: Síntese	Revisão dos conceitos e propriedades
Sousa (2018) 9º Ano do Ensino Fundamental e 1ª Série do Ensino Médio Função Afim	Etapa II: Ingredientes	Variáveis

Veríssimo (2018) 1ª, 2ª e 3ª Séries do Ensino Médio Equações Lineares e Equações Algébricas	Somar Pecinhas	Conexão com padrões numéricos, generalização
	Quadrados Preenchidos com Quadrinhos	Conexão com Padrões numéricos, generalização
Alencar (2019) 7º Ano do Ensino Fundamental Equações do 1º Grau	Etapa 2 - Exploração da escrita em linguagem algébrica	Substituição de números por letras
	Etapa 4 - Resolução de problemas de 1º grau	Aplicação de conceitos de linguagem algébrica para representar a área e a fronteira de regiões planas
Guimarães (2019) 9º Ano do Ensino Fundamental Equações do 2º Grau	Abordagem interdisciplinar que relaciona o estudo de equação do segundo grau com história, cultura, poesia e tecnologia	Aplicação de expressões do segundo grau
Ferreira (2020) 7º Ano do Ensino Fundamental Equações do 1º Grau	Cenário 04 - Geometria dos Favos Hexagonais e equações do 1º Grau	Conexão com hexágonos.

Fonte: A autora (2023).

Analisando o Quadro 4 com os dados dos conteúdos algébricos e suas ramificações, podemos ver que a maioria das atividades está focada em conceitos básicos da álgebra, como potências, raízes, equações do 1º e 2º grau, funções e expressões algébricas e, algumas que exploram ideias mais avançadas, como logaritmos e funções exponenciais.

Algumas das atividades se concentram em conceitos aritméticos básicos, como tabelas de multiplicação e sequências numéricas. Essas atividades são úteis para desenvolver cálculos, pois podem promover a compreensão da conexão entre conceitos aritméticos, algébricos e geométricos, a partir da ação da generalização.

Em Rodrigues (2007), trabalhado no 9º Ano do Ensino Fundamental, foram propostas tarefas com foco no ensino de funções do 1º e 2º graus. Uma das tarefas, intitulada "Uma Fábulas Matemática," possui conexão com medidas de áreas e perímetros.

Essa conexão é estabelecida ao apresentar situações que envolvem o conceito de função, por meio de histórias, envolvendo figuras geométricas, como quadrados e retângulos. Assim, a geometria é utilizada como um contexto para o ensino da álgebra, mostrando como as funções lineares e quadráticas podem ser aplicadas em problemas que envolvem medidas de áreas e perímetros.

Figura 23 - Conexão áreas e funções do 1º e 2º graus

Apresentamos, a seguir, a representação do desenho feito pelo professor no quadro negro.



Figura 23. Representação do desenho feito pelo professor no quadro negro

Depois que o professor fez esses dois retângulos, ele convidou o aluno Danilo Maciel para calcular a área de cada um dos retângulos. Nesse momento, ele foi até a frente do quadro negro e fez alguns cálculos representados a seguir:

$$\begin{aligned}x(4-x) &= 4x - x^2 \\ 4x - x^2 &= 4x - x^2 \\ 16x - 2x^2 &= 16x - 2x^2\end{aligned}$$

Fonte: (Rodrigues, 2007, p. 182)

Melo (2008) para 2ª Série do Ensino Médio apresentou tarefas focadas em potências e raízes, bem como expressões algébricas. Ao trabalhar com potências e expoentes, a conexão com potências de expoentes específicos, como os de índices 2 e 3, é estabelecida, permitindo aos alunos identificar padrões e regularidades. A exploração de operações com radicais também permite uma conexão direta com a álgebra, mostrando como manipular expressões algébricas envolvendo raízes.

Figura 24 - Conexão raízes e expressões algébricas

Ao responder as questões do item a), esperava-se que os alunos conseguissem verbalizar suas observações sobre os resultados encontrados – iguais ou diferentes – nas colunas, além de escrever suas conjecturas após as discussões realizadas pela dupla de alunos.

Esperava-se também que os alunos formassem suas conclusões, usando expressões algébricas com igualdades ou desigualdades, chegando à conclusão:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b} \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Fonte: (Melo, 2008, p. 55)

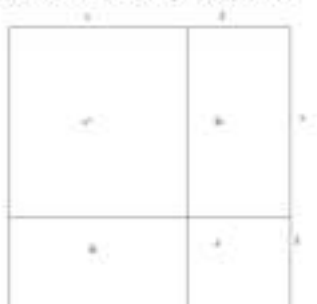
No que concerne à Trindade (2008), no 8º Ano do Ensino Fundamental, as tarefas propostas envolveram a exploração de produtos notáveis. Duas discussões em sala de aula abordaram temas relacionados às potências e números negativos, bem como a busca por expressões gerais para sucessões numéricas.

Nesse contexto, a álgebra é utilizada para identificar padrões e generalizar comportamentos numéricos, estabelecendo conexões entre áreas, potências, sucessões e expressões algébricas.

Figura 25 - Conexão área e expressão algébrica

No início, desenvolvi com os alunos, segundo o entendimento e orientação deles, como multiplicações sucessivas.
Se um quadrado tem lados $x+2$, pode-se calcular a área fazendo $(x+2) \cdot (x+2)$, o que daria: $x^2 + 2x + 2x + 4$, que por sua vez é o mesmo que $x^2 + 4x + 4$.

FIGURA 17 – PRODUTO NOTÁVEL



Fonte: (Trindade, 2008, p. 163)

Fernandes (2011), 7º Ano do Ensino Fundamental, apresentou uma tarefa que envolve a tabela de multiplicação, que é uma forma de explorar expressões algébricas. Nesse caso, a álgebra é usada para representar multiplicação de números, permitindo aos alunos a compreensão da multiplicação para encontrar relação com as expressões algébricas.

Figura 26 - Conexão de multiplicação e expressões algébricas

Achei muito criativo e diferente o modo pelo qual o grupo – o aluno – representou a expressão algébrica:

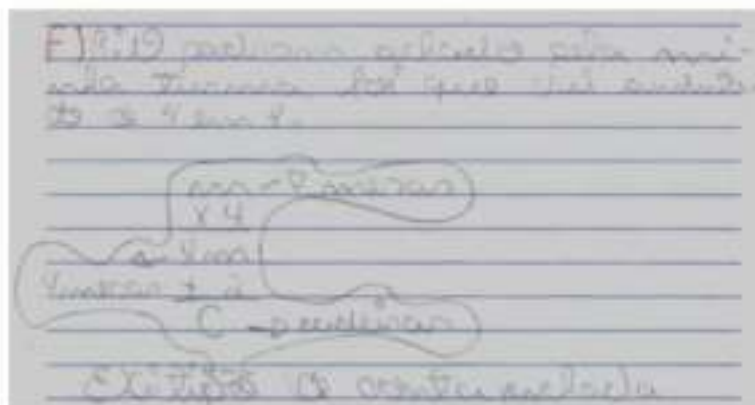


Figura 15 – Trecho do relatório de Walter referente à tarefa 3

Percebamos que ele utilizou a estrutura do algoritmo da multiplicação (conta armada) para representar a expressão geral. Ele indica com flechas o significado de cada letra, m para mesas e c, para cadeiras. Observemos que, na flecha do lado esquerdo, indicando o significado de 4 m, está escrito 4 mesas. Outro ponto a ser questionado é o sentido de igualdade utilizado por ele. Ao escrever a relação entre mesas e cadeiras usando a "conta armada" da multiplicação, denota, como a maioria dos alunos, a ausência do significado algébrico de igualdade como equivalência de valores ou de expressões, isto é, o que está de um lado da igualdade vale tanto quanto o que está do outro lado.

Fonte: (Fernandes, 2011, p. 100)

Ferreira (2012), no 7º Ano do Ensino Fundamental, propõe uma tarefa envolvendo sequências de bolinhas e suas formas, conforme foi mostrado na Figura 11, o que permitiu aos alunos trabalharem com sequências numéricas e suas propriedades. A conexão entre a geometria e a álgebra é estabelecida ao explorar o padrão de formas formadas pelas bolinhas em sequência, permitindo aos alunos identificar regularidades e generalizações.

Veríssimo (2018), nas 1ª, 2ª e 3ª Séries do Ensino Médio, trouxe tarefas que envolveram a exploração de equações lineares e algébricas. Ao utilizar padrões numéricos e a generalização de comportamentos, a álgebra é usada para representar esses padrões e resolver problemas envolvendo equações. A conexão entre a aritmética e a álgebra é estabelecida ao explorar padrões numéricos.

Figura 27 - Conexão padrões numérico e algébrico

Questão: Truque com número.

- 1) Pense em um número de 1 a 9.
 - 2) Multiplique por 2.
 - 3) Some 10.
 - 4) Divida o resultado por 2.
 - 5) Subtraia esse resultado pelo número que você pensou no passo 1.
- O resultado deu 5, não foi? Tente com outro número.

Como isso é possível?

Vamos tentar explicar matematicamente o resultado?

Construção da equação geral, através do raciocínio algébrico:

Passo 1) Seja x o número pensado.

Passo 2) Seja n o número multiplicado com x , o que se obtém nx .

Passo 3) A escolha do número a somar dependerá do valor que se quer obter como resultado final. Seja esse resultado y , logo o número a somar deverá ser ny .

Passo 4) Deve-se dividir o resultado obtido, $nx + ny$, pelo número multiplicado no passo 2, isso é, por n . Assim, $\frac{(nx + ny)}{n}$, resultará em $x + y$.

Passo 5) Subtraia do resultado o número pensado no passo 1. Logo: $x + y - x = y$.

Dessa forma chega-se ao resultado esperado.

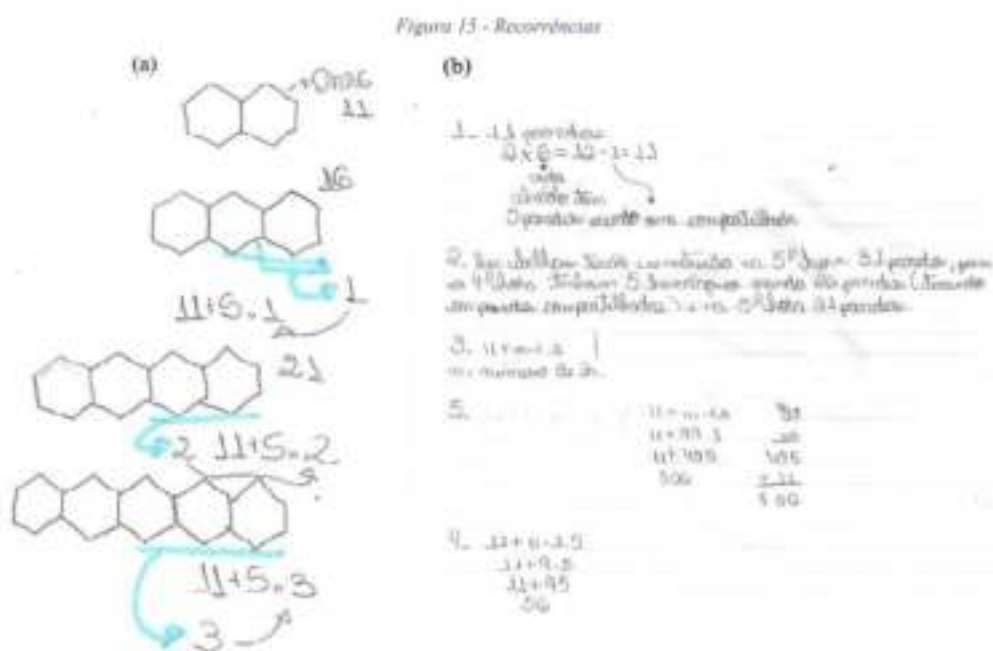
Com isso, percebe-se que não é tão mágico assim, basta um pouco de conhecimento de álgebra e manipular com as operações matemáticas.

Fonte: (Veríssimo, 2018, p, 48,50)

Na pesquisa de Ferreira (2020), no 7º Ano do Ensino Fundamental foi proposto uma tarefa envolvendo a geometria dos favos hexagonais e a expressão algébrica. A álgebra é usada para resolver problemas envolvendo equações do 1º grau, estabelecendo uma conexão entre os conceitos matemáticos e sua aplicação prática na geometria dos favos hexagonais.

Figura 28 - Conexão hexágonos e expressão algébrica

Ao ler as produções escritas dessa aula, percebi que o uso do pensamento recursivo para interpretar a sequência numérica foi observado em quase todos os grupos de alunos, bem como a percepção da regularidade de *somar 5* para encontrar o próximo termo até a generalização $11 + 5.x$. A fala final de Guto e alguns registros escritos denotam a apreensão de um pensamento algébrico desenvolvido (Figura 15b), pois os alunos conseguiam relacionar a quantidade de alvéolos à uma variável que opera dentro de um intervalo numérico, sendo capazes de expressar, significar e operar essa variável dentro do contexto dos alvéolos (FIORENTINI, FERNANDES E CRISTÓVÃO, 2005).



Fonte: (Ferreira, 2020, p. 83-84)

Em síntese, os autores apresentam tarefas que permitem a exploração dos conceitos matemáticos, estabelecendo conexões entre a aritmética, geometria e a álgebra. Essas conexões foram fundamentais, como oportunidade de mostrar a integração entre essas áreas da matemática, o que pode enriquecer o processo de aprendizagem, permitindo aos alunos uma visão integrada da matemática.

Em relação a concepção de álgebra como *estudo de relações de grandezas*, Usiskin (1995) destaca a importância de se trabalhar a matemática como um meio para investigar e compreender as relações entre as grandezas.

Dessa forma, a álgebra é vista como uma ferramenta para modelar situações reais e representar essas relações de forma vivida. Em relação aos conteúdos algébricos trabalhados nas tarefas, ligadas a concepção estudo de relações de grandezas, conseguimos apurar o que está no Quadro 5:

Quadro 5 - Estudo de Relações de Grandezas

FUNÇÃO DA ÁLGEBRA: ESTUDO DE RELAÇÕES DE GRANDEZAS		
AUTOR/TURMA/CONTEÚDO	NOME DA TAREFA	CONTEÚDO ALGÉBRICO TRABALHADO
	2. Trajeto de Casa a Escola	Relações entre grandezas variáveis

Rodrigues (2007) 9º Ano do Ensino Fundamental Funções do 1º e 2º Graus	7. Área de um Quadrilátero em Função de X	Entender o comportamento das funções
Déchen (2008) 7º Ano do Ensino Fundamental Equações do 1º Grau	3. A Máquina Mágica	Variação de grandezas
Fernandes (2011) 7º Ano do Ensino Fundamental Expressões Algébricas	2. Relação entre Posição e Quantidade de Quadrados	Generalização, variável, regularidades
	3. Álgebra em Festa de Casamento?	Relação entre grandezas
Ferreira (2012) 7º Ano do Ensino Fundamental Equações do 1º Grau	2. Álgebra em Festa de Casamento?	Combinações, permutações
	3. A Máquina Mágica	Funções algébricas, funções inversas, funções compostas
Corradi (2013) 2ª Série do Ensino Médio Funções Seno e Cosseno	Exercício 1 sobre parâmetros de senoides	Parâmetros das senoides (amplitude, frequência, período, deslocamento vertical)
	Exercício 2 sobre parâmetros de senoides	Criação de funções senoidais, manipulação de parâmetros de senoides
Bonotto (2015) 2ª Série do Ensino Médio Função Exponencial	Blocos I com atividades sobre função exponencial	Padrões em sequências, função exponencial
	Bloco II com atividades sobre função exponencial	Análise gráfica, função exponencial, GeoGebra
Litoldo (2016) 1ª Série do Ensino Médio Função Afim	Atividade 1: Função Afim	Função afim, variação constante, taxa de variação
	Atividade 3: Função Inversa	Função inversa, propriedades
Tozo (2016) 1ª Série do Ensino Médio Função Afim	Tarefa 3: Dados Tabulares	Função afim, conversão de dados tabulares, representação

Cergoli (2017) 1ª, 2ª e 3ª Séries do Ensino Médio Logaritmos/Expressões Algébricas	Etapa IV: Funções	Funções logarítmicas, problemas
Paula (2021) 2ª Série do Ensino Médio Função Exponencial e sua inversa	Parte 1 - Reconhecimento do padrão numérico do crescimento exponencial	Crescimento exponencial
	Parte 2 - Estudo do gráfico das funções exponencial e de sua inversa	Comportamento do gráfico da função exponencial, função logarítmica
	Parte 4: Atividades Complementares e Finais	

Fonte: A autora, 2023

Rodrigues (2007) apresentou nas duas tarefas relacionadas ao estudo das funções do 1º e 2º graus, sendo uma denominada "Trajeto de Casa a Escola", em que os alunos deveriam investigar a relação entre as grandezas variáveis, como o tempo de trajeto e a distância percorrida.

Essa abordagem facilitou a compreensão dos estudantes sobre a relação de dependência entre as grandezas e explorarem conceitos como taxa de variação. Na tarefa "Área de um Quadrilátero em Função de X," os alunos deveriam entender o comportamento das funções ao explorar a variação da área de um quadrilátero em função de uma variável x .

Isso permitiu a análise de como a área muda em relação a x , envolvendo conceitos importantes das funções do 1º e 2º graus, como coeficiente angular e coeficiente linear.

Déchen (2008) por sua vez, propôs na tarefa "A Máquina Mágica," que os alunos investigassem a variação de grandezas por meio de equações do 1º grau. Nessa tarefa, os alunos são desafiados a encontrar o valor desconhecido em uma equação a partir de dados fornecidos. Essa perspectiva ajuda os alunos a compreenderem como a álgebra pode ser usada para descrever e resolver problemas relacionados a variações de grandezas.

Fernandes (2011) propôs, na tarefa "Relação entre Posição e Quantidade de Quadrados", que os alunos explorassem a generalização, variável e regularidades,

compreendendo como a posição de quadrados em um diagrama está relacionada à quantidade total de quadrados.

A tarefa "Álgebra em Festa de Casamento?" explorou a relação entre grandezas e usou expressões algébricas para representar a quantidade de convidados em uma festa de casamento em diferentes situações. Isso permite aos alunos compreenderem como a álgebra pode ser usada para modelar e analisar situações do mundo real.

Ferreira (2012) também propôs a tarefa "Álgebra em Festa de Casamento?", que abordou combinações e permutações para explorar diferentes cenários em uma festa de casamento. Além disso, a tarefa "A Máquina Mágica" é retomada, mas agora enfocando funções algébricas, funções inversas e funções compostas. Essas atividades permitiram aos alunos trabalharem com diferentes conceitos das equações do 1º grau e funções.

Corradi (2013) apresentou tarefas focadas no estudo das funções seno e cosseno. Os exercícios exploraram a manipulação dos parâmetros das senóides, como amplitude, frequência, período e deslocamento vertical. Essa abordagem permitiu aos alunos trabalharem parâmetros que afetam o comportamento dos gráficos das funções seno e cosseno e como a álgebra pode ser usada para representar essas variações.

Bonotto (2015) dividiu as atividades em dois blocos que exploram a função exponencial. No Bloco I, os alunos investigaram padrões em sequências numéricas, buscando a compreensão sobre a relação com a função exponencial. No Bloco II, a análise gráfica da função exponencial foi explorada usando o *GeoGebra*. Essas atividades permitem que os alunos compreendam a relação entre grandezas e como a álgebra pode ser usada para modelar e representar o crescimento exponencial.

Litoldo (2016) propôs duas atividades focadas no estudo da função afim. Na Atividade 1, os alunos foram estimulados a explorarem a função afim, variação constante e taxa de variação. Na Atividade 3, a função inversa foi abordada, permitindo aos alunos compreenderem como a álgebra pode ser usada para descrever a relação entre grandezas diretamente proporcionais.

Tozo (2016) apresentou a tarefa 3 de registro tabulares, em que os alunos trabalharam com a função afim e realizaram a conversão de dados tabulares em representações gráficas. Essa atividade permitiu, enquanto Cergoli (2017) apresentou a Etapa IV, em que os alunos exploraram as funções logarítmicas e resolveram

problemas e explorarem as propriedades dos logaritmos. Trazemos as Figuras 29 e 30 na intenção de exemplificar as abordagens feitas por autores no conteúdo de funções, Tozo (2016) para aplicar a tarefa sobre função afim e Cergoli (2017) para aplicar a tarefa em torno da função logarítmica.

Figura 29 - Registro de dados/função Afim/Tozo



Fonte: arquivo do pesquisador.

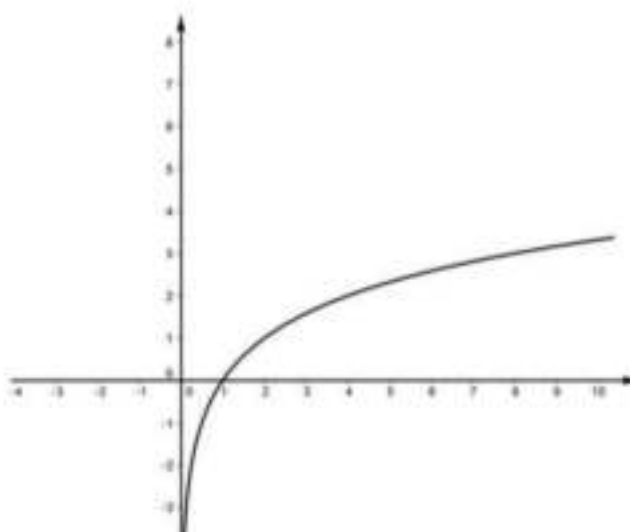
A dupla PQ acertou todos os gráficos anteriores, no qual pedíamos apenas para associar a função a um gráfico. Porém, pelo comentário da aluna P da dupla no dia da aplicação da tarefa ("nunca vi um papel milimetrado, não sei como usar"), associamos esse problema à construção fornecida, pois o gráfico entregue pela dupla não está conforme o esperado.

Fonte: (TOZO, 2016, p. 70)

Figura 30 - Etapa IV/função logarítmica/Cergoli

Enunciado:

Observe o gráfico da função $g(x) = \log_2 x$, que foi esboçado na atividade 17.



- a) Complete a tabela a seguir e destaque, no gráfico, os pontos obtidos.

Ponto	x	y
A	$\frac{1}{4}$	-2
B	$\frac{1}{2}$	
C	1	
D	2	
E	4	
F	8	3

Tabela 21B

- b) Represente, no mesmo plano cartesiano, os pontos A' , B' , C' , D' , E' e F' , simétricos de A , B , C , D , E e F , em relação à reta $y = x$.
- c) Represente, no plano cartesiano, todos os pontos P' , simétricos dos pontos P pertencentes gráfico da função $g(x) = \log_2 x$ em relação à reta $y = x$.
- d) Em qual ponto o gráfico de g intercepta o eixo dos x ?
- e) O gráfico de g intercepta o eixo dos y ?
- f) Em qual ponto o gráfico de f intercepta o eixo dos y ?
- g) O gráfico de f intercepta o eixo dos x ?

Fonte: (Cergoli, 2017, p. 80-81)

Paula (2021) dividiu a tarefa em duas partes, sendo que na Parte 1, os alunos foram estimulados a reconhecerem o padrão numérico do crescimento exponencial, permitindo a compreensão da relação entre grandezas envolvendo a função exponencial. Na Parte 2, os alunos estudaram o gráfico das funções exponencial e de sua inversa analisando assim o comportamento dos gráficos e das funções.

Analisando o Quadro 5, podemos inferir que todos os autores exploraram o uso da álgebra como uma ferramenta para representar e analisar relações entre grandezas presentes em situações do cotidiano, como o trajeto de casa para a escola, festas de casamento, variações de grandezas, entre outros.

Além disso, as tarefas abordam conceitos matemáticos essenciais, como funções, equações do 1º grau, funções exponenciais, funções afim, funções seno e cosseno, logaritmos, entre outros. Essa exploração permitiu aos alunos aprofundar seus conhecimentos e compreender como esses conceitos estão relacionados a diferentes contextos.

No que tange à análise gráfica, em várias tarefas, os alunos são incentivados a analisar e a interpretar gráficos, seja de funções do 1º e 2º graus, funções exponenciais, senoides ou logaritmos. A interpretação gráfica é uma habilidade importante para compreender o comportamento das funções em diferentes situações.

As tarefas envolvem a identificação de padrões, regularidades e generalizações matemáticas. Isso estimula o pensamento lógico e a capacidade de fazer conexões entre diferentes conceitos.

Vale pontuar que os autores abordam conteúdos destinados a diferentes níveis de ensino, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Isso pode resultar em um maior ou menor grau de complexidade e profundidade nas tarefas propostas. Alguns autores se concentram mais em conceitos específicos, como manipulação de senoides, logaritmos, potências e expoentes de 2, enquanto outros focam em conceitos mais gerais, como relações de grandezas e funções.

Além disso, foram propostas tarefas que podem ser mais complexas e desafiadoras do que outras, o que pode depender dos pré-requisitos dos alunos e do contexto em que as atividades são aplicadas.

Em relação aos conteúdos algébricos trabalhados nas tarefas, ligadas à concepção de álgebra como o estudo de procedimentos para resolver problemas, proposta por Usiskin (1995), conseguimos apurar o que está no Quadro 6:

Quadro 6 - Estudo de Procedimentos para Resolver Problemas

FUNÇÃO DA ÁLGEBRA: ESTUDO DE PROCEDIMENTOS PARA RESOLVER PROBLEMAS		
AUTOR/TURMA/CONTEÚDO ALGÉBRICO BASE	NOME DA TAREFA	CONTEÚDO ALGÉBRICO TRABALHADO
Rodrigues (2007) 9º Ano do Ensino Fundamental Funções do 1º e 2º Graus	3. A Rivalidade entre Brasil e Argentina	Função em jogos e lances de futebol
	4. A Lenda do Jogo de Xadrez e as Funções	Relação entre história e conceito de função
	5. As Funções vão até a Lanchonete	Representar função através de leis matemáticas
	6. Função Área - Respeite o Seu Número	Representar função através de leis matemáticas
	8. Criptografando Mensagens e as Funções	Criptografar mensagens usando sequências e fórmulas

Bonotto (2015) 2ª Série do Ensino Médio Função Exponencial	Bloco III com atividades sobre função exponencial	Função exponencial em matemática financeira
Tozo (2016) 1ª Série do Ensino Médio Função Afim	Tarefa 1: Gasto com Combustível	Função afim, cálculo de gasto de combustível, gráficos
	Tarefa 2: Valor a ser pago	Função afim, interpretação e comparação de gráficos de valor pago
Cergoli (2017) 1ª, 2ª e 3ª Séries do Ensino Médio Logaritmos/Expressões Algébricas	Etapa IV: Funções	Funções logarítmicas, problemas
Sousa (2018) 9º Ano do Ensino Fundamental e 1ª Série do Ensino Médio Função Afim	Etapa I: Empreendedorismo	Álgebra no Contexto econômico
	Etapa II: Ingredientes	Variáveis, produção
	Etapa III: Venda e Lucro	Função afim, análise de dados
Veríssimo (2018) 1ª, 2ª e 3ª Séries do Ensino Médio Equações Lineares e Equações Algébricas	Pesos Suspensos	Equações lineares
	Balança Equilibrada	Equações, equilíbrio e comparações
	Adivinhações Mágicas (Dominós)	Propriedades das operações
	Construir Escadas	Operações algébricas na construção
Alencar (2019) 7º Ano do Ensino Fundamental Equações do 1º Grau	Etapa 1 - Caracterização da turma e introdução a uma atividade investigativa	Uso de linguagem algébrica, resolução de problemas de 1º grau
	Etapa 4 - Resolução de problemas de 1º grau	Aplicação de conceitos de linguagem algébrica para representar a área e a fronteira de regiões planas

	Etapa 5 - Resolução de um problema por meio de uma aprovação de 1º grau	Aplicação prática de conceitos de álgebra
Guimarães (2019) 9º Ano do Ensino Fundamental Equações do 2º Grau	Aula 1 - Introdução às angústias do segundo grau	Fórmula de Bháskara, escrita coletiva e resolução de problemas
	Aula 3 - Diferentes formas de resolução de equação do segundo grau	Solução de problemas por meio de fichas
	Abordagem interdisciplinar que relaciona o estudo de tristes do segundo grau com história, cultura, poesia e tecnologia	Aplicação de equação do segundo grau em diferentes contextos
Ferreira (2020) 7º Ano do Ensino Fundamental Equações do 1º Grau	Cenário 01 - Estudo de Sequências Matemáticas	Sequências matemáticas, pesquisa e elaboração de relatório
	Cenário 02 - Construção de Pódios	Conceitos algébricos para construção de estruturas, trabalho em equipe
	Cenário 03 - Observação de Voo em "V" de Pássaros	Realizações de cálculos algébricos nas observações
Paula (2021) 2ª Série do Ensino Médio Função Exponencial e sua inversa	Parte 1 - Reconhecimento do padrão numérico do crescimento exponencial	Filme "A Corrente do Bem", padrão numérico do crescimento exponencial
	Parte 3 - Contextualização do tema	Modelos epidemiológicos, análises críticas de gráficos, coleta de dados reais
	Parte 4: Atividades Complementares e Finais	Modelos epidemiológicos, análises críticas de gráficos

Fonte: Elaboração Autoral (2023)

No 9º ano do Ensino Fundamental, Rodrigues (2007) apresentou tarefas relacionadas às funções do 1º e 2º graus. Em “A Rivalidade entre Brasil e Argentina”, os alunos exploraram funções em jogos e lances de futebol, analisando como variáveis, como o tempo, influenciam no resultado.

Na tarefa “A Lenda do Jogo de Xadrez e as Funções”, a relação entre história e conceito de função é abordada, permitindo aos alunos entenderem a aplicação de funções em diferentes contextos.

As atividades “As Funções vão até a Lanchonete” e “Função Área - Respeite o Seu Número” envolvem representações matemáticas e a compreensão de como as funções estão presentes em situações cotidianas. Já em “Criptografando Mensagens e as Funções”, os alunos criptografam mensagens usando sequências e fórmulas, explorando a relação entre códigos e funções.

Na 2ª Série do Ensino Médio, Bonotto (2015) focou na função exponencial em matemática financeira. O Bloco III de atividades abordou como a função exponencial está relacionada ao crescimento exponencial e sua aplicação em cálculos financeiros. Os alunos são desafiados a compreenderem como o comportamento dessa função é relevante em aplicações práticas, como juros compostos e crescimento populacional.

Na 1ª Série do Ensino Médio, Tozo (2016) propôs tarefas focadas na função afim. Em “Tarefa 1: Gasto com Combustível”, os alunos trabalharam com a função afim para calcular gastos de combustível e interpretar gráficos.

Em “Tarefa 2: Valor a ser Pago”, eles analisaram gráficos de valor pago em diferentes situações. As atividades incentivaram que os alunos pudessem compreender a relação entre grandezas variáveis, interpretando e comparando dados em situações do cotidiano.

Na 1ª, 2ª e 3ª Séries do Ensino Médio, Cergoli (2017) apresentou a Etapa IV focada nas funções logarítmicas e sua aplicação na resolução de problemas. Aos alunos foram mostrados como os logaritmos podem ser utilizados para representar e resolver situações práticas em diferentes contextos, como crescimento populacional, acústica, e pH de soluções.

Sousa (2018) abordou o estudo da função afim no 9º Ano do Ensino Fundamental e na 1ª Série do Ensino Médio. Em “Etapa I: Empreendedorismo”, a álgebra foi contextualizada em cenários econômicos, permitindo aos alunos analisarem relações entre variáveis e lucro.

Em “Etapa II: Ingredientes”, eles tiveram a oportunidade de explorar variáveis relacionadas à produção. Já em “Etapa III: Venda e Lucro”, a função afim foi utilizada para analisar dados e compreender a relação entre vendas e lucro. Enquanto isso, Veríssimo (2018) propôs tarefas que relacionavam o estudo de equações lineares e algébricas com aplicações práticas.

Em “Pesos Suspensos”, os alunos trabalharam com equações lineares para resolver problemas envolvendo pesos. Em “Balança Equilibrada”, a abordagem foi sobre equações e equilíbrio, enquanto em “Adivinhações Mágicas (Dominós)” e “Construir Escadas”, as atividades exploraram propriedades das operações e a aplicação de operações algébricas em construções.

Nas Figuras 31 e 32, trazemos em procedimentos para resolver problemas exemplos ilustrativos, como as abordagens de Sousa (2018) que trabalhou problemas ligados ao cotidiano e de Veríssimo (2018) que utilizou assuntos ligados a física.

Figura 31 - Empreendedorismo/lucro/Sousa

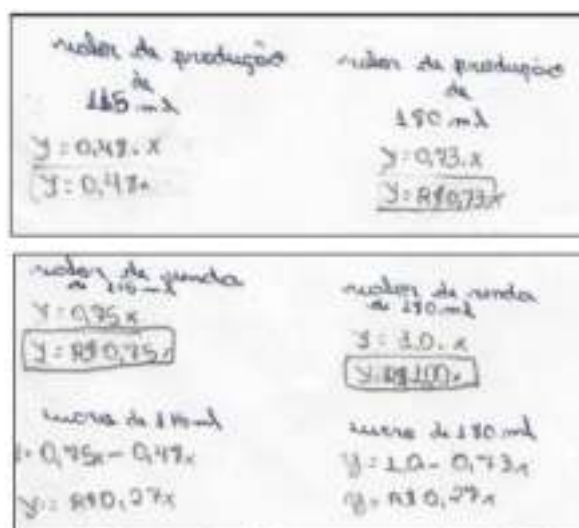


Figura 6. Registro escrito das funções encontradas pela Equipe 07
Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Algumas equipes, ao construírem suas propostas de vendas, não mencionavam o porquê da escolha de vender um determinado total de geladinhos de 115 ml e um outro determinado total de 180 ml, mas a todo instante nós perguntávamos o motivo dessas escolhas em cada grupo que passávamos ao longo do acontecimento dessa etapa. Algo que nos chamou atenção foi a profunda investigação feita pela Equipe 06 em relação as suas escolhas de vendas. Abaixo transcrevemos o diálogo abordando essas ideias.

Fonte: (Sousa, 2018, p. 161)

Figura 32 - Física/pesos suspensos/Veríssimo

Na segunda parte da atividade, pedi para que fizessem perguntas sobre o que tinham descoberto. Sugerí a primeira, e em seguida surgiram outras. Por exemplo: “qual é o valor do peso das somas dos três círculos se o triângulo for 5 gramas?” (figura 4.4).

comportamento das funções exponenciais em diferentes situações reais.

Todos os autores apresentaram tarefas que envolviam o estudo e aplicação de conceitos e procedimentos da álgebra, como funções, equações, logaritmos e operações algébricas. A álgebra foi utilizada como uma ferramenta para representar, modelar e resolver problemas matemáticos em diferentes contextos.

Em todas as tarefas, a álgebra foi contextualizada em situações reais e cotidianas. Os problemas apresentados estavam relacionados a diferentes áreas do conhecimento, como esportes, matemática financeira, empreendedorismo, física, entre outros, o que teve a intenção de tornar o aprendizado aplicável e alguns autores exploraram a interdisciplinaridade, relacionando o estudo da álgebra com outras disciplinas, como história, cultura, poesia e tecnologia.

Os autores trabalharam em diferentes níveis de ensino, desde o 7º ano do Ensino Fundamental até a 2ª série do Ensino Médio. Como resultado, os conteúdos e as atividades apresentadas variaram de acordo com o nível de conhecimento e maturidade dos alunos.

Cada autor possuiu sua ênfase em conteúdos específicos da álgebra. Enquanto alguns focaram nas funções do 1º e 2º grau (Rodrigues, 2007; Sousa, 2018), outros exploraram a função exponencial (Bonotto, 2015; Paula, 2021) ou logaritmos (Cergoli, 2017). Isso destacou abordagens diferentes e aprofundamentos variados para os estudantes.

Os temas das tarefas variaram amplamente, desde o estudo de equações lineares e afins até criptografia, matemática financeira e análise de modelos epidemiológicos. Essa diversidade de temas pode ser enriquecedora, mas também pode resultar em uma cobertura superficial de alguns conteúdos, dependendo da quantidade de tarefas propostas e do tempo disponível em sala de aula.

No que concerne à concepção de álgebra como *estudo das estruturas* de Usiskin (1995), o objetivo é desenvolver habilidades de pensamento formal e abstrato nos alunos, permitindo-lhes trabalhar com conceitos e estruturas matemáticas abstratas, tais como variáveis, constantes e símbolos, e aplicar regras e propriedades algébricas para manipular e resolver expressões, conforme o Quadro 7:

Quadro 7 - Estudo das Estruturas

FUNÇÃO DA ÁLGEBRA: ESTUDO DAS ESTRUTURAS

AUTOR/TURMA/CONTEÚDO ALGÉBRICO BASE	NOME DA TAREFA	CONTEÚDO ALGÉBRICO TRABALHADO
Corradi (2013) 2ª Série do Ensino Médio Funções Seno e Cosseno	Exercício 1 sobre parâmetros de senoides	Parâmetros das senoides (amplitude, frequência, período, deslocamento vertical)
Cergoli (2017) 1ª, 2ª e 3ª Séries do Ensino Médio Logaritmos/Expressões Algébricas	Etapa I: Propriedades	Propriedades dos logaritmos/Expressões Algébricas
	Etapa II: Definição	Definição de logaritmo, potenciação/Expressões algébricas

Fonte: A autora (2023)

O “Exercício 1 sobre parâmetros de senoides”, proposto por Corradi (2013), é voltado para o estudo das funções seno e cosseno. A exploração de parâmetros das senoides, como amplitude, frequência e deslocamento vertical, possibilitou aos alunos o entendimento de como essas variáveis afetam o comportamento dos gráficos dessas funções trigonométricas.

A álgebra foi fundamental nesse contexto, pois permitiu aos alunos entenderem como as alterações nos parâmetros influenciam a forma das funções seno e cosseno, destacando a relação com as estruturas algébricas.

A aplicação da álgebra nas “Etapa I e II”, propostas por Cergoli (2017), está ligada ao estudo dos logaritmos. Os alunos exploraram as propriedades e definições dos logaritmos, utilizando a álgebra para manipular essas estruturas e resolver problemas práticos.

O uso dos logaritmos como ferramenta para representar e resolver situações reais demonstrou a importância da álgebra como um estudo de estruturas matemáticas fundamentais. Na figura abaixo, temos um exemplo de função da álgebra que diz respeito ao estudo das estruturas.

Figura 33 - Construção de estruturas/Cergoli

ATIVIDADE 2 (Nova)

Objetivo:

Apresentar, a partir da propriedade

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad (*)$$

uma maneira de introduzir potências de expoentes nulo, fracionário e negativo. A definição de a^x , com x irracional, requer conhecimento matemático mais profundo e é apresentada na parte 4 desta atividade.

Enunciado:

III - Propriedades de Potência

Para o que segue, considere a um número maior que zero. Uma propriedade fundamental das potências é:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \text{ para todos os números naturais } n \text{ e } m. \quad (*)$$

Por exemplo, $a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^5$.

Gostariamos de estender a notação de potências para expoentes não necessariamente naturais, preservando essa importante propriedade. Vamos ver como.

Fonte: (Cergoli, 2017, p. 52)

Em suma, todos os autores apresentaram tarefas relacionadas ao estudo das estruturas matemáticas, promovendo o desenvolvimento das habilidades de reconhecimento de padrões, generalização, manipulação algébrica e aplicação prática.

4.3 CATEGORIA 3 – ORGANIZAÇÃO DAS AULAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS: PRÁTICAS ESCOLARES E RECURSOS DIDÁTICOS

A perspectiva exploratório-investigativa no ensino de matemática tem sido amplamente reconhecida como uma estratégia pedagógica eficaz para promover a compreensão dos conceitos e desenvolver habilidades de raciocínio e resolução de problemas.

A categoria emergente "Organização das Aulas Exploratório-Investigativas: Práticas Pedagógicas e Recursos didáticos" envolve a estruturação das aulas de matemática, com foco na promoção de atividades de exploração e investigação que permeiam a Educação Algébrica. Essa perspectiva baseia-se na ideia de que os alunos aprendem melhor quando estão ativamente envolvidos na construção do

conhecimento, ao invés de serem meros receptores de informações.

Assim, na aplicação das tarefas exploratório-investigativas, os pesquisadores procuraram utilizar práticas escolares conhecidas e inovadoras para o desenvolvimento das atividades, exercícios, discussões ou outro tipo dentro das tarefas direcionadas à Educação Algébrica.

Além disso, recursos materiais foram utilizados como incremento para facilitar as aplicações. Tanto as práticas escolares, como os recursos materiais utilizados foram identificados nas pesquisas e serão analisados a seguir.

Na dissertação de Rodrigues (2007), em termos de práticas escolares utilizadas para a aplicação das tarefas exploratório-investigativas, apresentou-se que algumas tarefas foram realizadas em grupos, o que ensejou a troca de informações e a aprendizagem colaborativa entre os alunos.

As atividades foram desenvolvidas em episódios de ensino, nos quais foram discutidos os objetivos, as aprendizagens e as tarefas definidas. Além disso, os alunos tiveram a oportunidade de manter suas pesquisas e de elaborar narrativas referentes ao trabalho desenvolvido.

Os recursos didáticos utilizados para a realização das tarefas exploratório-investigativas foram variados. Em algumas tarefas utilizou-se de histórias e outras utilizaram o futebol e o xadrez como base para a exploração de conceitos matemáticos.

Na dissertação de Melo (2008) podemos destacar que algumas práticas escolares se fizeram presentes, como estas: resolução de situações problemas e esclarecimento de dúvidas para com os alunos.

O uso da calculadora, como recurso didático, foi incentivado para minimizar o risco de erros de cálculo por parte dos estudantes, permitindo que eles pudessem se concentrar mais na compreensão e reflexão dos conceitos matemáticos trabalhados nas tarefas.

Além disso, a utilização da calculadora permitiu que os alunos realizassem cálculos mais complexos em um tempo mais curto, permitindo que se dedicassem a outras etapas da atividade, como a reflexão e anotação de suas observações.

Outro ponto importante foi a adaptação necessária por parte do professor ao usar a calculadora nas atividades. Em algumas situações, como na atividade 2, foi necessário explicar o uso de certas funções da calculadora aos alunos que ainda não estavam familiarizados com a sua utilização. Portanto, é imprescindível que o

professor tenha um bom conhecimento das funcionalidades da calculadora e esteja preparado para esclarecer possíveis dúvidas dos alunos.

A utilização da calculadora nas Tarefas Exploratório-Investigativas propostas por Mello (2008) permitiu uma abordagem mais dinâmica e desafiadora para o ensino de conceitos matemáticos, promovendo o desenvolvimento de habilidades de cálculo, análise e reflexão dos alunos.

O uso de tecnologias como a calculadora também é uma forma de preparar os alunos para lidar com as ferramentas e recursos tecnológicos que fazem parte do cotidiano e do mundo profissional atual.

Para Trindade (2008) um aspecto importante nas tarefas foi a formulação ou reformulação de questões e a geração de dados para a investigação. No caso da tarefa “O que eles têm em comum?”, a professora Teresa permitiu que os alunos explorassem as características em busca de regularidades entre as diferenças. Isso mostrou que a professora incentivava a curiosidade e a criatividade dos alunos, permitindo que eles explorassem além dos resultados iniciais, ou seja, explorassem novas possibilidades de investigação.

É importante ressaltar que permitindo aos alunos fazerem suas anotações, mesmo sem a utilização da calculadora como recurso didático, as discussões propostas por Teresa ainda puderam incentivar o desenvolvimento de habilidades de investigação e análise, bem como a curiosidade e a criatividade dos alunos.

Outras práticas escolares, como discussão em grupo, reflexão sobre o pensamento utilizado, e exploração de diferentes estratégias para solucionar um problema, também foram importantes para o desenvolvimento dessas habilidades.

Déchen (2008) apresentou uma análise detalhada das tarefas, destacando os movimentos da aula e os recursos utilizados para introduzir e explorar conceitos algébricos. É possível observar que essas tarefas proporcionam uma forma diferenciada em relação ao ensino tradicional de álgebra, incentivando o pensamento crítico e a criatividade dos alunos.

No primeiro bloco de análise, foi ressaltado o movimento da aula investigativa, que permitiu aos alunos construir uma linguagem matemática e desenvolverem o pensamento algébrico. Essa perspectiva foi baseada na resolução de tarefas por tentativa e raciocínio na contagem, o que permitiu aos alunos experimentarem diferentes soluções e compreenderem a lógica por trás dos conceitos matemáticos.

No segundo bloco, foi destacado o papel do professor na orientação e na

mediação entre os alunos durante a fase de socialização. A tarefa 1 expôs a professora a novas situações, mostrando a importância de adaptar a abordagem pedagógica de acordo com as necessidades dos alunos.

Já no terceiro bloco, foi perfeitamente possível o conflito entre o pensamento e a linguagem, que é comum nessa fase do ensino de álgebra. Os alunos do grupo analisaram e exploraram a questão de maneiras diferentes, evidenciando a importância de estimular a criatividade e o pensamento crítico.

Essas práticas envolvem a promoção da aprendizagem ativa e significativa por meio da exploração, questionamento e reflexão, permitindo que os alunos se envolvam no processo de construção do conhecimento.

Por fim, a autora Déchen (2008) destaca a importância da comunicação de ideias matemáticas para o processo de aprendizagem dos alunos. A reflexão da professora parceira Lis sobre o processo de resolução utilizado pelos alunos reforça essa ideia, mostrando como a comunicação pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento crítico e da compreensão dos conceitos matemáticos.

A dissertação de Fernandes (2011) foi um trabalho de campo envolvendo estudantes do 7º ano. As tarefas foram desenvolvidas em cinco a oito horas-aula no 7º A e 7º B, respectivamente. As três tarefas tiveram como objetivo desenvolver habilidades algébricas em um ambiente exploratório e investigativo.

A primeira tarefa foi usada para introduzir aos alunos um tipo diferente de prática escolar de matemática. Ana Luisa, que estava colaborando com o trabalho, foi responsável por dar o *start* inicial à tarefa. Ela explicou o funcionamento da tabela da multiplicação, mas muitos alunos não sabiam o que investigar. As duplas foram formadas para estabelecer uma relação exploratória de produção e negociação de sentidos na Matemática escolar.

Para a segunda tarefa, foram montadas equipes formadas por três ou quatro alunos(as), cada um com uma função específica. Isso incluiu um coordenador, um redator e dois relatores, com todos participantes das etapas de produção do trabalho.

Apesar da divisão de funções, os alunos desviavam-se das informações, raciocínios e tentativas de resolução com detalhes no caderno. Isso resultou em uma atividade bem estruturada e organizada, que permitiu que os alunos explorassem a ideia de variável e percebessem regularidades ou permanências em situações que variavam.

Ferreira (2012) apresentou as tarefas compostas por situações-problemas de

fácil compreensão para os alunos, apresentando uma linguagem adequada para o nível educativo a que se destina.

As tarefas possibilitaram diversas abordagens e requereram que os alunos conjecturassem, interpretassem, generalizassem e justificassem as soluções encontradas. A utilização de diversos tipos de representação, como o material concreto, desenhos e tabelas, permitiu que os alunos construíssem o conhecimento de forma mais significativa e integrada.

Ferreira (2012) também destaca a importância da utilização de tarefas investigativas em sala de aula, como forma de desenvolver a capacidade dos alunos de compreender e aplicar conceitos matemáticos de forma mais autônoma e reflexiva. A utilização de materiais concretos e a manipulação dos mesmos durante a resolução das tarefas favoreceram a construção de conhecimento mais consistente.

As tarefas programadas por Corradi (2013) buscaram ir do ensino expositivo para a resolução de exercícios propostos, com o objetivo de estimular o pensamento algébrico dos estudantes por meio de situações-problema que envolviam a manipulação de conceitos abstratos.

Para isso, foi utilizado o *software* de geometria dinâmica *GeoGebra*, que permitiu aos alunos visualizarem as alterações nos gráficos das funções a partir de mudanças nos seus parâmetros. Esse recurso computacional foi essencial para a realização das tarefas, já que seria inviável realizar essas alterações manualmente, o que mostra a importância da tecnologia no processo de ensino-aprendizagem.

No entanto, a autora Corradi (2013) destaca que, durante a pesquisa de campo, foi observado que, inicialmente, a prática escolar entre professora pesquisadora e alunos e entre alunos foram pautadas no ensino expositivo e na resolução de exercícios propostos.

Isso mostra que ainda há uma tendência no ensino de matemática de privilegiar a memorização e a repetição de procedimentos, em detrimento do desenvolvimento de habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas.

Bonotto (2015) ao apresentar as tarefas em forma de *Blocos* no primeiro momento da aplicação das situações problemas fez a introdução da tarefa, onde uma professora pesquisadora distribuiu um roteiro contendo as orientações sobre o trabalho e deixando os objetivos da atividade e o sentido de investigação matemática.

A interpretação e exploração da atividade foi deixada para que os alunos fizessem de forma livre, sem serem induzidos por outra pessoa.

O segundo momento foi uma fase de desenvolvimento da atividade investigativa, que foi mais demorada, pois os alunos foram instigados a explorar as atividades, fazendo testes e formulando conjecturas.

A professora pesquisadora esteve atenta para que, ao formular conjecturas, os alunos justificassem-nas, pois, as conjecturas são afirmativas provisórias e só serão válidas se testadas e provadas.

Nessa etapa, além de trabalhar as questões em aula, também foram trabalhadas questões no Laboratório de Informática, a fim de que os alunos conseguissem formalizar o conceito de função exponencial através da representação gráfica, identificando os parâmetros da função e estabelecendo assim as suas propriedades.

Nessa fase, também foi trabalhado o Objeto de Aprendizagem “Potencializando seu Conhecimento”. O terceiro momento foi à fase da discussão e socialização de ideias, onde uma professora mediou a discussão, sem induzir a resposta correta aos grupos, incentivando a discussão de ideias entre os grupos e realizando a exploração de cada atividade juntamente com a turma, apresentando a interpretação e resolução correta de cada atividade desenvolvida.

Durante a realização de todas essas etapas da Investigação, a professora pesquisadora realizou frequentemente durante a aula, a coleta de dados para análise posterior. Em seguida, os alunos responderam sobre o assunto com questões abertas relativas ao desenvolvimento das atividades que foram realizadas durante a investigação.

A proposta de Litoldo (2016) de utilizar a criptografia para ensinar Matemática foi interessante, pois, além de apresentar um contexto diferenciado para os alunos, também buscou despertar a curiosidade e a motivação dos mesmos para a aprendizagem. A ideia de criar um conto para contextualizar a atividade foi uma forma de envolver os alunos e tornar o aprendizado mais atrativo e significativo.

A escolha do tema função afim como conteúdo a ser trabalhado também se mostrou adequada, pois essa é uma das bases da álgebra e tem diversas aplicações práticas na vida cotidiana. Além disso, a divisão das atividades em diferentes etapas, abordando diferentes aspectos da função afim, permitiu uma abordagem mais completa do conteúdo.

A utilização de recursos como a carta criptografada e a ficha de perguntas também foram estratégias para tornar a atividade mais dinâmica e desafiadora,

estimulando os alunos a buscar soluções criativas para resolver os problemas propostos.

Tozo (2016), na Tarefa 1 e 2, procurou explorar as potencialidades da linguagem algébrica, tabular e apresentar a descoberta de propriedades de compreensão no objeto estudado, propondo a análise das atividades aos alunos, o que revelou dificuldade em relacionar a expressão algébrica com as expressões numéricas e com os gráficos que foram usados para formular uma hipótese inicial.

Isso pode indicar a necessidade de um ensino mais contextualizado e prático, que permita aos alunos uma compreensão mais precisa e profunda dos conceitos matemáticos e sua aplicação no cotidiano.

Na Tarefa 3, a construção dos gráficos envolveu a conversão do registro tabular para o registro gráfico, o que pode indicar a necessidade de um ensino mais direcionado para a interpretação e análise dos dados matemáticos. Ainda assim, os resultados satisfatórios, com cinco duplas acertando corretamente a construção dos dois gráficos e quatro duplas acertando pelo menos um gráfico passando pela origem do sistema.

Enquanto na Tarefa 4, a análise dos dados fornecidos nas tabelas e gráficos pôde apresentar desafios na interpretação e análise dos dados matemáticos. A sequência didática proposta por Cergoli (2017) foi caracterizada por atividades investigativas que buscavam a descoberta e a compreensão das propriedades dos logaritmos.

A primeira etapa, por exemplo, visava que os participantes percebessem, sozinhos, as propriedades da multiplicação de dois elementos da coluna da PG (Progressão Geométrica) e a soma dos elementos correspondentes na coluna da PA (Progressão Aritmética), que estão relacionados à mesma linha do produto anterior. Essa forma, que utiliza a descoberta guiada e a experimentação, incentiva os alunos a explorar e entender conceitos matemáticos, por meio da observação e investigação.

Na segunda etapa, foram apresentadas à definição formal de logaritmo e à ideia de base. A discussão sobre a existência de mais de um logaritmo e a ideia de base é importante para o entendimento completo do conceito. A linguagem formal foi dirigida para que os alunos possam compreender e utilizar a notação provisória dos logaritmos.

A terceira etapa propôs uma atividade de interpolação para ampliar a tabela de logaritmos. Essa atividade visava mostrar aos alunos a dificuldade que os

matemáticos enfrentaram no início do século XVII para ampliar tabelas de logaritmos e incentivava os alunos a utilizar estratégias para lidar com problemas semelhantes.

Em relação às práticas escolares e recursos utilizados na aplicação das tarefas, podemos destacar a utilização de experimentação e descoberta guiada como uma estratégia pedagógica que permite aos alunos explorar e compreender os conceitos matemáticos de forma mais significativa. Além disso, a introdução de atividades práticas e problemas reais estimula a aplicação dos conceitos aprendidos e contribui para uma aprendizagem mais contextualizada.

No entanto, é importante destacar que o uso de tabelas de logaritmos pode ser considerado um recurso ultrapassado em relação às tecnologias disponíveis atualmente. A introdução de ferramentas tecnológicas, como calculadoras e softwares específicos, pode contribuir para uma aprendizagem mais efetiva e prática dos conceitos de logaritmos.

Sousa (2018) na atividade proposta sobre a venda de geladinhos apresentou uma abordagem interdisciplinar que envolveu conceitos de empreendedorismo, matemática e economia. Na primeira etapa, discutiu-se sobre o empreendedorismo e suas características.

Essa perspectiva inicial permitiu aos alunos entenderem a importância do empreendedorismo para o desenvolvimento socioeconômico, além de possibilitar o desenvolvimento de habilidades e competências importantes para a vida em sociedade.

Na segunda etapa, foram apresentados os ingredientes de nove sabores de geladinhos, permitindo aos alunos analisar as possibilidades de combinação de ingredientes e as variações de custos. Essa etapa permite aos alunos explorar o conteúdo de proporção e porcentagem, além de permitir a discussão sobre questões relacionadas à produção e comércio de alimentos.

Na terceira etapa, cada equipe trabalhou com um único sabor, com o objetivo de criar estratégias para as vendas, descobrir o valor do custo de produção, do preço de venda e do lucro obter com dois geladinhos de tamanhos diferentes.

Essa etapa permitiu aos alunos aplicar conceitos matemáticos como função afim e modelagem de gráficos, além de explorar questões relacionadas à formação de preços e à lucratividade de um negócio.

Veríssimo (2018), nas estratégias utilizadas nas atividades, propôs a elaboração de perguntas que servem como cartas-na-manga para auxiliar os

estudantes em momentos de dificuldade ou estagnação na resolução das atividades.

Na atividade sobre o Conjunto de Pesos Suspensos, por exemplo, foram propostos questionamentos que direcionavam os alunos a pensar em diferentes soluções para o problema apresentado, além de incentivá-los a criar suas próprias perguntas relacionadas ao tema.

Já na atividade da Balança Equilibrada, foi dada uma situação sem nenhuma pergunta a responder, o que possibilitou que os alunos usassem sua criatividade e lógica para pensar em possíveis soluções.

Por fim, é importante ressaltar a presença do professor como mediador e incentivador do processo de aprendizagem, lançando perguntas que estimulem a reflexão e a criatividade dos alunos.

Em sua dissertação Alencar (2019) tem como proposição uma prática escolar baseada em uma perspectiva investigativa, que tem como objetivo entender melhor como os alunos compreendem e aplicam conceitos matemáticos em situações reais.

A aplicação de um acompanhamento de caracterização da turma permitiu conhecer melhor o perfil dos estudantes, o que foi fundamental para a elaboração de atividades mais direcionadas às suas necessidades e aos seus interesses.

A utilização de atividades exploratórias e desafiadoras, como a proposta na etapa 2, que envolveu a escrita em linguagem algébrica e máquina de números, pode ser um recurso interessante para envolver os alunos e incentivá-los a buscar soluções criativas para os problemas propostos. Além disso, a divisão em grupos e a autonomia dada aos alunos para escolherem seus colegas de equipe favoreceu a socialização e a colaboração entre eles.

As etapas subsequentes da investigação abordaram o estudo de conceitos matemáticos mais específicos, como equação do 1º grau, área e contorno de regiões planas. É interessante notar que esses conceitos são apresentados de forma contextualizada, ou seja, inseridos em situações-problema que têm relação com a realidade dos estudantes.

A gravação em áudio das falas dos alunos pode ser um recurso interessante para a análise posterior das respostas e argumentações dos alunos, permitindo que sejam identificadas dificuldades ou erros comuns e elaboradas intervenções pedagógicas.

Guimarães (2019) na primeira aula, discorreu que foram disponibilizados os alunos com diferentes recursos, como um vídeo explicativo sobre a fórmula de

Bhaskara, análise de livro didático, escrita coletiva e resolução de problemas. Já na segunda aula, o foco foi na elaboração de um *lapbook* e na criação de uma tabela sobre tipos de equações do segundo grau, além de um jogo para fixação de conteúdo.

A terceira aula envolveu pesquisa *online* sobre os três tipos de resolução de equação do segundo grau, resolução de reflexão utilizando o método de fichas e análise de um poema matemático. Já na quarta aula foram disponibilizadas atividades como a criação de uma história em quadrinhos e uma entrevista com colegas sobre a equação do segundo grau, além da resolução de problemas utilizando o aplicativo *Photomath*.

Na quinta aula, os alunos assistiram aos vídeos produzidos pelos colegas e produziram juntos semelhantes as do livro com o mesmo método de resolução, além de resolver problemas relacionados ao calculado do Índice de Massa Corporal (IMC). Por fim, na sexta aula, foram propostas atividades como a resolução de equação do segundo grau mencionadas em um livro, a citação dos sites utilizados durante todo o processo e a resolução de problemas.

Ferreira (2020) fez uma pesquisa realizada com alunos do 7º ano, que teve como objetivo analisar a aplicação de tarefas exploratório-investigativas no ensino de Matemática. Foi observado que as aulas foram conduzidas no laboratório de Matemática da escola, o que favoreceu o trabalho em grupo e a utilização de recursos materiais como cubinhos de EVA e lousa digital.

Os diálogos das aulas foram audiogravados e transcritos, bem como os registros escritos pelos alunos, que foram utilizados como material de análise da pesquisa. É importante destacar que todos os protocolos éticos foram seguidos, incluindo a aprovação do projeto pelo Conselho de Ética em Pesquisas da Universidade Federal de Goiás e a obtenção de consentimento livre e esclarecido dos alunos e das famílias. As tarefas exploratório-investigativas aplicadas foram bastante diversificadas, envolvendo desde a construção de pódios até o estudo de juros compostos.

As Tarefas Exploratório-Investigativas otimizadas por Paula (2021) foram desenvolvidas com o apoio de diferentes recursos didáticos, como o caderno, lápis, borracha, livro didático, *software GeoGebra*, copo plástico, água quente, água gelada e termômetro culinário. O uso desses recursos permitiu que os alunos pudessem explorar diferentes aspectos dos conteúdos estudados, desde a compreensão teórica até a aplicação prática em situações cotidianas.

O *software GeoGebra* foi bastante utilizado durante a sequência didática, tanto na etapa de reconhecimento do padrão numérico quanto no estudo do gráfico das funções exponencial e logarítmica. O aplicativo permitia que os alunos pudessem visualizar as transformações nos gráficos das funções e fazer experimentações para consolidar seus conhecimentos.

Outro recurso importante utilizado foi o filme “A Corrente do Bem” como base para a primeira atividade investigativa. Esse recurso permitiu que os alunos pudessem relacionar o conteúdo pensado com situações reais do cotidiano, tornando a aprendizagem mais significativa e contextualizada.

Além disso, destaca-se a utilização do *Google Meet* e do *Padlet* para a realização das atividades em grupo e para a construção do mural colaborativo. Essas ferramentas digitais permitiram que os alunos pudessem interagir entre si, mesmo à distância, e compartilhar suas experiências sobre o conteúdo estudado.

Por fim, a utilização de questões diversas, retiradas de livros didáticos, de estimativas externas e/ou de edições anteriores do ENEM, também foi importante para a contextualização do conteúdo e para a avaliação da aprendizagem dos alunos.

As atividades complementares e finais foram desenvolvidas de acordo com os objetivos da sequência didática, caracterizando instrumentos de avaliação que permitiram investigar as contribuições das atividades investigativas e complementares no processo de ensino-aprendizagem do estudo da função exponencial e de sua inversa.

É importante destacar que a sequência didática foi realizada em laboratório de Matemática da escola, favorecendo a dinâmica de trabalho em grupo e disponibilizando recursos materiais que facilitaram algumas construções, como cubinhos de EVA e lousa digital.

Além disso, foram utilizados recursos tecnológicos, como a extensão do *Google Chrome: Google Meet Breakout Rooms*, para organizar grupos de alunos em sub-salas do *Google Meet*.

A seguir serão apresentadas algumas interseções entre as práticas escolares e os recursos utilizados pelos pesquisadores na aplicação das tarefas.

4.3.1 Considerações analíticas sobre a Categoria 3

As práticas escolares evidenciam a importância da interação e da mediação do professor no processo de ensino-aprendizagem. Além disso, enfatizam a necessidade de uma abordagem pedagógica que contemple diferentes estratégias e recursos didáticos para tornar o processo de aprendizagem mais animador e significativo para os alunos em uma perspectiva de Educação Algébrica.

No levantamento analítico feito nas pesquisas, foram identificadas as seguintes ações quando do desenvolvimento das tarefas exploratório-investigativas:

- a) Trabalho e discussão em grupo: Rodrigues (2007), Trindade (2008), Fernandes (2011), Bonotto (2015), Alencar (2019), Ferreira (2020) e Paula (2021);
- b) Discussão na aula: Rodrigues (2007) e Sousa (2018);
- c) Narrativas: Rodrigues (2007) e Alencar (2019);
- d) Criação e contação de histórias. Lendas e contos: Rodrigues (2007) e Litoldo (2016);
- e) Uso de jogos em sala: Rodrigues (2007) e Guimarães (2019);
- f) Uso da calculadora em sala: Melo (2008), Cergoli (2017) e Guimarães (2019);
- g) Orientação, mediação, explicação oral do professor: Rodrigues (2007), Melo (2008), Trindade (2008), Déchen (2008), Fernandes (2011), Ferreira (2012), Corradi (2013), Bonotto (2015), Litoldo (2016), Tozo (2016), Cergolli (2017), Sousa (2018), Veríssimo (2018), Alencar (2019), Guimarães (2019), Ferreira (2020) e Paula (2021);
- h) Esclarecimento de dúvidas: Rodrigues (2007), Melo (2008), Trindade (2008), Déchen (2008), Fernandes (2011), Ferreira (2012), Corradi (2013), Bonotto (2015), Litoldo (2016), Tozo (2016), Cergoli (2017), Sousa (2018), Veríssimo (2018), Alencar (2019), Guimarães (2019), Ferreira (2020) e Paula (2021);
- i) Elaboração de questões e tabelas: Veríssimo (2018) e Guimarães (2019);
- j) Exploração de estratégias, de regularidades, de atividades e de conceitos: Rodrigues (2007), Trindade (2008), Fernandes (2011), Bonotto (2015) e Sousa (2018);
- k) Resolução de tarefas, situações problemas, de equações: Rodrigues (2007), Melo (2008), Trindade (2008), Déchen (2008), Fernandes (2011), Ferreira (2012), Corradi (2013), Bonotto (2015), Litoldo (2016), Tozo (2016), Cergoli (2017), Sousa (2018), Veríssimo (2018), Alencar (2019), Guimarães (2019), Ferreira (2020) e Paula (2021);

- l) Estímulo a Investigação: Rodrigues (2007), Melo (2008), Trindade (2008), Déchen (2008), Fernandes (2011), Ferreira (2012), Corradi (2013), Bonotto (2015), Litoldo (2016), Tozo (2016), Cergoli (2017), Sousa (2018), Veríssimo (2018), Alencar (2019), Guimarães (2019), Ferreira (2020) e Paula (2021);
- m) Divisão de funções nos grupos: Fernandes (2011);
- n) Utilização das Tecnologias digitais da informação e comunicação: Corradi (2013), Litoldo (2016), Cergoli (2017), Alencar (2019), Guimarães (2019) e Ferreira (2020);
- o) Formulação de conjecturas: Bonotto (2015) e Tozo (2016);
- p) Conversão do registro tabular e registro gráfico: Fernandes (2011), Ferreira (2012), Litoldo (2016), Tozo (2016), Cergoli (2017), Sousa (2018) e Guimarães (2019);
- q) Uso de registros escritos: Trindade (2008), Fernandes (2011), Tozo (2016), Litoldo (2016), Ferreira (2020) e Paula (2021).

Analisando mais incisivamente, na aplicação das tarefas exploratório-investigativas é preciso dar importância ao entendimento sobre as práticas escolares. Essa extensão envolve questionamentos acerca do que se entende por práticas, sejam elas aquelas que acontecem no chão da escola, propostas pelo professor, que fazem parte da cultura escolar ou que são escolares.

A organização das aulas exploratório-investigativas é um aspecto crucial na pesquisa em práticas escolares em educação matemática. Esse aspecto pode ajudar a identificar e a compreender as práticas pedagógicas e os recursos utilizados pelos professores em sala de aula, assim como os desafios enfrentados e as oportunidades de melhoria.

Para Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2006) a experiência de ensino que ocorre nas tarefas exploratório-investigativas pode proporcionar um ambiente rico de mobilização de práticas, saberes e ações didático-pedagógicas, tendo como objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Para Oliveira, D'Ambrósio e Grando (2015), que discutem a importância da pesquisa em práticas escolares na educação matemática, deve-se destacar os desafios e os envolvidos nesse processo, ou seja, a necessidade de compreender as práticas pedagógicas, os recursos e as estratégias utilizadas pelos professores em sala de aula, a fim de melhorar o ensino-aprendizagem da álgebra, por exemplo.

Os aspectos instrucionais ou pedagógicos envolvem as situações do ensino, o encontro professor-aluno-conhecimento. Trata-se dos objetivos, dos conteúdos, dos métodos, dos materiais didáticos utilizados nas aulas e das formas de avaliação. Nesse encontro professor-aluno-conhecimento, devem ser consideradas as mediações feitas pelo professor e os processos de interação de diferentes naturezas, que envolvem componentes cognitivos, sociais, afetivos, etc. (Oliveira, D'Ambrósio, Grando, 2015, p. 427-428).

Ao levantar esses questionamentos Oliveira, D'Ambrósio e Grando (2015) sugerem a necessidade de uma introdução conceitual e de um campo de pesquisa mais amplo, que contemple as diferentes práticas escolares.

Dentre as práticas mencionadas, estão o trabalho e discussão em grupo, a discussão na aula, a criação e contato de histórias, o uso de situações do cotidiano, o uso de jogos em sala, a orientação, mediação e explicação oral do professor, a resolução de tarefas e situações-problema, a utilização das tecnologias digitais da informação e comunicação, entre outras.

Destaca-se também a importância do estímulo à investigação, à divisão de funções nos grupos, à formulação de conjecturas e à conversão do registro tabular e registro gráfico como práticas criadas para a construção do conhecimento e para o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos.

Por fim, o uso de materiais manipuláveis e de registros escritos aparece como uma estratégia eficiente para auxiliar os alunos na compreensão de conceitos e na resolução de problemas, reforçando a necessidade de uma abordagem pedagógica que leve em conta as diferentes formas de aprendizagem no contexto da Educação Algébrica e das características individuais dos alunos.

No que tange à utilização de recursos como apoio didático no desenvolvimento das tarefas exploratório-investigativas no contexto escolar, na organização do ensino e na prática de sala de aula levantamos uma lista de recursos que foram utilizados pelos autores das pesquisas, que variam desde recursos mais tradicionais, como cadernos, lápis e papel, até recursos tecnológicos, como computadores, celulares, aplicativos e *softwares* de geometria dinâmica, conforme demonstrado a seguir:

- a) Jogos (Xadrez, Jogo de Futebol): Rodrigues (2007) e Guimarães (2019);
- b) Calculadora: Melo (2008), Cergoli (2017) e Guimarães (2019);
- c) Computadores (com internet): Bonotto (2015) e Guimarães;
- d) Celular, aplicativos e Plataforma (Photomath, Google Meet, Padlet, Google Meet Breakout Rooms): Guimarães (2019) e Paula (2021);

- e) Lusa digital: Ferreira (2020) e Paula (2021);
- f) Gravador e Áudio: Alencar (2019) e Ferreira (2020);
- g) Vídeo: Guimarães (2019);
- h) Filme: Paula (2021);
- i) Laboratório de Matemática: Ferreira (2020);
- j) Caderno, Lápis, papel e canetas: Trindade (2008), Fernandes (2011), Guimarães (2019) e Paula (2021);
- k) EVA (cubinhos): Ferreira (2020) e Paula (2021),
- l) Tabelas: Fernandes (2011), Ferreira (2012) e Litoldo (2016);
- m) Desenhos em papel kraft: Ferreira (2012);
- n) Bolinhas: Ferreira (2012);
- o) *Softwares* de geometria dinâmica, específicos (Geogebra): Corradi (2013), Cergoli (2017) e Paula (2021),
- p) Roteiro de Orientações: Bonotto (2015);
- q) Carta criptografada, fichas de perguntas: Litoldo (2016);
- r) Ingredientes de geladinhos: Sousa (2018);
- s) copo plástico, água quente, água gelada, termômetro culinário: Paula (2021);
- t) Livros (didáticos, contos): Litoldo (2016), Guimarães (2019) e Paula (2021);
- u) Não usou um recurso fisicamente identificável: Déchen (2008) e Veríssimo (2018).

É importante notar que a escolha e uso dos recursos dependem da configuração do contexto escolar, que é impactada por influências políticas, pelas expectativas dos pais, pela cultura dos sujeitos envolvidos, entre outras (Oliveira, D'Ambrósio e Grando, 2015).

Desta forma, é fundamental que os profissionais da educação estejam atentos a esses aspectos institucionais para que possam escolher os recursos mais capacitados para seus alunos e para o conteúdo a ser ensinado.

Os recursos materiais podem contribuir para tornar o processo de ensino-aprendizagem mais animado e atraente, estimulando a participação e o interesse dos alunos. Além disso, esses recursos podem facilitar a compreensão de conceitos mais abstratos ou complexos, tornando-os mais acessíveis aos alunos. A variedade de recursos que foram utilizados no desenvolvimento das tarefas exploratório-

investigativas é um indicativo de como o ensino pode ser diversificado, personalizado e eficaz quando se utilizam ferramentas diferentes.

No entanto, é importante ressaltar que a utilização de recursos materiais não é uma solução mágica para todos os desafios do processo de ensino-aprendizagem. É necessário que haja uma análise crítica e uma reflexão sobre quais recursos são os mais apropriados para determinado conteúdo e público-alvo, e também sobre como esses recursos devem ser utilizados de forma integrada ao processo pedagógico.

Desta categoria, a organização das aulas exploratório-investigativas quando contemplam a educação algébrica ocorre através da utilização de atividades práticas e desafiadoras, que oportunizam aos alunos explorar conceitos matemáticos por meio da observação, investigação e experimentação. Nesse tipo de abordagem, os alunos foram incentivados a refletir, formular hipóteses, testar diferentes soluções e compreender a lógica por trás dos conceitos matemáticos.

A prática escolar caracteriza-se, assim, por uma aprendizagem mais ativa e significativa, em que os alunos são envolvidos em atividades que têm relação com a realidade e com o cotidiano. As tarefas são desenvolvidas em episódios de ensino, em que são discutidos os objetivos, aprendizagens e tarefas definidas, permitindo que os estudantes possam trabalhar em grupos, trocar informações e aprender de forma colaborativa.

Os recursos didáticos utilizados são variados, incluindo histórias, atividades com elementos do cotidiano como futebol e xadrez, material concreto como cubinhos de EVA, lousa digital, calculadora, software GeoGebra, entre outros. Esses recursos são importantes para a exploração dos conceitos matemáticos, estimulando os alunos a construir conhecimentos de forma mais consistente e integrada.

Ao longo das pesquisas, foram encontradas diferentes estratégias para abordar a educação algébrica, como a criação de jogos, resolução de problemas, elaboração, trabalhos em grupos, investigação e discussões em sala de aula. Além disso, a contextualização dos conteúdos e a relação com situações do cotidiano são aspectos recorrentes nas práticas escolares investigadas.

Os resultados apresentados também mostram a importância do papel do professor como mediador do processo de ensino-aprendizagem, incentivando a curiosidade e a criatividade dos alunos, além de estabelecer conexões entre os conceitos matemáticos e sua aplicação prática.

A utilização de tecnologias digitais, como softwares e aplicativos, também é

destacada como uma forma de tornar o ensino mais dinâmico e desafiador, preparando os alunos para lidar com as ferramentas tecnológicas presentes no mundo atual. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), o emprego de tecnologias no ensino da matemática tem o potencial de provocar transformações nas abordagens pedagógicas, bem como na percepção e na interação com a disciplina e sua forma de ensino.

Em relação aos recursos que mais apareceram nas práticas escolares investigadas, destacam-se a utilização de software GeoGebra e calculadora como ferramentas para a exploração de conceitos matemáticos, bem como a realização de atividades em grupos para promover a aprendizagem colaborativa.

Por outro lado, recursos como tabelas de logaritmos e fichas para resolução de equações do segundo grau foram mencionados em algumas pesquisas, mas podem ser considerados mais ultrapassados em relação às tecnologias disponíveis atualmente.

Em suma, a educação algébrica através de aulas exploratório-investigativas é uma perspectiva que visa desenvolver habilidades de pensamento crítico, resolução de problemas e compreensão dos conceitos matemáticos de forma mais significativa e contextualizada. A utilização de recursos e práticas diversificados permite que os alunos se envolvam ativamente no processo de aprendizagem e estejam mais preparados para enfrentar os desafios do mundo atual.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em suma, a presente dissertação objetiva um mapeamento da produção acadêmica sobre Educação Algébrica em Aulas Exploratório-Investigativas de Matemática, nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, buscando compreender os aspectos que estão sendo admitidos no âmbito acadêmico e identificar tendências de pesquisa na área de Educação Matemática no Brasil.

Para responder à questão de investigação sobre a Educação Algébrica no contexto de tarefas investigativas nas aulas de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, precisamos buscar responder ao objetivo geral que é mostrar um Estado do Conhecimento da pesquisa brasileira sobre Educação Algébrica em Aulas Exploratórios-Investigativas, bem como os objetivos específicos que visam, principalmente, identificar os tipos de tarefas exploratório-investigativas no contexto da Educação Algébrica, os conteúdos algébricos recorrentes nelas e analisar as práticas escolares e recursos utilizados para o desenvolvimento das tarefas.

A análise dos dados permitiu a identificação de padrões recorrentes nas pesquisas, relacionados às tarefas alcançadas nas aulas, aos conteúdos de álgebra examinados e à organização das aulas exploratório-investigativas, práticas escolares e recursos utilizados.

Com base nestas categorias, foi possível perceber que as aulas exploratório-investigativas têm se mostrado uma metodologia eficiente para incentivar a descoberta e a investigação matemática pelos alunos na perspectiva da Educação Algébrica, permitindo a exploração de conceitos por conta própria ou em grupos, incentivando o uso de recursos como tecnologias digitais da informação e comunicação, manipulativos e materiais concretos.

A partir das informações analisadas nas pesquisas, pode-se afirmar que o mapeamento de pesquisas em determinadas áreas, como a Educação Matemática, é fundamental para compreender os avanços e desafios da produção acadêmica na área, permitindo novos direcionamentos e iniciativas didático-pedagógicas, além de contribuir para a formação de professores e para a melhoria das práticas pedagógicas em sala de aula.

Dessa forma, é esperado que esta pesquisa possa contribuir para a reflexão e discussão sobre a importância da Educação Algébrica em Aulas Exploratório-

Investigativas de Matemática, bem como para o desenvolvimento de novos estudos e práticas pedagógicas que promovam ensino-aprendizagem da matemática de forma mais significativa e eficiente.

Considerando as análises realizadas, pode-se concluir que os aspectos metodológicos das tarefas exploratório-investigativas apresentam-se como estratégias pedagógicas relevantes para o ensino da Matemática, em particular para o ensino da álgebra.

A partir dos estudos analisados verificou-se que esses aspectos podem contribuir para o desenvolvimento de diversas habilidades e competências relacionadas ao ensino da álgebra, como: a compreensão de conceitos de variável e incógnita, a capacidade de resolver equações e inequações, funções, além da interpretação e leitura de gráficos, por exemplo.

No entanto, também foi identificado que a seleção e adaptação das tarefas para as necessidades dos alunos podem representar um desafio para os professores. Nesse sentido, é fundamental que o professor exerça um papel de mediador no processo de aprendizagem, fornecendo orientações e *feedbacks* aos alunos, além de utilizar diferentes estratégias de avaliação.

É válido ressaltar que a diversificação das tarefas, organizadas em sequências coerentes e trabalhadas na sala de aula, em atividade autônoma dos alunos e em discussões coletivas, pode efetivar uma mudança significativa na dinâmica do ensino da Matemática.

Desta forma, os resultados dos estudos analisados sugerem que a perspectiva metodológica das tarefas exploratório-investigativas pode ser uma alternativa relevante para o ensino da álgebra, confiante para a formação de alunos mais críticos, reflexivos e capazes de construir seu próprio conhecimento matemático.

Infere-se da categoria “Tarefas apresentadas em aulas Exploratório-Investigativas” que em relação as perspectivas de Educação Algébrica envolvidas nas pesquisas, destacaram-se a aplicação dos conceitos algébricos em situações práticas e concretas do cotidiano, o desenvolvimento da linguagem e dos pensamentos algébricos, a capacidade de resolução de problemas algébricos, a compreensão da dependência entre grandezas algébricas, o desenvolvimento da habilidade de escrita algébrica, o pensar em padrões algébricos e usar a matemática para encontrar soluções.

Em relação à categoria “Conteúdos Algébricos em Aulas Exploratório-

Investigativas”, podemos concluir que as aulas investigativas são uma importante aliada do professor no ensino de matemática, especialmente quando se trata de conteúdos algébricos.

Isso porque essas aulas incentivam os alunos a investigar e compreender conceitos matemáticos de maneira mais profunda e significativa, desenvolvendo habilidades importantes, como generalização, abstração e resolução de problemas.

Além disso, as pesquisas mostram que as atividades relacionadas aos conteúdos algébricos, como potências, raízes, equações, funções e expressões algébricas, são abordadas de acordo com as quatro concepções de álgebra propostas por Usiskin (1995): aritmética generalizada, estudo de relações de grandezas, estudo de procedimentos para resolver problemas e estudo das estruturas. No entanto, existe uma lacuna quanto o estudo das estruturas, pois essa função foi pouco mobilizada pelos autores nas pesquisas.

Podemos concluir que uma expectativa de ensino de matemática por meio de aulas exploratório-investigativas, que incorporam as diferentes concepções de álgebra propostas por Usiskin, pode auxiliar os estudantes a compreender melhor a natureza do pensamento algébrico, desenvolver habilidades de raciocínio e resolução de problemas, e aplicar os conceitos de álgebra em situações reais.

A categoria emergente “Organização de Aulas Exploratório-Investigativas: Práticas e Recursos Pedagógicos” envolveu a estruturação de aulas de matemática com foco na promoção de atividades de exploração e investigação. Esse aspecto é baseado na ideia de que os alunos aprendem melhor quando estão ativamente envolvidos na construção do conhecimento, ao invés de serem meros receptores de informações.

Organizar aulas exploratório-investigativas é um aspecto crucial da pesquisa sobre práticas escolares em Educação Algébrica. Essa perspectiva pode auxiliar na identificação e na compreensão de práticas e recursos pedagógicos utilizados pelos professores em sala de aula, bem como os desafios que enfrentam e as oportunidades de melhoria.

Os aspectos instrucionais ou pedagógicos envolveram situações de ensino, promovendo o encontro professor-aluno-conhecimento. Isso inclui objetivos, conteúdos, métodos, materiais didáticos utilizados em sala de aula e formas de avaliação.

Nesse encontro professor-aluno-conhecimento, devem ser consideradas as

mediações feitas pelo professor e os processos de interação de diferentes naturezas envolvendo componentes cognitivos, sociais, afetivos, etc. (Oliveira, D'Ambrósio e Grando, 2015, p. 427 -428).

Analisando a aplicação de tarefas exploratório-investigativas, é necessário dar importância à compreensão das práticas escolares. Essa extensão envolve questionar o que se entende por práticas, sejam elas aquelas que acontecem no chão da escola, propostas pelo professor, que fazem parte da cultura escolar, ou se são práticas escolares.

As perspectivas de Educação Algébrica envolvidas nas pesquisas destacaram-se aplicação dos conceitos algébricos em situações práticas e concretas do cotidiano, o desenvolvimento da linguagem e dos pensamentos algébricos, a capacidade de resolução de problemas algébricos, a compreensão da dependência entre grandezas algébricas, o desenvolvimento da habilidade de escrita algébrica, o pensar em padrões algébricos e usar a matemática para encontrar soluções.

É importante ressaltar que a escolha e utilização dos recursos dependem da configuração do contexto escolar, que é impactado por influências políticas, expectativas dos pais, cultura dos envolvidos, etc. (Oliveira, D'Ambrósio e Grando, 2015).

Assim, é fundamental que os profissionais da educação estejam atentos a esses aspectos institucionais para que possam escolher os recursos mais adequados para seus alunos e o conteúdo a ser ministrado.

A utilização de recursos materiais pode contribuir para tornar o processo ensino-aprendizagem mais vivo e atrativo, estimulando a participação e o interesse dos alunos. Além disso, esses recursos podem facilitar a compreensão de conceitos mais abstratos ou complexos, tornando-os mais acessíveis aos alunos.

A variedade de recursos utilizados no desenvolvimento de tarefas exploratório-investigativas é um indicativo de como o ensino pode ser diversificado, personalizado e eficaz quando são utilizadas diferentes ferramentas.

Com base na minha experiência descrita no memorial e nas análises prévias, procurei aplicar algumas das tarefas exploratório-investigativas em matemática na sala de aula, junto aos alunos, em turmas que leciono, mas confesso que não foi fácil fazer essas aplicações.

Acredito que, a partir do mapeamento realizado, tenho possibilidade de aplicar a tarefa exploratório-investigativa em matemática, mas creio que para o êxito desta

prática alguns aspectos devem ser considerados:

1. Incentivar a investigação: Nas aplicações, procurar estimular os alunos a fazerem perguntas e investigarem diferentes problemas matemáticos. Posso apresentar questões desafiadoras que despertem a curiosidade, levando-os a explorar conceitos e relações matemáticas.
2. Uso de tecnologias digitais: Tenho experiência com tecnologias digitais, portanto, posso aproveitar recursos como *softwares* educativos, ambientes virtuais de aprendizagem, aplicativos e plataformas *online* para enriquecer a experiência de aprendizado dos alunos e facilitar a exploração de problemas matemáticos.
3. Contextualização e modelagem matemática: Posso trazer situações do cotidiano dos estudantes para o contexto matemático, permitindo que compreendam a utilidade e a aplicação prática dos conceitos abordados. A modelagem matemática pode ser uma ferramenta poderosa para envolver os discentes na resolução de problemas reais.
4. Valorizar o conhecimento prévio dos alunos: Ao entender a vida dos estudantes, suas experiências e interesses, posso criar atividades que conectem os conteúdos matemáticos ao universo dos alunos, tornando o aprendizado mais significativo e relevante.
5. Aprendizado colaborativo e trabalho em grupo: Posso incentivar a formação de grupos de alunos para resolver problemas juntos, trocar ideias e colaborar na busca por soluções. O trabalho em equipe promove o pensamento crítico e a socialização do conhecimento.
6. Investigação de equações e funções: Dado minha experiência como professora em torno da Educação Algébrica, posso enfatizar a investigação de equações e funções com os alunos. Ao invés de apenas apresentar fórmulas e procedimentos, posso incentivar os estudantes a entenderem o raciocínio por trás das resoluções e a explorarem diferentes abordagens para resolver problemas algébricos.
7. Uso de projetos e temas inclusivos: Posso desenvolver projetos temáticos que abordem questões relacionadas a gênero, diversidade e inclusão, permitindo que os alunos desenvolvam uma visão mais ampla e sensível da sociedade, ao mesmo tempo que aplicam conceitos matemáticos em contextos relevantes.
8. Avaliação formativa: Poderei, ainda, adotar uma avaliação formativa, ou seja,

identificar o progresso dos alunos ao longo do processo de aprendizado, oferecendo *feedback* contínuo e oportunidades para melhorar o desempenho.

Por meio dessas práticas, terei a oportunidade de promover um ambiente de aprendizado mais envolvente, interativo e significativo, incentivando os alunos a se tornarem investigadores matemáticos, capazes de explorar, questionar e resolver problemas com criatividade e autonomia.

Embora a pesquisa tenha apresentado uma análise detalhada sobre a produção acadêmica relacionada à Educação Algébrica em Aulas Exploratórios-Investigativas, existem algumas restrições a serem consideradas.

A primeira delas é que o estudo se limita apenas às teses e dissertações produzidas no Brasil, o que carece de uma abertura sobre o assunto em um contexto global. Além disso, a pesquisa concentra-se exclusivamente nas tarefas exploratório-investigativas em aulas de matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, deixando de fora outros níveis de ensino e abordagens pedagógicas.

Algumas lacunas estão presentes nas pesquisas no que se refere a aplicação de tarefas exploratório-investigativas, destacando a necessidade de valorização do conhecimento prévio dos alunos – principalmente aquele conhecimento que vem de suas vivências e experiências –, o uso de temas na perspectiva da inclusão de alunos com necessidades especiais, a sintonização melhor do planejamento com a aplicação da atividade, a aplicação de avaliação formativa para os alunos durante a aplicação de tarefas e a explicitação de desafios e restrições enfrentadas pelos professores ao implementar as tarefas.

Por fim, a pesquisa não aborda especificamente os desafios e as restrições enfrentadas pelos professores ao implementar as tarefas exploratório-investigativas em suas aulas de matemática, o que pode ser um aspecto relevante a ser considerado em pesquisas futuras.

Apesar dessas restrições, a pesquisa oferece uma visão geral valiosa sobre a produção acadêmica em Educação Algébrica em Aulas Exploratório-Investigativas de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, voltada para o avanço do conhecimento na área e para a melhoria das práticas pedagógicas em sala de aula.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico**: Um modelo para os problemas de partilha de quantidade. Tese de doutorado. Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Recife, 2016.
- ALVARENGA, K. B. **O que dizem as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de inequações**. 2013. 276 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- BAQUEIRO, G. D. S. **Achados sobre generalização de padrões ao “garimpar” pesquisas brasileiras de Educação Matemática (2003-2013)**, 2016. 229 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Ed.). **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 23 - 37.
- BORBA, M. C; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 1a ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. 152p.
- BORGES, M. E. O. **Um mapeamento de pesquisas a respeito do estudo de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio (2008 – 2017)**. 2018. 197 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- BRASIL. **Base Nacional Curricular Comum**, Brasília-DF, 2017. <http://basenacional.comum.mec.gov.br/>. Acesso em: 05 mai. 2022.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.
- FERNANDES, F. L. P. **Práticas de Letramento de Professores de Matemática em Formação na Licenciatura em Educação do Campo**. 2019. 230f. (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos – SP, 2019.
- FERNANDES, F. L. P.; FIORENTINI, D.; CRISTOVÃO, E. M. Investigações Matemáticas e o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico de Alunos de 6ª Série. In: FIORENTINI, D.; CRISTOVÃO, E. M. (Org.) **Histórias e investigações de/em Aulas de Matemática**. Campinas-SP: Unicamp, 2006. p. 227-244.
- FERREIRA, N. S. D. A. As Pesquisas denominadas "Estado da Arte". **Educação & Sociedade**, Campinas, v. XXIII, n. 79, agosto de 2002.
- FIALHO, N. N. Os jogos pedagógicos como ferramentas de ensino. In: **Congresso nacional de educação**. 2008. p. 12298-12306. Disponível em: https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2008/293_114.pdf Acesso em: 15 jul. 2022
- FIGUEIREDO, A. de Carvalho. **Saberes e concepções de educação algébrica em um curso de licenciatura em matemática**. 2007. 290f. (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. Campinas: Autores associados (Coleção formação de professores), 2012.

FIorentini, D. FERNANDES, F. e CRISTÓVÃO, E. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. Seminário Luso-brasileiro de Investigações matemáticas no currículo e na formação de professores. Lisboa, 2005.

Fiorentini, D. Grupo de Sábado: uma história de reflexão, investigação e escrita sobre a prática escolar em matemática. In: Fiorentini, D. e Cristóvão, E. M. (Orgs.). **Histórias e investigação de/em aulas de matemática**. Campinas, SP: Editora Alínea, 2006. p. 13-36.

FIorentini, D. Alguns Modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. In: Zetetiké, ano 3, nº. 4, 1995, p.1-37.

FIorentini, D. **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação**. Campinas: Tese (Doutorado em Educação), Universidade de Campinas, 1994.

FIorentini, D.; Miorim, M. Â.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78-90, março 1993.

FRANCO, M. A. S. **Práticas Pedagógicas de ensinar-aprender: por entre resistências e resignações**. São Paulo: Educ. Pesqui., v. 41, n. 3, p. 601-614, jul./set. 2015

FUNDÃO VIEIRA, R.; VIEIRA, C. V. G. **O uso das Tecnologias Digitais no Ensino-Aprendizagem na Escola Municipal Uberaba**, Uberaba-MG (Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Projeto de Ensino, 2020.

GIBBS, G. **Análise de dados qualitativos**. Tradução de Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artmed, 2009.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6.ed. São Paulo: Atlas SA, 2008.

KUMAR, R. **Research Methodology: A Step-by-step Guide for Beginners**. 2ª. Ed.Austrália: Pearson Education, 2005.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber: Manual de metodologia da pesquisa em Ciências Humanas**. Tradução de Heloísa Monteiro e Francisco Settineri. Belo Horizonte: UFMG, 1999. 342 p.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. Comentários**. Campinas: Papirus, 1997.

MELO, M. V. **Três décadas de pesquisa em educação matemática: um estudo histórico a partir de teses e dissertações**. 2006. 273 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

MOURA, A. R. L. Memorial: Fazendo-me professora. **Cad. CEDES**, Campinas, v. 19, n. 45, p. 24-47, jul. 1998. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S010132621998000200003&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em 30 jan. 2021.

OLIVEIRA, A. T. de C. C. de. A pesquisa em práticas escolares em Educação Matemática: Reflexões e desafios. Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil. **Educação Matemática em Pesquisa**. São Paulo, v.17, n.3, pp.425-440, 2015.

POLLA, G. B. **As pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de álgebra nos anos finais do ensino fundamental: panorama de 10 anos da pesquisa brasileira pós**

PCN. 2010. 132p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Orientadora: Neusa Maria Marques de Souza. Departamento de Educação, Centro de Ciências Humanas e Sociais, UFMS, Campo Grande-MS.

PONTE, J. P. da, QUARESMA, M., MATA-PEREIRA, J., BAPTISTA, M. **Exercícios, problemas e explorações**: Perspectivas de professoras num estudo de aula. Quadrante, Vol. XXIV, Nº 2, 2015.

PONTE J. BROCARD, J.; OLIVEIRA H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J. P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. **As atividades de investigação**, o professor e a aula de Matemática. Lisboa: Actas do ProfMat99 (APM), p.91-101, 1999.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H. M. CUNHA, M. H.; SEGURADO, M. I. **Histórias das Investigações Matemáticas**. 1998. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/261178171_Historias_de_investigacoes_matematicas>. Acesso em: jun. 2022.

PONTE, J. P. **Investigar, ensinar e aprender**. Lisboa: Actas do ProfMat2003 (APM), p.25-39, 2003.

ROMANCINI, R. **O campo científico da comunicação no Brasil**: institucionalização e capital científico. 2006. (Tese) Doutorado em Ciências da Comunicação – Programa de Pós-Graduação em Ciências da Comunicação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

ROMANOWSKI, J. P.; ENS, R. T. As pesquisas denominadas do tipo “estado da arte” em educação. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 6, n.19, p. 37-50, 2006.

SANTOS, L. **A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: um estudo com três professoras do ensino secundário**. Lisboa, 2000. 740 f, Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Coleção Teses. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt>. Acesso em: nov de 2022.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para Investigação**. Boletim de Educação Matemática (Bolema), n.14, p.66-91, 2000.

TAHAN, M. **O Homem que Calculava**. Rio de Janeiro, Record, 2010. 300 p. 79º ed.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Ed.). **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 9 - 22.

VIEIRA, C. V. G.; GONÇALVES, W. A. **Ensino da Matemática com Apoio de Tecnologias Digitais como Abordagem Inclusiva ao Aluno com com Paralisia Cerebral**: um relato de experiência no 9º ano do ensino fundamental em uma Escola Municipal de Uberaba/MG. Uberaba-MG: INTERMATHS, 2020. P. V. 1, n. 1

REFERÊNCIAS DO CORPUS DE ANÁLISE

- ALENCAR, S. S. de. **O Uso da Investigação Matemática na Aprendizagem de Equação do Primeiro Grau no 7º Ano**, 2019. (Dissertação) – Universidade Federal do Acre – AC, 2019.
- BONOTTO, A. K. **Ensino e Aprendizagem da Função Exponencial por Meio de Atividades Investigativas e do Uso de Objeto de Aprendizagem**, 2015. (Dissertação) – Centro Universitário Franciscano - RS, 2015.
- CERGOLI, D. **Ensino de Logaritmos por meio de Investigações Matemáticas em Sala de Aula**, 2017. (Dissertação) – Universidade Federal de São Paulo – SP, 2017.
- CORRADI, D. K. S. **Investigações Matemática Mediadas pelo Pensamento Reflexivo no Ensino e Aprendizagem das Funções Seno e Cosseno: Uma Experiências com Alunos do 2º Ano do Ensino Médio**, 2013. (Dissertação) - Universidade Federal de Ouro Preto – MG, 2013.
- DÉCHEN, T. **Tarefas Exploratório-investigativas para o ensino de Álgebra na 6ª série do Ensino Fundamental: indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos**, 2008. (Dissertação) - Universidade Federal de São Carlos – SP, 2008.
- FERNANDES, F. L. **Iniciação a Prática de Letramento Algébrico em Aulas Exploratório-Investigativas**, 2011. (Dissertação) - Universidade Estadual de Campinas – SP, 2011.
- FERREIRA, A. A. **A Produção de Significados Matemáticos em um Contexto de Aulas Exploratório-Investigativas**, 2012. (Tese) - Universidade Federal de Minas Gerais – MG, 2012.
- FERREIRA, S. M. **Cenários para Investigação Matemática: Uma proposta Didática para Trabalhar Sequências Numéricas nas Séries Finais do Ensino Fundamental**, 2020. (Dissertação) – Universidade Federal de Goiás – GO, 2020.
- GUIMARÃES, D. S. **Cenários para Investigação Matemática no Ensino Fundamental: Uma Experiência com Ensino Híbrido na Modalidade Rotação por Estações**, 2019. (Dissertação) – Universidade Federal do Pampa – RS, 2019.
- LITOLDO, B. F. **As Potencialidades de Atividades Pedagógicas Envolvendo Problemas Criptográficos na Exploração das Ideias Associadas à Função Afim**, 2016. (Dissertação) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – SP, 2016.
- MELO, A. J. F. de. **O Ensino de Potências e Raízes com Auxílio da Calculadora: Uma Experiências Investigativa em Sala de Aula**, 2008. (Dissertação) - Pontifícia Universidade Católica – SP, 2008.
- PAULA, C. M. M. de. **Investigações Matemáticas com o Apoio do Geogebra, em Smartphone: um Estudo da Função Exponencial e de sua Inversa**, 2021. (Dissertação) – Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia Fluminense – RJ, 2021.
- RODRIGUES, M. A. **Narrativas no Ensino de Funções por Meio de Investigações Matemáticas**, 2007. (Dissertação) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – SP, 2007.

SOUSA, I. B. **Produção de Significados a partir de Investigações Matemáticas: Função Afim e Contextos Cotidianos**, 2018. (Dissertação) – Universidade Federal da Paraíba – PB, 2018.

TOZO, F. L. D. **Tarefas Exploratórias-Investigativas para a Aprendizagem da Função Afim**, 2016. (Dissertação) – Universidade Federal de São Carlos – SP, 2016.

TRINDADE, A. F. P da. **Investigações Matemáticas e Resolução de Problemas – Que Fronteiras**, 2008. (Dissertação) - Universidade Federal do Paraná – PR, 2008.

VERÍSSIMO, W. **Investigação Matemática: uma Abordagem das Questões de Álgebra e da OBMEP para o Ensino Médio**, 2018. (Dissertação) – Universidade Estadual de Maringá – PR, 2018.

APÊNDICE A

FICHAMENTO PARA MAPEAMENTO

A Educação Algébrica em Aulas Exploratório-Investigativas nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio: um mapeamento de teses e dissertações brasileiras

(DISSERTAÇÃO DE MESTRADO NO PPGE/CM/UFTM - AUTORA: CÁSSIA VALÊNIA GONÇALVES VIEIRA)

*Obrigatório

1. AUTORES *

2. TÍTULO *

3. NÍVEL *

4. INSTITUIÇÃO *

5. ANO DE DEFESA/PUBLICAÇÃO *

6. RESUMO (número(s) da(s) página(s)) *

7. PALAVRAS-CHAVE (número(s) da(s) página(s)) *

8. ORIENTADOR *

9. FOCO PRINCIPAL DO TRABALHO (número(s) da(s) página(s)) *

10. MODALIDADE DE ENSINO FOCO DA PESQUISA? *

Marcar apenas uma oval.

☐ ENSINO FUNDAMENTAL II

☐ ENSINO MÉDIO

11. OS OBJETIVOS ESTÃO EXPLICITADOS NA PESQUISA? *

Marcar apenas uma oval.

☐ SIM

☐ NÃO

12. TRANSCREVA OS OBJETIVOS (número(s) da(s) página(s)) *

13. A QUESTÃO DE PESQUISA ESTÁ EXPLICITADA? *

Marcar apenas uma oval.

☐ SIM

☐ NÃO

14. TRANSCREVA A QUESTÃO DE PESQUISA (número(s) da(s) página(s)) *

MÉTODO E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

15. O (A) AUTOR(A) EXPLICITA O TIPO DE PESQUISA? *

Marcar apenas uma oval.

☐ SIM

☐ NÃO

16. QUAL O TIPO DE PESQUISA SEGUNDO O(A) AUTOR(A)? (número(s) da(s) página(s)) *

17. O CONTEXTO DA PESQUISA FOI DEFINIDO PELO(A) AUTOR(A)? *

Marcar apenas uma oval.

- ☐ SIM
☐ NÃO

18. TRANSCREVA O TEXTO QUE EXPLICITA O CONTEXTO DA PESQUISA (número(s) da(s) página(s)) *

19. OS SUJEITOS DA PESQUISA FORAM CARACTERIZADOS PELO (A) AUTOR(A)? *

Marcar apenas uma oval.

- ☐ SIM
☐ NÃO

20. **TRANSCREVA O RECORTE DA PESQUISA QUE INDIQUE OS SUJETOS** (número(s) da(s) página(s))

21. **DESCREVA OS PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE** (número(s) da(s) página(s))

22. **Fundamentos Teóricos, INDICAÇÕES E PREOCUPAÇÕES DO(A) AUTOR(A) QUE TRAZEM SITUAÇÕES/FATOS/PROCESSOS/ENTRE OUTROS QUE ABORDAM A TEMÁTICA EDUCAÇÃO ALGÉBRICA - Principais Teóricos utilizados** (número(s) da(s) página(s))

23. Fundamentos Teóricos, INDICAÇÕES E PREOCUPAÇÕES DO(A) AUTOR(A) QUE TRAZEM SITUAÇÕES/FATOS/PROCESSOS/ENTRE OUTROS QUE ABORDAM A TEMÁTICA AULAS/TAREFAS/AÇÕES EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS EM MATEMÁTICA - Principais teóricos utilizados (número(s) da(s) página(s)) *

RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES DA PESQUISA

24. Descrever ou transcrever os principais resultados da pesquisa no que se refere a Educação Algébrica (número(s) da(s) página(s)) *

25. O autor(a) indica recomendações para o desenvolvimento da Educação Algébrica? *

Marcar apenas uma oval.

- ☐ SIM
☐ NÃO

26. TRANSCREVA AS INDICAÇÕES (SE HOUVER) (número(s) da(s) página(s)) *

27. Descrever ou transcrever os principais resultados da pesquisa no que se refere a aulas/tarefas/ações Exploratório-Investigativas em Matemática (número(s) da(s) página(s)) *

28. O autor(a) indica recomendações para o desenvolvimento de aulas/tarefas/ações exploratório-investigativas em Matemática no ensino fundamental II? *

Marcar apenas uma oval.

☐ SIM

☐ NÃO

29. TRANSCREVA AS INDICAÇÕES (SE HOUVER) (número(s) da(s) página(s)) *

30. O(a) autor(a) nas recomendações faz imbricações entre Educação Algébrica e Aulas/tarefas/ações Exploratório-Investigativas em Matemática *

Marcar apenas uma oval.

- ☐ SIM
☐ NÃO

31. TRANSCREVA AS RECOMENDAÇÕES (SE HOUVER) (número(s) da(s) página(s)) *

METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS LIGADOS AS AULAS

32. METODOLOGIA: DAS AULAS/TAREFAS/AÇÕES EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS EM MATEMÁTICA NA TEMÁTICA EDUCAÇÃO ALGÉBRICA, COM ÊNFASE NOS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS E AS TAREFAS ELABORADAS (número(s) da(s) página(s)) *

33. **METODOLOGIA: DAS AULAS/TAREFAS/AÇÕES EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS EM MATEMÁTICA NA TEMÁTICA EDUCAÇÃO ALGÉBRICA, COM ÊNFASE NAS PRÁTICAS E RECURSOS UTILIZADOS (CALCULADORA, GEOMETRIA DINÂMICA, TIC, MATERIAL MANIPULÁVEL OU SOMENTE O ROTEIRO), ORGANIZAÇÃO DOS RECURSOS (MAIS DETALHADO OU MENOS DETALHADOS?) E DESENVOLVIMENTO DA PRÁTICA** (número(s) da(s) página(s))

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

APÊNDICE B
CATÁLOGO DE TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS DE
ACORDO COM O AUTOR

1. RODRIGUES, M. A. **Narrativas no Ensino de Funções por Meio de Investigações Matemáticas**. (Dissertação) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – SP, 2007.

Página 101-102

4.2. Primeira Tarefa Exploratório-Investigativa: Uma Fábula Matemática

Esta tarefa exploratório-investigativa apresentada aos alunos objetivou propiciar um cenário educativo, no qual os alunos pudessem compreender a dependência entre duas grandezas²¹, pois esta é uma das idéias fundamentais à noção Função. Apresentamos, a seguir, as maneiras como os alunos receberam essa tarefa exploratório-investigativa pelo professor-pesquisador.

Uma Fábula Matemática – A Tartaruga e a Lebre

Muito silenciosa, a tartaruga escuta o maracó dizer: A lebre é o animal mais veloz da mata. Lá em baixo, o tatu responde: Mas a tartaruga é o animal mais resistente. Ele anda muito mais. A onça pintada que estava sentada à sombra ouviu a conversa e disse: Vamos ver quem é melhor. Aquele que chegar primeiro ao lago é o campeão da mata. Será a lebre ou a tartaruga? Todos os bichos ficaram animados. Até a serpente, que estava enrolada no galho, levantou-se a cabeça. A lebre saiu na frente correndo. A tartaruga andava bem devagar. Sem pressa, arrastava o casco e parecia que não ia chegar. No meio do caminho, a lebre ficou cansada. Já estava tão longe da tartaruga deixou-se à sombra de uma árvore e dormiu um sono profundo. E foi assim que a tartaruga, com o seu passo miúdo e lento passou à frente da lebre. Chegou-se primeiro ao lago e foi beber água. (La Fontaine).

Explorando a Fábula

Com certeza, você já ouviu essa história na sua vida, pois uma Fábula de La Fontaine é uma das histórias mais conhecidas que existem. Mas alguma vez pensamos aproveitar a Matemática para explorar? Essa é a sua tarefa a partir de agora. • Comece a sua exploração colocando informalmente as ideias que você entendeu dessa fábula. • Baseado na temática da fábula tentem inventar a sua própria história usando toda a sua criatividade e a sua imaginação. • Considerando o tempo e a distância como as grandezas envolvidas nessa fábula, como tu achas que poderia ser representada essa situação num gráfico. • Pesquise sobre esses dois animais citados nessa fábula. • Depois de elaborarem suas histórias, conguem representar estas histórias também graficamente. Para cada situação, não esqueça de apresentar juntamente com o texto da sua nova história a sua representação gráfica.

4.3. Segunda Tarefa Exploratório-Investigativa: Trajeto de Casa a Escola

Esta tarefa exploratório-investigativa objetivou propiciar um ambiente investigativo, no qual os alunos pudessem realizar questões relacionadas à leitura e a interpretação de gráficos, envolvendo as noções de variável e dependência, além de familiarizar com suas representações gráficas.

Apresentamos, a seguir, a maneira como o aluno presenciou esta tarefa exploratório-investigativa.

TAREFA EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVA – Trajeto de Casa de Escola

Tamara faz o trajeto da sua casa à escola a pé. Ela faz sempre o mesmo trajeto percorrendo cerca de 2000m. Sai às 06:30 para chegar às 7:00, horário em que começam as aulas.

No que segue, vamos falar em gráficos de tempo-distância e tempo-velocidade, e o sentido é o seguinte:

Gráfico Tempo-Distância	Gráfico Tempo-Velocidade
Registra a distância que Tamara encontra-se de casa, em função do tempo.	Registra a velocidade com que Tamara faz o trajeto, em função do tempo.

Observação: A variável tempo, pode ser representada no eixo X.

Com base nessas informações, apresentaremos algumas situações para investigação nos grupos.

Primeira Situação

Normalmente Tamara faz o trajeto caminhando, então:

(a) Como você acha que pode ser esboçado o gráfico tempo-distância que representa o trajeto de Tamara.

(b) Como você acha que pode ser esboçado o gráfico tempo-velocidade com que Tamara faz o trajeto.

Segunda Situação

Num certo dia, combinou encontrar uma amiga na escola às 06:45.

(a) Esboce o gráfico tempo-distância que representa o trajeto de Tamara.

(b) Esboce o gráfico do tempo-velocidade com que Tamara faz o trajeto.

Terceira Situação

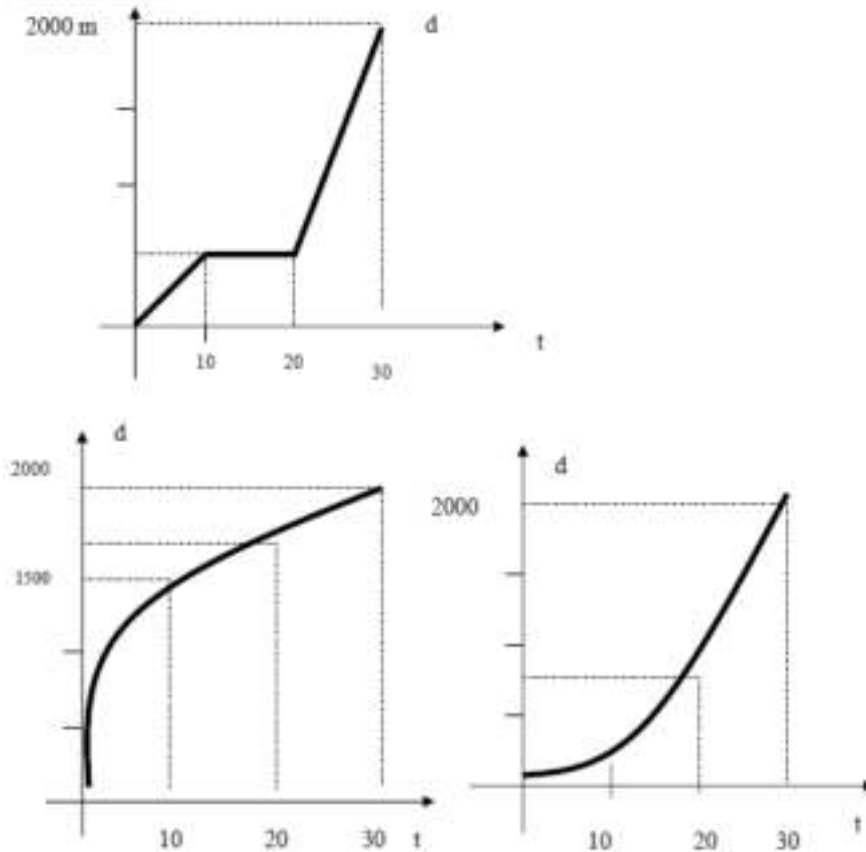
Numa certa aula de Matemática, a Professora Selange pediu aos alunos que representassem na forma de gráfico tempo-distância trajeto de casa à escola em dias que aconteceram imprevistos ao longo da caminhada. Tamara

apresenta os gráficos abaixo, observando que o trajeto sempre tinha sido o mesmo e que a diferença estava na forma de fazer o trajeto.

(a) Como você interpretaria esses trajetos de Tamara?

(b) Com base na sua interpretação, como ficaria o gráfico tempo-velocidade em cada uma das situações?

(c) Consegue estimar a velocidade média com que Tamara estava caminhando em cada uma das situações, em todos os intervalos?



Quarta Situação

Juliana, colega de Tamara, que mora a aproximadamente 1000 m da escola, apresentou como gráfico tempo-distância do seu trajeto, num certo dia:

(a) Consegue descrever como foi o trajeto de Juliana neste dia?

(b) Como você viu a velocidade de Juliana teve muita variação ou não? O que justifica essa variação ou não?

(c) Consegue encontrar um intervalo de tempo Juliana se deslocou mais rapidamente?

(d) Em que instantes a velocidade de Juliana foi zero?

(e) Faz sentido falar que em certos intervalos a velocidade de Juliana foi negativa? O que acha que significa velocidade negativa?

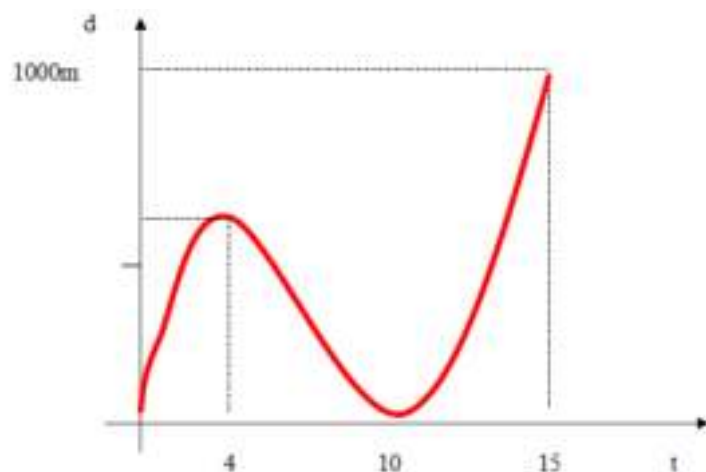


Gráfico distância/tempo referente à quarta situação

Observe o gráfico tempo-velocidade do trajeto de Juliana a seguir. E com base nele discuta as seguintes questões:

- Observe no intervalo de tempo $[0,4]$, se a velocidade é crescente ou decrescente, justificando a sua postura.
- Sabes qual é a velocidade de Juliana no instante 4?
- Discuta e interprete o que acontece com a velocidade no intervalo de tempo $[4,10]$.
- Sabes qual a velocidade de Juliana no instante 10?
- O que será que aconteceu com a velocidade de Juliana no intervalo de $[10,15]$?

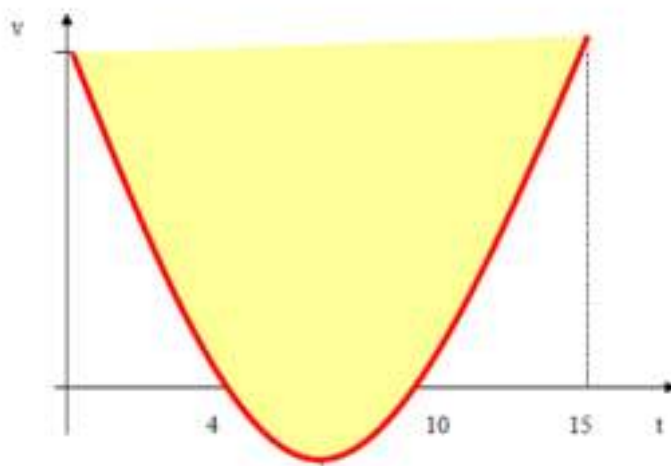


Gráfico velocidade/tempo referente à quarta situação da tarefa

Atividade Proposta Final

Cada componente do grupo deverá descrever graficamente o trajeto que efetuou para ir da sua casa até a escola. Para isso é preciso saber: Qual a distância da sua casa até a escola e o tempo gasto para efetuar o trajeto. Com base nestes seus dados, simule os gráficos tempo-distância e tempo-velocidade. Não esqueça de registrar detalhadamente tudo o que aconteceu durante o trajeto. Escreva se aconteceu algum imprevisto ou alguma outra questão. Então vamos lá e mãos à obra.

4.4. Terceira Tarefa Exploratório-Investigativa: A Rivalidade entre Brasil e Argentina

Esta tarefa exploratório-investigativa objetivou propiciar um cenário de investigação em torno de uma partida de futebol. Pretendíamos ajudar os alunos a desenvolver capacidades de interpretação de gráficos a partir da exploração do conceito de Função em uma situação real, bem como capacidades de fundamentação de suas opiniões, reflexão e interpretação gráfica sobre a situação com que estavam sendo confrontados.

Uma das características desta tarefa é explorar as relações existentes entre uma partida de futebol e a Matemática. Tratando de futebol, entendemos que as opiniões são em sua maioria, divergentes. Pedimos para os alunos respeitarem as diferentes opiniões dos seus colegas e que colaborassem no trabalho de seus grupos, partilhando responsabilidades, saberes, enfrentando com confiança novas situações e reconhecendo a presença da Matemática em situações da vida real.

Elaboramos esta tarefa visando criar um ambiente favorável para a aprendizagem sobre interpretação de gráficos. Escolhemos esta tarefa, porque o futebol é uma área de conhecimento familiar aos alunos e as situações relacionadas ao futebol oferecem possibilidades ricas para exploração gráfica.

Apresentamos, a seguir, a maneira como essa tarefa exploratório-investigativa foi vista pelos alunos.

Terceira Tarefa Exploratório-Investigativa
Eliminatórias Sul -Americana da Copa 2006
A Rivalidade entre Brasil e Argentina



BRASIL E ARGENTINA foram sempre protagonistas de jogos emocionantes, decisões dramáticas e até batalhas campais. Por isso, sua velha rivalidade - na bola e, às vezes, na briga - se transformou no clássico do continente. A rica história da Seleção Brasileira foi e continua sendo escrita, sobretudo com vitórias maravilhosas, campanhas inesquecíveis e conquistas brilhantes. Ao lado de tantos momentos de grandesa, porém, ela registra um capítulo amargo: os confrontos com a Argentina, que ao longo de várias fases do nosso futebol pode exibir superioridade, talvez para o espanto dos mais ufanistas.

Antes da realização de cada Copa do Mundo que acontece de quatro em quatro anos, acontece o que conhecemos como eliminatórias para a copa.

O Brasil e a Argentina disputam as eliminatórias sulamericanas, onde se classificam quatro seleções e uma quinta disputa a repescagem com a equipe campeã da Oceania. Normalmente Argentina e Brasil sempre travam duelos memoráveis e a cada jogo que passa a rivalidade entre os dois países só aumentam.

Nesta eliminatória o Brasil já venceu a Argentina. O jogo aconteceu no Estádio do Mineirão em Belo Horizonte no dia 02/06/2004 e o jogo terminou 3 a 1. O próximo encontro entre as duas seleções está marcado para o dia 08/06/2005 partida esta que será realizada em Buenos Aires na Argentina.

Iremos pegar como referência a partida realizada em Belo Horizonte entre as duas seleções para investigarmos alguns conceitos matemáticos existentes nessa situação. Abaixo aparece uma foto do jogo realizado no Mineirão em Belo Horizonte - MG.



Cafu disputa jogada com o argentino Crespo

ESCALAÇÃO DAS EQUIPES

SELEÇÃO DO BRASIL

Dida- Cafu - Juan - Roque Júnior - Roberto Carlos - Edmundo - Juninho Pernambucano - (Júlio Baptista) - Zé Roberto - Kaká (Alex) - Luis Fabiano - (Edu) - Ronaldo. Técnico: Carlos Alberto Parreira

SELEÇÃO DA ARGENTINA

Caballero - Samuel - Quaresma - Heinze - Zanetti - Mascherano - Sorin - Luis Gonzalez - (Amar) - Delgado - (Roalet) - Crespo - (Saviola) - Killy Gonzalez. Técnico: Marcelo Balsa

GOLS DA PARTIDA

BRASIL - Ronaldo, aos 16 min do primeiro tempo

Ronaldo, aos 22 e 50 min do segundo tempo.

ARGENTINA - Sorin, aos 14 min do segundo tempo.

Nesse jogo que o Brasil venceu a Argentina por três a um o craque da partida foi Ronaldo o fenômeno, fazendo os três gols da vitória. A figura abaixo mostra o gráfico que representa a distância da bola ao ponto médio da linha de fundo da equipe brasileira, durante uma jogada.

A partir desta situação propomos-te algumas tarefas para investigação.

TAREFA I

Imaginar que tu és um comentador desportivo, não é da Rede Globo, mas é aqui da nossa escola. Com os dados fornecidos pelo gráfico e com a constituição das equipas tenta fazer um relato desta jogada.

TAREFA II

Faz um esquema da jogada na planta do campo, tendo em atenção as medidas reais do campo.

DIMENSÕES DO CAMPO DO MINEIRÃO

Comprimento: 110 metros

Largura: 75 metros

Gol: 7,32 metros

Altura da Baliza: 2,44

Largura da área: 40,5 metros

Comprimento da área: 16,5 metros

Marca do Pênalti a Linha do Gol: 11 metros

Raio que liga a marca do Pênalti ao semi-círculo da área: 9,2 metros

Diâmetro da Circunferência central: 36 metros

Com estas dimensões desenha a planta do gramado do estádio do Mineirão.

Potencial da Tarefa

Identificar as conexões matemáticas que são possíveis estabelecer com a geometria, como, por exemplo:

Aplicação do conceito de escala.

A identificação do arco da circunferência como um lugar geométrico.

Aplicação do Teorema de Pitágoras no espaço para o cálculo das dimensões da baliza.

Discussão e análise: de partes da jogada.

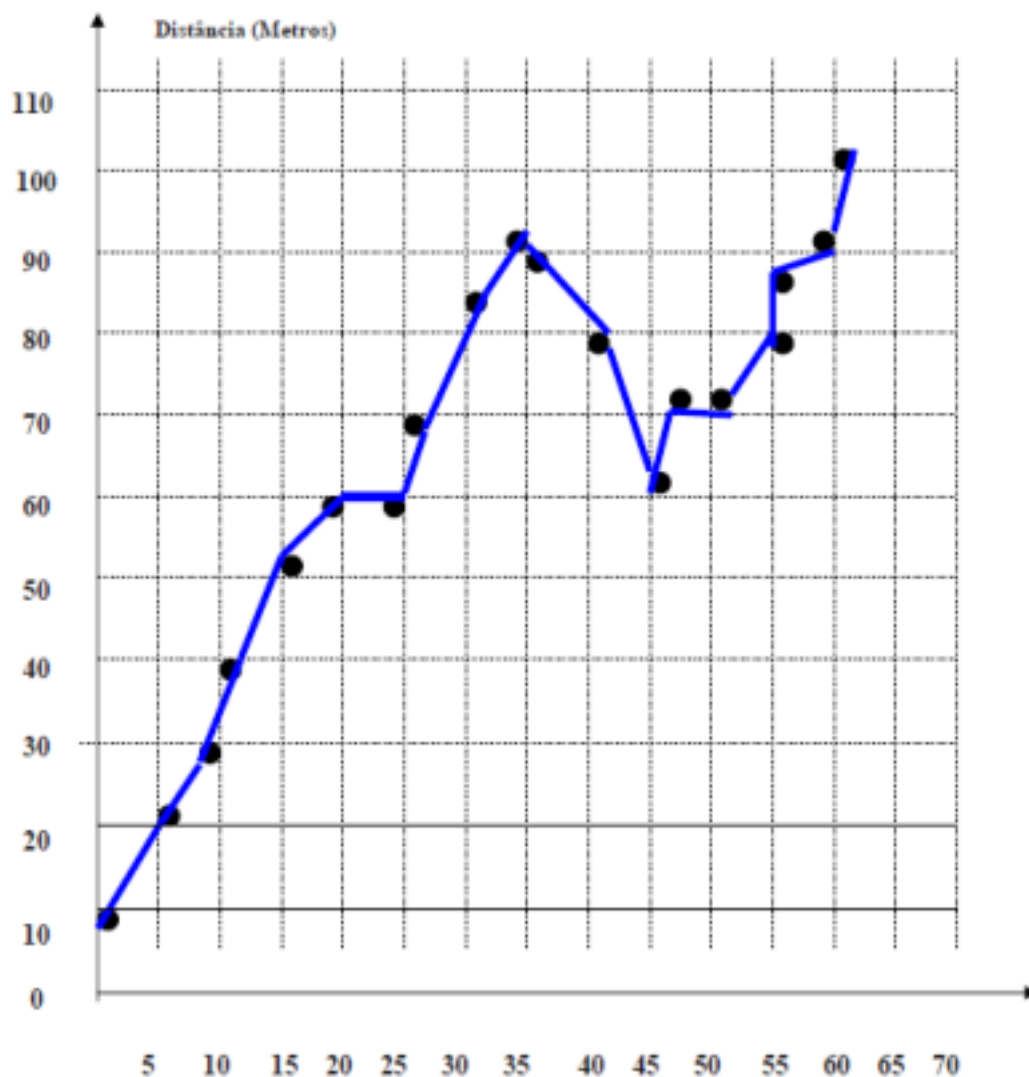


Gráfico da Jogada da Tarefa Exploratório-Investigativa "A Rivalidade entre Brasil e Argentina"

Narrativas Escritas

Monte um texto colocando os seus pontos de vista sobre a rivalidade existente entre Brasil e Argentina. Coloque aqui tudo o que você quiser colocar, se sentes frio na barriga quando o Brasil enfrenta a Argentina. Imagina: que o Maradona ou o Tervés venha aqui na escola, redija um texto – carta – (de 30 a 60 linhas), para enviar para um desses jogadores argentinos. Use toda a tua criatividade para isso, escreva o que você quiser sem imoralidade.

4.5. Quarta Tarefa Exploratório-Investigativa: A Lenda do Jogo de Xadrez e as Funções

Esta tarefa exploratório-investigativa objetivou desencadear um ambiente de investigação em torno do jogo de xadrez, buscando, na história, fatos do seu descobrimento e conceitos matemáticos extraídos da lenda desse jogo. Pretendíamos que os alunos compreendessem como generalizar leis de diferentes tipos de Funções, em que eles aprenderam a tomar uma Função como uma expressão analítica, pois, como sabemos, essa é mais uma forma de representação de uma Função.

Essa tarefa exploratório-investigativa foi apresentada à turma no final do episódio de ensino no dia 23 de agosto de 2005. Resolvemos lembrar e discutir algumas idéias referentes ao conceito de Função como dependência e correspondência entre duas grandezas no início do episódio de ensino desse dia. Iniciei esse episódio apresentando aos alunos, algumas frases envolvendo o termo Função e alguns exemplos, nos quais o conceito de Função se fazia presente no cotidiano. No Anexo XII, apresentamos algumas das frases relacionadas ao termo Funções registradas pelos grupos em suas narrativas escritas. Os dois episódios seguintes aconteceram no dia 24 de agosto de 2005 e foram dedicados para as discussões e para o entendimento das idéias referentes a esta tarefa exploratório-investigativa.

Nestes episódios, os momentos foram destinados à discussão e à interpretação dos caminhos percorridos pelos grupos. A montagem das narrativas escritas dessa tarefa foi feita depois dos momentos de discussão e reflexão. No Anexo XIII, apresentamos os exemplos que discutimos com os alunos no início do episódio de ensino. Esses exemplos constituíram-se em algumas idéias que envolvem o conceito de Função, como dependência e correspondência entre duas grandezas.

Uma das dimensões importantes se relacionou com a solicitação do professor/pesquisador para os alunos escreverem frases envolvendo o termo Função e das situações exploradas envolvendo o conceito de Função. Apresentamos, a seguir, algumas frases registradas nas narrativas escritas de um grupo.

"Eu vivo em função da alimentação"
"As pessoas vivem em função dos rios"
"A escola vive em função dos alunos"
"A igreja é sustentada em função dos dízimos que os fiéis dão"
"As árvores sobrevivem em função da terra"
"A televisão só pode ser assistida em função da energia"
"Os alunos estudam em função dos livros"
"Os professores dão aulas em função da atenção dos alunos"
"Nós escrevemos em função do lápis"
"Os doentes vivem em função dos médicos"

O tempo restante deste episódio de ensino foi destinado à apresentação para a turma da noção de Função no cotidiano. O intuito dessa apresentação foi propiciar aos alunos entendimentos que tanto o termo Função como uma Função matemática está presente em nosso cotidiano. Apresentamos para os alunos, algumas frases envolvendo o termo função e algumas situações problemas, nas quais esse conceito estava presente, além de entregar as folhas referentes à tarefa exploratório-investigativa: "a lenda do jogo de xadrez e as Funções".

Apresentamos, a seguir, a forma como foi explicitado à classe o texto referente a esta tarefa exploratório-investigativa.

Lenda do xadrez e as Funções

Esta é uma das lendas sobre o surgimento do xadrez, mostrando um lado mais místico para o surgimento desse antigo e interessante jogo que fascina milhões de pessoas pelo mundo.

"Conta-se que o rajá indiano Balhait, entediado com jogos em que a sorte acabava prevalecendo sobre a perícia e a habilidade do jogador, pediu a um sábio de sua corte, chamado Sissa, que inventasse um jogo que valorizasse qualidades nobres, como a prudência, a diligência, a lucidez e a sabedoria, opondo-se às características de aleatoriedade e fatalidade observadas no *naré* (antigo jogo indiano com dados)".

Passado algum tempo, Sissa se apresentou ao rajá com sua invenção. Tratava-se de um tabuleiro quadriculado, sobre o qual se movimentavam peças de diferentes formatos, correspondendo cada formato a um elemento do exército indiano: Carros (Bispos), Cavalos, Elefantes (Torres) e Soldados (Peões), além de um Rei e um vizir (Rainha). Sissa explicou que escolheu a guerra como tema porque é a guerra onde mais pesa a importância da decisão, da persistência, da ponderação, da sabedoria e da coragem.

O rajá ficou encantado com o jogo e concedeu a Sissa o direito a pedir o que quisesse como recompensa. Sissa tentou recusar a recompensa, pois a satisfação de ter criado o jogo, por si só, já lhe era gratificante. Mas o rajá insistiu tanto que Sissa concordou em fazer um pedido:

- Desejo, como recompensa, um tabuleiro de Xadrez cheio de grãos de trigo, sendo que a primeira casa deve ter um grão, a segunda deve ter dois, a terceira deve ter quatro, a quarta deve ter oito, e assim sucessivamente, dobrando o número de grãos na casa seguinte, até encher todas as casas do tabuleiro com o número de grãos correspondentes.

O rajá se recusou a satisfazer um pedido tão modesto, e tentou persuadir Sissa a escolher uma recompensa mais valiosa. No entanto, Sissa disse que para ele bastava que lhe fosse conferida aquela recompensa, e nada mais.

Diante disso, o rajá ordenou que lhe dessem um saco de trigo, julgando que nele haveria pagamento de sobra, mas Sissa se recusou a aceitá-lo. Disse que não queria nem um grão a mais nem a menos do que lhe cabia receber.

Foi só então que o rajá ordenou aos seus matemáticos que calculassem a quantia exata que deveria ser paga, e descobrir, para sua consternação, que todo o trigo da Índia não era suficiente, aliás, todo o trigo cultivado no mundo, durante dezenas de anos, não seria suficiente! A quantia corresponde à soma da série:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1.024 + 2.048 + 4.096 + \dots = ?$$

Para alívio do rajá, Sissa disse que já sabia que sua recompensa não poderia ser paga, pois aquela quantidade daria para cobrir toda a superfície da Índia com uma camada de quase uma polegada de espessura.

Esta é apenas uma das lendas, mas que prova que os criadores desse jogo foram pessoas altamente inteligentes ou muito astutas e com grande habilidade em matemática e uma boa capacidade lógica. A lenda nos apresenta uma aplicação de funções exponenciais.

O problema consiste em determinar qual é o montante de grãos de trigo que o rei devia pagar seguindo a regra determinada por Sissa.

Tarefa Proposta

Consegue determinar uma função exponencial que dá a quantidade de grãos em cada casa em função do número da casa? Suponha que G seja a quantidade de grãos e C o número da casa.

Consegue determinar uma função exponencial que dá a somatória das casas em função do número da casa? Suponha que S seja a quantidade total ou a somatória e C seja o número da casa.

Consegue determinar a quantia exata de grãos que o rei teria que pagar para Sissa.

Com base nessa tarefa elabore um relatório mostrando tudo que aprendestes nessa tarefa, como: O que é para ti uma função exponencial? Essa forma de resolver e solucionar problemas ajudou o grupo a refletir sobre o que aprendestes? Enfim, depois dessa tarefa, o que você aprendeu? Exemplifique

4.6. Quinta Tarefa Exploratório-Investigativa: As Funções vão até a Lanchonete

Esta tarefa exploratório-investigativa objetivou criar um cenário exploratório em torno de uma situação, na qual os alunos pudessem desenvolver suas narrativas e argumentações, além de desenvolver a linguagem e os pensamentos algébricos, instigando-os a fazer descobertas, conjecturas e argumentações, justificando e comunicando matematicamente.

Essa tarefa foi apresentada à turma no início do episódio de ensino no dia 25 de agosto de 2005, quando fizemos algumas considerações a respeito do trabalho do professor em uma na perspectiva investigativa e, também, fizemos alguns apontamentos sobre a importância da criticidade no mundo em que vivemos. Nesse dia, faltou um professor na escola e a direção nos pediu para ficar outra aula na oitava série. Aceitamos o convite e aproveitamos para apresentar a turma à tarefa “As Funções vão até a Lanchonete”. Apresentamos, a seguir, a forma como foi explicitado à classe o texto referente a esta tarefa exploratório-investigativa.

AS FUNÇÕES VÃO A LANCHONETE

Situação Inicial

Sábado à noite quatro alunos da turma da oitava série, Alberto, Bruno, Carlos e Danilo, foram comer umas pizzas e tomar alguns sucos e refrigerantes na lanchonete Caju Lanches. Chegando lá, o garçon Leon já havia separado uma mesa para os quatro amigos se sentarem:

Desenho das mesas

A conversa ia animada quando chegaram Elias e Felipe. Leon apressou-se e ajeitou mais uma mesa ao lado da primeira, ficando assim a disposição:

Nova disposição das mesas

Era dia de reunião da turma para descansar e passar bons momentos brincando e conversando e logo chegaram Gláucio e Humberto. Nosso amigo Leon correu para colocar uma nova mesa ao lado das duas anteriores e avisou ao Negão (seu pai, dono da lanchonete) para preparar mais duas pizzas.

Nova disposição das mesas

A turma estava esperando mais companheiros e logo chegaram Ilton e João e mais uma mesa foi colocada. Faça um desenho representando a nova quantidade de mesas e seus ocupantes, sempre respeitando a mesma disposição das pessoas à sua volta.

Desenhe a representação das mesas quando chegaram Lindomar e Márcio.

Complete a tabela abaixo representando a quantidade de pessoas em relação ao número de mesas.

Número de Pessoas	4	6	8	10	12
Número de mesas					

Quantas mesas seriam necessárias para acomodar 20 pessoas? E para acomodar 30 pessoas?

Se forem colocadas 10 mesas, quantas pessoas podem ser acomodadas, usando – se a mesma disposição?

Quantas mesas serão necessárias para receber 100 pessoas?

Consegue detectar uma regra que permite o cálculo rápido do número de pessoas se soubermos a quantidade de mesas disponíveis. Faça testes, formule conjecturas e encontre a fórmula.

Descreva no relatório todo o processo realizado pelo grupo na realização desta atividade.

Pelo que tu sabes sobre função, que tipo de função esta situação representa? O que você sentiu de dificuldades ao realizar esta experiência? O que aprendeu? O que já sabia? O que auxiliou na execução desta atividade? Essa forma de resolver problemas fez você refletir sobre o que e como aprendeu? Escrever matemática facilita sua comunicação? Diminui suas dificuldades com essa tarefa?

4.7. Sexta Tarefa Exploratório-Investigativa: Função Área - Respeite o Seu Número

Esta tarefa exploratório-investigativa objetivou apresentar aos alunos um ambiente propício para suas aprendizagens, ambiente este, no qual eles trabalhassem com leis que regem a área dos seus números de chamada em um quadrilátero. Neste ambiente, os alunos tiveram a oportunidade de desenvolver suas narrativas escritas nos seus grupos e as narrativas orais para a turma toda em suas apresentações e argumentações.

Essa tarefa exploratório-investigativa foi preparada com a finalidade de levar os alunos a três níveis diferentes: ao nível dos conhecimentos, em que se pretendeu que os alunos conseguissem trabalhar com essa situação, representando uma Função através de leis matemáticas. Ao nível das atitudes e valores, em que se pretendeu que os alunos conseguissem fundamentar suas opiniões, refletindo sobre a situação e, respeitando as diferentes opiniões dos colegas, colaborando nos trabalhos de grupo, partilhando responsabilidades e saberes, enfrentando com confiança novas situações e reconhecendo a presença da Matemática no dia-a-dia. Ao nível das capacidades, com o objetivo de os alunos interpretarem corretamente as situações propostas e que organizassem narrativas referentes ao trabalho desenvolvido.

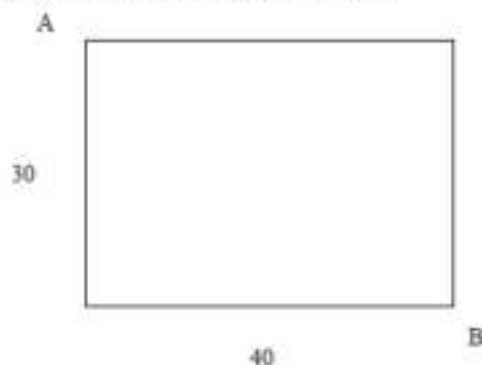
Essa tarefa exploratório-investigativa foi apresentada à turma no início do episódio de ensino do dia 06 de setembro de 2005, e, no dia 07 de setembro de 2006, tivemos dois episódios de ensino, e estes foram destinados ao desenvolvimento da tarefa nos grupos, discussão entre professor e alunos sobre o trabalho desenvolvido.

No primeiro episódio, fizemos a leitura comentada da tarefa exploratório-investigativa "Respeite o seu Número", com o intuito de esclarecer os objetivos propostos por essa tarefa. Nesse momento de apresentação da tarefa e arranque da atividade, alguns alunos tomaram como objetivo central descobrir quem possuía o número de maior área.

Apresentamos, a seguir, a maneira como essa tarefa exploratório-investigativa, foi introduzida à turma.

Tarefa Exploratório-Investigativa Função Área - Respeite o Seu Número

Cada aluno deve pegar uma folha de papel quadriculado. Nessa folha contorne um retângulo de 40 x 35 (A unidade de comprimento é o lado do quadradinho do quadrilátero).



No seu retângulo, marque quatro pontos: dois a partir do ponto A e dois a partir do ponto B. Esses pontos que devem ser marcados é o número que cada um tem na chamada. Exemplo: Se o seu número na chamada é o 15, você deve andar 15 unidades nos dois sentidos dos pontos A e B.

A seguir marque os quatro pontos para formar o seu quadrilátero. Com isso, calcule a área do seu quadrilátero, pinte a região interna do seu quadrilátero e escreva visivelmente a área do seu quadrilátero.

Registre os procedimentos que fizeram para calcular as áreas, e utilize o mesmo processo, mas em vez de colocar o seu número da chamada, escreva ali o x . Com a ajuda do seu grupo, desenvolva os cálculos para encontrar a expressão matemática que relaciona a área do quadrilátero em função de x .

A seguir nesta função, cada aluno substitui seu próprio número no lugar de x , efetuando os cálculos para verificar quem é o aluno da sala que possui a maior área nessa tarefa.

Desafio: Qual é o valor exato de x que faz ter essa função a maior área? Consegue esboçar o gráfico dessa função numa malha quadriculada, para emergir geometricamente essa situação. Quais são as suas conclusões sobre essa tarefa.

Página 178-179

4.8. Sétima Tarefa Exploratório-Investigativa: Área de um Quadrilátero em Função de X

Esta tarefa exploratório-investigativa objetivou apresentar aos alunos um ambiente propício para suas aprendizagens, no qual se estuda o comportamento de uma Função, chamada como Função Área (A), no contexto de um problema real envolvendo áreas e perímetros de polígonos. Essa tarefa exploratório-investigativa faz a relação entre a Álgebra das Funções e a Geometria das áreas e perímetros. Com essa intenção, proporcionamos oportunidades aos alunos de se posicionarem através das suas narrativas em seus grupos, como também, para a turma toda. Desta maneira, os alunos puderam exprimir e fundamentar suas opiniões, refletindo e formulando idéias sobre a situação com que estão sendo confrontados.

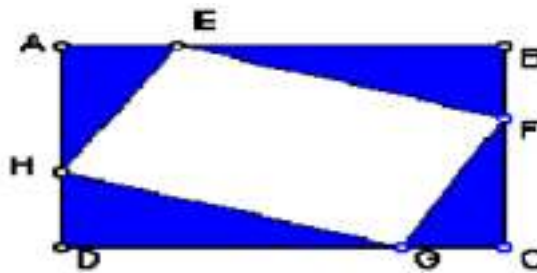
Preparamos essa tarefa exploratório-investigativa com a finalidade de levar os alunos a entender as relações existentes entre a álgebra e a geometria, pois gostaríamos que eles conseguissem entender os comportamentos de Funções, além de trabalhar com diferentes maneiras de representar uma Função. Sendo assim, nossa pretensão foi desenvolver o caráter indutivo desses alunos, levando-os a generalizarem e entenderem os porquês das leis e das fórmulas usadas em Matemática.

Apresentamos essa tarefa à turma em dois episódios de ensino, no dia 08 de setembro de 2005, e concluímos, com os momentos de discussão e reflexão, em um episódio de ensino, no dia 13 de setembro de 2005. Em um primeiro momento, fizemos a leitura comentada dessa tarefa, com o intuito de esclarecer os objetivos propostos para essa tarefa. Nos momentos de apresentação, alguns alunos gostaram e tomaram como objetivo central, entender como acontece o comportamento das Funções.

Apresentamos, a seguir, as características dessa tarefa exploratório-investigativa recebida pelos alunos.

Tarefa Exploratório-Investigativa Área de um Quadrilátero em Função de X

Na figura seguinte está representado um retângulo com 6 cm de comprimento e 4 cm de altura. Sobre os lados marcam-se os pontos E, F, G e H, tais que $AE = BF = CG = DH = X$.



Seja A , a função que a cada x faz corresponder a área do quadrilátero EFGH, consegue escrever uma expressão que traduza a área do quadrilátero em função de x ?

No contexto do nosso problema quais são os valores que a variável x pode tomar ou adotar.

Com base na lei encontrada anteriormente, consegue montar uma tabela de valores para as duas grandezas em questão e representar graficamente os valores da tabela que apresenta a função A .

Com base no gráfico representado anteriormente, faça uma investigação sobre a monotonia da função no seu domínio. O que você entende por monotonia e por domínio e no contexto do nosso problema qual é o seu Domínio?

Para você quais são os extremos da função? Justifique o seu posicionamento.

Como você faria para determinar os valores de x , tais que: (a) $A(x) = 16$; (b) $A(x) \geq 22$

Consegue encontrar o perímetro do quadrilátero que tem a área mínima e a área máxima?

Consegue encontrar alguma lei que determina o perímetro do quadrilátero EFGH em função de X ?

Com base nessas questões e nas questões discutidas no grupo, elaborem um relatório, descrevendo todos os passos que realizaram ao longo da resolução desta tarefa.

4.9. Oitava Tarefa Exploratório-Investigativa: Criptografando Mensagens e as Funções

Esta tarefa exploratório-investigativa objetivou apresentar aos alunos um ambiente propício para exploração das relações existentes entre sequência de números e as leis que regem uma Função. Preparamos essa tarefa exploratório-investigativa, com a finalidade de levar os alunos a entenderem o conceito de Função como correspondência e, também, como, transformação (máquinas de Funções). A noção do conceito de uma Função inversa também foi explorada nessa tarefa.

Desta maneira, nossa intenção foi dar oportunidades para os alunos se posicionarem perante as situações, através das suas narrativas. Pretendíamos também, desenvolver, nos alunos, capacidades de exploração, dando a oportunidade para formularem as leis através de sequências de números, levando-os a generalizarem e entenderem os porquês das leis e das fórmulas.

Esta tarefa exploratório-investigativa foi proposta aos alunos em três episódios de ensino de cinquenta minutos cada episódio, no qual dois aconteceram no dia 14 de setembro de 2005, e um, no dia 15 de setembro de 2005. Apresentamos, a seguir, a maneira como esta tarefa exploratório-investigativa foi introduzida aos alunos.

Tarefa Exploratório-Investigativa "Criptografando Mensagens e as Funções"

A palavra Criptografia tem sua origem grega: *krypto* = significa oculto, envolto, escondido, secreto; *graphos* significa escrever, grafar. Portanto, criptografia significa escrita secreta ou escrita oculta. As formas de ocultar mensagens são as mais diversas.

Geralmente a matemática espanta muita gente. Depende de como se encara. Se for preciso decorar milhões de fórmulas e teoremas, realmente é de se espantar. Se for para oferecer ferramentas para efetuar cálculos que nos interessem e que facilitem nosso trabalho, a coisa muda de figura. Se pretendemos cifrar uma mensagem, queremos que esta cifra seja a mais segura possível. Se pretendemos decifrar uma mensagem, queremos que isto ocorra no menor tempo possível.

Um dos problemas encarados como um passatempo até poucos anos atrás, e que se tornou de importância crucial atualmente, é o de transmitir mensagens codificadas ou, em termos técnicos, criptografar mensagens. Este problema surge e revela toda a sua importância, quando é necessário enviar por meio de uma rede de computadores dados sigilosos: saldos e senhas bancárias, informações pessoais, número de cartão de crédito, etc. É preciso criar, então, meios seguros de transmitir esses dados de modo que somente pessoas autorizadas tenham acesso a eles.

A criptografia é tão antiga quanto a própria escrita; já estava presente no sistema de escrita hieroglífica dos egípcios e os romanos utilizavam códigos secretos para comunicar planos de batalha.

O primeiro passo para que seja criado um código seguro é estabelecer, de alguma maneira pré-determinada, uma correspondência entre letras e números. Existem muitas formas de se definir tal correspondência, a mais simples das quais é dada pela tabela abaixo:

Letras	Números	Letras	Números	Letras	Números
#	0	I	9	R	18
A	1	J	10	S	19
B	2	K	11	T	20
C	3	L	12	U	21
D	4	M	13	V	22
E	5	N	14	W	23
F	6	O	15	X	24
G	7	P	16	Y	25
H	8	Q	17	Z	26

Essa tabela define uma correspondência que associa a cada letra do nosso alfabeto, um único número natural entre 0 e 26, onde o número zero (o símbolo # representa um espaço em branco) que vamos utilizar nos modelos de códigos que usaremos.

Por essa correspondência, qual letra está associada ao número 15?

Qual o número correspondente a letra x?

Você é capaz de estabelecer uma correspondência que associe as letras do alfabeto aos números naturais diferente dessa?

Nesse exemplo, o problema de transmitir mensagens codificadas foi reduzido, simplesmente, ao problema de associar a cada letra do alfabeto um único número natural, de acordo com uma regra conhecida. A correspondência ou regra, estabelecida acima, define uma função matemática.

Uma função matemática é, em essência, uma forma especial de se fazer uma correspondência entre elementos de dois conjuntos.

É claro que, para transmissão de mensagens, não se pode usar um código tão simples assim. O sigilo dos dados não estaria garantido, porque seria muito fácil descobrir a chave do código e então, decodificar a mensagem. Por isso, em geral, depois dessa primeira etapa, em que se faz corresponder letras a números de maneira simples, os números obtidos são ainda operados algebricamente usando-se regras conhecidas somente pelo receptor e pelo transmissor da mensagem.

Portanto, cifrar uma mensagem recai no problema de permutar números por meio de uma regra que chamaremos de f . Pode-se fazer isso, de forma muito prática, por exemplo, através de funções afins $f(x) = a \cdot x + b$, com a, b inteiros, a diferente de zero, definidas no conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 26\}$.

Suponhamos que Sonia e Rosinei desejem trocar mensagens sigilosas utilizando um alfabeto escolhido. O primeiro passo, a tomarem é definirem a função cifradora, digamos que seja $f(x) = 2 \cdot x - 3$. Assim, por exemplo:

Mensagem	S	O	U		C	U	I	A	B	A	N	A
Sonia associa a sequência numérica	19	15	21	0	3	21	9	1	2	1	14	1

Mas Sonia transmite a Rosinei a sequência numérica obtida pelas imagens de f , isto é:

$$35 ; 27 ; 39 ; -3 ; 3 ; 39 ; 15 ; -1 ; 1 ; -1 ; 25 ; -1$$

Ao recebê-la, Rosinei, calculando a imagem de $f^{-1}(x) = (x+3)/2$ nessa sequência e utilizando a correspondência alfabeto - numérico, obtém-se a mensagem original.

Primeira Questão Proposta

O professor Márcio quer enviar uma mensagem sigilosa para os seus alunos da oitava série do Colégio Adventista, mas ele é um professor tímido e por isso resolveu transmitir a mensagem em forma de códigos. Para isso ele definiu a função cifradora como: $f(x) = x/2 - 1$. Mas o professor transmitiu a turma uma sequência numérica obtida através das imagens de f . Use este código para "transmitir" a mensagem.

Imagens de f	Domínio de f	Letra Correspondente
6,5		
-2		
8		
3,5		
2,5		
-0,5		
1		

6,5		
-1		
7		
6,5		
8		
-1		
9		
9,5		
1		
6,5		
-1		
2,5		
6,5		
8,5		
9		
6,5		
-1		
5,5		
9,5		
3,5		
9		
6,5		
-1		
1		
1,5		
8,5		
8,5		
-0,5		
-1		
9		
9,5		
8		
5,5		
-0,5		

Consegues descobrir qual é a mensagem? Se consegues, o que achou?

Segunda Questão Proposta

Agora que vocês já estão feras em decodificar mensagens, proponho-lhes o seguinte desafio: Suponha que um intruso (enxerido) tente decifrar as suas mensagens apoderando-se das seqüências numéricas codificadas. Como estamos utilizando funções afins para tanto, é suficiente apenas duas associações corretas entre os números da seqüência original e codificada. Com isso pedimos que determinem f e descubra a seguinte mensagem:

Imagens de f	Domínio de f	Letra Correspondente
-5		
-16		
1	1	
-12		
-2		
-3		
-17		
2	0	
-1		
-13		
-7		
-17		
1		
-17		
2		
-4		
-3		
-24		
2		
-13		

2		
-17		
-3		
-12		
-6		
-13		
-16		
2		
-14		
-13		
-16		
2		
-12		
-13		
-17		
2		
-14		
-13		
-16		
2		
-7		
-17		
-17		
-13		
2		
-3		
-17		
-18		
1		
-11		
-13		
-17		
2		
1		
-10		
-3		
-8		
-16		
-3		
-17		

Terceira Questão Proposta

Com base no que viram e aprenderam, envie uma mensagem para o professor Márcio, dando a ele a oportunidade de desvendar as suas mensagens. Relatem também nas narrativas escritas todo o desenvolvimento do grupo nessas questões.

2. MELO, A. J. F.. **O Ensino de Potências e Raízes com Auxílio da Calculadora**: Uma Experiências Investigativa em Sala de Aula. (Dissertação) – Pontifícia Universidade Católica - SP, 2008.

Páginas 42-55

2.2.1 Apresentação da atividade 1

Nossa primeira atividade envolveu o trabalho com potências e expoentes de 2, além de uma parte escrita composta por perguntas que buscam trabalhar com o conteúdo abordado na tabela.

Buscou-se contemplar tanto os cálculos matemáticos como a escrita da linguagem matemática refletida durante o desenvolvimento da atividade.

Considerada introdutória, esta atividade teve por objetivo retomar o conteúdo de potência de 2 e de raiz quadrada. Para os alunos retomarem esses conceitos, no início da atividade introduzimos uma tabela com números que, progressivamente, aumentavam o grau de dificuldade e possibilitavam verificar as variações ocorridas no cálculo de sua raiz. Outro objetivo era potencializar o uso da calculadora com números que dificultariam aos alunos encontrar sua raiz e, conseqüentemente, a base da potência de 2.

Para completar essa tabela, os alunos puderam utilizar a calculadora, artefato esse trabalhado como facilitador de cálculos, evitando as enfadonhas contas e aumentando a confiabilidade dos resultados na busca de alternativas de resposta ao completar as lacunas.

O quadro a seguir apresenta a tabela:

1) Com o auxílio de uma calculadora, preencha a tabela abaixo e, quando necessário, use aproximação de cinco casas decimais.

Número (<i>n</i>)	Representar o número <i>n</i> como potência de expoente 2	Representar na notação de raiz quadrada $\sqrt{n}$	Apresentar o cálculo da raiz quadrada
0			
1			
4,2			
9			
10,5			
750			
2025			
-16			
-20,8			
-150			

Quadro 1 – Tabela da Atividade 1

No início desta atividade, o professor pode fazer uma introdução, esclarecendo que o valor a ser representado na 2ª coluna como base da potência de 2 é um número que, multiplicado por ele mesmo, é o número n da 1ª coluna. Por exemplo: se $n=9$, então o valor a ser representado na 2ª coluna é 3^2 , pois $3 \cdot 3 = 9$.

Ao completar a tabela, espera-se que o aluno perceba que a base da potência de 2 da 2ª coluna é calculada extraindo a raiz quadrada do valor n dado. Com a calculadora, ele poderá fazer testes necessários para conseguir perceber essa relação entre a potência e a raiz.

Se o aluno realizar os cálculos de cada uma das colunas para cada valor n , poderá perceber, ao completar a 4ª coluna, que esse valor é o mesmo usado como base na representação do número como potência de expoente 2 na 2ª coluna e conjecturar que a potência de 2 e a raiz quadrada são operações inversas.

Abaixo apresentamos a tabela da atividade 1, preenchida com cinco casas decimais.

1) Com o auxílio de uma calculadora, preencha a tabela abaixo, e, quando necessário, use aproximação de cinco casas decimais.

Número (n)	Representar o número n como potência de expoente 2	Representar na notação de raiz quadrada $\sqrt{n}$	Apresentar o cálculo da raiz quadrada
0	0^2	$\sqrt{0}$	0
1	1^2	$\sqrt{1}$	1
4,2	$2,04939^2$	$\sqrt{4,2}$	2,04939
9	3^2	$\sqrt{9}$	3
10,5	$3,24037^2$	$\sqrt{10,5}$	3,24037
750	$27,38613^2$	$\sqrt{750}$	27,38613
2025	45^2	$\sqrt{2025}$	45
-16	Não existe	$\sqrt{-16}$	Não existe
-20,8	Não existe	$\sqrt{-20,8}$	Não existe
-150	Não existe	$\sqrt{-150}$	Não existe

Quadro 2 – Tabela da Atividade 1

Espera-se que o aluno complete a tabela linha por linha, facilitando a verificação de operação inversa entre potências e raízes. Se, durante o desenvolvimento da atividade for observado que tal fato não está ocorrendo, torna-se necessário orientar os alunos.

A terceira coluna tem por objetivo integrar a notação matemática convencional de raiz quadrada, para posteriormente determinar seu valor.

As questões elaboradas tinham o intuito de fazer com que o aluno desenvolvesse a habilidade de escrever suas verificações, observadas e refletidas no grupo por ocasião do preenchimento da tabela.

Abaixo temos as questões que compuseram a parte escrita da atividade 1, apresentadas aos alunos junto com o quadro 1:

2) Agora, responda as seguintes questões:

- a) O que representa o cálculo da raiz quadrada na última coluna? Explique.
- b) Analisando os números dados (da primeira à sétima linha), podemos notar que eles aumentam e são positivos. O que acontece com suas raízes quadradas?
- c) O que você observa nos cálculos das raízes quadradas de -16, -20,8 e -150?
- d) Você conseguiu representar os números -16; -20,8 e -150 na forma de potência com expoente 2? Por quê? Justifique sua resposta.
- e) Comparando a representação dos números na forma de potência de expoente 2 com os resultados obtidos pelo cálculo de sua raiz quadrada, descreva qual a relação entre estas duas operações.
- f) Baseado nesta atividade, procure escrever com suas palavras qual é a função da tecla $\sqrt{}$ da calculadora.

Quadro 3 – Questões da Atividade 1

A constatação de carências em relação à linguagem matemática, bem como de dificuldades em transcrever as discussões e as conclusões para o papel tornou necessário buscar estimular a reflexão e a análise nos alunos.

Para valores negativos assumidos por n , a calculadora exibe uma mensagem de erro em sua tela, cujo significado provavelmente os alunos, se totalmente alheios ao uso da máquina para o cálculo da raiz quadrada, podem

não reconhecer. Nesse caso, cabe ao professor ajudar no entendimento dessa mensagem quando a atividade for inicial e os alunos estiverem reconhecendo a calculadora com suas possibilidades. A discussão sobre a existência de raiz quadrada de número negativo, nessa situação, pode surgir entre os alunos.

Durante a resolução dessa atividade, o aluno pode notar a existência de valores de n cuja raiz quadrada não é um número exato e por isso precisam de arredondamento para serem informados na tabela. Ao final desta atividade, torna-se necessário que o professor não apenas discuta os erros que podem advir do arredondamento, mas também levante situações que permitem ou não efetuar aproximações.

Utiliza-se como regra para arredondamento que, para valores iguais ou acima de 5, arredonda-se uma unidade a casa decimal anterior e, abaixo de 5, mantém-se o valor da casa decimal anterior.

Esperava-se que os alunos percebessem a relação entre as teclas da raiz quadrada e potência de base 2, o que poderia facilitar a resolução da atividade.

Com isso finalizou-se nossa primeira atividade. À medida que cada grupo ia encerrando a atividade, discutíamos e questionávamos se valeriam as mesmas regras vistas nesta atividade para potência de base 3 e raiz cúbica, instigando-os para a próxima atividade.

2.2.2 Apresentação da atividade 2

Na atividade 2, pretendia-se que o aluno utilizasse seus conhecimentos sobre raiz cúbica e potência de expoente 3 e que, com a utilização da calculadora, elaborasse as relações pertinentes entre essas duas operações.

Esta atividade é semelhante à atividade 1, porém buscando maior entendimento dos conceitos de raízes e potências de índices ímpares.

No início, o professor talvez necessite apresentar a tecla da raiz cúbica e a tecla da potência de expoente 3, explicando sua utilização, uma vez que os alunos podem ainda ter dificuldades em manusear a calculadora científica.

Ao completar a tabela, o aluno pode perceber que a função raiz cúbica é crescente e que as raízes existem para todos os números reais, tanto positivos quanto negativos. E, por comparação com a atividade 1, os valores encontrados na quarta coluna são iguais à base do expoente da segunda coluna.

O aluno também pode notar a existência de valores de n cuja raiz cúbica não seja um número exato e para tanto precise de arredondamento.

É necessário atentar para os casos de arredondamento, que sempre ocorrem por falta ou excesso e que podem gerar propagação de erros na resolução, em situações matemáticas.

Abaixo temos o quadro com uma parte da atividade 2:

1) Preencha a tabela abaixo, com o auxílio da calculadora e, quando necessário, use aproximação de cinco casas decimais.

Número (n)	Representar o número n como potência de expoente 3	Representar na notação de raiz cúbica $\sqrt[3]{n}$	Apresentar o cálculo da raiz cúbica
0			
1			
2			
3,5			
27			
50			
90,2			
-10			
-11			
-13,3			

Quadro 4 – Tabela da Atividade 2

No final desta atividade, é possível que os alunos representem um número em forma de potência com expoente 3, tanto negativo como positivo, e percebam que existe raiz cúbica de números positivos e negativos. Nesse caso, em que o

índice da raiz é um número ímpar, valida-se a regra de sinais na multiplicação, observando que não se altera o sinal da base.

As perguntas propostas para esta segunda atividade tinham o intuito de proporcionar ao aluno, assim como na atividade 1, um momento de reflexão no preenchimento da tabela, trazendo para a aula de Matemática a possibilidade de mais de um modo de representação dos números reais.

A seguir encontra-se a tabela da atividade preenchida com cinco casas decimais e com os devidos arredondamentos, com a finalidade de minimizar a propagação do erro e possibilitar a comparação entre os valores das colunas 2 e 4.

1) Preencha a tabela abaixo, com o auxílio da calculadora e, quando necessário, use aproximação de cinco casas decimais.

Número (n)	Representar o número n como potência de expoente 3	Representar na notação de raiz cúbica $\sqrt[3]{n}$	Apresentar o cálculo da raiz cúbica
0	0^3	$\sqrt[3]{0}$	0
1	1^3	$\sqrt[3]{1}$	1
2	$1,25992^3$	$\sqrt[3]{2}$	1,25992
3,5	$1,51829^3$	$\sqrt[3]{3,5}$	1,51829
27	3^3	$\sqrt[3]{27}$	3
50	$3,68403^3$	$\sqrt[3]{50}$	3,68403
90,2	$4,48472^3$	$\sqrt[3]{90,2}$	4,48472
-10	$-2,15443^3$	$\sqrt[3]{-10}$	-2,15443
-11	$-2,22398^3$	$\sqrt[3]{-11}$	-2,22398
-13,3	$-2,36928^3$	$\sqrt[3]{-13,3}$	-2,36928

Quadro 5 – Tabela da Atividade 2

Completando a atividade e percebendo o estudo realizado, o aluno pode verificar, por comparação, que existe raiz cúbica de números negativos, embora não haja para a raiz quadrada. Nesse momento o professor pode solicitar que os

alunos conjecturem sobre a relação entre expoentes e raízes, ímpares e pares, motivando o início da atividade 3.

A seguir temos o complemento da atividade 2:

2) Responda as questões:

- a) O que você observou em relação aos resultados obtidos pelo cálculo da raiz cúbica de 0 a 90,2?
- b) O que você observa nos cálculos das raízes cúbicas de -10; -11 e -13,3?
- c) Qual a relação entre a representação dos números como potência de expoente 3 e o cálculo de suas raízes cúbicas?
- d) Analisando os números dados, podemos notar que alguns deles são positivos, enquanto que outros números são negativos. O que há em comum com as raízes?
- e) Explique com suas palavras a função $\sqrt[3]{n}$ da calculadora.

Quadro 6 – Questões da Atividade 2

2.2.3 Apresentação da atividade 3

A atividade 3 trabalha com potências e raízes de índice acima de 3, deixando em aberto o índice a ser trabalhado pelo aluno, com a finalidade de possibilitar a verificação de regularidades. Também tem uma parte com questões abertas, que busca desenvolver nos alunos a reflexão e a anotação de suas verificações e discussões, assim como as possíveis representações de números reais.

O professor talvez necessite fazer a apresentação da tecla de função enésima da calculadora, com a finalidade de proporcionar maior autonomia para a realização da atividade aos alunos que ainda não tenham conhecimento de sua utilização ou de sua manipulação.

Nesta atividade pretendia-se que o aluno pudesse construir conjecturas a respeito de potências e raízes, caso ainda não as tivesse formalizado anteriormente. Uma delas é quando a base é negativa e não existirá raiz de índice par, ao contrário das raízes de índice ímpar, havendo solução.

A seguir temos a atividade apresentada ao aluno:

1) Com o auxílio da calculadora, preencha a tabela abaixo e, quando necessário, use aproximação de cinco casas decimais:

Obs: Escolher os números pares e ímpares maiores que 3.

Número	Representar o número como potência de expoente par	Representar na notação de raiz de índice par	Apresentar o cálculo da raiz de índice par	Representar o número como potência de expoente ímpar	Representar na notação de raiz de índice ímpar	Apresentar o cálculo da raiz de índice ímpar
0						
2,5						
5						
-3						
-7						
-10,2						

Quadro 7 – Tabela da Atividade 3

Com as questões propostas, mais uma vez se desejava que os alunos descrevessem as relações observadas, percebendo que o n do expoente das potências é o mesmo n do índice no radical, e concluíssem que uma é operação inversa à outra.

Ao responder as questões a e b, o aluno pode perceber, por comparação com as atividades de seus colegas – que poderão ter índices diferentes dos seus – que, quando o índice do radical é ímpar, existe raiz tanto de números positivos como de números negativos. Com isso, pode representar um número como potência de índice ímpar, o que não acontece com a raiz de índice par para os números negativos.

A última questão pode propiciar ao aluno uma reflexão quanto ao uso da calculadora e seu potencial, uma vez que a resposta esperada é verificar se o resultado dado, multiplicado n vezes de acordo com o índice, tem como resultado o número da raiz, ou vice-versa. Isso possibilita que o aluno observe as operações inversas, atentando mais uma vez para o erro que pode surgir em situações que necessitam de maior precisão matemática.

Encontra-se a seguir a tabela preenchida da atividade 3, com uma suposta resolução que poderia ocorrer em sala de aula, lembrando que os índices a serem escolhidos pelos alunos eram de livre arbítrio, sem a interferência do professor.

1) Com o auxílio da calculadora, preencha a tabela abaixo e, quando necessário, use aproximação de cinco casas decimais:

Obs: Escolher os números pares e ímpares maiores que 3.

Número	Representar o número como potência de expoente par	Representar na notação de raiz de índice par	Apresentar o cálculo da raiz de índice par	Representar o número como potência de expoente ímpar	Representar na notação de raiz de índice ímpar	Apresentar o cálculo da raiz de índice ímpar
0	0^4	$\sqrt[4]{0}$	0	0^3	$\sqrt[3]{0}$	0
2,5	$1,25743^4$	$\sqrt[4]{2,5}$	1,25743	$1,20112^3$	$\sqrt[3]{2,5}$	1,20112
5	$1,49535^4$	$\sqrt[4]{5}$	1,49535	$1,37973^3$	$\sqrt[3]{5}$	1,37973
-3	Não existe	$\sqrt[4]{-3}$	Não existe	$-1,24573^3$	$\sqrt[3]{-3}$	-1,24573
-7	Não existe	$\sqrt[4]{-7}$	Não existe	$-1,47577^3$	$\sqrt[3]{-7}$	-1,47577
-10,2	Não existe	$\sqrt[4]{-10,2}$	Não existe	$-1,59118^3$	$\sqrt[3]{-10,2}$	-1,59118

Quadro 8 – Tabela da Atividade 3

Nos casos que necessitem do arredondamento, ao final da atividade, no momento da institucionalização dos conhecimentos, o professor pode discutir o arredondamento, generalizando que, para valores acima de 5, arredonda-se para cima a casa decimal anterior e, para valores abaixo de 5, mantém-se o valor da casa decimal anterior. É importante lembrar que esse arredondamento pode gerar erros e uma conseqüente propagação destes, devido às operações que ainda serão realizadas; portanto, deve-se atentar às situações envolvidas e à sua importância para efetivar ou não o arredondamento.

A seguir temos a parte escrita complementar da atividade 3:

2) Responda as questões:

- a) Compare os resultados dos cálculos das raízes de índice par com os colegas; o que você verifica nesses resultados?
- b) Faça o mesmo para as raízes de índice ímpar e descreva o que você observa.
- c) O que você observa no cálculo da raiz de índice ímpar ou par do número 0? E do número 1?
- d) Qual a relação entre uma potência com expoente n e a raiz de índice n ?
- e) Usando a calculadora, encontre diferentes formas para verificar as igualdades abaixo. Registre cada verificação, justificando sua resposta.

i) $\sqrt[4]{117649} = 7$ ii) $\sqrt{5220,0625} = 8,6$ iii) $\sqrt[3]{112} = 2,5694703$

Quadro 9 – Questões da Atividade 3

Assim, terminada essa atividade, o professor pode discutir, conjecturar e validar as respostas dos alunos, possibilitando a percepção dos conhecimentos adquiridos no final dessas três primeiras atividades e também proporcionando uma reflexão sobre como esses conhecimentos foram trabalhados com a utilização da tecnologia, possibilitando não somente a realização de cálculos matemáticos, mas também a depuração de seus erros.

2.2.4 Apresentação da atividade 4

A atividade 4 trabalhou as operações básicas de: adição, subtração, multiplicação e divisão, com radicais, com a utilização da calculadora como ferramenta.

O objetivo era verificar se o aluno, pela observação das colunas: I e II, III e IV, V e VI, VII e VIII, conjecturava relações de igualdade ou desigualdade, pertinentes a essas colunas.

A seguir temos a tabela a ser completada pelos alunos:

Usando uma calculadora, complete a tabela abaixo:									
a	b	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{a+b}$	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{a-b}$	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{ab}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
3	2	3,14626	2,23607	0,31783	1	2,44949	2,44949	1,22474	1,22474
5	3	3,96812	2,82842	0,50402	1,41421	3,87298	3,87298	1,29099	1,29099
17	10	7,28538	5,19615	0,98083	2,64575	13,03840	13,03840	1,30384	1,30384
49	34	12,83095	9,11043	1,16905	3,87298	40,81666	40,81666	1,20049	1,20049
135	121	22,01895	16	0,61895	3,74166	127,80845	127,80845	1,05627	1,05627
68	32	13,90307	10	2,58936	6	46,64761	46,64761	1,45774	1,45774
500	212	36,82090	26,88332	7,80046	16,97056	325,57641	325,57641	1,53574	1,53574
1428	386	57,43577	42,59108	18,14201	32,28002	742,43383	742,43383	1,92340	1,92340
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII

Quadro 11 – Tabela da Atividade 4

Pensamos que tal dificuldade com o manuseio da calculadora pode ocorrer, uma vez que os alunos não estão totalmente acostumados com sua utilização e seu manuseio com autonomia requer certo tempo e habilidade. Nesta primeira parte da atividade 4, esperava-se que, ao completar a tabela, o aluno pudesse perceber as relações entre as colunas, notando as igualdades e as diferenças entre os resultados e os radicais.

Ao completar a tabela com a utilização da calculadora, necessita-se ainda atentar para os devidos arredondamentos, de modo que tanto a quantidade de dígitos após a vírgula como o arredondamento sigam uma mesma regra para todas as lacunas, para posterior análise.

No ato de completar a tabela, esperava-se que os alunos percebessem que podem ocorrer alguns erros verificáveis com a calculadora. Era desejo nosso notar modos diferentes de digitação dos dados na calculadora, que geram resultados diferentes para um mesmo cálculo matemático.

No quadro a seguir encontram-se as perguntas relacionadas à tabela anterior:

- a) Observe os resultados obtidos na tabela.
- Compare os resultados das colunas I e II. Que relação você acha que existe entre eles?
 - Compare os resultados das colunas III e IV. Que relação existe entre eles?
 - Compare os resultados obtidos nas colunas V e VI e nas colunas VII e VIII. O que você pode dizer sobre eles?
 - Tente expressar as conclusões a que você chegou nos itens anteriores, na forma de uma igualdade ou desigualdade, usando os símbolos que aparecem na primeira linha da tabela.
- b) Essas conclusões ainda serão válidas se a ou b forem iguais a zero? O que muda em suas conclusões se $a = 0$? E se $b = 0$?
- c) Na tabela inicial, você realizou cálculos utilizando a tecla $\sqrt{}$ e depois verificou as relações existentes entre as colunas. Agora, teste, com sua calculadora, se essas mesmas relações valem para as raízes cúbicas ou para outras raízes.
- Obs: Registrem os testes realizados com a calculadora, assim como as observações das relações existentes entre as colunas, tanto para as raízes cúbicas quanto para as demais.
- (Atividade extraída do livro *Matemática Ensino Médio*, de Kátia Cristina Smole e Maria Inez de Souza Diniz, 4. ed. São Paulo: Saraiva, 2005. p.25, v.1.

Quadro 12 – Questões da Atividade 4

Ao responder as questões do item a), esperava-se que os alunos conseguissem verbalizar suas observações sobre os resultados encontrados – iguais ou diferentes – nas colunas, além de escrever suas conjecturas após as discussões realizadas pela dupla de alunos.

Esperava-se também que os alunos formulassem suas conclusões, usando expressões algébricas com igualdades ou desigualdades, chegando à conclusão:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

3. TRINDADE, A. F. P.. **Investigações Matemáticas e Resolução de Problemas – Que Fronteiras?** (Dissertação) – Universidade Federal do Paraná - PR, 2008.

Páginas 101-107

A professora mostra, nas suas aulas, que também confere grande importância à comunicação escrita. Isso é possível notar, especialmente, nas situações em que os alunos já registraram algumas "conclusões". Nessas ocasiões lê o que escreveram e vai pedindo esclarecimentos.

A importância que atribui à escrita nestas aulas é também vista pelo apelo constante a que os alunos coloquem as suas idéias no papel. A professora pretende que os alunos registrem todas as suas descobertas para poderem lembrar delas rapidamente e poder apresentar de forma perceptível aos seus colegas na aula seguinte: "Então é melhor começarem a escrever isso, não é?" Simultaneamente, a professora chama-lhes a atenção de que o registro do trabalho ajuda-os a avançarem mais rapidamente, não perdendo tempo na abordagem de aspectos já considerados.

O apoio que a professora concede aos alunos quando existem divergências no grupo é outra vertente importante do seu papel nesta fase da aula. Segue abaixo a descrição de uma discussão de um grupo perante uma atividade e o modo como a professora faz sua intervenção:

Sara — *Aqui, eu não percebo. $(-5)^0$, o que é que é?*

Professora — *Não sei. Vocês é que escreveram $(-5)^0$*

Susana — *Eu acho que é -5...*

Professora — *"-5".*

Margarida — *Eu acho que não.*

Professora — *E então se fosse -5 elevado a...*

Margarida (interrompendo) — *Se fosse $(-5)^1$ é que é -5.*

Professora — *Exatamente.*

Sara — *$(-5)^0$ é outro número. Acho que é 1.*

Professora — *Achas que é 1, porquê?*

Margarida — *Não percebo.*

Professora — *Vocês é que têm 1.*

Carolina — *Eu pus $(-5)^0$ que é o que dá!*

(...)

Professora — *OK, por que é que acham que isto dá 1?*

Susana — *Isto não dá 1!*

Carolina — *Dá, sim senhora!*

Margarida — *Dá, dá.*

Professora — *Dá ou não dá?*

Margarida — *Dá. Dá.*

Sara — *Professora, $(-5)^0$ é 1. E 1 elevado a 3 é 1.*

Perante vozes contraditórias quanto ao significado de $(-5)^0$, a professora procura que atinjam um consenso pedindo-lhes que justifiquem as suas afirmações. Simultaneamente, traz-lhes à atenção fatos já conhecidos acerca da potenciação para darem significado a esta nova potência. Em geral, tal como se verifica aqui, procura que sejam os alunos a decidir quem tem razão, incentivando-os a discutirem entre si as suas idéias.

Formular conjecturas:

Os objetivos que a professora estabelece, em termos do desenvolvimento do processo investigativo, diferem de tarefa para tarefa. Em algumas tarefas pretende-se que os alunos obtenham a expressão geradora de uma certa seqüência, em outra, que sejam levados a intuir a utilização do expoente inteiro negativo que desconheciam até então, em outras, há uma forte determinação de conduzi-los à justificação das regularidades identificadas.

Os alunos tendem a apresentar a formulação de conjecturas como conclusões e a professora incentiva-os, num primeiro momento a registrarem-nas na folha do grupo.

Nas tarefas propostas não surge o termo "conjectura", nem se detecta que os alunos o usem. No entanto, a idéia está bastante presente nestas aulas pela forma como a professora encara os resultados que os alunos lhe apresentam.

A professora mostra-se sempre atenta ao uso de termos matemáticos na comunicação oral e escrita, conforme é descrito no diálogo abaixo:

Alunos — *O produto é sempre múltiplo de 2, de 3 e de 6.*

Professora — *Sim, mas aqui não devem usar a palavra produto porque essa palavra em Matemática significa multiplicação.*

Testar conjecturas:

Depois de darem a conhecer à professora o que fizeram até chegar àquele ponto, perguntam:

Joana — *Qual é a sucessão? Nós não conseguimos ver.*

Professora — *Não sei, eu não fiz assim.*

Carolina — *Mas é mais 2, mais 7, mais 9...*

Joana — *É sempre este número...*

Professora — *Explique o seu raciocínio!*

Vilma — *Qual é a sucessão dos números...?*

Joana — *Nós fizemos assim...*

Carolina — *Números ímpares...*

Professora — *Ímpares?*

Mariana — $2n-1$.

Professora — *Escreva $2n-1$. Vai dar que números? Começa em que número?*

Joana — *Pois, só que não começa.*

Professora — *Espere, deixa ver, $2n-1$ começa em que número?*

Carolina — *Começa no 1.*

Professora — *Começa no 1 porque é 2 vezes 1.*

Joana — *Tem que começar no 3.*

Professora — *Tem que começar no 3.*

Mariana — *A gente corta o 1.*

Professora — *Então e se no lugar de tirar 1, você somar 1, o que é que dá?*

Joana — *Hã?*

Professora — *Se em vez de tirar 1, você somar 1, o que é que dá?*

Alunas — 3

Professora — *E depois?*

Carolina — *É mais 5, depois é mais 7.*

Professora — *Mas, calma, ainda não está resolvido.*

Mariana — *Pois não. 2 vezes 2 vezes 2... 2 vezes 3 igual a 6, 6 mais 1, 7...*

Professora — *Isso ainda não está completamente resolvido porque tem que dar...*

Joana — n^2 mais...

Professora — 3, 8, 15, não é?

Pode-se observar que a professora ouve a sua explicação e vai raciocinando juntamente com elas, mas não as conduz para a expressão geradora.

Validar conjecturas :Face às características de cada tarefa, a professora tem uma atuação diferenciada no que diz respeito à validação de conjecturas. Quando as tarefas têm como objetivo a obtenção de uma expressão geral, há uma tendência por parte da professora em ser bastante evasiva quanto a validar as conjecturas dos alunos, já em outras tarefas, ela valida facilmente as conjecturas que lhe apresentam uma vez que aquilo que pretende, principalmente, é que os alunos as demonstrem. Em um caso em que o objetivo era realmente que chegassem à demonstração, a professora começa a pedir aos alunos que justifiquem as suas conjecturas através da prova, referindo-lhes inúmeras vezes que a experimentação é insuficiente, mesmo que feita com a calculadora, como alguns o fazem. Embora tentem justificar a conjectura pela inexistência de um contra-exemplo, alguns alunos afirmam que a prova, que é o que lhes falta fazer, é o mais complicado. Talvez, no meu ver, tenha lhes faltado conversar com o diabo dos números⁵⁸:

Em suma, você está insatisfeito. Isso é bom. Por acaso você acha que o diabo dos números como eu algum dia ficará satisfeito com o que descobriu? Nunca, nunca! É por isso que ficamos sempre bolando novas provas. É um eterno ruminar e maquirar e cavoucar. Mas quando ; enfim, uma luz aparece (e isso pode demorar muito tempo; na Matemática, cem anos passam num piscar de olhos), ah, aí é claro que ficamos alegres feito crianças. Aí ficamos felizes.

(...)

E é exatamente a mesma coisa que acontece com as demonstrações. Mas, como há milênios a gente vem tentando de tudo para atravessar o rio, você não precisa começar do começo. Já são inúmeras as pedras do rio em que você pode confiar. Elas já foram testadas milhões de vezes. Não são escorregadias, não cedem e assim garante um passo firme. Quando você tem uma ideia nova, uma conjectura, aí procura pedra mais próxima. E, se pode alcançá-la, vai pulando até chegar a terra firme. Se você prestar bastante atenção, não vai molhar os pés.

4. DÉCHEN, T. **Tarefas Exploratório-investigativas para o ensino de Álgebra na 6ª. série do Ensino Fundamental**: indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos (Dissertação) – Universidade Federal do São Carlos - SP, 2008.

Páginas 124-126

Anexo A: Tarefa 1 — A LANCHONETE DO ALAN XONETE

Instruções:

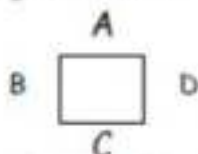
Os grupos serão constituídos por quatro pessoas, de tal forma que sejam divididas as obrigações de cada um: - Dois Redatores: responsáveis pela redação final do registro a ser entregue.

- Dois Relatores: serão dois membros do grupo, responsáveis pela apresentação (para toda a classe) dos resultados encontrados pela equipe. Apesar da divisão acima, todos deverão participar das etapas de produção do estudo.

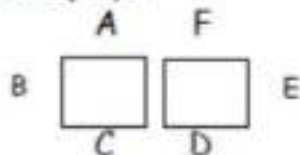
A LANCHONETE DO ALAN XONETE

Obs.: Deixe por escrito o raciocínio de cada questão de forma clara.

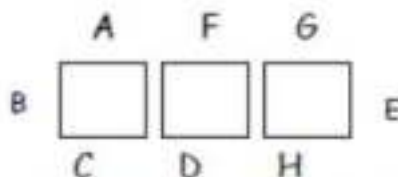
Sexta-feira passada, após a aula, quatro amigos, Aderval, Belinda, Crisóstomo e Dráunio, foram comer umas pizzas e tomar um guaraná na lanchonete do Alan Xonete. Lá chegando, o garçom Edgar Sora já havia separado uma mesa para os quatro amigos se sentarem:



A conversa ia animada quando chegaram Elizário e Flaminio. Edgar apressou-se e ajeitou mais uma mesa ao lado da primeira, ficando assim a disposição:



Era dia de reunião da turma para descansar e passar bons momentos brincando e conversando e logo chegaram Griselda e Hortência. Nosso amigo Edgar Sora correu a colocar uma nova mesa ao lado das duas anteriores e avisou ao Falco Zinheiro, o cozinheiro, para preparar mais duas pizzas. Veja a nova disposição das mesas:



a) A turma esperava mais companheiros, logo chegaram Izilda e Jocasta e mais uma mesa foi colocada. Faça o desenho representando a nova quantidade de mesas e seus ocupantes, sempre respeitando a mesma disposição das pessoas à sua volta.

b) Desenhe a representação das mesas quando chegaram Kreiton e Lisaldo.

c) Se forem colocadas 6, 7, 8, 9... mesas, quantas pessoas podem ser acomodadas, usando-se a mesma disposição?

d) E se forem colocadas 100 mesas?

e) E se forem colocadas n mesas? Teste a regra que você inventou para 15 mesas e 18 mesas.

f) Quantas mesas seriam necessárias para acomodar 30 pessoas? E para acomodar 50 pessoas?

g) Quantas mesas serão necessárias para receber 100 pessoas?

Anexo B: Tarefa 2 — Cubolino e seus cubos...

Atividade do Projeto: Investigações Matemáticas - 6º ___ - Data: ___/___/07

Coordenador: _____ Relatores: _____

Redator: _____

Cubolino e seus cubos...

Organização para o desenvolvimento e apresentação da atividade

Vocês formarão grupos, constituídos por quatro pessoas, de tal forma que sejam divididas as obrigações de cada um:

- **Coordenador:** responsável pela organização do trabalho para apresentação (cartaz) e pela resolução de possíveis conflitos;

- **Redator:** responsável pela redação final do relatório a ser entregue.

- **Dois Relatores:** serão dois membros do grupo, responsáveis pela apresentação (para toda a classe) dos resultados encontrados pela equipe.

Apesar da divisão acima, todos deverão participar das etapas de produção do estudo.

A atividade...

Cubolino estava brincando com cubos e resolveu montar uma sequência. Na primeira posição ele colocou 1 cubo. Em seguida ele pegou 6 cubos e ficou pensando em quantos cubos usaria e como os arrumaria para montar a segunda posição. Quando finalmente encontrou uma solução, seu irmãozinho passou engatinhando e desmanchou a sequência. Cubolino ficou tão chateado que esqueceu a lógica que havia pensado. Vamos ajudá-lo a construir essa sequência novamente!



?

1ª posição

2ª posição

3ª posição

(...)

A) Para começar, montem e desenhem a 2ª posição.

B) Seguindo a lógica que vocês usaram, quantos cubos seriam necessários na terceira posição? Montem e desenhem.

C) Continuem a sequência, desenhando até a 5ª posição.

D) Encontrem um jeito de explicar, por escrito, como seria a 10ª posição. Além disso, quantos cubos terá esta posição?

E) Agora encontrem um jeito de explicar, por escrito, como seria a 100ª posição. Quantos cubos terá esta posição?

F) Tentem agora escrever uma regra que possa representar o número de cubos ou a forma de uma posição qualquer (indefinida) na sequência.

G) Testem a regra que encontraram utilizando as posições para as quais vocês já conhecem o número de cubos.

H) Justifiquem porque esta regra funciona, ou não funciona. Se não funcionar, tentem encontrar outra regra ou aperfeiçoar a mesma.

Bom Trabalho!!! Lis e Tatiane...

Anexo C: Tarefa 3 — A Máquina Mágica

Atividade do Projeto: Investigações Matemáticas - 6ª ___ - Data: ___/___/07

Coordenador: _____ Relatores: _____

Redator: _____

A Máquina Mágica

A tarefa tem como objetivos:

- Valorizar o espírito colaborativo dos alunos;
- Propiciar ao aluno o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico de forma investigativa, por meio de explorações, descobertas, que instigam o aluno a levantar e formular conjecturas e a comunicar-se e argumentar matematicamente;
- Incentivar o aluno a utilizar-se da escrita na elaboração de relatórios, como forma de dar significado àquilo que sua equipe está descobrindo em suas investigações e da álgebra como expressão da variação de grandezas;
- Além dos relatórios escritos, as apresentações orais e a participação de cada aluno constituirão as formas de avaliação;
- Permitir à pesquisadora a coleta de dados para a análise das potencialidades e limites das Investigações Matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico e da capacidade de argumentação dos alunos.

Organização para o desenvolvimento e apresentação da atividade

Vocês formarão grupos, constituídos por quatro pessoas, de tal forma que sejam divididas as obrigações de cada um.

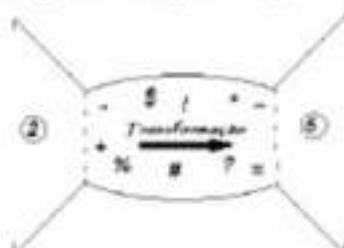
- **Coordenador:** responsável pela organização do trabalho para apresentação (cartaz) e pela resolução de possíveis conflitos;
- **Redator:** responsável pela redação final do relatório a ser entregue.
- **Dois Relatores:** serão dois membros do grupo, responsáveis pela apresentação (para toda a classe) dos resultados encontrados pela equipe.

Atenção: A elaboração do relatório é de responsabilidade do grupo. Os raciocínios e estratégias utilizados devem ser anotados com detalhes. Além disso, o capricho e os cuidados em sua versão final também são critérios de avaliação.

A Tarefa:

Hoje, vocês conhecerão a Máquina Mágica. Ela faz transformações de números escolhidos por nós em outros números. O seu mecanismo é simples: ela faz a mesma mágica para qualquer número que passar por ela. Além disso, ela é uma máquina especial: ela não possui um segredo único, isto é, existem vários truques de transformação. *Poderíamos tentar descobrir as mágicas dessa máquina? Desafio vocês a descobri-las!*

Esta é a Máquina:



Parece estranha, mas o modo de operá-la é fácil: ao escolher o número 2, colocado ao lado esquerdo da máquina, ela o transforma no número 5 (lado direito da máquina). Que tal? Muito complicado? Abaixo, encontram-se algumas questões para ajudá-los no entendimento da tarefa.

1. Descubram a mágica dessa máquina e, em seguida, façam um teste aplicando essa mágica para vários outros valores.
2. Com esta máquina, podemos transformar números negativos? E o zero? Justifiquem suas respostas.
3. Como foi comentado no início, se vocês analisarem a máquina com mais atenção, encontrarão outras mágicas possíveis para que ela transforme 2 em 5. Anotem todas as mágicas que encontrarem.
4. Escolham uma das mágicas que anotaram no item 3 e escrevam, com suas palavras e de forma clara, qual é o truque (pegadinha) dessa mágica.
5. Testem a mesma mágica do item anterior, para um número "x". Como ficaria o resultado da transformação? Procurem justificar os procedimentos e os caminhos que os levaram à resposta.

5. FERNANDES, F. L. P. **Iniciação a Prática de Letramento Algébrico em Aulas Exploratório-Investigativas** (Dissertação) – Universidade Estadual de Campinas - SP, 2011.

Página 59

Uma tabela diferente...

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81
8	8	16	24	32	40	48	56	64	
7	7	14	21	28	35	42	49		
6	6	12	18	24	30	36			
5	5	10	15	20	25				
4	4	8	12	16					
3	3	6	9						
2	2	4							
1	1								

"O que você encontra de interessante nesta tabela?"

Tarefa Investigativa 2: A Investigação de Sequências e a Busca por Padrões

Instruções

As equipes serão constituídas por três ou quatro alunos (as), de tal forma que cada um de seus integrantes tenha as funções a seguir. Escolham:

- Um Coordenador: responsável pela organização do trabalho e pela resolução de possíveis conflitos;
- Um Redator: responsável pela redação final do registro a ser entregue.
- Dois Relatores: responsáveis pela apresentação (para toda a classe) dos resultados encontrados pela equipe.

Nas equipes em que tiver três integrantes, **não** haverá coordenador. Caso um dos membros da equipe falte, o coordenador ficará responsável pela apresentação ou pela redação do relatório.

Apesar da divisão de funções, **todos** deverão participar das etapas de produção do trabalho. Por isso, é importante que anotem as informações, raciocínios e tentativas de resolução com detalhes, **no caderno**, para que, no fim, seja passado a limpo. Além disso, o capricho e os cuidados em sua versão final também são critérios de avaliação.

A Tarefa Proposta

Hoje, trataremos, nessa tarefa, de sequências de figuras e regularidades. Convido vocês a investigá-la e a desvendá-la!

Observem a sequência abaixo:



(1ª) (2ª)

Sabendo que a 1ª posição possui 1 quadradinho e a 2ª posição possui 3 quadradinhos:

a) Continuem a sequência a seguir, desenhando até a 5ª posição, de tal forma que se mantenha um padrão ou regularidade.

b) Sabendo que não há uma única forma de realizar a construção dessa sequência, criem outras sequências que tenham a mesma descrição nas duas

primeiras posições (1ª posição possui 1 quadradinho e a 2ª posição possui 3 quadradinhos), mas que o formato e/ou a quantidade de quadradinhos para as outras posições seja diferente. Assim, mudar o formato da 2ª posição...

c) Escolham uma das sequências obtidas no item anterior e encontrem o número de quadradinhos na 10ª posição. E a 25ª posição, quantos terão? Justifiquem sua resposta.

d) Procurem uma maneira de representar a 100ª posição e respondam: quantos quadradinhos terá a 100ª posição?

e) Digam quantos quadradinhos teria uma posição qualquer da sequência. Apresentem uma regra, padrão ou expressão matemática, explicando como a equipe obteve essa resposta.

Tarefa Investigativa 3: Álgebra em festa de casamento?

A Tarefa Proposta

Em uma determinada festa de casamento, cada mesa comporta 6 pessoas. Esperando que houvesse uma aproximação e união dos convidados presentes para a confraternização, esses resolveram juntá-las na seguinte disposição¹⁰:



Será que há Álgebra numa festa de casamento?

Vejamos... Seguem algumas questões para a nossa investigação: (Lembrem-se! Todas as respostas devem ser justificadas, com cálculos ou desenhos!)

- Construam uma tabela que relaciona a **quantidade de mesas** e a **quantidade de cadeiras** utilizadas. Encontrem o número de cadeiras utilizadas com, pelo menos, 6 mesas. Observem as possíveis relações entre **mesas** e **cadeiras**...
- Qual o número máximo de mesas que deve ser usado para formar essa fileira de mesas? E de cadeiras? Expliquem o raciocínio da equipe.
- Usando 15 mesas, quantas cadeiras são necessárias? Justifiquem.
- Se houver 42 cadeiras, quantas mesas serão necessárias? Justifiquem.
- É possível constituir uma fileira de mesas que tenha 100 cadeiras? Se possível, quantas mesas seriam necessárias? Por quê?
- Investigando a sequência, a partir do desenho e/ou da tabela construída no item a), expliquem, com as suas palavras, como ela é constituída. Qual é o padrão existente?
Escrevam uma **expressão matemática** que relaciona o número de mesas e o número de cadeiras. É importante o uso de uma linguagem mais elaborada, aproximando-se de uma fórmula... Que letras poderiam ser usadas?

Bom Trabalho, caros detetives!

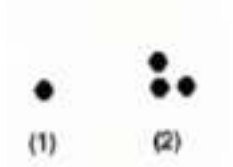
6. FERREIRA, A. S. **A Produção de Significados Matemáticos em um Contexto de Aulas Exploratório-Investigativas** (Tese) – Universidade Federal de Minas Gerais - MG, 2012.

Página 246

Tarefa Investigativa 1: Sequências de Bolinhas e suas Formas

Que tal descobrir relações entre a forma como a sequência é construída, a quantidade de bolinhas em determinada posição e a sua posição nessa sequência? *Desafio vocês a investigar e descobrir as próximas posições da sequência!*

Dê uma olhada nas duas primeiras posições da sequência de bolinhas abaixo:



(1) (2)

O grupo achou complicado? A seguir, encontram-se algumas questões para a orientação do estudo.

1. Continue a sequência, desenhando até a 10ª posição.
2. O grupo seria capaz de encontrar outras maneiras de continuar essa sequência? Quais seriam?
3. Se o grupo pensou em mais de um tipo de sequência, escolha a que mais lhe agrada para encontrar um jeito de dizer por escrito como seria a sua 100ª posição. Além disso, seria capaz de dizer quantas bolinhas terá a 100ª posição?
4. Vocês conseguem agora escrever uma regra que pudesse representar o número de bolinhas ou a forma de uma posição qualquer (indefinida) da sequência?

Tarefa Investigativa 2: Álgebra em festa de casamento.⁴²

A Tarefa Proposta:

Em determinada festa de casamento, cada mesa comporta 6 pessoas. Esperando que houvesse uma aproximação e união dos convidados presentes para a confraternização, resolveram juntar as mesas na seguinte disposição:



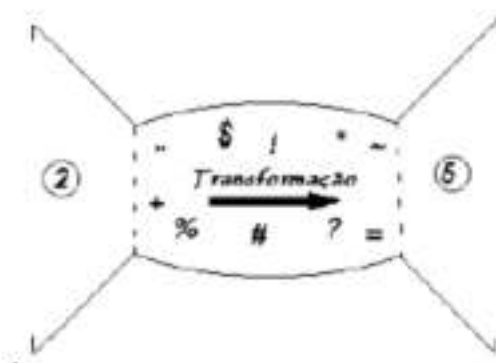
Será que há Álgebra numa festa de casamento? Vejamos... Seguem algumas subtarefas para a nossa investigação: (Lembre-se! Todas as respostas devem ser justificadas, com cálculos ou desenhos!)

- Construa uma tabela que relacione a quantidade de mesas e a quantidade de cadeiras utilizadas. Encontre o número de cadeiras utilizadas com, pelo menos, 6 mesas. Observe as possíveis relações entre mesas e cadeiras.
- Usando 15 mesas, quantas cadeiras são necessárias? Justifique.
- Se houver 42 cadeiras, quantas mesas serão necessárias? Justifique.
- É possível constituir uma fileira de mesas que tenha 100 cadeiras? Se possível, quantas mesas seriam necessárias? Por quê?
- Investigando a sequência, a partir do desenho e/ou da tabela construída no item a), explique como ela é constituída. Qual é o padrão existente?
- Escreva uma expressão matemática que relacione o número de mesas e o número de cadeiras. É importante o uso de uma linguagem mais elaborada, aproximando-se de uma fórmula. Que letras poderiam ser usadas?

Tarefa Investigativa 3: A Máquina Mágica

Hoje, vocês conhecerão a *Máquina Mágica*. Ela faz transformações de números escolhidos por nós em outros números. O seu mecanismo é simples: ela faz a mesma mágica para qualquer número que passar por ela. Além disso, ela é uma máquina especial: ela não possui um segredo único, isto é, existem vários truques de transformação. *Vocês seriam capazes de descobrir as mágicas dessa máquina? Desafio vocês a descobri-las!*

A máquina é a seguinte:



O modo de operá-la é o seguinte: ao escolher o número 2, a máquina o transformou em 5.

1. Descubram a mágica dessa máquina e, em seguida, façam um teste para outros cinco valores. Nessa máquina, podem-se escolher números negativos para serem transformados? E o zero?
2. Como foi comentado no início, se vocês analisarem a máquina com mais atenção, encontrarão outras mágicas possíveis para ela. Anotem todas as mágicas que encontrarem. Em seguida, escolham uma dessas mágicas e testem-na para outros cinco valores.
3. Escrevam, com suas palavras, qual é a mágica feita pela máquina escolhida no item 2.
4. Com a mágica escolhida no item 2, testem para um número "x". Como ficaria o resultado? Escreva uma expressão matemática que represente o número x transformado pela máquina.

7. CORRADI, D. K. S. **Investigações Matemática Mediadas pelo Pensamento Reflexivo no Ensino e Aprendizagem das Funções Seno e Cosseno: Uma Experiências com Alunos do 2º Ano do Ensino Médio** (Dissertação) – Universidade Federal de Ouro Preto - MG, 2013.

Página 192-197

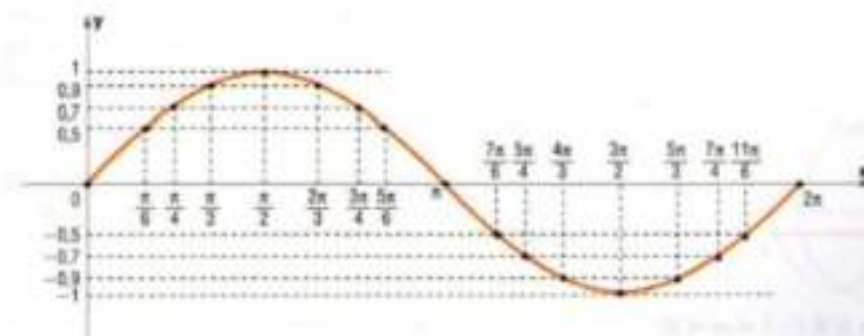
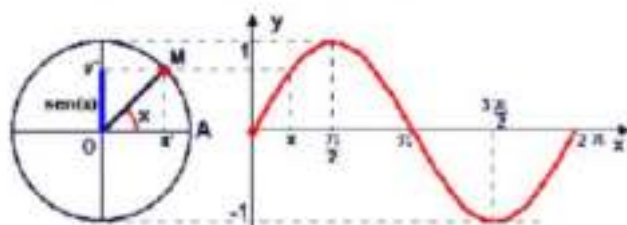
Atividade1
Exercícios¹⁴

Funções Seno e Cosseno

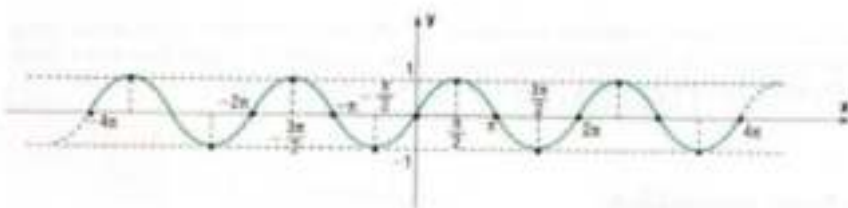
Objetivo: Estudar as funções $y=\text{sen}(x)$ e $y=\text{cos}(x)$ em relação às propriedades: domínio, crescimento e decrescimento, imagem, paridade, amplitude, translação e sinal das funções.

Observe o gráfico inicialmente para $x \in [0, 2\pi]$ e depois para $x \in \mathbb{R}$:

I) Gráfico $f(x)=\text{sen}(x)$, para $x \in [0, 2\pi]$



II) Gráfico $f(x)=\text{sen}(x)$, para $x \in \mathbb{R}$:



Nessa situação, várias podem ser as questões a analisar referentes às propriedades da função $f(x) = \text{sen}(x)$. Desenvolva os exercícios abaixo a fim de estudar algumas propriedades dessa função trigonométrica:

- I- Tendo por base a construção do gráfico acima para $x \in [0, 2\pi]$ e $x \in \mathbb{R}$:
 - a. Qual é o domínio desta função?
 - b. Essa função é um exemplo de que chamamos função limitada. Você poderia dar uma explicação para essa classificação?
 - c. Determine a paridade desta função analisando os valores de $f(x)$ e $f(-x)$.
 - d. Considerando-se a primeira volta positiva no círculo trigonométrico, para quais intervalos do domínio a função é crescente e decrescente?

- II- Utilizando o Geogebra, faça os gráficos de $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \text{sen}(x + \pi/2)$ na mesma tela.
 - a. Compare os valores das funções $f(x)$ e $g(x)$ em relação aos arcos $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$. A partir desta comparação, qual é a função $g(x)$? Em termos da propriedade de translação, descreva como a função $g(x) = \text{sen}(x + \pi/2)$ relaciona à função $f(x) = \text{sen}(x)$ e o porquê desta relação.
 - b. Qual o domínio e imagem da função $g(x)$.
 - c. Analise os valores de $g(x)$ e $g(-x)$. O que você conclui quanto à paridade da função.
 - d. Para quais intervalos do domínio a função é crescente e decrescente?

- III- Descreva o que há de comum e diferente em termos das propriedades abordadas nos itens I e II.

Atividade 2 Atividade Exploratória¹⁵

Funções seno e cosseno

Objetivo: Estudar período e periodicidade.

Vamos explorar algumas ideias sobre periodicidade. O estudo das funções trigonométricas teve seu ípice com Joseph Fourier, no século XIX, no campo dos movimentos periódicos. Os fenômenos periódicos, ou seja, aqueles que se repetem sem alteração cada vez que transcorre um intervalo determinado (período), são encontrados em várias áreas, como Música, eletricidade, acústica, mecânica, e nelas as funções trigonométricas são de grande aplicação.

Construa o gráfico da função $\sin(x)$ ou $\cos(x)$:

- I- Observe seu deslocamento horizontal; seus valores nos intervalos $[-2\pi, 0]$; $[0, 2\pi]$; $[2\pi, 4\pi]$... De acordo com a definição de arcos congruos, sabemos que para seno temos $\sin(x) = \sin(x + k \cdot 2\pi)$, com k um número inteiro, pois x e $(x + k \cdot 2\pi)$ tem a mesma imagem. Da mesma forma $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$, com k um número inteiro, ou seja, as funções seno e cosseno são periódicas para todo x em $\mathbb{R}$ e para todo k em $\mathbb{Z}$: $\sin(x) = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi) = \dots = \sin(x + 2k\pi)$, sendo que o mesmo acontece com a função cosseno. Mediante explicação e a partir de suas observações obtidas com a construção no Geogebra, qual é o período da função $\sin(x)$ e $\cos(x)$?

- II- Considere a forma geral das funções seno e cosseno respectivamente $y = A \cdot \sin(B(x-C)) + D$ e $y = A \cdot \cos(B(x-C)) + D$. Nas funções $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ fixemos: $A=0$, $B=1$, $C=1$ e $D=0$. Fazendo-se $A=1$, $B \neq 0$, $C=0$, $D=0$ obtém-se as famílias de funções $y = \sin(Bx)$ e $y = \cos(Bx)$. Escolha uma destas famílias de funções atribuindo para B os seguintes valores: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, 4 , 8 , e em cada caso compare no Geogebra com a função $y = \sin(x)$ ou $\cos(x)$ dependendo de sua escolha e verifique o que ocorre quando mudamos o parâmetro "B".

- III- Utilizando o Geogebra, crie um seletor "B" com valores zero até um valor k max positivo e digite no campo de entrada a função $f(x) = \sin B(x)$. Movimente o seletor e observe as mudanças. Repita o procedimento para função $f(x) = \cos B(x)$.
 - a. O valor $B = 0$ é especial. O que acontece as funções seno e cosseno quando $B = 0$?

 - b. Descreva em detalhe o tamanho do período (permanece igual a 2π , é menor que 2π , é maior que 2π) das funções seno e cosseno em termos da variação dos valores do parâmetro "B". Que conjecturas você pode fazer?

- IV- De acordo com suas conclusões sobre variações do parâmetro B, examine o quadro a seguir. Repare que o quadro foi preenchido parcialmente, segundo determinadas regras. Observe-o, com atenção, para perceber como foram efetuados os cálculos e, em seguida, complete-o. Se preciso utilize o Geogebra.

f(x)	B	período
$3 \cdot \sin(x)$	1	2π
$1 + \cos(x)$	1	
$\sin(2x)$		π
$\sin(6x - \pi)$	2	$\pi/3$
$\sin(-3x)$		
$2 \cdot \cos(4x + \pi/3)$		

Procure encontrar algumas regularidades entre os períodos determinados na tabela. Que conjecturas poderá estabelecer para generalizar períodos das funções seno e cosseno para diferentes arcos.

A partir de sua generalização complete o espaço em branco:

f(x)	B	período
$\sin(\pi x - \pi/2)$		
$\cos(3\pi x - \pi)$		
$\sin(4x + 2)$		

Atividade 3

Atividade Exploratória¹⁶ e Problema

Funções seno e cosseno

Objetivo: Atribuir significados para os valores dos parâmetros $A, B, C, D \in \mathbb{R}; B, A \neq 0$ em relação aos gráficos de funções senoidais, tipo $f(x) = A + B \cdot \sin(Cx + D)$.

Sabendo que uma forma geral das funções seno e cosseno são do tipo $f(x) = y = A \cdot \sin B(x - C) + D$ e $y = A \cdot \cos B(x - C) + D$, com $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Propomos que explore com o auxílio do Geogebra, possíveis generalizações dessas senóides pensando nas seguintes questões:

- I- Considerando as senóides: $y = A \cdot \sin B(x - C) + D$ e $y = A \cdot \cos B(x - C) + D$ e considerando, $A \neq 0; B = 1; C = 0; D = 0$; teremos $f(x) = A \cdot \sin(x)$ ou $f(x) = A \cdot \cos(x)$. Verifique que mudanças ocorrem nos gráficos, determinando a imagem de cada função nos casos abaixo:

- $f(x) = 3 \cdot \sin(x)$ em relação a $f(x) = \sin(x)$
- $f(x) = -3 \cdot \sin(x)$ em relação a $f(x) = \sin(x)$
- $f(x) = 2 \cos(x)$ em relação a $f(x) = \cos(x)$
- $f(x) = \frac{1}{2} \cos(x)$ em relação a $f(x) = \cos(x)$
- $f(x) = -\cos(x)$ em relação a $f(x) = \cos(x)$

O que ocorre quando mudamos o valor do coeficiente "A"?

- II- Seja as funções $y = A \cdot \sin B(x - C) + D$ e $y = A \cdot \cos B(x - C) + D$ e fixe-se $A = 1; B = 1; C = 0; D \neq 0$, obtendo-se as famílias de funções $y = \sin x + D$ ou $y = \cos(x) + D$. No Geogebra, em cada caso abaixo compare o gráficos das funções dadas com a função $\sin(x)$ ou $\cos(x)$ observando a diferença entre eles e determine a imagem em cada caso:

- $f(x) = 2 + \sin(x)$ ou $f(x) = 2 + \cos(x)$
- $f(x) = \sin(x) + 3$ ou $f(x) = \cos(x) + 3$
- $f(x) = -\sin(x)$ ou $f(x) = -\cos(x)$
- $f(x) = -2 + \sin(x)$ ou $f(x) = -2 + \cos(x)$
- $f(x) = \sin(x) + (-3)$ ou $f(x) = \cos(x) + (-3)$

O que ocorre quando mudamos o valor do coeficiente "D"?

Sabemos que a imagem da função $\sin(x)$ e $\cos(x)$ é $[-1, 1]$. Investigue se essa imagem prevalece para variações das constantes A, D . Que conjectura podemos estabelecer quando variamos esses parâmetros? Para ajudá-lo nessa análise faça as seguintes funções no Geogebra e complete o quadro abaixo.

$f(x)$	Amplitude	máximo	mínimo	Imagem da função
$3 \cdot \sin(x)$				
$1 + \cos x$				
$\sin(2x)$				

$\sin\left(\frac{x}{2}\right)$				
$3 \cdot \sin(3x - \pi)$				
$5 - 3 \cdot \sin(3x - \pi)$				
$\sin(2x - \pi/4)$				
$2 \cdot \cos(2x + \pi/3)$				
$7 + 2 \cdot \cos(2x + \pi/3)$				

- III- Seja as funções $y=A \cdot \sin B(x-C)+D$ e $y=A \cdot \cos B(x-C)+D$ faça-se $A=1$, $B \neq 0$; $C \neq 0$, $D=0$, obtendo-se as famílias de funções $y= \sin B(x-C)$ ou $y= \cos B(x-C)$. No Geogebra, faça o gráfico da função $\sin(x)$ ou $\cos(x)$ e em cada caso abaixo compare os gráficos das funções observando a diferença entre eles:

- $f(x)= \sin(x-1)$ ou $f(x)= \cos(x-1)$
- $f(x)= \sin(3x+1)$ ou $f(x)= \cos(3x+1)$
- $f(x)= \sin(4x+2)$ ou $f(x)= \cos(4x+2)$
- $f(x)= \sin(6x-1)$ ou $f(x)= \cos(6x-2)$
- $f(x)= \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ ou $f(x)= \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
- $f(x)= \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ou $f(x)= \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

O que se pode conjecturar sobre o coeficiente "C"?

- IV- Observe as mudanças das senóides $y=A \cdot \sin B(x-C)+D$ e $y=A \cdot \cos B(x-C)+D$ em relação as funções $\sin(x)$ ou $\cos(x)$ quando variamos todos os coeficiente (A,B,C,D); utilize o Geogebra para determinar o domínio, o período, a imagem (o deslocamento vertical e a amplitude) e o deslocamento horizontal em cada caso:

- $y= 2+4\cos(3x)$ em relação a $\cos(x)$
- $y= -2+4\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$ em relação a $\sin(x)$
- Por meio de suas observações, elabore uma função do tipo $y=A \cdot \sin B(x-C)+D$ e $y=A \cdot \cos B(x-C)+D$, com $A,B,C,D \neq 0$ determinar o domínio, o período, a imagem (o deslocamento vertical e a amplitude) e deslocamento.

- V- Descreva com uma senóide a altitude do mar em um dia em determinado local sabendo que nesse dia, na maré alta, a altitude do mar foi de 1,6 e na maré baixa foi 0,2m. As marés altas ocorrem às 2h e às 14h, e as marés baixas ocorrem às 8h e às 20h. Vamos considerar a contagem do tempo em horas a partir da meia-noite. Assim, obtenha as constantes A, B, C e D em $h(t)= A+B \cdot \sin (Ct+D)$, optando por B e C positivos, que é o mais comum. (problema adaptado do livro "Matemática contexto e aplicações", vol.2, Ed. Ática, Dante.)

Atividade Investigativa

Funções seno e cosseno

Considerando as funções: $f(x)=A \cdot \sin B(x-C)+D$ e $g(x)=A \cdot \cos B(x-C)+D$

Defina uma função da sua autoria, com as duas funções: seno e cosseno que utilize uma operação ($f(x) \cdot g(x)$; $f(x)+g(x)$; $f(x)-g(x)$; $f(x)/g(x)$ ou outras operações); a fim de investigar a função criada por você.

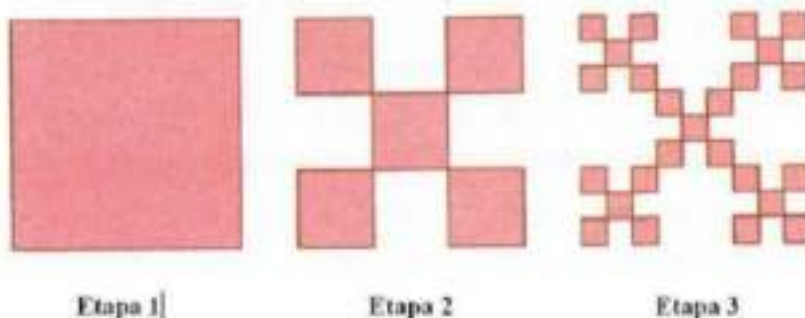
8. BONOTTO, A. K.. **Ensino e Aprendizagem da Função Exponencial por Meio de Atividades Investigativas e do Uso de Objeto de Aprendizagem** (Dissertação) – Centro Universitário Franciscano - RS, 2015.

Páginas 119-123

BLOCO I - PADRÕES E GENERALIZAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA

Atividade 1

A sequência de figuras apresenta as etapas da composição de uma figura geométrica.



- Utilizando a malha quadriculada construa a figura correspondente à próxima etapa dessa sequência.
- Faça uma tabela relacionando a etapa e o número de quadradinhos necessários para a sua construção.
- Qual o total de quadradinhos na etapa 4 e 5? E na etapa 6?
- Construa uma tabela indicando a etapa e o número de quadradinhos em cada etapa.
- É possível generalizar uma lei para obter o número de quadradinhos existentes na figura da n -ésima etapa?
- Represente graficamente os valores obtidos na tabela no item (d).

Atividade 2

No início do século XX, o matemático polonês Waclav Sierpinski (1882-1969) estudou uma figura geométrica que ficou conhecida por Triângulo de Sierpinski, que se obtém como limite de um processo iterativo.

Os desenhos a seguir mostram as quatro primeiras etapas do processo de construção do triângulo de Sierpinski.

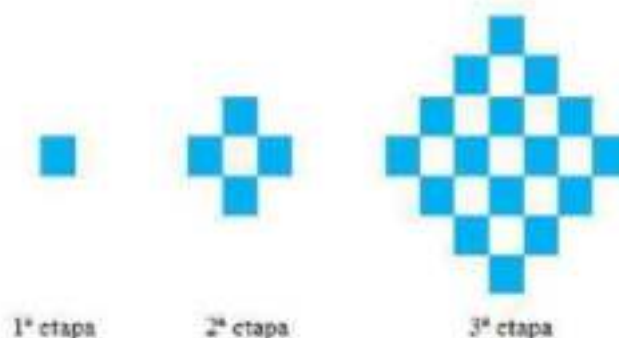


Considerando as etapas descritas:

- g) Construa uma tabela indicando cada etapa e o número de triângulos escuros obtidos.
- h) Qual é o número de triângulos na etapa 4? E na etapa 5?
- i) É possível obter o número de triângulos na n -ésima etapa?
- j) Construa uma tabela relacionando a etapa e o número de triângulos.
- k) Quantas etapas são necessárias para que o número de triângulos seja maior que 300?
- l) Represente graficamente os valores tabelados no item (d).

Atividade 3

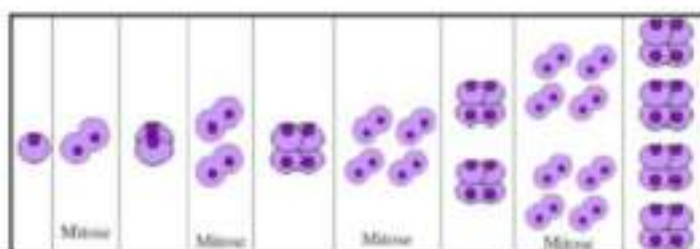
Observe a sequência das etapas de construção de figuras com quadradinhos:



- f) Quantos quadradinhos terá na 4ª etapa?
- g) Quantos quadradinhos serão necessários para formar a figura da 5ª etapa? E da 6ª etapa?
- h) Construa uma tabela indicando a etapa e o número de quadradinhos.
- i) É possível obter o número de quadradinhos na n -ésima etapa?
- j) Represente graficamente os valores tabelados no item (c).

Atividade 4

A divisão celular denominada mitose consiste em uma célula filha duplicar o seu conteúdo e então se dividir em duas, chamadas de células filhas e cada célula filha, por sua vez, repete esse processo originando quatro células filhas. Considerando a formação do embrião sabemos que ela ocorre a partir da célula ovo ou zigoto que através de divisões celulares forma todo o organismo, conforme mostra a figura abaixo.



- c) Construir uma tabela relacionando o número de células filhas até a 7ª divisão.
- d) Estabeleça uma lei para calcular o número de células filhas para n divisões.
- e) Represente graficamente os valores tabelados no item (a).

Atividade 5

Segundo a OMS (Organização Mundial de Saúde), morrem anualmente no mundo, cerca de 6 milhões de pessoas em decorrência do tabagismo. Ao fumar, a nicotina, presente nos cigarros é rapidamente absorvida pelos pulmões, chegando em poucos segundos à circulação sanguínea e ao cérebro. A quantidade de nicotina presente no corpo de uma pessoa se reduz pela metade a cada duas horas. A cada cigarro consumido, o organismo absorve aproximadamente 1mg de nicotina. Considerando que cada cigarro contém 6 mg de nicotina, responda as seguintes questões:

- f) Qual a quantidade de nicotina presente no organismo, proveniente do consumo de um cigarro, após 4 horas?
- g) Estabeleça uma lei que represente a quantidade de nicotina (em mg) presente no corpo de uma pessoa t horas após o consumo.
- h) Após quanto tempo a nicotina será eliminada do organismo?
- i) Represente graficamente a situação.

BLOCO II - ATIVIDADES NO SOFTWARE GEOGEBRA

Atividade 6

Construa uma tabela e represente graficamente no Software a função $y = 2^x$. Analisando sua representação gráfica, responda as seguintes questões:

- O que acontece com os valores de y quando se aumenta os valores de x ? Justifique.
- Existe algum valor de x que conduz a valores negativos de y ? Justifique.
- Existe algum valor de x que conduz ao valor $y = 0$? Justifique.

Atividade 7

Represente graficamente as funções abaixo, em um mesmo plano cartesiano:

$$y = 2^x$$

$$y = (1/2)^x$$

- Analisando as funções descreva o comportamento de cada uma delas.
- As funções são crescentes? São decrescentes? Quais as condições para ser crescente ou decrescente? Justifique o comportamento de cada uma delas.

Atividade 8

Represente a função $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

- No mesmo sistema de eixos trace o gráfico $g(x) = (\frac{1}{2})^x + 1$. Compare os dois gráficos e descreva a transformação ocorrida.
- No mesmo sistema de eixos trace o gráfico de $h(x) = (\frac{1}{2})^x - 1$. Compare os dois gráficos e descreva a transformação ocorrida.
- O que acontece com a função $f(x) = (\frac{1}{2})^x + a$ para diferentes valores de a ?

Atividade 9

Represente graficamente as funções abaixo, em um mesmo plano cartesiano.

$$f(x) = 2^x$$

$$g(x) = 3 \cdot 2^x$$

$$h(x) = -2 \cdot 2^x$$

- Compare o gráfico de cada uma das funções g , h e i com o gráfico da função f e descreva a transformação que ocorreu.

- b) O que acontece com o gráfico da função $f(x) = 2^x$ quando se multiplica por um número real c , $c > 0$? E por $c < 0$?

Atividade 10

Represente graficamente as funções abaixo, em um mesmo plano cartesiano.

$$f(x) = 5^x \quad g(x) = 5^{2x} \quad h(x) = 5^{-x}$$

- a) Comparando as representações gráficas, descreva as transformações que você observa.
- b) Conclua o que acontece com a função $f(x) = 5^x$ quando se multiplica o expoente por um número c positivo ou negativo?

BLOCO III- EXPLORANDO O OBJETO DE APRENDIZAGEM

As atividades referentes a esse bloco podem ser encontradas acessando o repositório do Objeto de Aprendizagem "Potencializando seu conhecimento" disponível em http://www.projetos.uniqui.edu.br/matematica/fabrica_virtual/exponencial/index.html

9. LITOLDO, B. F. **As Potencialidades de Atividades Pedagógicas Envolvendo Problemas Criptográficos na Exploração das Ideias Associadas à Função Afim** (Dissertação) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - SP, 2016.

Páginas 156-171

O caso do sequestro do matemático

Holmes estava na Espanha, entretendo-se com as touradas, quando foi procurado pelo inspetor Charles.

O inspetor trazia para Holmes um caso de sequestro. O professor Sergio Carillo havia sido sequestrado durante sua aula de matemática, na Universidade de Madrid.

Na sala de aula, tudo parecia normal, até mesmo algumas contas no quadro negro.

Ao entrar na cena do crime, Holmes analisou o ambiente e na mesma hora sacou o motivo do sequestro. Preocupado, Holmes sabia que a vida do professor estava em suas mãos.

Infelizmente o Dr. Watson estava em uma viagem e assim Holmes se viu sozinho com este caso importante. Desta maneira, ele convocou alguns amigos de investigação para resolver o crime.

Durante a investigação Holmes sentiu um mal estar e foi levado inconsciente para o hospital demandando apenas uma carta criptografada para os seus ajudantes no bolso de seu paletó.

Resta a seus ajudantes descobrir que mensagem estava escrita na carta e torcer para que nela esteja a identidade do(s) sequestrador(es), o motivo do sequestro e o local onde o professor de matemática está sendo mantido preso, para que a polícia possa agir antes que o criminoso faça algum mal ao professor.

18	*	23	6	21	23	8	23	24	22	1	8	19	23	*	<u>c</u>	*	25	17	*
1	18	21	11	19	*	1	18	*	22	23	18	10	6	28	23	19	22	*	7
12	5	17	5	8	18	*	14	19	23	<u>e</u>	*	20	13	9	22	9	*	8	9
*	19	18	13	26	9	13	22	1	*	19	*	17	15	24	13	26	18	*	8
18	*	23	9	21	23	8	23	24	22	19	*	9	22	5	*	21	<u>u</u>	9	*
18	*	5	14	23	18	18	*	23	8	22	18	5	*	22	8	25	22	18	28
3	8	19	*	18	2	*	8	13	23	1	13	20	16	13	18	2	*	8	9
*	17	2	24	9	17	<u>a</u>	24	12	7	2	*	12	9	23	24	8	*	2	18
18	*	8	*	18	*	20	23	18	10	8	23	23	18	23	*	8	23	24	5
*	23	8	18	8	18	*	17	5	18	24	13	8	19	*	20	22	8	23	18
*	18	5	*	23	1	14	5	*	8	8	*	28	<u>i</u>	8	8	18	*	8	5
*	9	23	7	19	28	5													

Pede-se aos alunos:

- Nome do sequestrador.
- O motivo do sequestro.
- O local onde o professor está preso.
- Descrever detalhadamente qual foi o processo utilizado por vocês para decifrar a carta de Holmes.
- Observe o esquema abaixo:



Para se criptografar uma mensagem é preciso ter um alfabeto fixado e aplicar sobre esse alfabeto algum esquema que o criptografe.

Vocês saberiam explicitar através de uma lei matemática esse esquema de criptografia, considerando que o alfabeto fixado é o que segue abaixo.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

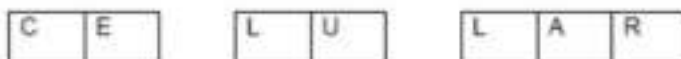
- Como vocês pensaram para chegar a essa lei matemática?
- De que maneira vocês justificariam que essa lei é correta?
- Após encontrar a lei matemática utilizada para criptografar a mensagem, vocês saberiam esboçá-la graficamente?
 - Se sim, desenhe-o e denomine o que é representado no eixo das abscissas (x) e o que é representado no eixo das ordenadas (y)?
 - Se não, explique o porquê não se pode esboçá-lo.

SI - LA - BOX

Procure preencher os quadradinhos, sabendo de cada dica, de acordo com suas sílabas.

EXEMPLO:

Telefone portátil.



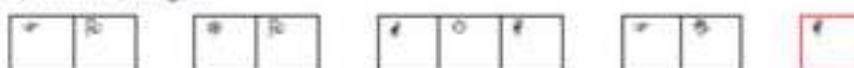
Cada letra corresponde a um símbolo, e símbolos iguais correspondem a letras iguais. As letras Â, Ã, Ë, Î, Õ e Ç têm símbolos distintos de A, E, I, O e C.

Nos quadradinho em destaque, aparecerá uma data comemorativa importante no Brasil desde o ano 1922.

1) Empregada doméstica.



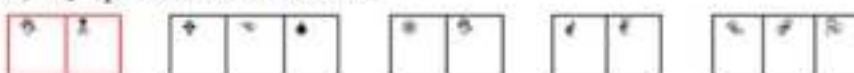
2) Retrato; imagem.



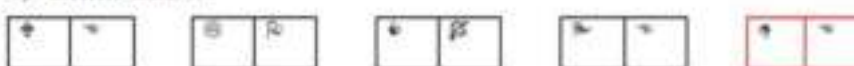
3) Folheto onde são indicados dias, semanas e meses.



4) Ação profissional de um detetive.



5) Triciclo infantil.



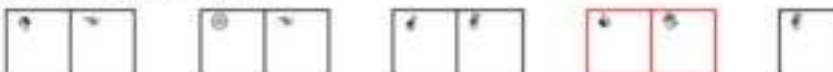
6) Forma de processo mental.



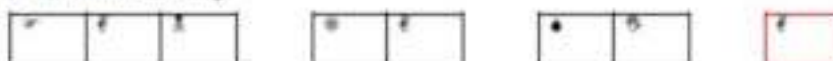
7) Igual; semelhante.



8) Repartição de delegado.



9) Desenho da Disney.



PERGUNTAS

- 1) Qual foi o dia comemorado desde 1822 que apareceu nos quadradinhos em destaque?
- 2) Expliquem quais foram as dificuldades sentidas pelo grupo para resolver esta atividade.
- 3) Expliquem quais foram as facilidades sentidas pelo grupo para resolver esta atividade.
- 4) Descreva detalhadamente o processo de resolução desta atividade.

UM CASO DE SEQUESTRO

Holmes estava na Espanha, entreando-se com as touradas, quando foi procurado pelo inspetor Lestrade.

O inspetor trazia para Holmes um caso de sequestro. O professor Sergio Carrilho havia sido sequestrado durante sua aula de matemática, na Universidade Complutense de Madrid.

Na sala de aula, tudo parecia normal, até mesmo algumas cartas no quadro negro.

Após entrar na cena do crime, Holmes analisou o ambiente e na mesma hora percebeu o motivo do sequestro. Preocupado, Holmes sabia que a vida do professor estava em suas mãos.

Infelizmente o Dr. Watson estava em uma viagem e assim Holmes se viu sozinho com este caso importante. Desta maneira, ele convocou alguns alunos para ajudá-lo a resolver o crime.

Durante as investigações Holmes sentiu um mal-estar e foi levado inconsciente para o hospital deixando apenas uma carta criptografada para os seus ajudantes, no bolso de seu paletó.

Assim, resta a seus ajudantes descobrir que mensagem estava escrita na carta e tentar para que nela esteja a identidade do(s) sequestrador(es), o motivo do sequestro e o local onde o professor de matemática está sendo mantido preso, para que a polícia possa agir antes que o criminoso faça algum mal ao professor.

10	+	23	9	22	25	4	28	34	21	1	8	19	27	+	5	+	25	17	+
1	16	22	18	10	+	9	10	+	20	22	10	14	9	23	25	10	22	+	7
11	1	17	1	8	10	+	14	10	23	+	10	12	9	22	9	+	8	9	
18	10	10	22	26	4	22	22	1	+	14	+	17	18	24	22	26	24	+	8
19	+	23	9	25	21	9	23	24	22	18	+	9	22	1	+	21	u	9	+
10	+	1	16	20	18	10	+	23	9	22	12	1	+	22	9	20	22	10	26
1	8	10	+	10	1	+	8	12	22	1	12	20	26	22	10	1	+	8	9
+	17	1	24	9	17	+	14	10	1	1	+	14	9	25	24	9	+	1	18
19	+	9	+	19	+	20	22	10	10	9	22	22	10	22	+	9	22	24	1
+	22	9	18	9	10	+	17	1	18	24	12	8	26	+	20	22	9	22	20
+	18	1	+	22	1	10	1	+	8	9	+	10	9	+	18	+	8	1	
+	9	22	1	10	24	1													

PERGUNTAS

- 1) Qual é o nome do sequestrador?
- 2) Qual o motivo do sequestro?
- 3) Qual o local onde o professor está sendo mantido preso?
- 4) Expliquem quais foram as dificuldades sentidas pelo grupo para resolver esta atividade.
- 5) Expliquem quais foram as facilidades sentidas pelo grupo para resolver esta atividade.
- 6) Descreva detalhadamente qual foi o processo utilizado pelo grupo para decifrar a carta de Holmes.
- 7) Qual a relação utilizada para criptografar as letras do alfabeto? Justifique.
- 8) Monte um esquema que represente a cifração das letras do alfabeto. Justifique seu esquema.

O DETETIVE DR. WATSON

- Watson é um grande amigo e assistente - disse Holmes para o inspetor Lestrade da Scotland Yard, mas nos últimos dias ele anda enigmático, pouco falante e mal anda dormindo em casa.

O inspetor, certo de que o Dr. Watson havia se cansado do trabalho e da ausência de Holmes, não demonstrou interesse em investigar o Dr. Watson e mandou Holmes para casa.

Holmes, como de costume, muito persistente e confiante em seu instinto decidiu investigar seu amigo por conta própria. Após alguns telefonemas e uma batelada na quarto de Watson, Holmes encontrou alguns rubricos criptografados e percebeu que seu amigo estava envolvido em algo misterioso.

Mesmo reunindo todas as pistas, Holmes ainda sentia dificuldade em saber o que estava acontecendo com Watson, sendo assim, ele convocou alguns alunos para ajudá-lo a montar esse quebra cabeça de mistérios que Watson estava envolvido e comprovou para o inspetor Lestrade que algo estava acontecendo.



PERGUNTAS

- 1) Por que o Dr. Watson estava pouco falante e mal dormia em sua casa?
- 2) Qual é a tela de mistérios na qual o Dr. Watson estava envolvido?
- 3) Descreva detalhadamente qual o processo utilizado para decifrar as pistas.

- 4) Identifique e escreva abaixo o modo utilizado para se criptografar cada uma das pistas I, II, III, IV e V encontradas por Holmes no quarto de Watson.
- 5) Existem diferenças e semelhanças entre os modos utilizados para se criptografar cada pista? Caso existam justifique.
- 6) Discuta com seus colegas se é possível escrever esses modos como uma *expressão matemática*. Se sim, tente encontrar essas expressões, se não justifique.
- 7) Pensem em uma nova expressão matemática com base nas expressões matemáticas do item (6) e utilizem-na para criptografar seus nomes.
- 8) Que expressão matemática vocês escolheram no item (7) para criptografar seus nomes? Justifique essa escolha.
- 9) Compare a expressão criada por vocês no item (7) com as expressões do item (6). Quais as semelhanças e diferenças entre elas?
- 10) A partir das respostas dos itens anteriores, tentem escrever de uma maneira geral a expressão matemática que está sendo utilizada.

O POEMA

Soneto da Fidelidade

Vinicius de Moraes

De tudo ao meu amor serei atento
Antes, e com tal zelo, e sempre, e tanto

Que mesmo em face do maior encanto
Dele se encante mais meu pensamento

Quero vivê-lo em cada vão momento
E em seu louvor hei de espalhar meu canto

E rir meu riso e derramar meu pranto
Ao seu pensar ou seu contentamento

E assim quando mais tarde me procure
Quem sabe a morte, angústia de quem vive

Quem sabe a solidão, fim de quem ama
Eu possa me dizer do amor (que tive):

Que não seja imortal, posto que é chama
Mas que seja infinito enquanto dure

ENSINANDO O Dr. WATSON

Em dias ociosos, Holmes deixava de ser detetive e assumia o papel de professor do Dr. Watson.

Hoje era um dia como esse. Nesta manhã, Holmes se levantou disposto a mener com a cabeça de Watson através da lógica e com isso, aguçar a astúcia de seu amigo.

Logo no café da manhã Holmes anunciou:

- Watson, hoje te apresentarei a arte da Criptografia.

- Criptografia... já ouvi esse termo, mas não sei muito bem o que ela quer dizer – Retrucou Watson para Holmes ainda sonolento.

- Então se sente aqui, e enquanto você toma seu café e desperta para o dia, irei te dar uma pequena aula sobre essa arte magnífica.

- Arte? Mas isso é um quadro por acaso?

- Ah, meu caro Watson, suas perguntas me fazem rir, mas deixe-me começar a explicar que você já irá entender.

Holmes virou-se então para a lousa, que se encontrava prontamente preparada no meio da sala e começou a falar e rabiscá-la a todo o vapor.

Watson acompanhava o raciocínio de Holmes com muita atenção, até que em certo momento ele disse:

- Holmes, podemos então representar a Criptografia através de um esquema criptográfico.

Neste momento Watson levantou-se da mesa e foi até o quadro onde desenhava o seguinte esquema:



Nessa hora Holmes sorriu e disse:

- Isso mesmo Watson, vejo que agora você entendeu exatamente o que é criptografar uma mensagem, mas lembre-se, a transformação utilizada para criptografar pode ser qualquer coisa que cifre as letras do alfabeto, desde símbolos até expressões matemáticas.

- Claro Holmes! Isso já está bem claro para mim, acho que agora já posso dizer que entendo a arte de se criptografar – disse Watson com todo glamour.

Holmes sabia que seu amigo era inteligente e que logo perceberia que a Criptanálise faria parte dessa aula. Quando resolveu montar um criptograma para Watson com o intuito de que ele percebesse a importância da Criptanálise na Criptografia.

Holmes montou, então, um criptograma tabelado onde, letras iguais são representadas por números iguais. Resolvido este enigma, surgirá, nas aulas em destaque um conceito matemático utilizado por Holmes para transformar o alfabeto fixo em um alfabeto criptografado.

Pessoa cuja profissão costura ternos.	3	32		3	19	3	41	11
Protetor da mata; folclore brasileiro.	9	43	37		33	19	37	3
Ligado (gíria).	3	29	41	11		3	9	31
Arte de tentar esconder uma mensagem.	9	19	11	37	3		33	31
Galpão de preparo de escola de samba.	3	3	37	37	3	7		31
Espanto; terror.	3	39	39	31	37	3	37	
O benefício do testamento.	37	11	37		11	19	37	31
O café rápido feito em máquina.	11	49	33	37		39	39	31
O mais vasto oceano do mundo.		3	7	39	19	19	7	31
Carlos (?) de Andrade, celebre poeta mineiro.	9		43	37	37	31	29	9
Taxa de açúcar no sangue (med.).	33	37		7	11	37	19	3
Parte da reta entre dois pontos (mat.).	39	11	11		11	29	41	31
Razão entre seno e cosseno.	41	1	29	17		29	41	11
Desenho de marca comercial.	33	31	17	31	41		33	31
Estabelecimento que aluga filmes.	33	31	7	3	9	31		3
Beim - (?) : alegre, disposto.	37	43	37	31	37	3	9	
Figura geométrica.	33	37	29	39		31		31
Conjunto (mat.).	19	29	41	11	19		31	39
Colonizou Angola (Hís.).	33	31	37	41	43	19		29
Instrumento de rodas de capoeira.	9	11	37	19	27	9	3	

PERGUNTAS

- Qual o conceito matemático que surgiu nas casas em destaque?
- Seendo o alfabeto fixo $A=1, B=2, C=3 \dots Z=26$. Qual a função utilizada para criptografar este alfabeto e montar o criptograma? Justifique.
- Na história, Watson representou o esquema criptográfico através de dois conjuntos (alfabeto fixo e alfabeto criptografado) e uma flecha.



Agora, utilizando a folha quadriculada, teste representar o esquema criptográfico deste enigma utilizando o plano cartesiano. Lembre-se de denominar o que é representado pelo eixo das abscissas (x) e pelo eixo das ordenadas (y). Justifique seu esquema.

O JOGO

- Alguém está querendo jogar com você – disse Watson para Holmes.
- Mas neste jogo uma pessoa pode estar correndo perigo e a minha derrota pode significar sua morte – retrucou Holmes.

Holmes estava realmente preocupado com este quebra-cabeça. Durante um mês ele recebeu 6 mensagens secretas e um telefonema.

Nesta ligação seu misterioso adversário admitiu que o fracasso de Holmes neste enigma custaria a vida de uma celebridade inglesa e que ele tinha 24 horas para descobrir a mensagem e chegar a tempo de salvar a vida da vítima.

Depois de algumas horas analisando as mensagens enviadas, Holmes percebeu que juntas elas formavam um texto e que quando decifradas revelariam a identidade da celebridade que estava em perigo.

Mais algumas horas estudando o caso, Holmes conseguiu montar um esquema de gráficos (Figura 1) que talvez o ajudasse a resolver as mensagens secretas.

Cada segmento de reta desenhado no plano cartesiano é um gráfico correspondente a uma função utilizada para cifrar uma mensagem. Os seis gráficos montados por Holmes correspondem a seis funções utilizadas para criptografar as seis mensagens enviadas, mas esta conclusão ainda não resolvia o enigma e a vítima ainda corria perigo.

Com poucas horas para o fim do prazo estipulado pelo seu adversário, Holmes convocou seus ajudantes para lhe auxiliar a desvendar este mistério, salvar a vida da celebridade e ganhar o jogo.

Então vamos ajuda-los!!!!

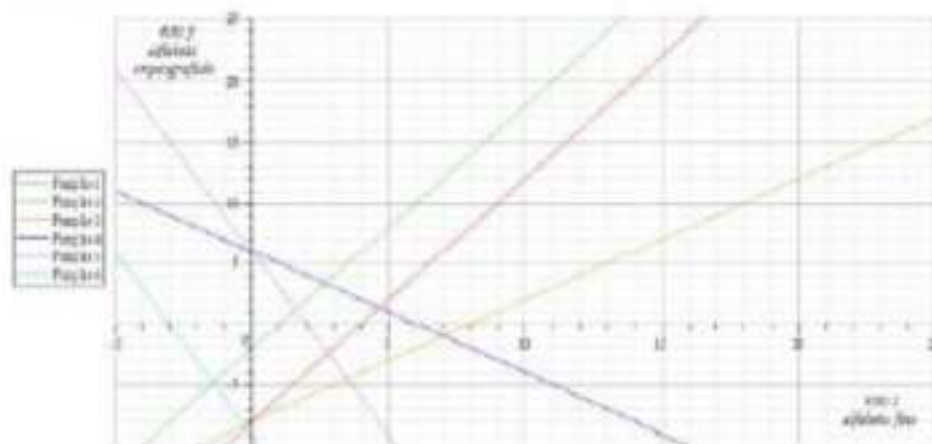


Figura 1

PERGUNTAS

- 1) Analisando a figura 1 responda:
 - a) Para que valores de x as funções $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$, $F_5(x)$ e $F_6(x)$ são iguais a zero, ou seja, quando $F_i(x)$ for igual a zero seu gráfico cortará o eixo x em que valor?

- b) Para quais valores de x as funções $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$, $F_5(x)$ e $F_6(x)$ são maiores que zero?
- c) Para quais valores de x as funções $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$, $F_5(x)$ e $F_6(x)$ são menores que zero?
- 2) Olhando para a figura 1 e utilizando os resultados do item (1), identifique a função afim de cada função e preencha a tabela. Justifique seu raciocínio.

	Função
Função 1	$F_1(x) =$
Função 2	$F_2(x) =$
Função 3	$F_3(x) =$
Função 4	$F_4(x) =$
Função 5	$F_5(x) =$
Função 6	$F_6(x) =$

- 3) Qual o texto formado pelas mensagens?
- 4) Descreva detalhadamente qual o processo utilizado para identificar as funções.
- 5) Descreva detalhadamente qual o processo utilizado para decifrar as pistas.
- 6) Analisando a tabela do item (2) descreva todas as semelhanças e todas as diferenças entre os coeficientes a e b das funções. Qual o resultado dessas semelhanças e diferenças no gráfico?
- 7) Compare o comportamento do gráfico das funções baseados nas semelhanças e diferenças entre os coeficientes a e b de cada função.
- 8) Qual é o papel dos coeficientes a e b no comportamento de cada função no gráfico?
- 9) Analisando a figura (1), a tabela do item (2) e as respostas das questões anteriores, classifique as funções $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$, $F_5(x)$ e $F_6(x)$ em funções crescentes e decrescentes. Justifique esta classificação.
- 10) Utilizando os itens (1) e (9) generalize quando uma função é crescente e quando ela é decrescente. Justifique.

O POETA ASSASSINO

A cada crime, o assassino deixava um poema referente ao próximo crime. Neste mês, quatro pessoas foram mortas por esse homem. O inspetor Lestrada, sem saída para este enigma, convidou Holmes e seus ajudantes para tentar decifrar o último poema deixado pelo assassino e com isso, tentar descobrir quem será a próxima vítima, o local do crime e o motivo dessa morte.

Determine a frase original de cada linha do poema, sabendo que para cada linha foi usada uma função de primeiro grau.

Revele o poema deixado pelo assassino e descubra onde será o próximo crime, a vítima e o motivo dessa morte.

$f(x) = x$	4 9 28 5 15*17 21 5*20 21 4 15*12 1*5*19 9 14 9 19 20 18 15*4 9 6 5 18 5 14 20 5
$f(x) = x - 1$	0 19 4*12 4 18 12 14*18 4 20 18*12 14 17 0 3 14 17 4 19
$f(x) = x + 3$	25 18 7 18*16 24 17 7 18*20 24 8*15 4*21 8 22 12 7 8*8*19 4 21 8 17 23 8
$f(x) = -x + 40$	27 39 21*26 39 25*21 35 26 20 35 27*27 39 31 21*39 21*36 25 22 35 21
$f(x) = 5x$	5*90 45 85 105 25 130 5*25*30 25*25 85 100 45 65 5 20 75*110 5 60 75 90*30 45 70 5 70 15 25 45 90 75
$f(x) = 4x - 3$	13 17*37 69 33 25 17 48*69 17 48 37 77 1*29 37 39 17 54 77 1*13 17* 54 81 1 13 57*45 1 5 57 69
$f(x) = 2x + 2$	12 30 36 44 4 30 42 32*8 38 12 40 8 12*44 28*32 26 18 4 38*20 30 42 12 38 12 40 40 12 20 38 32
$f(x) = \frac{5x-2}{5}$	11 14 56 47 14 53 59 2*14 38*56 14 62*56 14 26 44*44 11 26 44*14*53 2 8 44 53
$f(x) = -2x + 73$	71*59 71 45 71 45 67 55 71*61 63 21*65 63 49 63*67 71 41 71 21
$f(x) = 3x + 1$	13 16*16 37 28 40 28 43 4 35*52 64 16 40*61 28 67 16 58 58 16*13 28 43 25 16 28 55 46*4*13 28 58 49 46 55
$f(x) = \frac{5x-2}{5}$	44*26 53 38 2 44*11 44*38 14 62*47 2 26*2 50 62 14 35 14*53 2 47 2 77
$f(x) = 10x - 2$	188 48 138 190 88 178 8*128 88 138 78 8*118 8 128 88 138 8*38 88 188 188 88 158 8 178*188 48 208*28 8 118 148 178

FICHA DE CÁLCULOS

PERGUNTAS

- 1) Qual o poema deixado pelo assassino?
- 2) Onde será o próximo crime?
- 3) Quem será a próxima vítima?
- 4) Qual o motivo dessa morte?
- 5) Descreva detalhadamente qual foi o processo utilizado para a decifração do poema.

10. TOZO, F. L. D. **Tarefas Exploratórias-Investigativas para a Aprendizagem da Função Afim** (Dissertação) – Universidade Federal de São Carlos - SP, 2016.

Páginas 46-48

Tarefa 1

Uma montadora de automóveis testou o desempenho de seu novo carro modelo flex (bi combustível). Na avaliação do consumo, as médias foram de 9 e 12 km/l na estrada, com etanol e gasolina, respectivamente.

a) João após comprar tal carro, fará três percursos, com distâncias de 36 km, 72 km e 108 km cada. Para estes casos, quantos litros de gasolina e etanol serão gastos, em média?

Resposta:

Km	Etanol	Gasolina
36	$x = \frac{36}{9} \Rightarrow x = 4l$	$y = \frac{36}{12} \Rightarrow y = 3l$
72	$x = \frac{72}{9} \Rightarrow x = 8l$	$y = \frac{72}{12} \Rightarrow y = 6l$
108	$x = \frac{108}{9} \Rightarrow x = 12l$	$y = \frac{108}{12} \Rightarrow y = 9l$

b) Sabendo que em determinado posto o preço do etanol é R\$2,09 e o da gasolina R\$3,17, qual é o valor gasto com combustível para cada situação descrita no item anterior?

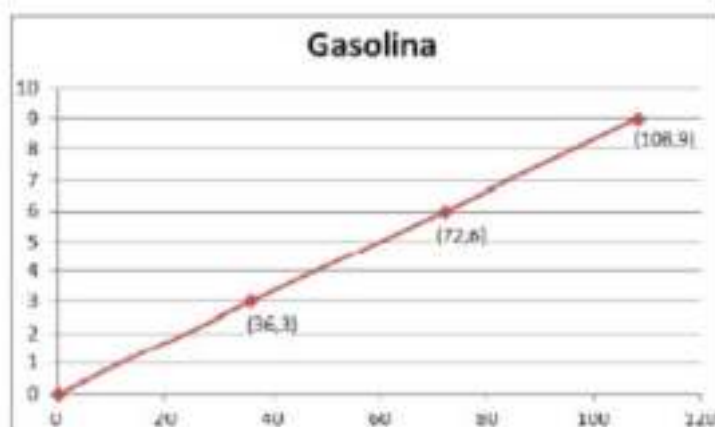
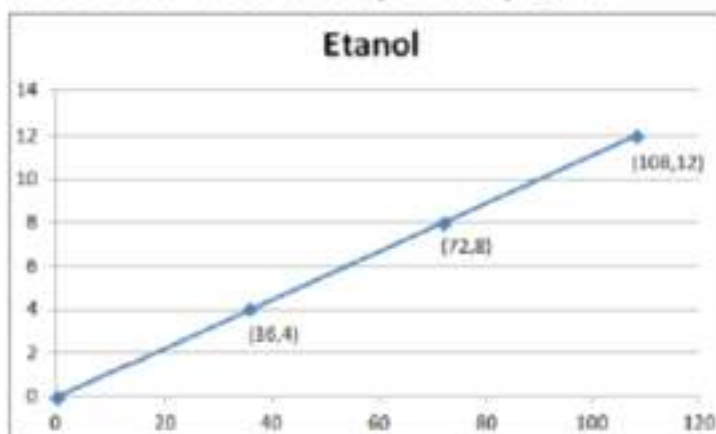
Valor (em R\$) consumido com Etanol	Valor (em R\$) consumido com Gasolina
$4 \times 2,09 = 8,36$	$3 \times 3,17 = 9,51$

$8 \times 2,09 = 16,72$	$6 \times 3,17 = 19,02$
$12 \times 2,09 = 25,08$	$9 \times 3,17 = 28,53$

c) Levando em conta os cálculos já realizados nos itens a e b, é possível elaborar uma fórmula matemática sabendo que o gasto com combustível depende da distância (x) percorrida?

Etanol	$f(x) = \frac{x}{9}$
Gasolina	$f(x) = \frac{x}{12}$

d) Para cada fórmula do item c, faça um esboço gráfico.



e) Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparação deles, quais as relações que você pode estabelecer?

A compreensão matemática está relacionada com a diversificação de registros de representação. Essa diversidade permite uma compreensão global do objeto matemático e rompe com a dificuldade da aprendizagem em um único registro de representação, possibilitando aos alunos fazer associações conceituais e não confundir o objeto matemático com sua representação.

Página 61-62
Tarefa 2

Um prestador de serviços A cobra uma taxa fixa de R\$ 40,00 pela locomoção até a residência do cliente e mais um valor de R\$ 20,00 por hora de trabalho.

A tabela a seguir contempla uma relação do valor a ser pago em função do tempo de trabalho

Tempo (h)	1	2	2,5	
Preço Final (R\$)	60	80	90	

a) Expresse o valor y a ser pago em função da quantidade x de horas de trabalho. O que acontece quando o prestador de serviços se locomove até a casa do cliente, porém não necessita ficar trabalhando?

Como resposta, esperamos obter $y = 20x + 40$.

b) Um prestador de serviços B cobra R\$ 30,00 para cada hora de trabalho (não há cobrança de taxa fixa) e ao final do serviço concede um desconto de R\$ 10,00 para pagamento a vista. Nesta situação, qual a equação que pode relacionar y a ser pago em função da quantidade x de horas de trabalho, neste caso.

Como resposta, esperamos obter $y = 30x - 10$.

c) É possível associar um gráfico para a situação descrita no item a e outro para a situação b? Como você interpreta cada um dos gráficos?

Para cada um dos referidos itens é possível representar graficamente cada lei da função afim por meio de reta crescente. Em termos de interpretação era desejável que os alunos verificassem que com 5 horas de trabalho, o custo dos dois prestadores de serviço era igual. Acima de cinco horas, a prestação de serviços do homem A é mais barata. No entanto, abaixo de cinco horas, quem cobra mais barato é o prestador de serviços B.

d) Fixando o valor de a , o que acontece com o gráfico quando varia-se o valor de b ?

Dado $f(x) = ax + b$, variando o valor de b , ele representa a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo Oy .

e) O que acontece se não fixar o valor de a , porém o valor de b é constante?

Não fixar o valor de a , ou seja, variar seu valor implica em alterar os valores dos coeficientes angulares das funções. No entanto, o valor inicial da função será o mesmo mantendo b constante.

f) O que acontece se $a = 0$?

No caso de $a = 0$, caso particular da função afim, é chamada função constante $f(x) = b$, sendo o gráfico uma reta paralela ao eixo Ox .

Página 68

Tarefa 3

“(...) disponibilizamos o papel milimetrado para a construção dos gráficos (...) A tarefa foi criada com o objetivo de se trabalhar as formas de representação: forma algébrica, tabular e gráfica”.

Página 71

Tarefa 4

Que significado tem, na realidade, na 1ª etapa exercício 1 o valor que marcou correspondente a zero litros adquiridos? Que conclusões pode-se retirar? Na tarefa 2, o que acontece quando o prestador de serviços se locomove até a casa do cliente, porém não necessita ficar trabalhando? Represente no gráfico o par ordenado a essa questão.

11. CERGOLI, D. **Ensino de Logaritmos por meio de Investigações Matemáticas em Sala de Aula** (Dissertação) – Universidade de São Paulo São Paulo - SP, 2017.

Páginas 19-45

ATIVIDADE 1

Objetivo:

Observar, na tabela 1A, que o produto de dois termos na coluna da PG corresponde à soma dos termos correspondentes na coluna da PA e, analogamente, o quociente na coluna da PG corresponde à diferença na coluna da PA. Também, compreender que a n -ésima potência de um termo na coluna da PG corresponde à multiplicação desse termo por n , na coluna da PA. Da modo análogo, a raiz n -ésima de um termo na coluna da PG, corresponde ao quociente da divisão do termo correspondente na coluna da PA, por n .

Enunciado:

I - Progressão Geométrica « Progressão Aritmética

Observe a tabela a seguir e responda às seguintes questões.

PG	PA	
1	0	(linha 1)
2	3	(linha 2)
4	6	(linha 3)
8	9	(linha 4)
16	12	(linha 5)
32	15	(linha 6)
64	18	(linha 7)
128	21	(linha 8)
256	24	(linha 9)
512	27	(linha 10)
1 024	30	(linha 11)
2 048	33	(linha 12)
4 096	36	(linha 13)
8 192	39	(linha 14)
16 384	42	(linha 15)
32 768	45	(linha 16)
65 536	48	(linha 17)
131 072	51	(linha 18)
262 144	54	(linha 19)
524 288	57	(linha 20)
1 048 576	60	(linha 21)

Tabela 1A

- Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 4 pelo termo da linha 6.
- Na coluna da PA, some o termo da linha 4 com o termo da linha 6.
- Os resultados encontrados nos itens anteriores estão na tabela? Em que linhas?
- Na coluna da PG, divida o termo da última linha pelo termo que está na sétima linha e veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
- Na coluna da PA, subtraia o termo da última linha do termo que está na sétima linha e veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
- Calcule $(64)^2$ e verifique se o resultado está na tabela. Faça também 2×18 e compare as localizações dos resultados.
- Calcule $2 \times 16 + 3 + 12$ e localize os resultados na tabela.
- Efeite 256×1024 e $24 + 30$. Confira em que linhas estão os resultados.

- i) Efetue $524.288 \div 16.384$ e $57 - 42$. Confira onde estão os resultados.
- j) O que você reparou até agora?
- k) É possível efetuar as operações de multiplicação e divisão sem muito trabalho, usando a tabela acima? Descreva como.
- l) Como você pode obter o resultado de $(32)^3$ usando a tabela?
- m) Como você pode obter o valor de $\sqrt{65.536}$ apenas olhando para a tabela?

ATIVIDADE 2

Objetivo:

Notar que as mesmas propriedades observadas na atividade 1 também são válidas em outras tabelas de PA e PG com termos iniciais iguais a 0 e 1 respectivamente. Nesta atividade, as razões das progressões foram escolhidas pelos próprios participantes.

Enunciado:

- 1- Preencha as tabelas abaixo, cada uma com os termos consecutivos de uma PG na primeira coluna e os termos consecutivos de uma PA na segunda coluna. Para a tabela 2A, escolha uma PG que tenha razão $q > 1$ e, na tabela 3A, escolha uma razão $0 < q < 1$. Nas progressões aritméticas, escolha razões r positivas.

PG	PA
1	0

Tabela 2A

PG	PA
1	0

Tabela 3A

- 2- Para cada uma das tabelas que você construiu, responda às seguintes questões:
 - a) Na coluna da PG, multiplique o termo da linha 2 pelo termo da linha 4.
 - b) Na coluna da PA, some o termo da linha 2 com o termo da linha 4.
 - c) Os resultados encontrados nos itens anteriores estão na tabela? Em quais linhas?
 - d) Na coluna da PG, divida o termo da última linha pelo termo que está na sexta linha. Veja se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
 - e) Na coluna da PA, subtraia o termo da última linha pelo termo que está na sexta linha. Confira se o resultado está na tabela. Se estiver, anote em qual linha.
 - f) Calcule o quadrado do termo que está na quinta linha da PG.
 - g) Calcule o dobro do termo que está na quinta linha da PA.
 - h) Calcule a raiz cúbica do termo da PG que está na linha 7 e a terça parte do termo da PA que está na mesma linha.
 - i) O que você reparou até agora?

ATIVIDADE 3

Objetivo:

Validar as conjecturas formuladas nas atividades 1 e 2 a partir das propriedades observadas.

Texto:

II - Sempre Funciona?

Apesar de termos a sensação ou até mesmo a convicção de que as propriedades observadas serão válidas sempre que colocarmos termos consecutivos de uma progressão geométrica ao lado de termos consecutivos de uma progressão aritmética, sendo que os termos iniciais são 1 e 0 respectivamente, rigorosamente ainda não nos é permitido afirmar com total segurança que tais propriedades valem para quaisquer PG e PA.

Enunciado:

Tome uma tabela cuja primeira coluna é a PG de razão $q > 0$, $q \neq 1$ com primeiro termo igual a 1. Os termos seguintes serão q , q^2 , q^3 , ..., q^n , ..., q^n . Na segunda coluna, tome uma PA de razão $r \neq 0$ com primeiro termo igual a 0. Os termos seguintes serão r , $2r$, $3r$, ..., nr , ..., nr .

1. Calcule o produto de dois termos quaisquer da PG e escreva o resultado em forma de uma só potência. Que termo é esse?
2. Calcule a soma dos termos da PA correspondentes aos do item anterior e escreva o resultado em função de r .
3. Os resultados são correspondentes?
4. Verifique, passo a passo, a validade das demais propriedades no caso geral.

ATIVIDADE 4

Objetivo:

Observar que a média geométrica de dois termos na coluna da PG, corresponde a média aritmética dos termos correspondentes na coluna da PA.

Enunciado:

Uma propriedade interessante das tabelas de PG $\times$ PA. Use a tabela 1A desta oficina e responda:

1. Na coluna da PA, localize a média aritmética dos números 9 e 21.
2. Na coluna da PG, localize a média geométrica dos números 8 e 128.
3. Os resultados obtidos nos dois itens anteriores estão em que linhas?
4. Na coluna da PA, localize a média aritmética dos números 24 e 54.
5. Na coluna da PG, localize a média geométrica dos números 256 e 262.144.
6. Os resultados obtidos nos dois itens anteriores estão em que linhas?
7. Explique, com suas palavras, o que você reparou. Você acredita que a propriedade observada vale para outros termos da tabela?

ATIVIDADE 5

Objetivo:

Após a leitura do texto a seguir, as questões de investigação propostas pretendem ajudar o participante a perceber que valem as propriedades $a^{\log_a x} = x$ e $\log a^n = n$, ou seja, que o logaritmo é a inversa da exponencial.

Texto:

III – Logaritmos

Com o que observamos até agora já é possível perceber o potencial das tabelas que estamos montando: em vez de fazermos cálculos envolvendo contas de multiplicação, divisão, potências ou raízes, podemos, de posse das tabelas, fazer contas mais simples, respectivamente de adição, subtração, multiplicação ou divisão por um número natural.

Por exemplo, usando a primeira tabela, em vez de efetuarmos 128×8.192 , podemos somar os valores da PA que são correspondentes na tabela: $21 + 39 = 60$ e, olhando novamente a tabela, podemos concluir que $128 \times 8.192 = 1.048.576$.

Tabelas como as que vimos nas atividades anteriores são exemplos de tábuas de logaritmos. John Napier (1550 - 1617) publicou, em 1614, um livro intitulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descrição da Maravilhosa Regra de Logaritmos), depois de ter trabalhado por quase 20 anos produzindo uma tábua de logaritmos.

O suíço Joost Bürgi (1552-1632), fabricante de relógios e instrumentos de astronomia e matemático, também criou, independentemente, tábuas de logaritmos, mas as publicou seis anos depois de Napier.

Segundo Eves (2004), a *Descriptio* despertou interesse imediato e amplo, sendo que no ano seguinte à sua publicação, Henry Briggs (1561 - 1631) viajou de Oxford até Edimburgo para visitar Napier. Durante a visita, ambos concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas. Em 1624, Briggs publicou o livro *Arithmetica logarithmica* que continha uma tábua de logaritmos decimais dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. Acredita-se que Napier e Bürgi foram influenciados pela obra de Michael Stifel (1486 - 1567), tendo percebido que sua utilização seria extremamente importante para o desenvolvimento da ciência, facilitando cálculos utilizados nas grandes navegações, na astronomia e na engenharia entre

outros, e assim passaram a criar longas tabelas. Tábuas de logaritmos foram utilizadas durante vários séculos, sendo finalmente substituídas por calculadoras e computadores a partir de 1960.

A invenção dos logaritmos foi rapidamente espalhada pelo mundo por matemáticos que passaram a usar as tabelas na Itália, França, Alemanha e até mesmo na China, ainda no século XVII.

A notação que usamos hoje para os logaritmos foi estabelecida por *Leonhard Euler* (1707 - 1783), responsável também por notar a relação dos logaritmos com a função exponencial, no século XVIII.

Vejamos como funciona a notação, tendo a tabela abaixo como referência:

PG	PA
1	0
3	1
9	2
27	3
81	4
243	5
729	6

Tabela 4A

Em uma tabela de logaritmo, a cada número à esquerda corresponde um número à direita, chamado seu logaritmo. Por exemplo, podemos dizer que o logaritmo de 1 é igual a 0, e escrevemos $\log 1 = 0$. Analogamente, temos: $\log 3 = 1$, $\log 9 = 2$, $\log 27 = 3$, $\log 81 = 4$, $\log 243 = 5$, $\log 729 = 6$.

Observando a tabela 1A desta oficina, podemos dizer que o logaritmo de 512 é 27 e escrevemos $\log 512 = 27$. Para obtermos o produto de dois números que estão na coluna da esquerda primeiramente somamos seus logaritmos. O resultado dessa soma é o logaritmo do produto. Para achar o produto, basta ler na tabela, da direita para a esquerda, qual o número que tem aquele logaritmo. Por exemplo, em vez de calcularmos diretamente o produto 128×32 podemos fazer o seguinte:

$$\begin{array}{rcl}
 128 & \rightarrow & 21 \\
 \times & \rightarrow & + \\
 32 & \rightarrow & 15 \\
 \hline
 (4.096) & \leftarrow & 36
 \end{array}$$

Figura 8

Note que deixamos de fazer diretamente a multiplicação e, em vez disso, efetuamos uma adição. Repare que a maneira como escolhemos para indicar o que foi feito não é a convencional, mas acreditamos que seja sugestiva. A mesma ideia, escrita com a notação usual de logaritmos, fica assim:

$$\log(128 \cdot 32) = \log 128 + \log 32 = 21 + 15 = 36.$$

Portanto, olhando de volta a tabela, conclui-se que $128 \cdot 32 = 4.096$.

Enunciado:

Seja $a_n = 3^n$ um termo genérico da PG da tabela 4A.

- Determine, em termos de n , qual o valor de $\log a_n$.
- Qual o valor de $3^{\log a_n}$?

ATIVIDADE 6

Objetivo:

Perceber que é necessário definir o que é base de um logaritmo.

Texto:

IV - Base de Logaritmos

Observe as tabelas a seguir:

PG	PA
1	0
3	2
9	4
27	6
81	8
243	10

Tabela 5A

PG	PA
1	0
3	1
9	2
27	3
81	4
243	5

Tabela 6A

Na tabela 5A, tem-se $\log 3 = 2$ e, na tabela 6A, $\log 3 = 1$. Isso não é uma incoerência? Na verdade, não: existem vários logaritmos. Para distinguirmos uns dos outros precisamos da noção de base do logaritmo.

Enunciado:

Dada a tabela abaixo, complete:

$\log 1 = \dots$, $\log q = \dots$, $\log q^2 = \dots$, $\log q^3 = \dots$, $\log q^4 = \dots$, $\log q^5 = \dots$

PG	PA
1	0
q	1
q^2	2
q^3	3
q^4	4
q^5	5

Tabela 7A

Você reparou que o expoente de q coincide com o logaritmo de q^n ?

A propriedade $\log q^n = n$ é boa, pois facilita certas contas e deduções. Isso acontece em todas as tabelas anteriores?

Voltemos à tabela 1A. Ali, vemos que $\log 1 = 0$, $\log 2 = 3$, $\log 2^2 = 6$, $\log 2^3 = 9$ etc. Ou seja, nesse caso, não temos a propriedade $\log q^n = n$. Mas observamos que $\log 2^n = 3n$. Em geral, em uma tabela em que a PG tem razão $q > 0$ e a PA tem razão $r \neq 0$, tem-se $\log(q^n) = nr$.

Para se ter a propriedade $\log q^n = n$, a PA deve ter razão $r = 1$. Se r é um número racional não nulo e diferente de 1, podemos aumentar ou diminuir o número de linhas da tabela, de modo que a razão da PA passe a ser igual a 1.

ATIVIDADE 7

Objetivo:

Uma vez observada que a propriedade $\log q^n = n$ ocorre quando as tabelas têm a PA com razão 1, perceber que, caso a PA não tenha razão 1, é possível interpolar meios aritméticos para que isso ocorra.

Enunciado:

- (a) Abaixo está um pequeno pedaço da primeira tabela, em que foram acrescentadas algumas linhas novas. Vamos completar os espaços que estão em branco:

PG	PA
1	0
	1
	2
2	3

Tabela 8A

- (b) Nessa tabela, qual a razão da PG?
 (c) Considere a tabela a seguir:

PG	PA
1	0
q	r
q^2	$2r$
q^3	$3r$
q^4	$4r$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
q^n	nr

Tabela 9A

Existe um número b que satisfaz $\log(b^n) = n$? Se sim, qual é ele?

O número b encontrado na atividade anterior é chamado base do logaritmo.

Uma observação importante a ser feita é que a PA escolhida é apenas um auxiliar. Para calcularmos, por exemplo, 16×32 usando uma tabela de logaritmos que tenha PG de base 2 na primeira coluna, tanto faz qual a PA utilizada. Sendo assim, o mais simples a fazer é escolher a PA de razão $r = 1$.

Pergunta: Qual o valor de $\log_b(b^n)$? (Para responder a essa pergunta não é preciso fazer nenhuma conta. Basta pensar!)

ATIVIDADE 8

Objetivo:

Exemplificar o cálculo do logaritmo de um número que não está na tabela, interpolando meios aritméticos e geométricos entre termos já existentes, valorizando a ideia e o trabalho desenvolvido por *Bürgi e Napier*.

Texto:

V - Aproximações

Evidentemente, as tabelas de logaritmos que construímos são bastante incompletas, já que com elas só conseguimos calcular operações envolvendo os números que lá estão e não com qualquer número. Para que a tabela seja útil, temos que fazê-la muito maior, de modo que possamos calcular qualquer produto como, por exemplo, 87×423 . Mas fazer a tabela mais completa requer considerar potências com expoentes fracionários ou negativos. Os inventores dos logaritmos pensaram no problema de tornar a tabela mais completa e o resolveram de forma bastante engenhosa. Vamos ver como, para que possamos entendê-lo e apreciá-lo.

Considere a tabela abaixo, em que os números apresentados na primeira coluna têm 3 casas decimais de precisão. (A segunda coluna contém números racionais que são decimais exatos e por isso mantivemos todas as casas decimais.)

PG	PA
1	0
1.15	0.0625
1.334	0.125
1.778	0.250
3.162	0.500
10	1

Tabela 10A

Nosso objetivo é entender como inserir novos valores na tabela. Por exemplo, vamos achar uma aproximação para o valor de $\log_{10} 1.5$. É útil observar que, como a base do logaritmo é maior do que 1, os números que aparecem nas duas colunas estão em ordem crescente.

Enunciado:

Obter uma aproximação para o valor de $\log_{10} 1.5$ com uma casa decimal de precisão.

- Localize, na primeira coluna, entre quais números fornecidos na tabela acima fica o número 1,5. Escreva em forma de desigualdade: $\dots < 1,5 < \dots$
- Complete $\dots < \log_{10} 1,5 < \dots$ e reescreva essa desigualdade trocando os números decimais por frações.
- Tome a média aritmética m_1 dos dois números racionais encontrados no item anterior.
- Qual o correspondente ao número m_1 na coluna da PG?
- Note que agora você pode acrescentar uma linha à sua tabela:

PG	PA
1	0
10	1

Tabela 11A

- f) Com sua tabela aumentada, localize novamente entre quais novos números fica o 1,5 e complete: $\dots < \log_{10} 1,5 < \dots$
- g) Conclua que a primeira casa decimal de $\log_{10} 1,5$ tem que ser _____.

Assim, podemos dizer que uma aproximação, com uma casa decimal de precisão, para $\log_{10} 1,5$ é _____.

Ainda não conhecemos a segunda casa decimal. Para aumentar a precisão, basta repetir o processo.

ATIVIDADE 9

Objetivo:

Esta atividade é uma continuação da atividade 8, em que se pretende obter um valor aproximado para o $\log_{10} 1,5$, com duas casas decimais de precisão.

Enunciado:

Usando o mesmo método e os novos valores obtidos na tabela 11A, achar uma aproximação para $\log_{10} 1,5$ com duas casas decimais de precisão.

Texto:

Fazendo todas as contas com cuidado, vocês irão descobrir que 1,5 está entre 1,486 e 1,512 e, portanto, o valor de $\log_{10} 1,5$ está entre 0,171875 e 0,1796875. Mais precisamente, $0,171875 < \log_{10} 1,5 < 0,1796875$. Assim, teremos certeza de que a segunda casa decimal de $\log_{10} 1,5$ é 7. Assim, $\log_{10} 1,5 \approx 0,17$.

Sobre a terceira casa temos uma imprecisão enorme: está entre 1 e 9, conforme mostra a última desigualdade acima. Você já tem uma ideia do trabalho que dá achá-la à mão!

Segundo *Druck* (1995) “*Napier* publicou três tabelas que, juntas, calculavam com precisão até a sétima casa decimal, os logaritmos na base 10 dos números 4.998.609,4034 a 10.000.000. Ele trabalhou 20 anos para produzir esse trabalho. *Briggs*, um professor de Matemática em Oxford, produziu tabelas com precisão de 15 casas decimais. Devemos admirar e respeitar os matemáticos, navegadores e astrônomos do século XVII não só pela engenhosidade, mas também pela paciência com que dedicaram anos de suas vidas fazendo cálculos como os que mostramos acima para que a humanidade pudesse, depois, fazer outros cálculos mais rápida e facilmente. Durante quase 4 séculos que sucederam à descoberta dos logaritmos, sua utilidade revelou-se decisiva na Ciência e Tecnologia. Recentemente, com o uso cada vez mais comum de computadores e calculadoras, as tábuas de logaritmos não são mais úteis como instrumento de cálculo. Entretanto o estudo dos logaritmos é fundamental, pois o desenvolvimento da Matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversos fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos são modelados por funções logarítmicas e por funções exponenciais. Finalmente, devemos mencionar que a definição de logaritmo do modo como é ensinado hoje na escola ($\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$) levou cerca de 200 anos para ser formulada. Todo esse tempo é certamente um sinal do grau de dificuldade que o conceito abarca”.

ATIVIDADE 10

Objetivo:

Observar a relação existente entre juros simples e progressões aritméticas e entre juros compostos e progressões geométricas.

Texto:

XI - Uma Aplicação à Matemática Financeira

Existem duas modalidades bastante conhecidas de ganhos de juros sobre um capital. São chamados juros simples os valores obtidos na situação em que, ao longo do tempo, apenas o capital inicial rende juros. Já nos juros compostos, após cada período de tempo a que se refere à taxa contratada, os juros ganhos são capitalizados (somados ao capital), passando a render juros também.

A tabela abaixo mostra os montantes (total do capital inicial mais os juros ganhos) no final de cada período de duas aplicações, ambas com um capital inicial de R\$ 1.000,00 aplicados a uma taxa de 10% ao mês. Na segunda coluna estão os montantes do capital aplicado a juros compostos e, na terceira coluna, os montantes do capital aplicado a juros simples.

Número de meses	Montante (Juros Compostos)	Montante (Juros Simples)
0	R\$ 1.000,00	R\$ 1.000,00
1	R\$ 1.100,00	R\$ 1.100,00
2	R\$ 1.210,00	R\$ 1.200,00
3	R\$ 1.331,00	R\$ 1.300,00
4	R\$ 1.464,10	R\$ 1.400,00
5	R\$ 1.610,51	R\$ 1.500,00

Tabela 12A

Na segunda coluna, o valor do montante em cada linha é a soma do valor anterior com 10% desse valor anterior. Também podemos afirmar que o valor em cada linha é o valor do montante da linha anterior multiplicado por 1,1. Logo, essa coluna é uma PG de razão 1,1.

Na terceira coluna, o valor do montante apresentado em cada linha é a soma do valor anterior com 10% do valor da linha correspondente ao mês 0, formando uma PA de razão 100.

ATIVIDADE 10

Objetivo:

Observar a relação existente entre juros simples e progressões aritméticas e entre juros compostos e progressões geométricas.

Texto:

XI - Uma Aplicação à Matemática Financeira

Existem duas modalidades bastante conhecidas de ganhos de juros sobre um capital. São chamados juros simples os valores obtidos na situação em que, ao longo do tempo, apenas o capital inicial rende juros. Já nos juros compostos, após cada período de tempo a que se refere a taxa contratada, os juros ganhos são capitalizados (somados ao capital), passando a render juros também.

A tabela abaixo mostra os montantes (total do capital inicial mais os juros ganhos) no final de cada período de duas aplicações, ambas com um capital inicial de R\$ 1.000,00 aplicados a uma taxa de 10% ao mês. Na segunda coluna estão os montantes do capital aplicado a juros compostos e, na terceira coluna, os montantes do capital aplicado a juros simples.

Número de meses	Montante (Juros Compostos)	Montante (Juros Simples)
0	R\$ 1.000,00	R\$ 1.000,00
1	R\$ 1.100,00	R\$ 1.100,00
2	R\$ 1.210,00	R\$ 1.200,00
3	R\$ 1.331,00	R\$ 1.300,00
4	R\$ 1.464,10	R\$ 1.400,00
5	R\$ 1.610,51	R\$ 1.500,00

Tabela 12A

Na segunda coluna, o valor do montante em cada linha é a soma do valor anterior com 10% desse valor anterior. Também podemos afirmar que o valor em cada linha é o valor do montante da linha anterior multiplicado por 1,1. Logo, essa coluna é uma PG de razão 1,1.

Na terceira coluna, o valor do montante apresentado em cada linha é a soma do valor anterior com 10% do valor da linha correspondente ao mês 0, formando uma PA de razão 100.

Enunciado:

- Se, em vez de 10% de juros, fossem 5%, ainda teríamos uma PG na segunda coluna? Em caso afirmativo, qual seria a razão?
- Os valores dos montantes em juros simples formam sempre progressões aritméticas? Por quê?
- Os valores dos montantes em juros compostos formam sempre progressões geométricas? Por quê?

ATIVIDADE 11

Objetivo:

Introduzir o questionamento histórico que levou à definição do número e .

Enunciado:

Suponhamos que R\$ 1.000,00 sejam aplicados a juros compostos:

- a) A uma taxa de 12% ao mês. Qual será o montante após um mês?
- b) A uma taxa de 6 % a cada 15 dias. Qual será o montante após um mês?
- c) A uma taxa de 4 % a cada 10 dias. Qual será o montante após um mês?
- d) A uma taxa diária de $\frac{12}{30}$ %. Qual será o montante após um mês?

Você deve ter reparado que o montante, ao final de 1 mês, aumenta, conforme aumenta a frequência com que os juros são capitalizados.

Pergunta: Se subdividirmos mais e mais o período de tempo, o montante crescerá indefinidamente? Ou seja, se tivermos os juros capitalizados, a cada hora, ou a cada minuto, etc., o montante irá crescer, tendendo ao infinito, ou irá estacionar em algum valor finito?

Imagine que haverá n capitalizações ao mês com taxas (a juros compostos) de $\frac{12}{n}$ % em cada período. O montante, ao final de um mês, em função de n , é dado pela expressão

$$M = \left(1 + \frac{12}{n}\right)^n$$

O que acontece quando n cresce indefinidamente?

Esse problema foi formulado pela primeira vez em 1683 por *Jacob Bernoulli* (1654 - 1705) e respondida por *Leonhard Euler*.

Para respondê-lo foi necessário saber calcular o valor de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, para valores crescentes de n .

Usando a fórmula do binômio de *Newton*, *Bernoulli* calculou $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, e provou que, qualquer que seja o número n , esse valor está entre 2 e 3.

ATIVIDADE 12

Objetivo:

Obter uma aproximação para o número e .

Enunciado:

Calcule $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 .

Texto:

O limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ foi estudado por *Euler* e posteriormente denotado pela letra e . Ele chegou a calcular uma aproximação com 18 casas decimais: $e \approx 2,718281828459045235$. Uma demonstração para a irracionalidade de e pode ser encontrada no livro Um curso de cálculo, Hamilton Luiz Guidorizzi, 5ª edição, Volume 1, Editora LTC, 2015.

Observe que os valores encontrados na atividade 12 são aproximações para o número e . O número e acima é a base do chamado logaritmo natural, usualmente indicado por $\ln$, isto é, $\log_e x = \ln x$. Esse é o logaritmo mais importante no mundo científico, porque seu uso simplifica fórmulas que, com outros logaritmos, seriam mais complicadas.

ATIVIDADES 13 E 14

Objetivo:

Construir e observar as propriedades dos gráficos das funções $y = \log_2 x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Texto:

VII - Introdução às Funções Logarítmicas

Nos encontros anteriores reforçamos as relações que as tabelas de logaritmos possuem. Tais tabelas podem ser construídas tomando-se uma PG de razão q e primeiro termo igual a 1 na coluna da esquerda, e uma PA de razão r e primeiro termo igual a 0 na coluna da direita. Com isso, as seguintes propriedades podem ser verificadas:

1. *produto na coluna da PG corresponde à soma na coluna da PA;*
2. *quociente na coluna da PG corresponde à diferença na coluna da PA;*
3. *n -ésima potência na coluna da PG corresponde ao produto por n na coluna da PA;*
4. *raiz n -ésima na coluna da PG corresponde ao quociente por n na coluna da PA.*

Também definimos que, em uma tabela de logaritmos, a cada número à esquerda corresponde um número à direita, chamado seu logaritmo. Por exemplo, dada a tabela de logaritmos a seguir, tem-se $\log 1 = 0$, $\log q = r$, $\log q^2 = 2r$, ..., $\log q^n = nr$, com $n \in \mathbb{N}$.

PG	PA
1	0
q	r
q^2	$2r$
...	...
q^n	nr

Tabela 13A

Como vimos nas aulas anteriores, é possível estender a tabela para n inteiro, bem como para n racional.

Para as atividades 13 e 14, você irá utilizar as tabelas 14A e 15A :

Tabela 14A	
PG	PA
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{16}$	-4
$\frac{1}{32}$	-5

Tabela 15A	
PG	PA
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{16}$	4
$\frac{1}{32}$	5
2	-1
4	-2
8	-3
16	-4
32	-5

Enunciado da ATIVIDADE 13:

- Qual a diferença entre estas duas tabelas e as demais tabelas já estudadas?
- Esboce, no plano cartesiano a seguir, os pontos cujas coordenadas são os valores da PG e seus respectivos valores correspondentes da PA na tabela 14A.

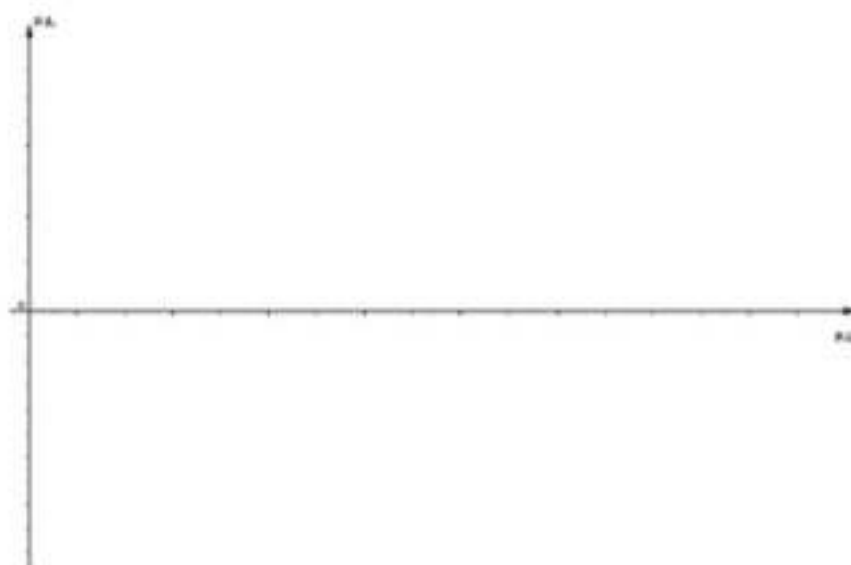


Vamos, a seguir, admitir que o gráfico da função $y = \log_2 x$ seja obtido ligando-se os pontos já encontrados acima com uma curva suave e crescente. Responda:

- c) Para $0 < x < 1$, o que ocorre com os valores de y ? E para $x > 1$?
- d) Para que y aumente de 1 para 2, os valores de x variam em qual intervalo? Para que y aumente de 2 para 3, os valores de x variam em qual intervalo? Para y aumentar de 3 para 4, quanto aumenta o x ?
- e) Tente descrever com palavras como é o crescimento dessa função.
- f) Observando o gráfico da função, qual é o conjunto-solução da inequação $\log_2 x \geq 2$?

Enunciado da ATIVIDADE 14:

- a) Esboce, no plano cartesiano a seguir, os pontos cujas coordenadas são os valores da PG e seus respectivos valores correspondentes da PA na tabela 15A.



- b) O que você pode concluir sobre os valores de y para $0 < x < 1$? E para $x > 1$?
- c) Qual a principal diferença entre o gráfico esboçado e o da função $y = \log_2 x$? Como você poderia justificar esse fato?
- d) Observando o gráfico da função, qual é o conjunto-solução da inequação $\log_2 x \geq 2$?

ATIVIDADE 15

Objetivo:

Descobrir e construir uma tabela adequada para poder responder às perguntas propostas.

Enunciado:

1. Crie uma tabela de logaritmos de modo a poder responder aos seguintes itens:

a) $\log_2 64 =$

b) $\log_2 \frac{1}{8} =$

c) $\log_2 \sqrt{32} =$

d) $\log_2 0,0625 =$

2. Agora, crie outra tabela para responder aos demais itens:

a) $\log_{\frac{1}{10}} 1 =$

b) $\log_{\frac{1}{10}} 10 =$

c) $\log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{10} =$

d) $\log_{\frac{1}{10}} 0,0001 =$

e) $\log_{\frac{1}{10}} 100 =$

ATIVIDADE 16

Objetivo:

Chegar à definição usual de logaritmos.

Enunciado:

Seja $b > 0$ e $b \neq 1$ um número qualquer.

a) Complete a tabela 16A a seguir.

PG	PA
1	0
b	1
b^2	
	7
	-2
b^{-2}	
	-13
	$\frac{1}{2}$
	$\frac{3}{4}$
b^n	

Tabela 16A

b) Usando a tabela acima, calcule os valores de:

- $\log_b 1 =$
- $\log_b b =$
- $\log_b b^2 =$
- $\log_b b^{-2} =$
- $\log_b x = 7 \Leftrightarrow$
- $\log_b b^n =$
- $\log_b x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
- $\log_b x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$

Agora sim, podemos concluir que, satisfeitas as condições de existência,

$$\log_b a = c \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}.$$

ATIVIDADE 17

Objetivo:

Resolver exercícios tradicionais usando os conhecimentos obtidos até então, de modo a perceber a validade da equivalência $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$.

Enunciado:

Calcule os seguintes logaritmos:

- $\log_{0,25} 4 =$
- $\log_{0,25} 16 =$
- $\log_{0,25} 32 =$
- $\log_{\frac{1}{25}} 2^4 =$
- $\log_2 \sqrt{2} =$
- $\log_8 \sqrt{2} =$
- $\log_{\sqrt{8}} \sqrt{27} =$
- $\log_{\sqrt{8}} \sqrt{32} =$

ATIVIDADE 18

Objetivo:

Resolver alguns problemas que fazem parte do repertório do conhecimento de logaritmos.

Enunciado:

Resolva os seguintes problemas:

1. (FUVEST) – Pressionando a tecla $\log$ de uma calculadora científica, aparece no visor o logaritmo decimal do número que estava antes no visor. Digita-se inicialmente o número 8 8 8 8 8 8 8 8 (oito oitos). Quantas vezes a tecla precisa ser pressionada para que apareça mensagem de erro?

2. a) As indicações R_1 e R_2 na fórmula abaixo, expressam a relação entre as magnitudes, na escala Richter, de dois terremotos:

$$R_1 - R_2 = \log_{10} \left(\frac{M_1}{M_2} \right)$$

em que M_1 e M_2 medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Houve dois terremotos: um correspondente a $R_1 = 8$ e outro correspondente a $R_2 = 6$. Calcule a razão $\frac{M_1}{M_2}$. Interprete o resultado.

b) O terremoto de 1989 na Califórnia teve uma magnitude de 7,1 na escala Richter. Quantas vezes maior foi o abalo sísmico do terremoto de 1906 em São Francisco que mediu 8,4 na mesma escala?

3. A população da cidade A tem, atualmente, 50.000 pessoas e cresce a uma taxa de 3,5% ao ano. A população da cidade B tem, hoje, 250.000 pessoas, porém cresce mais devagar, a uma taxa de 1,6% ao ano. Assumindo que a taxa de crescimento da população de cada cidade se mantém constante, quando a população da cidade A alcançará a da cidade B ?

Dados: $\log_{10} 1,019 \approx 0,008$ e $\log_{10} 5 \approx 0,700$.

12. SOUSA, I. B. **Produção de Significados a partir de Investigações Matemáticas: Função Afim e Contextos Cotidianos** (Dissertação) – Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande - PB, 2018.

Páginas 240-243

Etapas I da atividade investigativa

VENDER GELADINHO DÁ DINHEIRO?

(Publicado em 26 de março de 2012 por José Neto)

<https://www.montarumnegocio.com/vender-geladinho-da-dinheiro/>

Acesso em: 11 mai. 2017.

Vender geladinho pode não ser um grande negócio para se montar e nem tão pouco será algo que poderá render rios de dinheiro, mas dá para ganhar uma boa grana extra com isso.

Eu sinceramente não conheço ninguém que ficou rico vendendo geladinho, mas conheço pessoas que conseguem um bom dinheiro para gastar no final de semana, pagar suas contas no final do mês e até mesmo dar uma arrumada na vida, apenas fazendo e vendendo geladinho das mais variadas formas.

Como vender geladinho?

O processo para começar a vender geladinho é muito simples e não requer toda a estrutura usada para montar um negócio grande. Digo isso, porque a venda de geladinho é algo a se comparar com a venda de bijuterias ou de doces, pois é algo com um investimento inicial extremamente baixo.

A minha principal dica é que você foque em locais onde exista uma grande circulação de pessoas, como na porta de escolas, em parques de diversão e em locais onde as pessoas praticam esportes, pois assim será mais fácil vender geladinho. Existem pessoas que vendem também no semáforo, enquanto os carros estão parados, e pode ser uma alternativa interessante.

Para começar, você precisa apenas dos ingredientes para fabricar seus geladinhos, de um isopor ou de um carrinho para sair vendendo e de uma estratégia para vender. O investimento inicial pode ser muito baixo, dependendo das suas pretensões, e o lucro poderá vir de forma rápida se você conseguir vender bastante todos os dias.

E aí, será que vender geladinho dá dinheiro?

Como eu disse no início, esse é aquele tipo de produto que não gera muito dinheiro para todas as pessoas, mas se o seu objetivo for ganhar uma grana extra, então essa pode ser uma ótima opção. A verdade é que tudo dependerá do seu desempenho nesse trabalho, pois quanto mais pessoas conseguir impactar com seus produtos, mais dinheiro conseguirá ganhar.

E você, o que acha desse tipo de empreendedorismo? Se você fosse um vendedor de geladinhos como você faria para vender e lucrar cada vez mais?

Etapa II da atividade investigativa

Temos diversos tipos de geladinhos que vão variar no sabor, no tamanho da embalagem utilizada e no preço que iremos vendê-lo ou comprá-lo. Com base nisso, temos no quadro abaixo os ingredientes que são utilizados para fazer alguns tipos de geladinhos, bem como seus respectivos sabores e porções que poderão ser feitas com os ingredientes disponíveis.

SABOR	INGREDIENTES	PREÇO DOS INGREDIENTES, EM REAIS
GELADINHO DE LEITE CONDENSADO (12 porções de 115 ml) (__ porções de 180 ml)	1L de leite;	
	3 colheres de chá de açúcar (50g);	
	1 caixa de leite condensado;	
	3 colheres de sopa de leite em pó (100g).	
GELADINHO DE CHOCOLATE ECONÔMICO (__ porções de 115 ml) (08 porções de 180 ml)	1 litro de leite;	
	1 caixa de leite condensado;	
	1 lata de creme de leite;	
	6 colheres de sopa de achocolatado (180g);	
	4 colheres de sopa de açúcar (66g).	
GELADINHO AZUL (15 porções de 115 ml) (__ porções de 180 ml)	1 litro de leite;	
	2 colheres de sopa cheias de pó azul para sorvete (100g);	
	5 colheres de sopa de açúcar (82g).	
GELADINHO DE MOUSSE DE MARACUJÁ (__ porções de 115 ml) (10 porções de 180 ml)	1 caixa de leite condensado;	
	1 lata de creme de leite;	
	3 colheres de chá de açúcar (50g);	
	½ litro de suco de maracujá (ou 02 maracujás, aproximadamente 400g)	
	½ litro de leite.	
GELADINHO DE AMENDOIM (20 porções de 115 ml) (__ porções de 180 ml)	1 litro de leite;	
	3 colheres de açúcar (50g).	
	1 caixa de leite condensado;	
	400g de amendoim torrado e moido	
GELADINHO DE BISCOITO (__ porções de 115 ml)	1 litro de leite	
	1 saquinho de suco artificial de sua preferência.	
	3 colheres de açúcar (50g).	

(10 porções de 180 ml)	100 g de bolacha Maisena ou Maria.	
GELADINHO DE COCO (06 porções de 115 ml) (__ porções de 180 ml)	300 ml de leite;	
	2 colheres de açúcar (32g).	
	1 caixa de leite condensado	
	1 pacote de 100 g de coco ralado	
GELADINHO DE MANGA (__ porções de 115 ml) (13 porções de 180 ml)	4 mangas grandes sem fiapo (aproximadamente 2 unidades por kg)	
	1 litro de leite	
	1 caixa de leite condensado	
	3 colheres de açúcar (50g).	
GELADINHO DE GOIABA (15 porções de 115 ml) (__ porções de 180 ml)	$\frac{1}{2}$ litro de leite	
	3 colheres de açúcar (50g)	
	4 goiabas cortadas ao meio (aproximadamente 1 Kg)	
	1 caixa de leite condensado	

Fonte*: <http://receitadahora.com.br/7-receitas-de-geladinho-imperdiveis-para-fazer-e-vender/>. Acesso em: 12 mai. 2017

<http://www.tudogostoso.com.br/>. Acesso em: 12 mai. 2017

*As receitas acima sofreram algumas alterações.

Etapa III da atividade investigativa

EQUIPE: _____ N^o _____
 _____ N^o _____
 _____ N^o _____
 _____ N^o _____
 _____ N^o _____

Depois da leitura do texto e da análise feita do quadro, imagine que vocês se tornarão empreendedores da venda de geladinhos, sendo que na sua produção haja a venda de 500 geladinhos que variam em dois tamanhos: uns de 115 ml e outros de 180 ml. Escolha uma das receitas do quadro da Etapa II e discutam em grupo de 4 pessoas estratégias para que as suas vendas sejam bem-sucedidas. Coloque todas as suas ideias no papel, incluindo a escrita delas, as expressões matemáticas formuladas e os gráficos que vocês conseguirem elaborar. Use o conteúdo de função afim para a discussão de suas ideias. No final de tudo elabore um cartaz para a divulgação de suas vendas.

13. VERISSIMO, W. **Investigação Matemática: uma Abordagem das Questões de Álgebra e da OBMEP para o Ensino Médio.** (Dissertação) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá - PR, 2018.

Página 46-80

Atividades de investigação sobre Mágicas e Advinhações

4.3.1 Brincadeira de adivinhar o resultado final

Essa brincadeira é comum. A questão envolve descobrir o resultado final após uma sequência de operações matemáticas

Questão: Truque com número.

- 1) Pense em um número de 1 a 9.
 - 2) Multiplique por 2.
 - 3) Some 10.
 - 4) Divida o resultado por 2.
 - 5) Subtraia esse resultado pelo número que você pensou no passo 1.
- O resultado deu 5, não foi? Tente com outro número.

Como isso é possível?

Vamos tentar explicar matematicamente o resultado?

4.3.2 Brincadeira que resulta no dia, mês e ano de seu aniversário

Questão: Descobrindo a data de nascimento.

Escreva o dia e o mês de seu nascimento um ao lado do outro, formando um número. Não considere o zero à esquerda. Por exemplo, quem nasceu no dia 05 de outubro irá escrever 510. Faça as seguintes operações na sequência:

- 1) Multiplique esse número por 2.
- 2) Ao resultado, some 5.
- 3) Multiplique o número que encontrou por 50.
- 4) Subtraia do resultado o número 250.
- 5) Adicione ao resultado encontrado os dois últimos dígitos do ano em que nasceu.

Que número você encontrou?

Faça agora essa mesma brincadeira com seus colegas.

Observou algo curioso?

Podemos até nem pensar muito a respeito dos motivos que levaram ao resultado encontrado. Mas o interessante é investigar matematicamente como isso acontece. Qual ou quais regras matemáticas estão presente nessa situação?

4.3.3 Mágica com Dominós

Questão: Descobrindo os números da peça do dominó.

O mágico Magimático diz para uma pessoa que está na plateia escolher uma peça qualquer de um dominó comum. Tal peça é formada por um par de números de 0 a 6. Em seguida, ele diz para a pessoa escolher um dos números da peça e realizar a seguinte sequência de operações:

- 1) Multiplicá-lo por 5;
- 2) Somar o resultado anterior com 15;
- 3) Multiplicar o último resultado por 2 e, finalmente,
- 4) Somar o último resultado com o outro número da peça.

Realizadas tais operações, o resultado é divulgado e o Magimático impressiona a plateia dizendo exatamente os números escritos no dominó escolhido.

Agora é com você!

Escolha uma ou se preferir mais peças, pegue um dos números e efetue as sequências de operações pedidas pelo Magimático.

Atividades de Investigação sobre Padrões de Sequências Numéricas

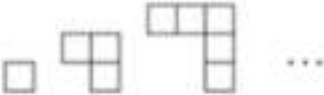
4.4.1 Somando pecinhas

Questão retirada e adaptada do Banco de Questões 2016, Nível 1 – Obmep

Questão: Considere a seguinte sequência de pecinhas, em que a pecinha de número 1 é um quadradinho.

16 Somando pecinhas

Considere a seguinte sequência de pecinhas, em que a pecinha de número 1 é um quadradinho.



(a) Quantos quadradinhos formam a pecinha de número 50?

(b) Quantos quadradinhos existem na união das pecinhas de número 1 a 50?

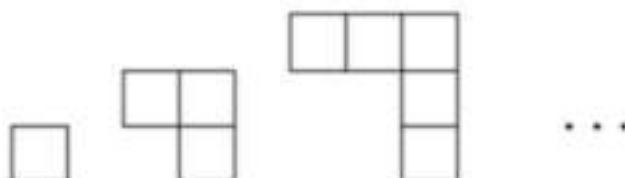
(c) Observando o resultado do item b, calcule

$$2 + 4 + 6 + \dots + 96 + 98 + 100.$$

(d) Calcule

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100.$$

Considere a seguinte sequência de pecinhas, em que a pecinha de número 1 é um quadradinho.



- Desenhe as pecinhas 4 e 5.
- Quantos quadradinhos formam a pecinha de número 50?
- É possível saber o número de quadradinhos de qualquer pecinha? Descreva uma regra matemática que permite esse cálculo.
- Qual é o número de quadradinhos que se obtém unindo as pecinhas 24 e 25?
- Quantos quadradinhos existem na união das pecinhas de número 1 a 50?
- É possível saber a soma dos quadradinhos da união de uma sequência de pecinhas? De que forma?
- Observando o resultado do item (e), calcule $2 + 4 + 6 + \dots + 96 + 98 + 100$.
- Calcule a seguinte soma: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$.

Figura 4.25: Sequência de Quadradinhos - Questão adaptada

4.4.2 Quadrados preenchidos com quadradinhos

Essa questão (figura 4.30) foi retirada do concurso de vestibular da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP).

Questão original: Considere a sequência de figuras, na qual a área do primeiro quadrado é S . Qual a soma de todas as áreas sombreadas de sequência?

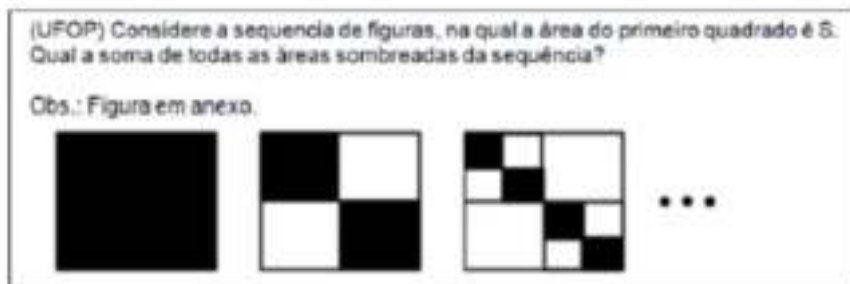


Figura 4.30: Quadradinhos sombreados - Fonte: <https://brainly.com.br/tarefa/4201984>

Para atividade de investigação aplicada em sala de aula, ela foi adaptada com alguns questionamentos, apresentados gradativamente, para desenvolvimento dos alunos.

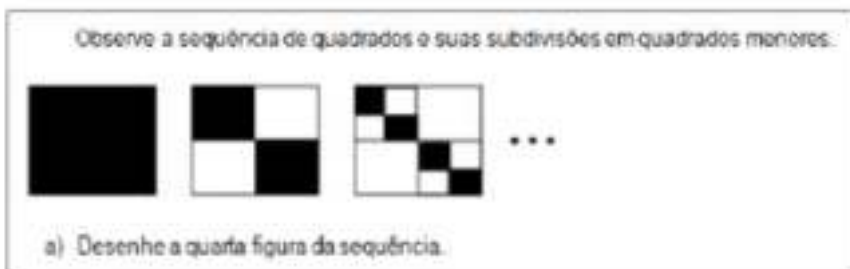


Figura 4.31: Construção da próxima figura - Pergunta adaptada

Esta atividade de investigação matemática foi desenvolvida com os alunos do segundo ano do ensino médio e com os acadêmicos do primeiro período do Curso de Licenciatura em Matemática. A atividade tem como principal objetivo fazer com que os alunos explorem a sequência de figuras, que são quadrados divididos em quadradinhos, uns sombreados, outros não, percebendo padrões de sequências numéricas e suas propriedades. O conteúdo a ser explorado é o de Progressão Geométrica, espera-se que observem e desenvolvam as fórmulas pertinentes e suas propriedades matemáticas, deste o termo geral até a soma da PG com razão maior que 0 (zero) e menor que 1 (um).

As próximas perguntas, "direcionadas", foram lançadas para que os alunos dessem continuidade na investigação.

Considere a área do primeiro quadrado igual a 1.

- (b) É possível saber quanto vale a área sombreada da figura 4. Descreva como você fará.
- (c) Enumerando as áreas sombreadas dos quadrados, descreva o que se observa.
- (d) Se a sequência for infinita, conseguimos saber a soma total das áreas sombreadas? De que forma?
- (e) Considere que o primeiro quadrado tenha área igual a 4. É possível determinar a soma de todas as áreas sombreadas da sequência. Tente descobrir esse valor.
- (f) Agora, considere que o primeiro quadrado tenha área igual a S . Qual é a soma de todas as áreas sombreadas da sequência infinita?

4.4.3 Construindo escadas

Questão retirada do Banco de Questões 2013, da Obmep, nível 1.

Questão: Utilizando-se quadradinhos de 1 cm de lado são construídas escadas conforme a figura 4.42.

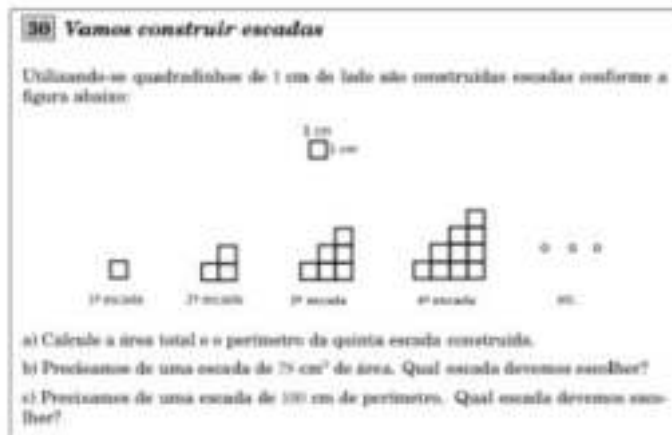


Figura 4.42: Fonte: Banco de Questões da Obmep 2013.

A questão foi adaptada para atividade de investigação acrescentando mais alguns questionamentos. O objetivo é levar o aluno a usar sua criatividade e perceber quais conteúdos matemáticos estão presentes na situação e suas propriedades, para que possam utilizar no desenvolvimento da sua resolução, bem como representar algebricamente regras que permitam calcular o perímetro e a área de qualquer figura da sequência. Porém, para esta pesquisa, a atividade não foi aplicada em sala de aula.

- (a) Calcule a área total e o perímetro da quinta escada construída?
- (b) Observe a sequência de escadas construídas com os quadradinhos e descreva algumas propriedades.
- (c) Precisamos de uma escada com 100 cm de perímetro. Qual escada devemos escolher?

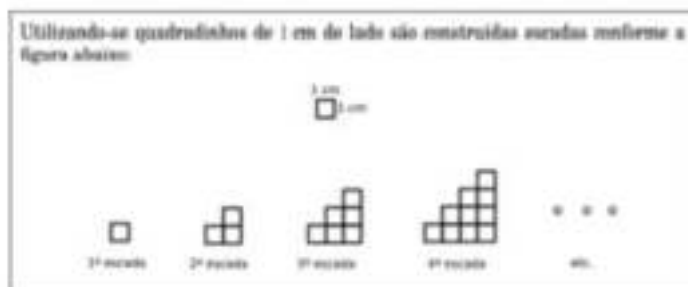


Figura 4.43: Construindo escadas - adaptada para investigação

- (e) É possível ter uma escada com perímetro de 50 cm? Explique.
- (f) Precisamos de uma escada com 78cm² de área. Qual escada devemos escolher?
- (g) Conjecture uma regra geral para efetuar o cálculo da área de qualquer escada da sequência.
- (h) É possível ter uma escada com a área igual a 100cm²? Explique.

Atividades de Investigação sobre Relações em Tabelas Numéricas

4.5.1 Tabela de Pitágoras

Questão retirada e adaptada de um concurso de Vestibular da Universidade Estadual do Rio de Janeiro - UERJ, (Figura 4.44)

Questão original: Calcule a soma de todos os números desta tabela até a vigésima linha. Abaixo a atividade adaptada de forma exploratória para apresentar e desenvolver com os alunos.

(UERJ) Observe a tabela de Pitágoras. Calcule a soma de todos os números desta tabela até a vigésima linha.		
3	4	5
6	8	10
9	12	15
12	16	20
...	...	...

Figura 4.44: Fonte: <http://www.vestiprovsa.com.br>

Questão: Abaixo está a tabela de Pitágoras.

(a) Explore-a e anote as suas conjecturas e conclusões

3	4	5
6	8	10
9	12	15
12	16	20
⋮	⋮	⋮

Figura 4.45: Tabela de Pitágoras

- (b) Quais são os números da vigésima linha?
- (c) Qual é a soma dos números da 10ª linha?
- (d) Em qual coluna está o número 64?
- (e) O número 49 encontra-se nessa tabela?
- (f) Colocando estes números em ordem crescente, qual é o centésimo número?
- (g) Qual a soma de todos os números até a vigésima linha?
- (h) Descreva uma forma algébrica para calcular a soma de qualquer número de linhas?

4.5.2 Identificando relações em tabelas

Questão: Explore regularidades matemáticas e identifique relações entre os números da seguinte tabela formada pelos números naturais dispostos, em ordem, em linhas com três colunas, ou seja, três números em cada linha:

0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
12	13	14
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Figura 4.46: Tabela de números naturais com 3 colunas

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Figura 4.47: Outras tabelas de números naturais com 4 e 5 colunas

- Registre as conclusões que vão observando.
- Há alguma relação entre as colunas?
- Verifique em cada tabela, onde se localizam os números primos.
- Em qual coluna se localiza o número 87 em cada tabela?
- Conjecture uma regra matemática para descobrir a coluna que se encontra qualquer número em qualquer tabela.
- Qual a soma dos números de cada tabela até a 5ª linha?
- Conjecture uma forma algébrica para calcular a soma de qualquer coluna ou qualquer quantidade de linha nas tabelas.

4.5.3 Quadrado mágico

Essa questão foi retirada e adaptada da OBMEP 2016, Nível 3 - Segunda Fase.

Questão original: Um quadriculado 3×3 preenchido com números inteiros é chamado de mágico quando, em cada linha horizontal, vertical ou diagonal, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.

NÍVEL 3 Respostas sem justificativa não serão consideradas

1. Um quadrilado 3×3 preenchido com números inteiros é chamado de *medinágico* quando, em cada linha horizontal, vertical ou diagonal, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.



a) Preencha o quadrilado abaixo para que ele seja *medinágico*.

3		19
8		

b) O quadrilado *medinágico* abaixo tem os números 7, 9 e 20 nas posições indicadas. Qual é o valor de x ?

	7	
9	x	
		20

c) Explique por que, em qualquer quadrilado *medinágico*, a soma de todos os números é um múltiplo de 9.

Figura 4.48: Fonte: Banco de Questões Obmep, 2016

Muitas das questões aplicadas na segunda fase da Olimpíada Brasileira de Matemática têm algumas características: são abertas; cada questão possui subitens, onde o primeiro item ou questionamento serve para verificar se o aluno entendeu o enunciado da questão; o segundo procura o entendimento de um determinado conceito matemático; outros itens buscam verificar a generalização desses conceitos e da situação proposta na questão. Nesse sentido, observa-se que essas questões tem cunho investigativo. São questões que, para responder, o aluno deve explorar e descrever conceitos matemáticos presente nelas, ou seja, deve construir matematicamente a sua resposta.

Para a utilização da questão como atividade exploratória de investigação, foram feitas as adaptações nas perguntas e aplicadas gradativamente, com a finalidade de tirar o máximo dos alunos. Primeiramente foi proposto aos alunos a questão conforme a figura 4.49.

Após um período de discussão entre os alunos e conforme a atividade era desenvolvida, foram colocadas aos alunos outras perguntas para que explorassem e tirassem suas conclusões.



Um quadriculado 3x3 preenchido com números inteiros é chamado de *medimágico* quando, em cada linha horizontal, vertical ou diagonal, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.

De acordo com a definição acima:

a) Preencha o quadriculado abaixo para que ele seja *medimágico*.

3		19
8		

b) Observe os quadriculados *medimágico* anteriores ou construa um próprio. Verifique e descreva algumas propriedades sobre a soma desses números.

Figura 4.49: Adaptada para investigação

- (c) O quadriculado *medimágico* abaixo tem os números 7, 9 e 20 nas posições indicadas. Qual é o valor de x ?

	7	
9	x	
		20

Figura 4.50: Qual o valor central?

- (d) Descreva a relação da soma de todos os números com o número central do quadriculado?
- (e) Explique por que, em qualquer quadriculado *medimágico*, a soma de todos os números é um múltiplo de 9. Demonstre algebricamente essa propriedade.
- (f) O valor central do quadriculado pode ser negativo? Explique.

14. ALENCAR, S. S. de. **O Uso da Investigação Matemática na Aprendizagem de Equação do Primeiro Grau no 7º Ano.** (Dissertação) – Universidade Federal do Acre, Rio Branco - AC - PR, 2019.

Páginas 124-128

ATIVIDADE 1: ESCRREVENDO EM LINGUAGEM ALGÉBRICA

No quadro abaixo, passe as frases em linguagem usual para a forma de expressões algébricas.

Linguagem usual	Expressões algébricas
O dobro de um número	
O triplo de um número mais cinco	
O dobro de um número mais quatro	
Um número mais sete	
O quádruplo de um número menos um	
O quadrado de um número mais um	
A metade de um número menos dois	

ATIVIDADE 2: MÁQUINA DE NÚMEROS – LETRAS EM LUGAR DE NÚMEROS

André e Emília resolveram brincar de inventar “máquinas de números”. Veja que legal!

André inventou uma máquina programada para **dobrar números**. A cada número que entra, a máquina fornece o dobro dele. Você se lembra: para encontrar o dobro, multiplicamos por 2.

Agora, considere a máquina aperfeiçoada por Emília e depois responda as questões propostas.



Fonte: Livro Projeto Teláris, 2015

- a) Se entrasse o número 20, que número sairia?
- b) Se entrasse o número -5 , que número sairia?
- c) Se entrasse o número 3,5, que número sairia?
- d) Se entrasse um número y qualquer, que número sairia?

ATIVIDADE 3: EXPLORANDO A IDEIA DE EQUILÍBRIO

A igualdade traduz uma ideia de equilíbrio. Equilíbrio faz a gente se lembrar de uma balança de dois pratos. Assim, uma equação (que é uma igualdade) pode ser vista como uma balança de dois pratos em equilíbrio.

Observe abaixo a balança de pratos equilibrada e considere todas as latinhas com o mesmo "peso", que vamos representar por x .

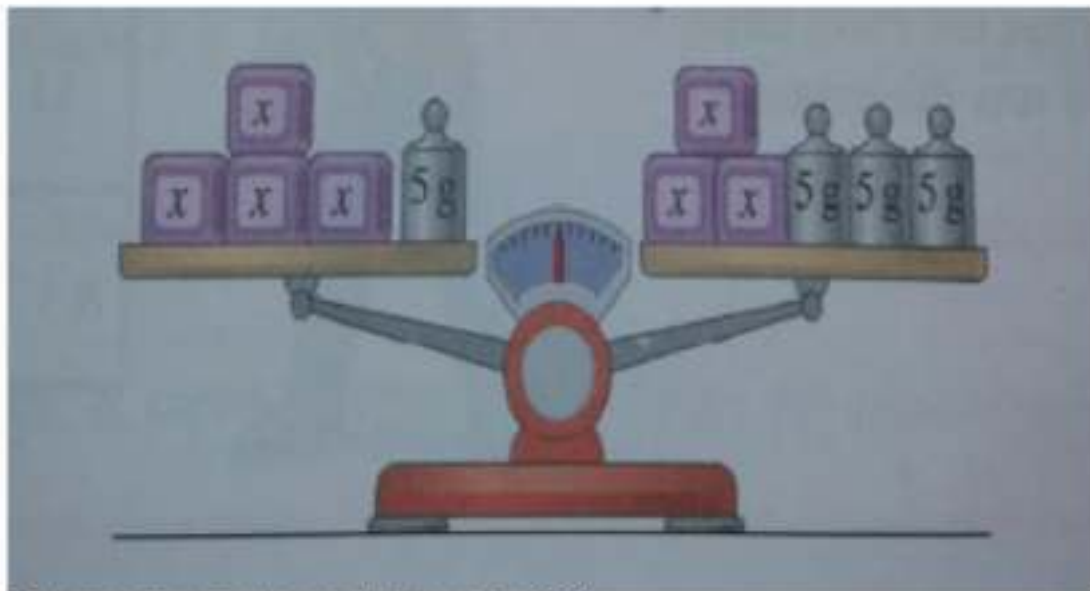


Fonte: Livro Projeto Telâris, 2015

Agora, determine uma expressão algébrica, em que denominamos de equação de 1º grau, que representa a situação ilustrada pela figura.

ATIVIDADE 4: RESOLVENDO EQUAÇÃO

O esquema a seguir mostra uma balança em equilíbrio.



Fonte: Livro componente curricular: Matemática, 2008.

- a) Determine a equação que a balança está representando.
- b) Determine a equação que a balança representa quando se retira de cada prato 3 cubos (valor x cada) e 1 peso (5 kg).
- c) Qual é a massa de cada cubo?

ATIVIDADE 5: DETERMINANDO ÁREA

Adaptada da dissertação de Brum, (2013).

A planta de uma casa, em que os cômodos têm a forma de retângulos, está ilustrada na figura e as dimensões dos cômodos estão indicadas na planta.



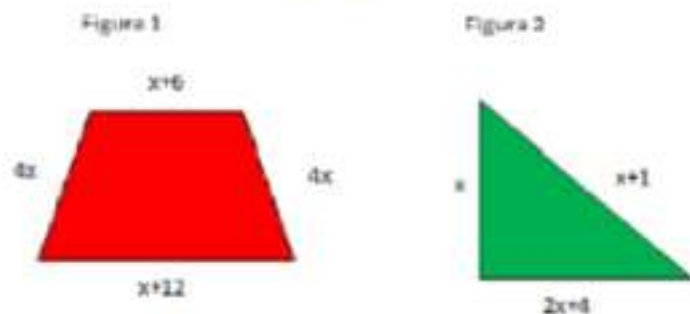
Determine as respostas das questões propostas.

- A área do quarto.
- A área da sala.
- A área do quarto e da cozinha juntos.
- A área total da casa.

ATIVIDADE 6: CALCULANDO PERÍMETRO

Adaptada da dissertação de Brum (2013).

Analise as medidas dos lados do trapézio e do triângulo abaixo.



- Determine o perímetro da figura 1 e da figura 2.
- Determine a soma entre o perímetro do trapézio e o perímetro do triângulo.

ATIVIDADE 7: EQUACIONANDO PROBLEMAS

O professor Paulo apresentou a seus alunos este problema:

Em um estacionamento, cobram-se R\$ 7,00 pela primeira hora e R\$ 1,50 a cada hora excedente. Se um cliente pagou R\$ 16,00, quanto tempo seu carro permaneceu nesse estacionamento?

Você deverá representar esse problema por meio de uma equação do 1º grau.

15. GUIMARÃES, D. S. de.. **Cenários para Investigação Matemática no Ensino Fundamental: Uma Experiência com Ensino Híbrido na Modalidade Rotação por Estações**. (Dissertação) – Universidade Federal do Pampa, Bagé - RS, 2019.

Página 109-156

Aula 1 – Cenário 1

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 1 – Assistir ao vídeo

Nome do Avaliado: _____

Nome do Avaliador: _____

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Acessar e assistir ao vídeo na íntegra, com atenção.	Não assistiu ao vídeo, pulou essa etapa.	Assistiu trechos do vídeo e foi para a próxima etapa.	Assistiu a maior parte do vídeo e foi para a próxima etapa.	Assistiu ao vídeo na íntegra para ir a próxima etapa.	
Discutir no grupo o que foi visto no vídeo, fazendo anotações.	Não argumentou em momento algum.	Argumentou, porém um assunto não relacionado ao vídeo.	Argumentou sobre o vídeo, mas por outro lado não soube ouvir seus colegas.	Argumentou e ouviu seus colegas, havendo realmente uma discussão no grupo.	
Responder a atividade proposta na estação: Cenário 1, de maneira clara e objetiva.	Não respondeu nenhuma das questões propostas.	Respondeu algumas e outras deixou em branco ou fugiu do assunto.	Respondeu a maioria das questões com coerência, porém em 50% das questões, fugiu do assunto.	Respondeu integralmente todas as questões.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 1 – Assistir ao vídeo

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel e todos deverão acessar ao vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=nJRvNCb0j9c&t=2s>, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar as falas de cada um para que todos tenham a oportunidade de falar e ouvir, organizar a avaliação e também fazer a escrita dessa discussão.

Técnico 1: Observar se o vídeo está funcionando corretamente, se tiver algum problema falar para o Líder, que por sua vez comunicará o professor.

Técnico 2: Observar se todos os fones de ouvido estão funcionando, se tiver algum problema falar para o Líder, que por sua vez comunicará o professor.

Secretário 1: Fará a escrita das questões 1 e 2.

Secretário 2: Fará a escrita das questões 3 e 4.

Se o grupo tiver 6 alunos este sexto estudante será secretário e esse deverá participar das escritas.

Estação: Cenário 1 – Assistir ao vídeo

Nome: _____

Vídeo: Para que serve a Fórmula de Bháskara?

Com base no vídeo, responda as seguintes questões:

1. Foi abordado no vídeo “Para que serve a Fórmula de Bháskara?” alguma informação que você aprendeu ao fazer sua pesquisa sobre Equações do 2º grau? Qual?
2. O vídeo mostra um exemplo da utilização das equações do 2º grau para o cálculo de área.
 - a) Você aprendeu sobre isso em sua pesquisa?
 - b) Mostre algum outro exemplo em que a equação do segundo grau possa ser usada para calcular área?
 - c) Em sua opinião, você aprendeu mais matemática com o vídeo?

Explique:

Aula 1 – Cenário 2

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 2 – **Análise livro didático**

Nome do Avaliado: _____

Nome do Avaliador: _____

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Analisar como é feita a abordagem de equações do 2º no livro didático.	Não realizou a análise ou apenas analisou uma pequena parte do material disponível.	Realizou a análise do material, porém não colaborou com demais colegas	Realizou a análise do material, mas contribuiu pouco com os demais colegas.	Realizou a análise e colaborou de forma efetiva com os demais colegas.	
Discutir no grupo o que foi analisado no material disponível.	Não argumentou em momento algum.	Argumentou, porém sobre assunto não relacionado ao material disponível.	Argumentou sobre o material, mas por outro lado não soube ouvir seus colegas.	Argumentou e ouviu seus colegas, havendo realmente uma discussão no grupo.	
Realizar uma síntese individual.	Não realizou a síntese.	Realizou a síntese, sem argumentos claros, fugindo do assunto.	Realizou a síntese, porém desconsiderou a discussão no grupo.	Realizou a síntese, com coerência, observou e considerou a discussão no grupo.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 2 – Análise livro didático

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar as falas de cada um para que todos tenham a oportunidade de falar e ouvir e organizar a avaliação.

Técnico 1: Organizar o material disponível para a leitura, assim cada integrante do grupo terá o seu material.

Técnico 2: Organizar e distribuir os blocos de anotações, para cada um fazer a sua síntese.

Secretário 1: Fará a escrita da discussão realizada no grupo.

Secretário 2: Fará a escrita da discussão realizada no grupo.

Se o grupo tiver 6 alunos este sexto estudante será secretário e esse deverá participar das escritas.

Obs.: Cada secretário fará uma parte da escrita.

Estação: Cenário 2 – **Análise livro didático**

Análise no livro didático do capítulo: Equações do 2º grau.



Após a análise do capítulo, devem fazer uma síntese individual, escrevendo sua opinião em relação ao conteúdo exposto no livro, argumentando se gostou e escrever os motivos, ou se não gostou e também escrever o que não lhe agradou ou faltou.

Equações do 2º grau

1. Equações

Você já sabe como as equações são úteis na representação e resolução de problemas.

Então, acompanhe a situação a seguir.

Na loja ao lado, um kinperente com duas bermudas e três camisas custa o mesmo que um kit presente com uma bermuda e duas camisas.

Qual é o preço de uma bermuda?

Com um colega, tentem resolver o problema antes de prosseguir com a leitura. A seguir, leia a resolução que apresentamos. Observe que ela utiliza a álgebra.

Representaremos o preço da bermuda por x .

Dois bermudas e três camisas custam $2x + 48$.

Uma bermuda e duas camisas custam $x + 70$.

Como os preços dos kits são iguais, temos que:

$$2x + 48 = x + 70$$

Subtraindo x de ambos os membros da equação:

$$2x + 48 - x = x + 70 - x$$

$$x + 48 = 70$$

$$x = 70 - 48$$

$$x = 22$$

A bermuda custa R\$ 22,00.



Comentei uma equação no exemplo e para representar a situação, também utilizei a equação para encontrar o valor de x , que é o preço da bermuda.



Para verificar se a solução está correta, substituímos x por 22 na equação $2x + 48 = x + 70$.

$$2 \cdot 22 + 48 = 22 + 70 \quad \longrightarrow \quad 44 + 48 = 22 + 70$$

$92 = 92$ igualdade verdadeira!

Logo, 22 é a solução da equação.

Graus de uma equação

A equação $2x + 40 = x + 70$, que acabamos de resolver, é uma equação do 1º grau, pois o maior expoente de x é 1.

As equações podem ser classificadas de acordo com o maior expoente da equação. Na equação do 2º grau, o maior expoente da incógnita é 2.

$$\begin{array}{l} 3x^2 + 7x - 6 = 0 \\ 3x^2 - 25 = 0 \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \\ 6 - 10x - x^2 - 4x^2 - 2x = 0 \end{array} \longrightarrow \text{São exemplos de equações do 2º grau.}$$

Na equação do 3º grau, o grau é 3.

Por exemplo, a soma do maior expoente da incógnita e na equação $3x + x^2 + 3x^3 = 5x + 8$, temos, esta equação é do 3º grau.

As equações quadráticas são equações do 2º grau. Basta lembrar, resolvendo equações do 2º grau.

Exercícios

1. As equações são equações de 1º grau ou de 2º grau?

$$\begin{array}{l} \text{a) } x^2 - 5x + 6 = 0 \\ \text{b) } 2x - 7 = 0 \\ \text{c) } 3x^2 - 4x = 10 \\ \text{d) } 6x^2 - x + 5 = 0 \\ \text{e) } 2x + 4 = 30 \\ \text{f) } 4x^2 + 3 = 5x \\ \text{g) } 5x^2 - 25 = 0 \\ \text{h) } 6x + 3 = 5 \end{array}$$

Responda as questões.

- Quais são equações do 1º grau?
- Quais são equações do 2º grau?
- Quais são equações do 3º grau?
- Quais são equações do 4º grau?

2. Se a equação $x^2 + 3x + 5 = 0$ é do 2º grau?

3. Considere a equação do 2º grau.

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

- 1 é solução desta equação?
- 2 é solução desta equação?
- 3 é solução desta equação?
- 4 é solução desta equação?

4. Se a equação acima, consideramos o mesmo modo que podemos ser resolvida no lugar de 100. Quais são eles?

$$100x + 300 = 0$$

2. Resolvendo equações do 2º grau

Verificamos que resolvemos equações do 2º grau. Agora vamos resolver equações do 2º grau.

1. Uma equação do 2º grau.



Para resolver uma equação quadrática, devemos utilizar o discriminante Δ e a fórmula de Bhaskara.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Na equação $x^2 + 3x - 10 = 0$, temos $a = 1$, $b = 3$ e $c = -10$.

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)$$

$$\Delta = 9 + 40 = 49$$

$$\Delta = 7^2$$

$$\Delta = 7$$

$$\Delta = -7$$

$$\Delta = 0$$

$$\Delta = 1$$

$$\Delta = 4$$

$$\Delta = 9$$

$$\Delta = 16$$

$$\Delta = 25$$

$$\Delta = 36$$

$$\Delta = 49$$

$$\Delta = 64$$

$$\Delta = 81$$

$$\Delta = 100$$

$$\Delta = 121$$

$$\Delta = 144$$

$$\Delta = 169$$

$$\Delta = 196$$

$$\Delta = 225$$

$$\Delta = 256$$

$$\Delta = 289$$

$$\Delta = 324$$

$$\Delta = 361$$

$$\Delta = 400$$

$$\Delta = 441$$

$$\Delta = 484$$

$$\Delta = 529$$

$$\Delta = 576$$

$$\Delta = 625$$

$$\Delta = 676$$

$$\Delta = 729$$

$$\Delta = 784$$

$$\Delta = 841$$

$$\Delta = 900$$

2. Numa terreno quadrado foi construído uma casa que ocupa a área de um octógono de medida 8 m por 8 m. Na planta, a medida do lado do terreno está legível, mas não se quer a área dele ($A_{\text{terreno}} = A_{\text{casa}} + A_{\text{de}} 320 \text{ m}^2$).



Quanto mede o lado do terreno?

A área do terreno é $A_{\text{terreno}} = 8 \cdot 10 = 80 \text{ m}^2$.

O terreno é quadrado. Representando por x a medida do seu lado

$$\begin{aligned} A_{\text{terreno}} &= x^2 \\ \text{Como } A_{\text{terreno}} - A_{\text{casa}} &= 320 \text{ m}^2, \text{ temos:} \\ x^2 - 80 &= 320 \\ x^2 &= 320 + 80 \\ x^2 &= 400 \\ x &= \sqrt{400} \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Resposta: 20 m. Logo, a medida do lado do seu terreno está perto de 20 m. Certo, o lado do terreno mede 20 m.

Existem leis matemáticas que regulamentam a ocupação dos terrenos, principalmente em terrenos urbanos e rurais. Por exemplo, a área construída deve ser igual ou menor que a porcentagem da área total do terreno.

No exemplo, a área construída sempre que percentagem da área total do terreno? A área total do terreno é $A = 10^2 = 100 \text{ m}^2$. Para responder a pergunta, precisamos descobrir que percentagem do terreno é ocupada pelo terreno. Como o terreno é 80 m por 80 m, temos:

$$\frac{80}{100} = \frac{80}{100} = 80\%$$

A casa ocupa 80% da área total do terreno.

3. Em um terreno retangular que mede 10 m por 10 m, construído um terreno retangular. A área do terreno retangular é 10 m por 10 m. A área do terreno retangular é 10 m por 10 m.

Resposta: 10 m por 10 m. A área do terreno retangular é 10 m por 10 m.

$$x^2 + 10 = 10$$

Para que obtenhamos $x^2 + 10 = 10$, precisamos ter $x^2 = 0$, que só ocorre quando $x = 0$. Portanto, a área do terreno retangular é 0 m por 0 m.

Resposta: 0 m por 0 m. A área do terreno retangular é 0 m por 0 m.

4. Veja outra situação:



Então, vamos usar equações? No exemplo $x^2 + 10 = 10$, podemos subtrair 10 de ambos os membros:

$$\begin{aligned} x^2 + 10 - 10 &= 10 - 10 \\ x^2 &= 0 \\ x &= \sqrt{0} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Em seguida, fazemos $x^2 = 10$, obtendo $x = \sqrt{10}$ e $x = -\sqrt{10}$.



Resolva, se $x(x - 2) = 0$, devemos ter:

$$x = 0 \text{ ou } x - 2 = 0, \text{ isto é, } x = 2$$

O número procurado pode ser zero ou dois.

Eu pensei numa solução e não sei se está correta, se um número negativo com uma potência de três não é diferente de zero, é porque o quadrado de um número é sempre positivo.



Dei, pensei em 2, porque o quadrado de 2 é igual ao seu dobro, 4. Fiquei ali um tempo.



5. Os retângulos ilustrados abaixo têm a mesma área.

Com essa informação, podemos usar-se a resolver uma equação e determinar as medidas dos lados de cada retângulo. Acompanhe.

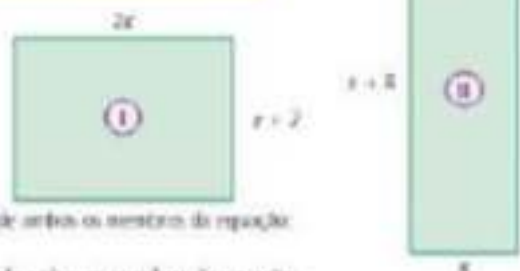
• Área do retângulo I
 $A_1 = 2x(x + 2) = 2x^2 + 4x$

As medidas estão em centímetros.

• Área do retângulo II
 $A_2 = x(x + 8) = x^2 + 8x$

Como $A_1 = A_2$, temos:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x &= x^2 + 8x && \text{Substituímos } x^2 \text{ de ambos os membros da equação;} \\ 2x^2 + 4x - x^2 &= x^2 + 8x - x^2 && \\ x^2 + 4x &= 8x && \text{Substituímos } 8x \text{ de ambos os membros da equação;} \\ x^2 + 4x - 8x &= 8x - 8x && \\ x^2 - 4x &= 0 && \text{Colocamos } x \text{ em evidência no primeiro membro da equação;} \\ x(x - 4) &= 0 && \\ \text{Para que o produto } x(x - 4) &\text{ seja igual a zero, devemos ter:} && \\ x = 0 &\text{ ou } && \\ x - 4 = 0 &\text{ ou } x = 4 && \\ \text{A solução } x = 0 &\text{ não serve, pois os retângulos não existem.} && \\ \text{Então } x = 4 \text{ cm.} &&& \end{aligned}$$



Após 8 com você, sabendo que $x = 4$ cm, determine as medidas dos lados de cada retângulo.

Aula 1 – Cenário 3

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 3 - Escrita coletiva

Integrantes do grupo: _____

Nome do Avaliador: _____

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Reflexão em grupo (roda de conversa) sobre as pesquisas realizadas previamente.	O grupo não soube relatar suas pesquisas.	O grupo relatou alguns pontos das pesquisas, porém outros, não souberam explicar.	O grupo relatou como foram feitas suas pesquisas, porém nem todos participaram do relato.	O grupo relatou com coerência e dinamismo suas pesquisas.	
Reflexão crítica e trabalho colaborativo no grupo.	O grupo não realizou um trabalho reflexivo e colaborativo.	O grupo argumentou criticamente em alguns pontos da atividade, porém não houve colaboração entre todos os participantes.	O grupo argumentou criticamente sobre a atividade, mas por outro lado, não soube ouvir os colegas, atropelando as falas dos colegas.	O grupo argumentou criticamente sobre a atividade e desenvolveu um trabalho colaborativo e democrático na discussão realizada.	
Escrita coletiva com embasamento nas pesquisas prévias, referentes a equações do 2º grau.	Não participou da escrita coletiva.	Participou da escrita coletiva, porém em alguns pontos faltou embasamento, pois fugiu do assunto.	A escrita coletiva foi realizada com coerência e argumentação adequada, porém não foi realizada por todos.	A escrita coletiva foi realizada por todos, com coerência e argumentação crítica e pensamento matemático adequado.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 3 - Escrita coletiva

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar as falas de cada um para que todos tenham a oportunidade de falar e ouvir, organizar a avaliação e também fazer a escrita dessa discussão.

Técnico 1: Organizar quem irá escrever essa escrita coletiva, podendo ser mais de um.

Técnico 2: Orientar que a escrita deve ser realizada por todos, mesmo que só um faça o papel de transcrever o pensamento do outro.

Secretário 1: Ler a escrita em voz alta para que o grupo ouça novamente e faça possíveis correções.

Secretário 2: Anotar todas as correções que serão feitas durante a leitura pelo colega anterior, assim terminada a leitura, fazer os ajustes, determinados.

Se o grupo tiver 6 alunos este sexto estudante será secretário e esse deverá participar das duas funções estabelecidas anteriormente, leitura ou correção da escrita coletiva.

Estação: Cenário 3 - Escrita coletiva

Integrantes do grupo: _____

Produção da escrita coletiva sobre Equações do 2º grau, com embasamento em sua pesquisa.

Os alunos tiveram um espaço para escrever.

Aula 1 – Cenário 4

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 4 – Resolução de problemas

Nome do Avaliado: _____

Nome do Avaliador: _____

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Ler e interpretar as atividades propostas.	Não realizou as atividades propostas.	Realizou parcialmente as atividades propostas.	Realizou as atividades propostas, porém não demonstrou colaboração com demais colegas.	Realizou as atividades propostas, colaborando com colegas que necessitaram de ajuda.	
Haja discussão dos resultados obtidos.	Não demonstrou interesse durante a atividade.	Resolveu e não se preocupou com resultados, apenas fez.	Resolveu e conferiu seus resultados, havendo divergência, apenas arrumou o seu.	Resolveu, refletiu os resultados, mostrou aos colegas com argumentos, como fazer corretamente.	
Manter uma postura crítica na resolução dos problemas propostos.	Não questionou, ou não realizou as atividades propostas.	Realizou as atividades sem questionar tais resultados.	Realizou as atividades, questionou parcialmente os resultados.	Realizou as atividades, mantendo uma postura crítica sempre, e levando seus colegas a construir esse pensamento crítico.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 4 – Resolução de problemas

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar a resolução dos problemas entregando os materiais a seus colegas do grupo, organizar a avaliação.

Técnico 1: Fazer a leitura do primeiro problema.

Técnico 2: Fazer a leitura do segundo problema.

Secretário 1: Ficar atento às dúvidas que surgirem no grupo, podendo solicitar a presença da professora na estação.

Secretário 2: Ficar atento às dúvidas que surgirem no grupo, podendo solicitar a presença da professora na estação.

Se o grupo tiver 6 alunos este sexto estudante será secretário e esse deverá participar das duas funções estabelecidas anteriormente, assim havendo uma terceira rodada ele anotará o resultado.

Cenário 4 – Resolução de problemas

Nome: _____

1 Qual é o principal objetivo do texto da página ao lado?

- Alertar sobre o perigo de dirigir em estradas sinuosas.
- Ensinar como determinar a distância que um carro, andando a certa velocidade, percorre depois de acionar o freio.
- Alertar sobre o perigo de deixar animais circularem nas rodovias.

2 Responda às questões de acordo com o texto.

- Qual é o perigo de dirigir em alta velocidade em estradas cheias de curvas?
- O comprimento das marcas de pneu corresponde à distância total percorrida pelo carro depois de avistado o obstáculo? Explique sua resposta.
- Como Said Essa pôde provar matematicamente que o motorista mentiu ao declarar que dirigia a 50 km/h no momento do acidente?
- Se o motorista estivesse dirigindo realmente a 50 km/h, qual seria o comprimento das marcas do pneu deixadas por seu carro?
- Alfinat, a que velocidade vinha o motorista?



3 Um automóvel percorre maior distância no intervalo de tempo entre a visão do obstáculo e o acionamento do freio ou depois do acionamento do freio? Teste algumas velocidades na fórmula dada no texto. Depois, troque informações com seus colegas e explique suas conclusões.

4 Resolva aplicando a fórmula dada no texto.



Um motorista vem dirigindo por uma rua quando percebe, cerca de 20 metros adiante, que o semáforo ficou com o sinal vermelho.

Para que consiga frear antes de chegar ao semáforo, o motorista deve estar dirigindo a qual velocidade máxima? Se necessário, use uma calculadora.

5 Reflita e responda às questões.

- Apesar de a velocidade do automóvel ser o fator mais importante, há outros fatores que interferem na distância percorrida em situações de freadas bruscas. Quais?
- Em sua opinião, as ruas de sua cidade ou as estradas circunvizinhas apresentam problemas que podem prejudicar a atuação do motorista em uma situação de frenada brusca? Quais?
- Além de trafegar em velocidade segura, que outras precauções o motorista pode tomar para evitar acidentes?

6 Você acha que os limites de velocidade estabelecidos para o trânsito de automóveis em ruas e estradas da região onde mora são demasiadamente baixos, apenas seguros ou muito altos? Justifique sua opinião.

Aula 2 – Cenário 1

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 1 – Lapbook: Onde encontro equações do segundo grau?

Integrantes do Grupo: _____

Nome do Avaliador: _____

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Trabalho em equipe.	Não trabalhou em equipe.	Colaborou pouco para o trabalho em equipe.	Houve trabalho em equipe, porém foi autoritário impondo decisões ao grupo.	Trabalhou em equipe, colaborou de forma ativa com seus colegas.	
Idealização e confecção do lapbook.	Não idealizou, nem confeccionou o lapbook.	Só idealizou ou só confeccionou o lapbook.	Idealizou pouco, porém confeccionou, ou idealizou, porém confeccionou pouco.	Idealizou e confeccionou plenamente o lapbook.	
Coerência e organização visual adequada no lapbook.	Não houve coerência e nem organização visual adequada.	Houve coerência, porém a organização visual foi adequada, ou vice-versa.	Houve coerência e boa organização visual na elaboração do lapbook, porém o grupo estava disperso.	Houve coerência e ótima organização visual na elaboração do lapbook.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 1 – Lapbook: Onde encontro equações do segundo grau?

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar as falas de cada um para que todos tenham a oportunidade de falar e ouvir, fazer a escrita no lapbook, caso haja, e organizar a avaliação.

Técnico 1: Selecionar o material para ser recortado e colaborar nas etapas de organização visual e colagem.

Técnico 2: Selecionar o material para ser recortado e colaborar nas etapas de organização visual e colagem.

Secretário 1: Organizar visualmente o lapbook para a etapa de colagem.

Secretário 2: Colar o material no lapbook.

Se o grupo tiver 6 alunos este sexto estudante será secretário e esse deverá participar da montagem do lapbook.

Aula 2 – Cenário 2

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 2 – Tipos de Equações do segundo grau.

Integrantes do grupo: _____

Nome do Avaliador: _____

(continua)

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Realizar a pesquisa online no smartphone, de maneira coerente.	Não realizou a pesquisa online no smartphone.	Realizou a pesquisa online no smartphone, porém não colaborou com demais colegas	Realizou a pesquisa online no smartphone, mas contribuiu pouco com os demais colegas.	Realizou a pesquisa online no smartphone e colaborou de forma efetiva com demais colegas.	
Discutir no grupo o que foi pesquisado online no smartphone.	Não argumentou em momento algum.	Argumentou, porém sobre assunto não relacionado à pesquisa em questão.	Argumentou sobre a pesquisa, mas por outro lado não soube ouvir seus colegas.	Argumentou e ouviu seus colegas, havendo realmente uma discussão no grupo.	

Fonte: Autora (2019)

(conclusão)

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Conduzir a tarefa com a construção de uma tabela com os tipos de equações.	Não realizou a tarefa.	Realizou a tarefa, porém não se envolveu em todas as etapas.	Realizou a tarefa, porém agiu de forma autoritária impondo suas decisões sem ouvir aos demais.	Realizou a tarefa de forma colaborativa, propôs ideias, observou e considerou a discussão coletiva.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 2 – Tipos de equações do segundo grau.

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar as falas de cada um para que todos tenham a oportunidade de falar e ouvir e organizar a avaliação.

Técnico 1: Verificar se todos estão pesquisando em seus smartphones.

Técnico 2: Qualquer problema que ocorra com a pesquisa comunicar a professora.

Secretário 1: Fará a construção da tabela com o auxílio dos demais.

Secretário 2: Fará a construção da tabela com o auxílio dos demais.

Se o grupo tiver 6 alunos este sexto estudante será secretário e esse deverá participar das escritas. Obs.: Cada secretário fará uma parte da escrita.

Estação: Cenário 2 – Tipos de equações do segundo grau.

Após fazer a pesquisa online no smartphone, o grupo deverá construir uma tabela que mostre os diferentes tipos de equações do segundo grau e suas particularidades.

Tipo de equação do 2º grau	Particularidades	Observações

Fonte: Autora (2019)

Observação: Utilizar toda ou parcialmente a tabela já exposta, e caso necessário, poderá ser acrescentada mais linhas.

Aula 2 – Cenário 3

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 3 – Jogo - CORRIDA: Perfil das Equações.

Nome do Avaliado: _____

Nome do Avaliador: _____

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Participar ativamente durante a atividade.	Recusou-se a participar.	Participou em alguns momentos da atividade.	Participou ativamente na atividade, porém recusou-se de mudar sua posição durante o jogo.	Participou ativamente na atividade, demonstrou espírito esportivo.	
Entendimento das regras do jogo.	Demonstrou muita dificuldade com as regras.	Demonstrou alguma dificuldade com as regras do jogo.	Demonstrou reconhecer as regras do jogo.	Demonstrou reconhecer as regras do jogo e ter disponibilidade para explicar aos seus colegas.	
Integração de cada estudante no grupo.	Demonstrou nenhum interesse em interagir com o grupo.	Demonstrou pouco interesse em interagir no grupo.	Interagiu na maior parte do tempo com o grupo.	Interagiu ativamente no grupo, colaborando para a participação de todos.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 3 – Jogo - CORRIDA: Perfil das Equações.

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar o jogo e irá ler as fichas para que os demais joguem.

Técnico 1: Ler as instruções do jogo.

Técnico 2: Irá distribuir aos jogadores os pinos, para percorrerem no tabuleiro.

Secretario 1: Anotar o resultado da primeira rodada.

Secretario 2: Anotar o resultado da segunda rodada.

Se o grupo tiver 6 alunos este sexto estudante será secretário e esse deverá participar das duas funções estabelecidas anteriormente, assim havendo uma terceira rodada ele anotará o resultado.

Como jogar:

O Líder irá ler as dicas das fichas, os demais serão os jogadores.

Cada jogador na sua vez diz um número de 1 a 12, correspondente as fichas, o líder lê a dica e todos anotam, para descobrirem a equação em questão.

O jogador que acertar a Equação do 2º grau deverá andar 5 (cinco) casas no tabuleiro. Vence o jogador que chegar primeiro ao fim do caminho desenhado no tabuleiro.

Terminada a rodada, inicia-se novamente, agora o jogador que ganhou a rodada passa a ler as fichas, e os demais participam como jogadores.

Estação: Cenário 3 - Jogo: Perfil das Equações do 2º grau.

Integrantes do grupo: _____

Resultado das partidas e observações, críticas referentes ao jogo:

Os estudantes tinham um espaço para fazer tais anotações.

Aula 3 – Cenário 1

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 1 – Pesquisa online sobre os três tipos de resolução de uma Equação do 2º grau.

Nome do Avaliado: _____

Nome do Avaliador: _____

Fonte: Autora (2019)

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Realizar a pesquisa online proposta.	Não realizou a pesquisa.	Realizou parcialmente a pesquisa, não completou a tarefa.	Realizou a pesquisa sobre os três tipos de resolução, porém não colaborou com os colegas na tarefa.	Realizou a pesquisa de forma completa e colaborativa, demonstrando disponibilidade a ajudar seus colegas no entendimento dos métodos pesquisados.	
Argumentar claramente sobre a sua escolha na atividade proposta.	Não realizou a escolha.	Realizou a escolha de uma equação e de um método para resolvê-la, porém não argumentou sobre de forma coerente sobre sua escolha.	Realizou a escolha de uma equação e de um método para resolvê-la, porém sua argumentação não foi clara, indicando limitações pela pesquisa realizada.	Realizou a escolha de uma equação e de um método para resolvê-la e argumentou claramente sobre os motivos de sua escolha.	
Realizar a resolução da equação do 2º grau proposta na caixa.	Não realizou a resolução da equação do 2º grau proposta.	Realizou a resolução da equação do 2º grau proposta, porém não plenamente.	Realizou a resolução da equação do 2º grau proposta, porém, não colaborou com seus colegas que tiveram dúvidas nessa tarefa.	Realizou a resolução da equação do 2º grau proposta, colaborou com seus colegas para a compreensão de todas as etapas da resolução.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 1 – Pesquisa online sobre os três tipos de resolução de uma Equação do 2º grau.

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel e todos deverão acessar os links <https://www.todamateria.com.br/soma-e-produto/>, <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/metodo-completar-quadrados.htm> e <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/formula-bhaskara.htm>. Sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar as falas de cada um para que todos tenham a oportunidade de falar e ouvir, manter seu smartphone gravando em áudio toda a discussão da estação e no fim enviar o áudio a professora e organizar a avaliação.

Técnico 1: Observar os colegas verificando se conseguiram acessar os links corretamente, se tiver algum problema falar para o Líder, que por sua vez comunicará a professora.

Técnico 2: Observar os colegas verificando se conseguiram acessar os links corretamente, se tiver algum problema falar para o Líder, que por sua vez comunicará a professora.

Secretário 1: Distribuir o material a cada colega do grupo.

Secretário 2: Distribuir o material a cada colega do grupo.

Se o grupo tiver 6 alunos esse sexto aluno será **secretário** e deverá participar das atividades estabelecidas aos secretários.

Estação: Cenário 1 – Pesquisar sobre os métodos de resolução “fórmula resolutiva – fórmula Bhaskara”, “Soma e Produto” e “Completando o quadrado perfeito”. Depois de realizar a pesquisa, deverão escolher um dos métodos e resolver uma equação da caixa.

Nome: _____

Descrever um dos três tipos estudado na pesquisa, argumentado sua escolha, se foi por que gostou achou interessante ou se a escolha foi a que achou mais difícil de compreender o seu uso. Qualquer que seja a sua escolha escreva sobre ela.

Escolher uma equação, da caixa com equações na estação/cenário 1 e fazer a sua resolução, pelo método que preferir.

Aula 3 – Cenário 2

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 2 – Solução de uma Equação do 2º grau por meio de fichas.

Nome do Avaliado: _____

Nome do Avaliador: _____

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Analisar como é feita a solução de equações do 2º com o auxílio das fichas.	Não realizou a análise do material disponível.	Realizou a análise de forma parcial, ou seja, apenas analisou uma parte do material disponível.	Realizou a análise do material, mas contribuiu pouco com para o entendimento coletivo de como é utilizado o método das fichas.	Realizou a análise total do material e colaborou de forma efetiva com demais colegas no entendimento do método das fichas.	
Discutir no grupo o que foi analisado no material disponível.	Não argumentou em momento algum.	Argumentou, porém sobre assunto não relacionado ao material disponível.	Argumentou sobre o material, mas por outro lado, não soube ouvir seus colegas, apenas impôs suas ideias.	Argumentou e ouviu seus colegas, havendo realmente uma discussão colaborativa no grupo.	
Realizar a tarefa proposta.	Não realizou a tarefa proposta.	Realizou a tarefa proposta, sem argumentos claros, fugindo do assunto.	Realizou a tarefa proposta, porém desconsiderou a discussão no grupo.	Realizou a tarefa proposta, com coerência, observou e considerou a discussão no grupo.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 2 – Solução de uma Equação do 2º grau por meio de fichas.

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar as falas de cada um para que todos tenham a oportunidade de falar e ouvir, manter seu smartphone gravando em áudio toda a discussão da estação e no fim enviar o áudio a professora e organizar a avaliação.

Técnico 1: Organizar o material disponível para a leitura e análise.

Técnico 2: Organizar e distribuir os blocos de anotações, para cada um fazer a sua tarefa.

Secretário 1: Deverá fiscalizar se todos fizeram a foto da sua solução com as fichas.

Secretário 2: Deverá fiscalizar se todos fizeram a foto da sua solução com as fichas.

Se o grupo tiver 8 alunos este sexto estudante será secretário e esse deverá participar das escritas. Obs.: Cada secretário fará uma parte da escrita.

Cenário 2 – Solução de uma Equação do 2º grau por meio de fichas.

Nome: _____

Dada as equações abaixo, resolver utilizando as fichas disponíveis na estação 2, e fotografar sua solução, após enviar a professora a foto.

a) $x^2 + 5x + 4 = 0$

b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

Modelo das fichas, disponíveis para a realização da atividade:



Aula 3 – Cenário 2

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 3 – Análise de um poema matemático: "Carta de amor em Equações do 2º grau."

Integrantes do grupo: _____

Nome do Avaliador: _____

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Ler com atenção o poema.	O grupo não realizou a leitura do poema.	No grupo a leitura do poema foi realizada, porém só por um ou dois integrantes.	No grupo a leitura do poema foi realizada pela maioria dos integrantes.	Todo o grupo realizou a leitura do poema com muita atenção.	
Reflexão crítica e trabalho colaborativo no grupo.	O grupo não realizou um trabalho reflexivo e colaborativo.	O grupo argumentou criticamente sobre alguns pontos do poema, porém não houve colaboração entre todos os participantes.	O grupo argumentou criticamente sobre os principais pontos do poema, mas houve integrante que não soube ouvir os colegas, atropelando e impondo suas ideias.	O grupo argumentou criticamente sobre os principais pontos do poema e demonstrou envolvimento de todos em um trabalho colaborativo e democrático na discussão realizada.	
Escrita coletiva com embasamento nas pesquisas prévias e nas fichas com informações conceituais da estação.	Não participou da escrita coletiva.	Participou da escrita coletiva, porém em alguns pontos faltou embasamento, pois fugiu do assunto.	A escrita coletiva foi realizada com coerência e argumentação adequada, porém não foi realizada por todos.	A escrita coletiva foi realizada por todos, com coerência e argumentação crítica e pensamento matemático adequado.	

Fonte: Autora (2019)

Estação: Cenário 3 - Análise de um poema matemático: "Carta de amor em Equações do 2º grau."

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar as falas de cada um para que todos tenham a oportunidade de falar e ouvir, manter seu smartphone gravando em áudio toda a discussão da estação e no fim enviar o áudio para a professora e organizar a avaliação.

Técnico 1: Organizar quem irá escrever essa escrita coletiva, podendo ser mais de um.

Técnico 2: Orientar que a escrita deve ser realizada por todos, mesmo que só um faça o papel de transcrever o pensamento do outro.

Secretário 1: Ler a escrita em voz alta para que o grupo ouça novamente e faça possíveis correções.

Secretário 2: Anotar todas as correções que serão feitas durante a leitura pelo colega anterior, assim terminada a leitura fazer os ajustes, determinados.

Se o grupo tiver 6 alunos esse sexto aluno será secretário e deverá participar das duas funções estabelecidas anteriormente, leitura ou correção da escrita coletiva.

Estação: Cenário 3 - Análise de um poema matemático: "Carta de amor em Equações do 2º grau."

Integrantes do grupo: _____

Carta de amor em Equações do 2º grau

Queria conseguir amar em ax^2 , em dobro, mas meu coração não consegue amar duas pessoas igualmente.

Queria que o bx se transformasse em um beijo secreto; se meu coração conseguisse ser independente como o termo c , talvez não sofresse tanto.

E que cada vez que eu te visse, o tempo tomasse uma fração de segundos intermináveis e seu denominador indivisível, não se acabasse, se transformasse uma dízima periódica.

Meu coração é como uma equação incompleta, sempre faltando um termo, você! Até o resultado é igual. Tudo o que faço resulta em zero. Você sabe que a raiz desse amor sempre se multiplicará, e somará, mesmo sem ser um termo independente como o c . Vai ser sempre o primeiro como o termo ax^2 , e sempre, um sonho resolvido, em termo bx , o beijo secreto.

Bianca Dias

Agora é com vocês:

Produção da escrita coletiva sobre a validade matemática contida no poema, "Carta de amor em equações do 2º grau.", fazer uma escrita crítica, observando se as referências feitas à matemática no poema são coerentes com os conceitos já estudados por vocês. Quais? Como? Porquê? Tais argumentos devem aparecer na escrita, caso você desconsidere a validade matemática do poema, também argumente essa sua opinião.

Aula 4 – Cenário 1

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 1 – Construir uma "História em quadrinhos", para representar o desenvolvimento das Equações do 2º e seus efeitos em uma civilização antiga.

Nome do grupo: _____

Nome do Avaliador: _____

(continua)

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Trabalho em grupo.	O grupo não realizou sua tarefa.	A tarefa foi parcialmente realizada, porém não contou com a participação de todos os componentes do grupo na sua realização.	A tarefa foi concluída, porém não contou com a participação de todos os componentes do grupo na sua realização.	O grupo realizou a tarefa integralmente com a participação e colaboração de todos.	
Idealização e organização visual do trabalho.	Não idealizou nem organizou o trabalho.	Fugiu ao foco, idealizando e organizando a tarefa sobre um assunto não relacionado ao trabalho.	Manteve o foco na tarefa, idealizando e organizando sobre um assunto relacionado ao trabalho, porém não completou a atividade.	Manteve o foco na tarefa, idealizando e organizando sobre um assunto relacionado ao trabalho e completou a atividade.	

Fonte: Autora (2019)

(conclusão)

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Coerência na história em quadrinhos, havendo nela início, meio e fim.	o grupo não elaborou uma história em quadrinhos coerente com o solicitado.	O grupo elaborou a HQ, porém mencionou apenas o desenvolvimento das equações, sem se referir a uma civilização antiga, ou vice-versa.	O grupo elaborou a HQ apresentando os pontos solicitados, porém sem articular o desenvolvimento das equações e a civilização antiga.	O grupo elaborou a HQ e mostrou articulação entre o desenvolvimento das equações e uma civilização antiga.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 1 – Construir uma “História em quadrinhos”, para representar o desenvolvimento das Equações do 2º grau e seus efeitos em uma civilização antiga.

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar as falas de cada um para que todos tenham a oportunidade de falar e ouvir, sortear uma civilização antiga na caixa que estará na estação e organizar a avaliação.

Técnico 1: Gravar em áudio o desenvolvimento da aula, logo após enviar o áudio para a professora.

Técnico 2: Organizar o material necessário para a construção da história em quadrinhos.

Secretário 1: Ajudar durante todo o processo de construção da HQ.

Secretário 2: Ajudar durante todo o processo de construção da HQ.

Se o grupo tiver 6 alunos esse sexto aluno será secretário e deverá participar da construção da HQ.

Aula 4 – Cenário 2

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 2 – Entrevistando o colega.

Nome do Avaliador: _____

Nome do Entrevistado: _____

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Desenvolvimento e postura do entrevistado durante a entrevista.	O entrevistado não demonstrou postura adequada e não respondeu às questões do entrevistador.	O entrevistado manteve uma postura adequada, porém não respondeu às questões do entrevistador.	O entrevistado manteve uma postura adequada, mas contribuiu pouco, pois não argumentou em suas respostas, resumindo-se a porque sim, ou porque não.	O entrevistado manteve uma postura adequada, respondeu às questões do entrevistador, argumentando de forma reflexiva em suas respostas.	
Desenvolvimento e postura do entrevistador durante a entrevista.	O entrevistador não demonstrou postura adequada e não conduziu a entrevista.	O entrevistador mostrou uma postura adequada, porém não fez todas as questões ao entrevistado.	O entrevistador manteve uma postura adequada, mas contribuiu pouco para o bom andamento da entrevista, aceitando sem questionar as respostas do tipo porque sim, ou porque não.	O entrevistador manteve uma postura adequada, fez todas as questões ao entrevistado, e contribuiu para uma resposta reflexiva do entrevistado.	

Fonte: Autora (2013)

Cenário 2 – Entrevistando o colega.

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar as falas de cada um para que todos tenham a oportunidade de falar e ouvir e organizar a avaliação.

Técnico 1: Verificar se todos estão equipados com seus smartphones para gravar sua entrevista.

Técnico 2: Verificar se todos estão equipados com seus smartphones para gravar sua entrevista.

Secretário 1: Qualquer problema dentro da estação comunicar a professora.

Secretário 2: Qualquer problema dentro da estação comunicar a professora.

Se o grupo tiver 6 alunos esse sexto aluno será secretário e deverá desempenhar o mesmo papel do secretário 1 e 2.

Cenário 2 – Entrevistando o colega.

Como funcionará a entrevista:

Cada aluno do grupo entrevista o colega com o auxílio do smartphone para gravar, após quem entrevistou passa a ser entrevistado, mudando de dupla, por exemplo, Joana entrevistou Charles, então Charles não pode entrevistar Joana.

Quando começar a entrevista se apresente e apresente o entrevistado.

Perguntas:

Já estudamos as Equações do 2º grau de várias formas e algumas de suas aplicações. Você se surpreendeu com algum conhecimento novo durante suas pesquisas ou nas atividades em sala de aula? Comente sobre tal experiência.

Matemática é vida e se faz extremamente importante no nosso dia a dia. Fale um pouco como você entende a importância de estudar e conhecer as Equações do 2º grau para a vida.

Aula 4 – Cenário 3

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 3 – Atividade com o auxílio do aplicativo Photomath.

Nome do Avaliado: _____

Nome do Avaliador: _____

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Resolver uma equação do 2º grau usando o Photomath e transcrever para o bloco de anotações.	O estudante não realizou a tarefa.	O estudante resolveu parcialmente a equação no Photomath, e não concluiu a atividade.	O estudante resolveu a equação no Photomath, porém não transcreveu todo o processo para o bloco de anotações.	O estudante resolveu a equação no Photomath e transcreveu todo o processo para o bloco de anotações.	
Resolver a mesma equação do 2º grau utilizando um método diferente do utilizado no Photomath.	O estudante não realizou a tarefa.	O estudante resolveu a equação utilizando o mesmo método do Photomath.	O estudante resolveu parcialmente a equação utilizando um método diferente do Photomath.	O estudante resolveu corretamente a equação utilizando um método diferente do Photomath.	
Demonstrar autonomia diante do aplicativo Photomath.	O estudante não demonstrou autonomia.	O estudante teve bastante dificuldade com o app, mas conseguiu utilizá-lo com a ajuda dos colegas.	O estudante demonstrou pouca dificuldade com o app, superando-as rapidamente com a ajuda dos colegas.	O estudante demonstrou autonomia para entender e utilizar o app e colaborou para esclarecer as dúvidas dos colegas.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 3 - Atividade com o auxílio do aplicativo Photomath.

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar as falas de cada um para que todos tenham a oportunidade de falar e ouvir e organizar a avaliação.

Técnico 1: Verificar se todos estão com o aplicativo Photomath, para dar continuidade a tarefa, se alguém não tiver o aplicativo comunicar ao Secretário 1 ou 2.

Técnico 2: Verificar se todos estão com o aplicativo Photomath, para dar continuidade a tarefa, se alguém não tiver o aplicativo comunicar ao Secretário 1.

Secretário 1: Ao ser comunicado de que há aluno sem o aplicativo comunicar a professora.

Secretário 2: Distribuir o material para ser realizada a tarefa.

Se o grupo tiver 6 alunos esse sexto aluno será secretário e deverá desempenhar a função do secretário 2.

Cenário 3 - Atividade com o auxílio do aplicativo Photomath.

Nome: _____

Sortear uma equação do 2º grau no envelope disponível na estação, após com o auxílio do Photomath resolver essa equação e transcrever para o local abaixo indicado.

Em um segundo momento resolver a mesma equação, também no local abaixo indicado, utilizando um método diferente do que utilizado pelo Photomath.

Local para transcrever a resolução da equação do 2º grau pelo Photomath:

Local para resolver a mesma equação do 2º grau usando um método diferente do Photomath:

Aula 5 – Cenário 1

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 1 – Assistir aos vídeos produzidos pelos colegas.

Nome do Avaliado: _____

Nome do Avaliador: _____

Fonte: Autora (2019)

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Acessar e assistir ao vídeo na íntegra, com atenção.	Não assistiu ao vídeo produzido pelos colegas.	Assistiu a trechos do vídeo e passou para a próxima etapa.	Assistiu a maior parte do vídeo e passou para a próxima etapa.	Assistiu ao vídeo na íntegra para depois passar para a próxima etapa.	
Discutir no grupo o que foi visto no vídeo, fazendo anotações.	Não se envolveu em discussões no grupo.	Participou das discussões, porém levantou assunto não relacionado ao vídeo assistido.	Participou das discussões sobre o vídeo no grupo, porém sempre impondo sua opinião.	Participou das discussões sobre o vídeo no grupo e procurou ouvir a opinião de seus colegas, colaborando positivamente na tarefa do grupo.	
Avaliar o vídeo assistido.	Não avaliou, nem se envolveu na avaliação do vídeo.	Avaliou de forma incompleta, pois não levou em consideração o conteúdo matemático e não observou a criatividade na tarefa.	Avaliou o vídeo, observando parcialmente a coerência dos conceitos sobre Equações do 2º grau e/ou a criatividade na produção do vídeo.	Avaliou o vídeo, observando a coerência dos conceitos sobre Equações do 2º grau e a criatividade na produção do vídeo.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 1 – Assistir aos vídeos produzidos pelos colegas.

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel e todos deverão olhar os vídeos, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar as falas de cada um para que todos tenham a oportunidade de falar e ouvir, organizar a avaliação e também fazer a escrita dessa discussão.

Técnico 1: Observar se o vídeo está funcionando corretamente, se tiver algum problema falar para o Líder, que por sua vez comunicará o professor.

Técnico 2: Observar se todos os fones de ouvido estão funcionando, se tiver algum problema falar para o Líder, que por sua vez comunicará o professor.

Secretário 1: Fará a escrita de uma das duas avaliações, com a ajuda dos demais integrantes do grupo.

Secretário 2: Fará a escrita de uma das duas avaliações, com a ajuda dos demais integrantes do grupo.

Se o grupo tiver 6 alunos esse sexto aluno será secretário e deverá participar das escritas.

Cenário 1 – Assistir aos vídeos produzidos pelos colegas.

Integrantes do grupo: _____

Fazer a avaliação do vídeo que os colegas produziram, observando a coerência dos conceitos sobre Equações do 2º grau, a criatividade na produção do vídeo.

Os estudantes tinham um espaço para fazer a avaliação por escrito.

Aula 5 – Cenário 2

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 2 – Produção de equações similares as do livro com o mesmo método de resolução.

Nome do Avaliado: _____

Nome do Avaliador: _____

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Em colaboração com os colegas, analisar como é feita a abordagem das equações do 2º no material disponível.	Não realizou a análise das equações do 2º no material disponível.	Realizou a análise de parte do material, de maneira individual, não colaborando com os colegas na tarefa.	Realizou a análise de parte do material, colaborou pouco com os colegas na tarefa.	Realizou a análise de todo o material e colaborou de forma efetiva com os colegas na tarefa.	
Discutir no grupo o que foi analisado no material disponível.	Não participou de discussões sobre o material analisado pelo grupo.	Participou de discussões sobre o material analisado pelo grupo, porém desviou o foco do objetivo da tarefa.	Participou de discussões sobre o material analisado pelo grupo, manteve o foco, mas impôs suas decisões aos colegas.	Participou de forma colaborativa das discussões sobre o material analisado pelo grupo, contribuindo positivamente para conclusão coletiva da tarefa.	
Resolver a equação criada pelo grupo.	Não resolveu nenhuma das equações criadas pelo grupo.	Resolveu parte das equações criadas pelo grupo, mas apresentou erros nas resoluções.	Resolveu as equações criadas pelo grupo, mas apresentou erros conceituais em parte da resolução.	Resolveu corretamente as equações criadas pelo grupo.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 2 – Produção de equações similares as do livro com o mesmo método de resolução.

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar as falas de cada um para que todos tenham a oportunidade de falar e ouvir e organizar a avaliação.

Técnico 1: Organizar o material disponível para a leitura.

Técnico 2: Organizar e distribuir os blocos de anotações, para cada um fazer suas anotações.

Secretário 1: Organizar as equações do 2º grau definidas pelo grupo.

Secretário 2: Resolver a equação do 2º grau, mostrando que de fato se resolve da mesma maneira que a do material disponível.

Se o grupo tiver 6 alunos esse sexto aluno será secretário e deverá participar das escritas.

Cenário 2 – Produção de equações similares as do livro com o mesmo método de resolução.

Integrantes do grupo: _____

Escreva a equação do 2º grau desenvolvida pelo grupo, após a resolução:

Os estudantes tinham um espaço para a resolução

Aula 5 – Cenário 3

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 3 – Resolução de problemas

Nome do Avaliado: _____

Nome do Avaliador: _____

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Ler o texto proposto.	Não realizou a leitura do texto.	Realizou parcialmente a leitura do texto.	Realizou a leitura do texto, mas não argumentou de forma coerente sobre o texto.	Realizou a leitura do texto e argumentou de forma coerente sobre o texto lido.	
Apresentar e discutir os resultados obtidos.	Não demonstrou interesse durante a atividade.	Resolveu parte das questões, apresentou seus resultados aos colegas, mas não demonstrou argumentos coerentes com o estudo realizado.	Resolveu parte das questões, mas refletiu sobre os resultados, apresentou seus resultados aos colegas, com argumentos coerentes.	Resolveu todas as questões, refletiu sobre os resultados, apresentou seus resultados aos colegas, com argumentos coerentes.	
Apresentou postura crítica no desenvolvimento da atividade.	Não demonstrou criticidade, pois não participou da tarefa.	Não comparou os resultados com situações reais, e aceitou as respostas como verdadeiras, sem questionar a validade dos resultados encontrados	Demonstrou criticidade, mas não comparou os resultados com situações reais. Questionou a validade dos resultados encontrados	Demonstrou criticidade ao comparar os resultados com situações reais. Questionou a validade dos resultados encontrados.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 3 – Resolução de problemas

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar a resolução dos problemas entregando os materiais a seus colegas do grupo, organizar a avaliação.

Técnico 1: Fazer a leitura do primeiro problema.

Técnico 2: Fazer a leitura do segundo problema.

Secretário 1: Ficar atento as dúvidas que surgirem, podendo solicitar a presença da professora na estação.

Secretário 2: Ficar atento as dúvidas que surgirem, podendo solicitar a presença da professora na estação.

Se o grupo tiver 6 alunos esse sexto aluno será secretário e deverá participar das duas funções estabelecidas anteriormente, assim havendo uma terceira rodada ele anotará o resultado.

Cenário 3 – Resolução de problemas

Leia, interprete e resolva:

Índice de Massa Corpórea

Hoje muito se fala do Índice de Massa Corpórea (IMC), não é? Seu prof. de Educação Física já deve ter falado a respeito, já que estamos vivendo uma era em que a obesidade cresceu muito, e continua crescendo, e o pior, está atingindo as crianças e os jovens de maneira assustadora. Alguns estudiosos do assunto chegam a afirmar que no Brasil a obesidade chega a ser uma epidemia silenciosa. O fato é que a obesidade é considerada um problema de saúde pública e sabe-se que ela provoca várias outras doenças, como diabetes, problemas cardiovasculares, dificuldades motoras e articulares, além de distúrbios do sono.



Figura 1: Balança Fonte: Blogspot

A obesidade é considerada uma doença grave quando o IMC do indivíduo se apresenta superior a 30. E como se pode calcular o IMC? Os estudiosos da saúde definem o IMC através da fórmula:

$$\text{IMC} = \text{peso (kg)} / \text{altura (m)} \times \text{altura (m)}$$

E se o valor obtido for:

Menor que 18,5 - o indivíduo está abaixo do peso;

Entre 18,5 e 24,9 - o indivíduo está com peso normal;

Entre 25 e 29,9 - o indivíduo está com sobrepeso (acima do peso desejado);

Igual ou maior que 30 - o indivíduo está OBESO.



Figura 2: Gráfico da taxa de IMC Fonte: Colégio Web

Agora é sua vez!!

a) Já que previamente já sabem sua massa (peso), vamos medir a sua altura. Para isso, vocês devem usar a fita métrica e determinar a altura de um voluntário ou mais do grupo. Após essa atividade, determinem o IMC deste voluntário.

b) Transforme essa fórmula em uma equação do 2º grau:

Aula 6 – Cenário 1

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 1 – Resolver Equações do 2º grau mencionadas no livro “As mil e uma equações”.

Nome do Avaliado: _____

Nome do Avaliador: _____

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Analisar como é feita a abordagem de equações do 2º no livro As mil e uma equações.	Não realizou a análise das equações do 2º no material disponível.	Realizou a análise de parte do material, de maneira individual, não colaborando com os colegas na tarefa.	Realizou a análise de parte do material, colaborou pouco com os colegas na tarefa.	Realizou a análise de todo o material e colaborou de forma efetiva com os colegas na tarefa.	
Discutir no grupo o que foi analisado no material disponível.	Não participou de discussões sobre o material analisado pelo grupo.	Participou de discussões sobre o material analisado pelo grupo, porém desviou o foco do objetivo da tarefa.	Participou de discussões sobre o material analisado pelo grupo, manteve o foco, mas impôs suas decisões aos colegas.	Participou de forma colaborativa das discussões sobre o material analisado pelo grupo, contribuindo positivamente para conclusão coletiva da tarefa.	
Resolver as equações do 2º grau da atividade proposta.	Não resolveu nenhuma das equações propostas.	Resolveu parte das equações propostas, mas apresentou erros nas resoluções.	Resolveu as equações propostas, mas apresentou erros conceituais em parte da resolução.	Resolveu corretamente as equações propostas.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 1 – Resolver Equações do 2º grau mencionadas no livro “As mil e uma equações”.

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar as falas de cada um para que todos tenham a oportunidade de falar e ouvir e organizar a avaliação.

Técnico 1: Organizar o material disponível para a leitura, assim cada integrante do grupo terá o seu material.

Técnico 2: Organizar e distribuir os blocos de anotações.

Secretário 1: Ficar atento a qualquer dúvida que surgir, solicitar a presença da professora na estação.

Secretário 2: Ficar atento a qualquer dúvida que surgir, solicitar a presença da professora na estação.

Se o grupo tiver 6 alunos esse sexto aluno será secretário e desempenhará o mesmo papel que os secretários citados acima.

Cenário 1 – Resolver Equações do 2º grau mencionadas no livro “As mil e uma equações”.

Resolva as seguintes equações do 2º grau:

a) $x^2 - 7x = 0$

b) $x^2 - 18x + 81 = 0$

c) $x^2 - 6x + 5 = 0$

d) $3x^2 - 30x + 27 = 0$

Aula 6 – Cenário 2

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 2 – Citar os sites que utilizaram para pesquisar e estudar durante todo o processo das seis aulas.

Integrantes do grupo: _____

Nome do Avaliador: _____

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Realizar pesquisa com os smartphones para confirmar sites visitados pelo grupo.	O grupo não realizou a pesquisa nem indicou sites visitados.	O grupo apenas indicou os nomes dos sites lembrados, mas não conferiu se estavam ativos, por meio de pesquisas com seus smartphones.	Parte dos integrantes do grupo realizou a pesquisa em seus smartphones, confirmando os sites visitados.	Todos os integrantes do grupo realizaram a pesquisa em seus smartphones, confirmando os sites visitados.	
Fazer a análise do site para ver se realmente contém as informações necessárias.	O grupo não realizou a análise do site.	O grupo realizou parcialmente a análise do site.	O grupo realizou a análise do site, porém não houve a colaboração de todos os colegas do grupo.	O grupo realizou a análise do site com a participação de todos os colegas do grupo.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 2 – Citar os sites que utilizaram para pesquisar e estudar durante todo o processo das seis aulas.

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar as falas de cada um para que todos tenham a oportunidade de falar e ouvir, organizar a avaliação e também fazer a escrita dessa discussão.

Técnico 1: Verificar se todos têm smartphones para realizar a pesquisa.

Técnico 2: Em caso de qualquer alguma dúvida ou algum problema com os smartphones, informar para a professora.

Secretário 1: Organizar quem irá escrever o endereço eletrônico dos sites utilizados.

Secretário 2: Orientar que a escrita deve ser realizada por todos, mesmo que só um faça o papel de transcrever o pensamento do outro.

Se o grupo tiver 8 alunos esse sexto aluno será secretário e deverá participar das duas funções estabelecidas anteriormente, escolhendo uma delas.

Cenário 2 Citar os sites que utilizaram para pesquisar e estudar durante todo o processo das seis aulas.

Integrantes do grupo: _____

Endereço eletrônico dos sites utilizados.

Os estudantes tinham um espaço para citar os sites.

Aula 6 – Cenário 3

Rubrica para a Avaliação da estação: Cenário 3 – Resolução de problemas

Nome do Avaliado: _____

Nome do Avaliador: _____

Dimensões	1	2	3	4	Obs.
Ler o texto proposto nos problemas.	Não realizou a leitura do texto.	Realizou parcialmente a leitura do texto.	Realizou a leitura do texto, mas não apresentou compreensão para resolver totalmente o problema.	Realizou a leitura do texto, argumentou de forma coerente, demonstrando compreensão do problema.	
Apresentar e discutir os resultados obtidos.	Não demonstrou interesse durante a atividade.	Resolveu parcialmente os problemas, apresentou seus resultados aos colegas, mas não demonstrou argumentos coerentes com o estudo realizado.	Resolveu parcialmente os problemas, mas refletiu sobre os resultados, apresentou seus resultados aos colegas, com argumentos coerentes.	Resolveu corretamente os problemas, refletiu sobre os resultados, apresentou seus resultados aos colegas, com argumentos coerentes.	
Apresentou autonomia para resolver os problemas.	Não resolveu os problemas.	Não demonstrou autonomia na resolução dos problemas, porém tentou responder à tarefa.	Demonstrou autonomia parcial na resolução dos problemas, mas precisou de ajuda da professora em alguns momentos da tarefa.	Demonstrou autonomia na resolução dos problemas, sem precisar de ajuda da professora para concluir a tarefa.	

Fonte: Autora (2019)

Cenário 3 – Resolução de problemas

Dentro desta estação, cabe aos alunos, definirem seus papéis, assim que definirem, cada um pegará o crachá referente ao seu papel, sabendo que todos serão avaliados e avaliadores:

Líder: Organizar a resolução dos problemas entregando os materiais a seus colegas do grupo, organizar a avaliação.

Técnico 1: Fazer a leitura do primeiro problema.

Técnico 2: Fazer a leitura do segundo problema.

Secretário 1: Ficar atento as dúvidas que surgirem, podendo solicitar a presença da professora na estação.

Secretário 2: Ficar atento as dúvidas que surgirem, podendo solicitar a presença da professora na estação.

Se o grupo tiver 6 alunos esse sexto aluno será secretário e deverá participar das duas funções estabelecidas anteriormente para os secretários.

Cenário 3 – Resolução de problemas

1) Leia e interprete o problema a seguir, descrevendo todo processo utilizado para chegar à resposta:

Alexandre pensou em um número real.

Do dobro do quadrado desse número, subtraiu 242 e obteve zero.

Em que número pensou?

2) Leia e interprete o problema a seguir, argumente sua resposta:

Chico vai cercar com tela uma horta de 24 m^2 que há em seu sítio. Sabendo que essa horta possui formato retangular e que seu comprimento é 2 metros maior que sua largura, determine a quantidade de metros de tela que Chico vai precisar.

16. FERREIRA, S. M. **Cenários para Investigação Matemática: Uma proposta Didática para Trabalhar Sequências Numéricas nas Séries Finais do Ensino Fundamental** (Dissertação) – Universidade Federal de Goiás, Goiania - GO, 2020.

Páginas 36-40

	PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA MESTRADO		
	Aluno (a):		
	Professor: Sergio Murylio		
	Data:	Série: 7º	VOTO DO JULGADO PROFESSOR
Turma:	Bim:		

★★★★★

Atividade investigativa 1	PADRÕES NUMÉRICOS
---------------------------	-------------------

Em sua vida escolar, você certamente já percebeu a existência de padrões numéricos. Números pares, ímpares, dobros, metades... Se você ainda não está se lembrando ou compreendendo, veja a seguir, algumas sequências de números que obedecem a padrões de formação:

- 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 ...
- 1024, 512, 256, 128, 64 ...
- 360, 345, 330, 315, 300, 285, 170 ...
- 11, 14, 17, 20, 23, 26 ...

Você consegue identificar os padrões que dão origem a cada uma das sequências mostradas acima? Consegue compreender por que existem reticências ao final de cada uma delas?

Na atividade de hoje vamos formar sequências numéricas que obedecerão a regras que nós mesmos criaremos. Para isso, utilizaremos duas operações matemáticas para produzir cada novo número no padrão: você poderá escolher entre "multiplicação e soma" ou "multiplicação e subtração".

Agora é a sua vez!

- 1) Escolha os cinco detalhes iniciais;
- 2) Liste pelo menos 8 números da sua sequência;
- 3) Escreva sobre as coisas que você percebeu na sua sequência;
- 4) Depois de tudo pronto, confeccione um cartaz para ser apresentado aos colegas.



Professor: Sergio Arroyave

52/567 274

Alt Name:

DEPARTMENT OF THE ARMY
WASHINGTON, D.C. 20315

◆◆◆◆◆

CONSTRUINDO PÓDIOS



A empresa SM fabrica pódios usando blocos retangulares de madeira, todos do mesmo tamanho. A figura 1 a seguir mostra o pódio mais simples que a SM fabrica. Ele pode acomodar até três competidores, possui dois degraus laterais e é fixado usando quatro blocos para centrar-lo.

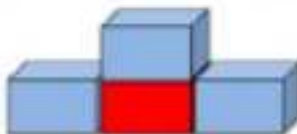


Figure 1

- os pódios precisam ter níveis (degraus);
- deve existir uma simetria em relação ao centro, de modo que se observem quantidades iguais de blocos à direita e à esquerda da coluna central.



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
UNEPH NA EDUCAÇÃO BÁSICA
PÓS-GRADUADO

Aluno (a):		
Professor: Sergio Murylla		
Data:	Série: 7º	UNEPH OU OUTRO PROFESSOR
Turma:	Bim:	

Atividade investigativa 3 - PÁSSAROS QUE VOAM EM V.

Algumas espécies de aves migratórias voam em bando, formando uma configuração em "V". Será que este tipo de organização lhes facilita o voo? Diversas equipes de cientistas têm investigado esta questão, procurando compreender as vantagens que podem surgir da aplicação deste conhecimento da natureza à aviação.

Na sequência que se segue, cada figura representa um bando, cada ponto simboliza uma das aves que lhe pertence e, de figura para figura, o número de aves vai sempre aumentando. Eis os primeiros quatro termos desta sequência:



- Nas questões seguintes explique o seu raciocínio recorrendo a palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.
- (1) Quantos pontos tem a figura seguinte desta sequência?
 - (2) Quantos pontos tem a 100ª figura (termo de ordem 100) desta sequência?
 - (3) Existe alguma figura nesta sequência com 86 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.
 - (4) Existe alguma figura nesta sequência com 135 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.
 - (5) Descreva uma regra que permita determinar o número total de pontos de qualquer figura desta sequência.
 - (6) Escreve uma expressão algébrica que possa traduzir a regra descrita na questão anterior.



Aluno(a):		
Professor: Sérgio Miyoshi		
Data:	Série: 79	Matrícula: 00000000000000000000
Turma:	Bloco:	

Atividade Investigativa 4

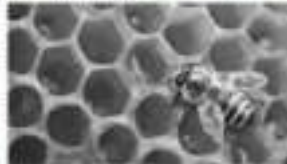
PROBLEMAS NUMÉRICOS NATIVOS

A geometria instintiva das abelhas

Artigo de Luis Beltrán, comentando sobre a geometria que as abelhas praticam em sua vida diária para a construção os alvéolos das colônias.

As abelhas usam cera para construir os alvéolos das colônias, que servem depois de depósito para o mel que fabricam. O matemático belga Maerlinsk observou que, ao contrário de muitos planejadores humanos, as abelhas constroem os alvéolos procurando uma forma que otimize a economia, isto é, que apresente o maior volume para o menor porção de material gasta. Para isso, os alvéolos são poliedros hexagonais, pois a falta de paredes comuns entre eles define uma grande quantidade de espaços não aproveitados.

Além, para que a parede de um alvéolo servisse também os alvéolos vizinhos, eles devem, obviamente, ter a forma de um prisma. Em alguns prismas regulares que se sobrepõem sem deixar lacunas são os prismas triangulares, os quadrangulares e os hexagonais.



Retirado de: <https://www.abelhas.com.br/2015/05/a-geometria-instintiva-das-abelhas/>. Acesso em 11 Out. 2015. Texto com adaptações.

Uma espécie de abelhas constroem sua colônia edificando seus alvéolos. Um apicultor resolveu registrar os alvéolos que essas abelhas constroem a cada hora. Observa a quantidade de alvéolos hexagonais regulares geometricamente iguais construídos a cada hora pelas abelhas operárias da colônia. Com exceção do primeiro, cada alvéolo da sucessão tem mais um hexágono do que o termo anterior.



1ª hora



2ª hora



3ª hora



4ª hora

Vamos pensar nas paredes que as abelhas constroem. ... Nas questões a seguir, explique o seu raciocínio escrevendo a palavra, expressão, cálculo ou símbolo.

- (1) Quantas paredes as abelhas construíram na 1ª hora?
- (2) Quantas paredes as abelhas terão construído na 5ª hora?
- (3) Desenhe uma regra que permita determinar o número total de paredes construídas pelas abelhas em qualquer figura desta sequência.
- (4) Escreva uma expressão algébrica que possa traduzir a regra descrita na questão anterior.
- (5) Quantas paredes as abelhas terão construído após a 100ª hora (termo de ordem 100) desta sequência?
- (6) Existe alguma figura nesta sequência com 100 paredes? Se existir, determine a hora correspondente.
- (7) Existe alguma figura nesta sequência com 485 paredes? Se existir, determine a hora correspondente.

17. PAULA, C. M. M. de. **Investigações Matemáticas com o Apoio do Geogebra, em Smartphone: um Estudo da Função Exponencial e de sua Inversa** (Dissertação) – Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia Fluminense, Campos dos Goytacazes – RJ, 2021.

Páginas 190-199

ATIVIDADE INVESTIGATIVA 1																			
Caro aluno, resolva as atividades no caderno, digitalize as respostas, bem como os procedimentos de cálculos, e envie pela plataforma <i>Classroom</i>. Lembrando, que as imagens das construções no <i>GeoGebra</i> também deverão ser anexadas junto à atividade. Esta atividade deverá ser desenvolvida em grupo.																			
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"><tr><td style="width: 50%; padding: 5px;">Grupo: _____</td><td style="width: 50%; padding: 5px;">Data: ____ / ____ / ____</td></tr></table>		Grupo: _____	Data: ____ / ____ / ____																
Grupo: _____	Data: ____ / ____ / ____																		
a) Investigue o desenvolvimento da ideia do Trevor, o personagem principal do filme, e veja se encontra algum padrão matemático, caso haja, registre.																			
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"><tr><td style="height: 30px; vertical-align: top; padding: 5px;">Resposta:</td></tr></table>		Resposta:																	
Resposta:																			
b) Suponha que você vá aderir a ideia de Trevor para mudar o mundo. No primeiro dia você passa adiante para três colegas, no segundo dia, cada um deles passam para três outras pessoas, e assim sucessivamente. No terceiro dia, quantos alunos da turma serão atingidos? Preencha a tabela organizando os dados observados.																			
<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"><thead><tr style="background-color: #4a86e8; color: white;"><th style="padding: 5px;">Dias</th><th style="padding: 5px;">Pessoas alcançadas</th></tr></thead><tbody><tr><td style="text-align: center; padding: 5px;">1 (Você)</td><td style="text-align: center; padding: 5px;">3</td></tr><tr><td style="text-align: center; padding: 5px;">2</td><td style="padding: 5px;"></td></tr><tr><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr><tr><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr><tr><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr><tr><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr><tr><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr><tr><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr></tbody></table>		Dias	Pessoas alcançadas	1 (Você)	3	2													
Dias	Pessoas alcançadas																		
1 (Você)	3																		
2																			
c) Suponha que para alcançar todas as pessoas da sua escola, com uma boa ação, levaram 6 dias. Quantos alunos, no máximo, seriam na sua escola?																			

Resposta:

- d) Construa uma tabela com esses dados, associando o dia (x) com o número de pessoas diferentes alcançadas (y) e marque os pontos no GeoGebra.

Dias x	Pessoas alcançadas y	Par ordenado (x,y)
1 (Você)	3	(1,3)
2		

Cole aqui a imagem do GeoGebra:

- e) O padrão encontrado é linear (a relação entre o número de pessoas alcançadas e os dias)? Como você descreveria esse gráfico?

Resposta:

ATIVIDADES INVESTIGATIVAS 2

Care aluno, resolva as atividades no caderno, digitalize as respostas, bem como os procedimentos de cálculos, e envie pela plataforma Classroom.

Nome: _____

Data: ____/____/____

ATIVIDADE INVESTIGATIVA 2.1

O número de Euler

O número e é um número irracional conhecido como número Euler ou constante de Euler, para homenagear Leonhard Euler, e está entre as constantes de maior relevância para a Matemática. A primeira vez que apareceu na literatura foi em 1736 na publicação *Euler's Arithmetica*, na qual Euler fazia várias referências a certo número " x " que é a base do logaritmo neperiano. De acordo com a definição de um número irracional, o número e não pode ser escrito na forma de fração (razão entre dois números inteiros, cujo denominador é diferente de zero) e não apresenta em sua escrita uma expansão decimal periódica. E, "[...] mais ainda: é um irracional transcendente [...]", não existe equação algébrica que o apresente como sua raiz (LIMA, 2012, p.3).

O valor do limite da expressão $(1 + \frac{1}{x})^x$, quando x tende a ∞ , é a constante e ou número de Euler. Calcule o valor dessa expressão para cada valor de x na tabela. Utilize uma calculadora para auxiliar nos cálculos em até 5 casas decimais.

A constante e

x	$(1 + \frac{1}{x})^x$
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
10	
100	
1.000	
10.000	
100.000	
1.000.000	
...	

O que você observa?

Resposta:

ATIVIDADE INVESTIGATIVA 2.2

Dadas as funções:

I. $f(x) = k \cdot 2^{x+m} + C$

II. $g(x) = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+m} + C$

Abra o aplicativo *GeoGebra* e para cada função dada, realize as seguintes ações:

- a) Digite, na entrada, a função (observe que surgirá um controle deslizante para cada incógnita);

Neos itens seguintes, realize investigações sobre o crescimento e decréscimo, domínio e o conjunto imagem de cada função, manipulando os controles deslizantes e descrevendo o comportamento dos gráficos.

- b) Movimente os controles deslizantes k e C , e observe os gráficos;

Descreva:

- c) Coloque o controle deslizante na posição $m=0$ e $C=0$. Descreva o comportamento das funções quando k é manipulado.

Resposta:

- d) Descreva o comportamento das funções quando C é manipulado.

Resposta:

- e) Descreva o comportamento das funções quando m é manipulado

Resposta:

ATIVIDADE INVESTIGATIVA 3

Caro aluno, resolva as atividades no caderno, digitalize as respostas, bem como os procedimentos de cálculos, e envie pela plataforma *Classroom*.

Grupo:

Data: ____ / ____ / ____

Dadas as funções:

I. $h(x) = k \cdot \log_2(x + m) + C$

II. $t(x) = k \cdot \log_3(x + m) + C$

Abra o aplicativo *GeoGebra* e para cada função dada, realize as seguintes ações:

- a) Digite, na entrada, a função (observe que surgirá um controle deslizante para cada incógnita):

Nos itens seguintes, realize investigações sobre o crescimento e decréscimo, domínio e conjunto imagem de cada função, manipulando os controles deslizantes e descrevendo o comportamento dos gráficos.

- b) Coloque o controle deslizante na posição $m = 0$ e $C = 0$. Descreva o comportamento das funções quando k é manipulado.

Resposta:

- c) Descreva o comportamento das funções quando C é manipulado.

Resposta:

- d) Descreva o comportamento das funções quando m é manipulado.

Resposta:

ATIVIDADE INVESTIGATIVA 4

Caro aluno, resolva as atividades no caderno, digitalize as respostas, bem como os procedimentos de cálculos, e envie pela plataforma Classroom.

Grupo/nome:

Data: __/__/__

1) O quadro abaixo mostra o número de casos confirmados no município de Itávia em cinco dias de 2021, de acordo com os dados disponíveis no site oficial da cidade (<https://itavia.pi.gov.br/site/noticia/boletim-diario-analise-covid-19-713>).

Casos de Covid 19 em Itávia

DATA DA PESQUISA	CASOS CONFIRMADOS (em centenas)
18/02	8.67
15/03	9.56
09/04	10.37
04/05	10.87
29/05	12.48

Fonte: Elaboração própria.

Com base nas informações desse quadro e considerando o dia 1 referente a data 18/02, o dia 2 referente a data 15/03, o dia 3 referente a data 09/04, o dia 4 referente a data 04/05 e o dia 5 referente a data 29/05 e com o auxílio do aplicativo GeoGebra:

- localize os pontos no plano cartesiano que relacionam o número de casos confirmados e os dias, a saber: (8.67, 1), (9.56, 2), (10.37, 3), e assim sucessivamente;
- analise a disposição dos pontos e, se for possível, utilize o comando "Regressão Logarítmica" para encontrar uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a \ln(x)$, com $a \neq 0$, que contenha esses pontos;
- determine se a função encontrada é crescente ou decrescente e justifique sua resposta e justifique sua resposta.
- encontre a lei da função inversa de f .

2) Se a disseminação do coronavírus seguir o comportamento da função f , obtida no item anterior, em qual dia, aproximadamente, o número de casos confirmados será igual ao número de habitantes da sua cidade? (pesquisa no site oficial da prefeitura o número de habitantes do seu município). Sabendo que a distância entre os dias 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4, e 4 e 5 são de 25 dias, então em quanto tempo, em anos, aproximadamente, isso acontecerá?

Dica: Calcule utilizando a função f encontrada na questão 1.

3) Leia o trecho da reportagem noticiada pelo G1:

Depois de chegar a 1,30, taxa de transmissão da Covid-19 no Brasil cai para 1,02, aponta Imperial College

Centro de Estudos de Políticas de Saúde do Imperial College de Londres, Reino Unido, aponta para um possível fim da primeira onda da pandemia

Por: [Luisa Mendes](#)

1

A taxa de transmissão (R_t) do novo coronavírus no Brasil é de 1,02, aponta o monitoramento do Imperial College de Londres, no Reino Unido. Isso significa que cada 100 pessoas infectadas no país transmitem o vírus para outras 102. A atualização da estimativa foi divulgada nesta terça-feira (01/12/2020) e considera dados coletados até a segunda-feira (30/11/2020).

Pela margem de erro das estatísticas, essa taxa pode ser maior (R_t de até 1,11) ou menor (R_t de 0,94). Nesses cenários, cada 100 pessoas com o vírus infectariam outras 111 ou 94, respectivamente.

Fonte: <https://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/12/01/depois-de-chegar-a-130-taxa-de-transmissao-da-covid-19-no-brasil-cai-para-102-aponta-imperial-college.shtml>

Sabe-se que um dos modelos matemáticos que pode ser usado para modelar eventos pandêmicos é a função Exponencial. A exemplo do estudo realizado pelo Imperial College de Londres, percebe-se que a taxa de transmissão do novo coronavírus mantém um padrão de crescimento exponencial. Vale lembrar que um gráfico, construído com base nesse modelo, pode sofrer variações devido aos cuidados e às medidas governamentais que são tomadas para conter a pandemia, o exemplo do isolamento social. Essas medidas interferem no crescimento, achatamento ou decréscimo da curva.

a) De acordo com os dados apresentados, escreva uma função $C(x)$ que apresente o total de casos de Covid 19 confirmados em sua cidade. Para isso, considere a quantidade inicial (C_0) de casos confirmados - a última atualização da secretaria de saúde, disponibilizada no site oficial do seu município. Além disso, considere x o número de dias em que ocorre a transmissão e 1,02 a taxa de transmissão do novo coronavírus. Complete a tabela abaixo com suas respostas.

DADOS DA SITUAÇÃO APRESENTADA	
Data da pesquisa	
$C(x)$ → Total de casos confirmados	$C(x)$
C_0 → Número inicial de casos confirmados	
r → Taxa de transmissão	1,02

$x \rightarrow$ número de dias	x
Lei de formação que expressa a situação $C(x) = C_0 \cdot r^x$	Escreva aqui a sua expressão

b) Considerando a função descrita no item a), daqui a 30 dias quantas pessoas poderão estar contaminadas em Itaipava?

c) Considerando a lei de formação do item a) $C(x) = C_0 \cdot r^x$, onde a taxa de transmissão do coronavírus é $r = 1,02$ e considerando o número de habitantes do seu bairro, suponha que o número inicial de infectados seja $C_0 = 3$. Em quanto tempo todos moradores do seu bairro poderão estar contaminados? Utilize a tabela abaixo para responder essa questão.

DADOS DO BAIRRO	
Data da pesquisa	
Bairro em que reside	
Fonte da pesquisa	
Quantidade de habitantes no bairro	

d) Com o auxílio do *GeoGebra*, esboce o gráfico da função encontrada e determine os conjuntos domínio e imagem.

ATIVIDADE INVESTIGATIVA 5

Grupo/nome:

1) Analise o material sobre média móvel disponibilizado pelo seu professor apresentado e execute as atividades.

- Assista e realize discussões com sua dupla a respeito do vídeo disponível em: <https://g1.globo.com/basetericoronavirus/noticia/2020/07/27/entenda-como-e-calculada-a-media-movel-e-a-variacao-dos-casos-e-mortes-por-covid-19.ghtml>
- Observando a média móvel do número de mortes em maio de 2020, investigue e relate a relação entre as grandezas média móvel e a variação, bem como sua importância.
- Observe o Gráfico 1 e descreva com suas palavras que informações são apresentadas. A seguir, verifique se há períodos no gráfico que se assemelham a representação gráfica da função Exponencial ou outro tipo de função que você conheça. Descreva e associe estes períodos as funções que você identificou.

Gráfico 1 – Mortes por Covid 19 - RJ



- Assista aos vídeos: <https://youtu.be/yEGb1Qsu0k> e <https://youtu.be/ClpMAL5locE> . E