



Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Gustavo Alves Caetano Neto

UMA IDEIA SOBRE O CONCEITO DE LIMITE
AO LONGO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Uberaba - MG
2016

Gustavo Alves Caetano Neto

**UMA IDEIA SOBRE O CONCEITO DE LIMITE
AO LONGO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines

Uberaba - MG

2016

**Catálogo na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do
Triângulo Mineiro**

C131i Caetano Neto, Gustavo Alves
Uma ideia sobre o conceito de limite ao longo da história da matemática /
Gustavo Alves Caetano Neto. -- 2016.
118 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)
-- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2016
Orientadora: Prof^a Dr^a Mônica de Cássia Siqueira Martines

1. Matemática - História. 2. Cálculo. I. Martines, Mônica de Cássia Siqueira. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 51(09)

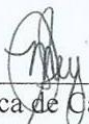
GUSTAVO ALVES CAETANO NETO

**Uma Ideia sobre o Conceito de Limite ao Longo da História da
Matemática**

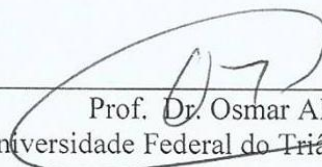
Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

04 de março de 2016.

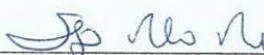
Banca Examinadora



Prof. Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines
Universidade Federal do Triângulo Mineiro



Prof. Dr. Osmar Aléssio
Universidade Federal do Triângulo Mineiro



Prof. Dr. Sérgio Roberto Nobre
Universidade Federal Paulista

“Tudo o que um sonho precisa para ser realizado é alguém que acredite que ele possa ser realizado”.

Roberto Shinyashiki

*Dedico este trabalho:
a Deus, criador de todas as coisas
e força que me mantém de pé;
à minha mãe Maria Teresa e à minha tia Irmã Natália,
bases da minha vida, maiores incentivadoras
e exemplos de dedicação.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, à minha orientadora Mônica, pelo seu jeito único de orientar, pela sua grande humildade e pelo carinho demonstrado por mim, sempre elevando a minha auto-estima, principalmente nos momentos de incerteza, me fazendo acreditar que sou especial e que posso conquistar mais a cada dia, que tudo depende do meu esforço. Penso ter tido em Mônica um belo exemplo de que mesmo um professor “Doutor”, independente do seu nível intelectual ou de sua posição, pode continuar sendo uma pessoa simples, paciente, humilde, sedenta por ensinar bem os seus alunos e, também, sedenta por aprender com eles.

Aos meus familiares que moram em outra cidade, pelas orações em meu favor, torcendo sempre pelo meu sucesso.

Aos meus saudosos padrinhos, Airton e Juvelina (Tita), que acolheram a mim e à minha mãe em sua casa e contribuíram muito para a minha educação, além de serem grandes incentivadores da continuidade dos meus estudos.

À minha namorada, Ivanilda, pelo amor e carinho incomparáveis e pelo apoio nas horas de dificuldade.

Aos amigos que passaram por minha vida, desde a infância até agora, especialmente Aurélio, Jefferson, Amanda, Maurício, Patrícia, André, Carlos Henrique, Frederico e Robson, que me deram muita força em muitos momentos de minha trajetória.

Às freiras do Colégio Nossa Senhora das Dores, especialmente às Irmãs Nadir e Maria Helena, por me concederem, durante todo o Ensino Fundamental, bolsa integral de estudos em sua conceituada escola e por me transmitirem sempre valores como fé, respeito, disciplina, compaixão e humildade, sendo, portanto, pessoas essenciais em minha formação.

Aos meus professores do ensino fundamental e médio, que me deram a base necessária para continuar os meus estudos.

A todos os professores da graduação em Matemática da UFTM e do PROFMAT, especialmente aos professores Ailton, Váldina, Osmar e Luiz Fer-

nando, pelo carinho e educação que sempre tiveram comigo e por me levar a buscar mais conhecimento e a ser uma pessoa mais disciplinada.

Aos amigos que fiz na graduação em Matemática pela UFTM e no PROFMAT, pelas incontáveis horas de risos fáceis, sendo a motivação necessária para que eu concluísse os meus cursos.

Aos amigos que fiz na Escola Estadual Lauro Fontoura, desde que comecei a lecionar para o ensino básico em maio de 2013, especialmente aos professores Isaías, Paulo Roberto, Cristina, Wesley, Mariângela, Sérgio e Thamiris e aos funcionários Márcio, Maria Deneide e Heloísa, pela troca de experiências que muito me ajudou neste início de carreira como professor.

À CAPES, pelo apoio financeiro, que me deu tranquilidade e tempo para cursar a graduação e o mestrado da maneira como gostaria.

À todas as pessoas que por acaso eu tenha esquecido de mencionar nestes agradecimentos e que de alguma maneira contribuíram para minha trajetória até aqui.

RESUMO

Este trabalho busca entender como se desenvolveu o conceito de limite ao longo de parte da História da Matemática, desde suas formas mais rudimentares, passando por algumas contribuições da Matemática Grega, trazendo também algumas contribuições da Matemática desenvolvida na Europa Medieval e, depois, algumas contribuições de Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Procuramos também conhecer as dificuldades enfrentadas pelos matemáticos deste período para entender os conceitos relacionados com limite, tais como: “infinitamente pequeno”, “infinitamente grande”, indivisíveis, soma de sequências infinitas, etc. Em relação a alguns conceitos de limite presentes na Matemática Grega, destacamos alguns paradoxos de Zenão de Eleia (≈ 460 a.e.C.), a ideia dos indivisíveis e algumas contribuições do livro “Os Elementos”. Posteriormente, ainda relacionado com a Matemática Grega, focamos em alguns trabalhos de Arquimedes de Siracusa ($\approx 287-212$ a.e.C.) sobre a quadratura do círculo, a quadratura da parábola e sobre as espirais. Em seguida, trazemos alguns conceitos de limite presentes na Europa Medieval, destacando algumas discussões sobre o infinito. Finalizamos este trabalho com algumas contribuições de Cavalieri para o Cálculo Integral. Podemos perceber, mesmo que implicitamente, um conceito primitivo de limite presente em vários dos momentos apresentados, tais como: em aproximações para a área do círculo, na utilização de somas infinitas, na discussão sobre os indivisíveis, na utilização do limite das áreas de figuras circunscritas e/ou inscritas para o cálculo da área de figuras curvas.

Palavras-chave: História da Matemática; História do Cálculo; Limite.

ABSTRACT

This work seeks to understand how it developed the concept of limit along part of the history of mathematics, from its most rudimentary forms, going through some contributions of Greek Mathematics, also bringing some contributions of mathematics developed in Medieval Europe and then some contributions of Bonaventura Cavalieri (1598-1647). We also seek to understand the difficulties faced by mathematicians of this period to understand the concepts related to limit, such as: “infinitely small”, “infinitely large”, indivisibles, sum of infinite sequences, etc. In relation to some concepts of limit present in the Greek Mathematics, we highlight some paradoxes of Zeno of Elea (≈ 460 b.C.e.), the idea of the indivisibles and some contributions of the book “The Elements”. Later, still related to the Greek Mathematics, we focus on some works of the Archimedes of Syracuse (≈ 287 -212 b.C.e.) about the quadrature of the circle, the quadrature of the parabola and about the spirals. Then, we bring some concepts of limit present in the Medieval Europe, highlighting some discussions about infinity. We end this work with some contributions of Cavalieri to the Integral Calculus. We can see, even if implicitly, a primitive concept of limit in several of the presented moments, such as: in approximations to area of the circle, in the use of infinite sums, in the discussion about the indivisibles, in the use of the limit of the areas of figures circumscribed and/or enrolled for the calculating of the area of curves figures.

Keywords: Mathematics History; Calculus History; Limit.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Transformações geométricas elementares	20
1.2	Quadrados inscritos e circunscritos ao círculo de raio r	21
1.3	Quadrante circular	22
1.4	Jones (1706), mostrando o símbolo π	23
2.5	Representação dos números triangulares, quadrangulares, e re- tangulares	26
2.6	Representação das pirâmides triangulares, quadrangulares e dos cubos	27
2.7	Heath (1921), citando o dilema de Demócrito	29
2.8	Representação do paradoxo da Dicotomia	31
2.9	Representação do paradoxo de Aquiles	32
2.10	Representação do paradoxo do Estádio de Zenão	32
2.11	Representação de segmentos comensuráveis	34
2.12	Quadrado utilizado na demonstração dos incomensuráveis	36
2.13	Segmentos x e y	38
2.14	Segmento y aumentado	39
2.15	Segmento x diminuído	39
2.16	Segmentos utilizados para demonstrar a Proposição I	41
3.17	Lúnulas	48

3.18	Triângulo com área igual à do círculo	50
3.19	Polígonos inscritos ao círculo	51
3.20	Polígonos circunscritos ao círculo	53
3.21	Proposição 1 da Quadratura da Parábola	55
3.22	Figura ilustrativa da proposição 1 da Quadratura da Parábola .	56
3.23	Demonstração da proposição 1 da Quadratura da Parábola . . .	56
3.24	Proposição 2 da Quadratura da Parábola	62
3.25	Demonstração da proposição 2 da Quadratura da Parábola . . .	63
3.26	Proposição 3 da Quadratura da Parábola	63
3.27	Figura ilustrativa da proposição 3 da Quadratura da Parábola .	64
3.28	Proposição 19 da Quadratura da Parábola	66
3.29	Figura ilustrativa da proposição 19 da Quadratura da Parábola	67
3.30	Proposição 21 da Quadratura da Parábola	67
3.31	Figura ilustrativa da proposição 21 da Quadratura da Parábola	68
3.32	Proposição 23 da Quadratura da Parábola	70
3.33	Proposição 24 da Quadratura da Parábola	73
3.34	Trissecção do ângulo reto	76
3.35	Construção de uma espiral	79
3.36	Proposição 14 de Arquimedes sobre a Espiral	80
3.37	Figura ilustrativa da Proposição 14 de Arquimedes sobre a Espiral	80
3.38	Proposição 10 de Arquimedes sobre a Espiral	81
3.39	Corolário 1 da Proposição 10 de Arquimedes sobre a Espiral . .	82
3.40	Proposição 24 de Arquimedes sobre a Espiral	82
3.41	Figura ilustrativa da Proposição 24 de Arquimedes sobre a Espiral	84
3.42	Reta tangente	88

3.43 Paralelogramo de velocidades	89
3.44 Construção da reta tangente à espiral	89
3.45 Reta tangente à espiral	90
3.46 Aproximações da velocidade instantânea	92
4.47 Princípio de Cavalieri	99
4.48 Figura utilizada na demonstração do Princípio de Cavalieri	99
4.49 Exemplo de aplicação do Princípio de Cavalieri	100
4.50 Proposição 23 de Cavalieri	104
4.51 Demonstração da Proposição 23 de Cavalieri	105
4.52 Proposição 19 de Cavalieri	107
4.53 Proposição 20 de Cavalieri	107
4.54 Proposição 21 de Cavalieri	108
4.55 Demonstração da Proposição 21 de Cavalieri	109
4.56 Paralelogramo utilizado para demonstrar as potências de Cavalieri	110
4.57 Proposição 22 de Cavalieri	112

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
CAPÍTULO 1: Alguns conceitos primitivos de limite em civilizações antes dos Gregos	19
CAPÍTULO 2: Um relato sobre a questão da soma infinita na Matemática Grega	25
2.1 A Escola Pitagórica e os números figurados	25
2.2 Os indivisíveis	27
2.3 Alguns paradoxos de Zenão	30
2.4 O problema dos incomensuráveis e os números irracionais: outra questão do infinito	34
2.5 Algumas contribuições de “Os Elementos”	37
CAPÍTULO 3: Alguns trabalhos de Arquimedes e um pouco da Matemática Grega após Euclides	46
3.1 O Problema da quadratura	46
3.2 A Quadratura do Círculo	49
3.3 A Quadratura da Parábola	54
3.4 A espiral de Arquimedes	75
3.5 Tangentes	87
3.6 Alguns conceitos de movimento	91

CAPÍTULO 4: Alguns conceitos sobre limite na Europa Medieval e no século XVII	95
4.1 Algumas discussões sobre o infinito	95
4.2 Algumas contribuições de Cavalieri para o Cálculo Integral . . .	98
CONSIDERAÇÕES FINAIS	114
BIBLIOGRAFIA	117

INTRODUÇÃO

No ensino superior, nas disciplinas de “Cálculo”, geralmente é ensinado primeiramente o conceito de limite, que norteia todos os outros conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral, tais como derivadas, integrais, etc. Porém, na história do Cálculo, o conceito de limite só foi bem fundamentado em meados do século XIX, muito tempo após a “invenção” do Cálculo Diferencial e Integral.

As disciplinas de Cálculo têm tido altos índices de reprovação nos cursos (Engenharias, Matemática, Física, Química, etc.) onde são ministradas. Barufi (1999) nos mostra os índices de reprovação nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral da Escola Politécnica da USP, entre 1990 e 1995, que variam de 20% a 75%, nas disciplinas em geral e não são inferiores a 40%, no Instituto de Matemática e Estatística. Rezende (2003) verifica que os índices de reprovação nestas disciplinas, na faculdade onde leciona (UFF), no período de 1996 a 2000, são maiores ainda, variando de 45% a 95%, nas disciplinas em geral e não são inferiores a 65%, no Curso de Matemática.

Nascimento (2003), em sua tese de doutorado, investigou o cenário de reprovações vivenciado por ele nas disciplinas de Cálculo, primeiro como aluno e depois como docente destas disciplinas, no estado da Bahia. O referido autor considera que as reprovações não estão associadas apenas à organização e elaboração dos conteúdos, a um programa de disciplina sobrecarregado, à estrutura das avaliações ou a falta de base dos estudantes e sim, ao processo de ensino-aprendizagem destas disciplinas.

Diante disto, pensamos que, em qualquer disciplina matemática, uma ferramenta que pode ser utilizada para trazer uma nova perspectiva para os

estudantes é a História da Matemática. Mas para que serve a História da Matemática?

D'Ambrosio (2000), em seu artigo “A interface entre História e Matemática: uma visão histórico-pedagógica”, elenca quatro finalidades para a História da Matemática:

- para situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução;
- para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade;
- para destacar que essa Matemática teve sua origem nas culturas da antiguidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio;
- para saber que desde então a Matemática foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas, se tornou indispensável em todo o mundo em consequência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico, e avaliar as consequências sócio-culturais dessa incorporação (D'AMBROSIO, 2000).

O nosso trabalho buscou atender a todas estas finalidades descritas por D'Ambrosio, no momento em que nos preocupamos com os conceitos de limite ao longo da História da Matemática.

Pensamos também ser importante que os estudantes conheçam as dificuldades enfrentadas por vários matemáticos ao longo da história para que o conceito de limite ficasse bem fundamentado. A partir disso, os estudantes podem enxergar as suas dificuldades como algo natural, que podem ser superadas com esforço e dedicação.

Quando estudamos a História em geral, ou mais especificamente a História da Matemática, devemos tomar muito cuidado ao nomear a “autoria” de

algumas descobertas matemáticas. Uma descoberta matemática envolve contribuições de outras pessoas além das contribuições do próprio “descobridor”. Algumas descobertas matemáticas nem deveriam ser atribuídas a certos matemáticos, pois estas já teriam sido descobertas anteriormente. Exemplo disso é o Princípio atribuído a Cavalieri, que já tinha seus conceitos conhecidos pelos chineses por volta do século VI, mesmo não utilizando as ideias relativas aos indivisíveis. Outro exemplo é o Triângulo atribuído a Pascal, que já era utilizado pelos chineses com o nome de Triângulo de Yanghui. Alguns matemáticos, como Tales de Mileto, Pitágoras e Euclides, não tem a sua existência realmente comprovada. O que se sabe sobre estes matemáticos e seus feitos é obtido apenas a partir de textos escritos séculos após as suas supostas existências. No caso de Pitágoras e de Euclides, o que pode ter acontecido é a união de um grupo de matemáticos (a escola pitagórica e a escola euclidiana) para compilar as descobertas matemáticas do grupo em nome de uma única pessoa (talvez imaginária). Alguns matemáticos podem ter se aproveitado de sua condição social e/ou status para se “apoderar” de determinadas descobertas matemáticas, anulando da História, os verdadeiros “descobridores” (NOBRE, 2004).

De acordo com D’Ambrosio (2012), ao estudar a história em geral, “uma das grandes dificuldades que encontramos é procurar ver o passado com os olhos do presente e buscar fontes que satisfaçam nossas habilidades de análise do presente”. Sendo assim, uma escolha adequada das fontes torna-se essencial para entender a história.

Entendemos ser importante utilizar, durante pesquisas em História da Matemática, fontes primárias (originais) ou caso não seja possível, fontes o mais próximo possível dos originais. Com isso, garantimos ao máximo a fidelidade dos dados procurados. Uma nova tradução ou uma nova interpretação pode trazer um ponto de vista de outra pessoa que pode distorcer de alguma maneira os dados originais. Mas, D’Ambrosio (2012) nos alerta que

Naturalmente, a identificação das fontes primárias reflete o estado de conhecimento atual e é, obviamente, insuficiente para se entender o passado. Ficam excluídos conhecimentos

científicos e sistemas de explicações de culturas com pouca ênfase no registro escrito. Por exemplo, lendas e ditos populares, os cronistas e cultos e a simbologia, particularmente de natureza religiosa, são importantes fontes primárias. Esses modelos de registro ampliam consideravelmente nosso entendimento do passado. O desenvolvimento de instrumentos de análise dessas fontes tem se mostrado de crescente importância no estabelecimento de uma historiografia mais adequada aos países e às culturas periféricas (D'AMBROSIO, 2012).

Ao longo do nosso trabalho, utilizamos, na maior parte das vezes, fontes terciárias de Baron e Bos (1985) e de Roque e Pitombeira (2012). Ao comentarmos sobre o livro “Os Elementos”, utilizamos a fonte secundária de Irineu Bicudo, por se tratar de uma tradução do grego para o português. Quando trazemos alguns trabalhos de Arquimedes, utilizamos a fonte secundária de Heath (1897) e a fonte terciária de Roque e Pitombeira (2012), devido à dificuldade que tivemos de encontrar os originais deste matemático. Já quando trazemos alguns trabalhos de Cavalieri, utilizamos as proposições originais e, nas demonstrações, buscamos auxílio na fonte secundária de Struik (1969).

O objetivo deste trabalho é entender como se desenvolveu o conceito de limite ao longo de parte da História da Matemática, desde suas formas mais rudimentares, passando por algumas contribuições da Matemática Grega e trazendo também algumas contribuições da Matemática produzida na Europa Medieval. Busca-se também conhecer as dificuldades enfrentadas pelos matemáticos deste período para entender os conceitos relacionados com limite, tais como: “infinitamente pequeno”, “infinitamente grande”, indivisíveis, soma de sequências infinitas, etc.

Dividimos este trabalho em quatro capítulos: Alguns conceitos primitivos de limite em civilizações antes dos gregos (capítulo 1), Um relato sobre a questão da soma infinita na Matemática Grega (capítulo 2), Alguns trabalhos de Arquimedes e um pouco da Matemática Grega após Euclides (capítulo 3) e Alguns conceitos sobre limite na Europa Medieval e no século XVII (capítulo 4).

No capítulo 1, trazemos algumas contribuições de civilizações anteriores aos gregos para a Matemática em geral, mais especificamente com algumas

tentativas de cálculo para o valor da área de um círculo, relacionadas indiretamente com aproximações para o valor de π .

Em seguida, no capítulo 2, falamos sobre algumas contribuições da Matemática Grega para os conceitos relacionados com “limite”. Destacam-se: a Escola Pitagórica com os números figurados; a ideia dos “indivisíveis” associada com um dilema proposto por Demócrito; os paradoxos de Zenão, que discutem a possibilidade do espaço e do tempo serem ambos infinitamente divisíveis ou não; o problema dos incomensuráveis e a necessidade de um novo conjunto numérico, o dos números irracionais; algumas contribuições do livro “Os Elementos”, de Euclides; algumas considerações de Aristóteles sobre o infinito.

Prosseguimos, no capítulo 3, com mais algumas contribuições dos gregos para os conceitos relacionados com “limite”, destacando alguns trabalhos de Arquimedes, envolvendo a quadratura do círculo e da parábola e algumas questões referentes à espiral de Arquimedes. Trazemos também algumas definições sobre reta tangente à um círculo e sobre reta tangente à uma curva em geral, seguidas de um possível método de construção da reta tangente à espiral, feito por Arquimedes, que pode ter utilizado o “método do paralelogramo”. Falamos ainda, brevemente, sobre a importância dos conceitos de movimento para o estudo das curvas em geral, relacionando velocidade instantânea com o valor da inclinação da reta tangente, que pode ser calculado através da derivada.

No capítulo 4, focamos em algumas questões que foram debatidas na Europa Medieval, referentes à natureza de quantidades infinitas e sobre a existência ou não de um menor elemento indivisível e se este elemento deveria ter dimensão. A seguir, é a vez de comentarmos algumas das contribuições de Cavalieri, no século XVII, para o Cálculo Integral, através do “Princípio de Cavalieri” e de algumas de suas proposições envolvendo o conceito das potências dos elementos de reta.

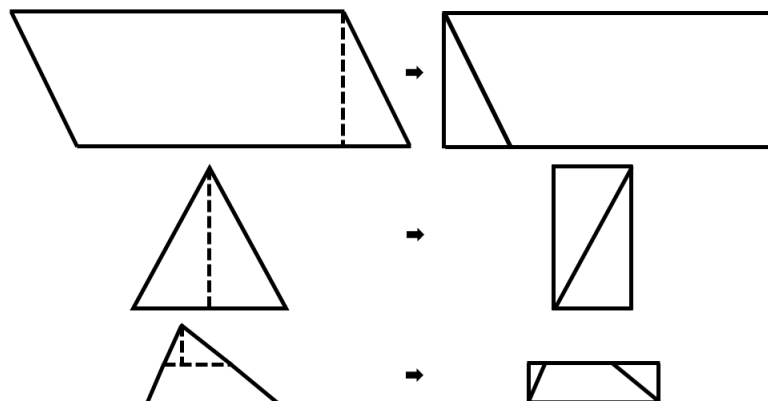
CAPÍTULO 1: Alguns conceitos primitivos de limite em civilizações antes dos Gregos

Por mais antigos que sejam alguns objetos (tapetes, vasos, etc.) podemos encontrar desenhados neles quadrados, retângulos, paralelogramos, triângulos, círculos, etc. Além disso, podemos encontrar estas formas geométricas desenhadas em rochas. O círculo teve também um papel importante, a partir da descoberta da roda. Segundo Baron e Bos (1985, unidade 1, p. 11), aparentemente, sólidos tridimensionais como o cubo, tetraedro, cilindro e a esfera eram bem conhecidos dos antigos.

Desde os tempos mais remotos, regras parecem ter sido utilizadas para o cálculo de áreas de regiões limitadas por linhas retas. Estas regras parecem ter sido estabelecidas por transformações geométricas elementares, isto é, cortando formas e reagrupando as partes para formar uma figura mais simples. Por exemplo, se tivermos um paralelogramo ou um triângulo isósceles ou um triângulo escaleno, podemos transformá-los, um a um, através de recortes e de um reagrupamento correto das partes, em um retângulo. (Baron e Bos, 1985, unidade 1, p. 11). A partir do retângulo podemos construir com mais facilidade um quadrado com a mesma área da figura original. A figura 1.1 ilustra estas transformações.

Segundo Baron e Bos (1985, unidade 1, p. 12), foram utilizados alguns conhecimentos matemáticos que acreditamos ser modernos, tais como o “Teorema de Pitágoras” e um método para calcular raízes quadradas para estimar

Figura 1.1: Transformações geométricas elementares



Fonte: Arquivo do autor

a área de terras e rochas. Há várias evidências de que os babilônios (≈ 1600 a.e.C.¹) dominavam as ternas ditas serem de Pitágoras (números a , b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$) e podiam calcular raízes quadradas com aproximações de quaisquer ordens.

Para calcular as áreas de regiões limitadas por curvas, a dificuldade era maior. Encontrar a área do círculo foi um dos problemas que mais atraiu a atenção dos estudiosos de várias épocas. Algumas aproximações foram dadas para a área do círculo. A primeira aproximação, de acordo com Baron e Bos (1985, unidade 1, p. 12-13), encontrada na maioria das civilizações antigas, é dada por $3r^2$ (sendo r o raio do círculo). Para encontrar esta aproximação, consideramos Q_1 o quadrado inscrito em um círculo de raio r (figura 1.2). O lado (l) de Q_1 é a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos medindo r . Logo, pelo “Teorema de Pitágoras”, o lado deste quadrado vale $r\sqrt{2}$. Então, a área de Q_1 é igual a $l^2 = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2$. Agora, consideramos Q_2 o quadrado circunscrito ao mesmo círculo (figura 1.2). O lado deste quadrado é igual ao diâmetro do círculo, ou seja, $2r$. Logo, sua área mede $(2r)^2 = 4r^2$. Por fim, vamos calcular a média aritmética simples (*Med*) entre as áreas de Q_1 e Q_2 .

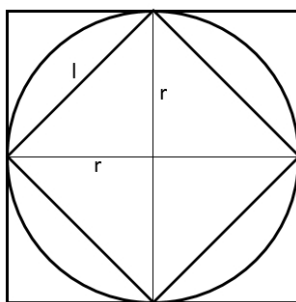
¹Usaremos ao longo do trabalho esta abreviação que significa “antes da era Comum” e é usada no lugar de “antes de Cristo”.

A média será dada por:

$$Med = \frac{2r^2 + 4r^2}{2} = \frac{6r^2}{2} = 3r^2$$

Isto justifica a medida utilizada, embora uma melhor aproximação para o valor da área do círculo pudesse ser encontrada.

Figura 1.2: Quadrados inscritos e circunscritos ao círculo de raio r



Fonte: Arquivo do autor

Ainda segundo Baron e Bos (1985, unidade 1, p. 13), no Egito antigo, foi utilizado algo “equivalente” à fórmula abaixo para calcular a área de um círculo (A):

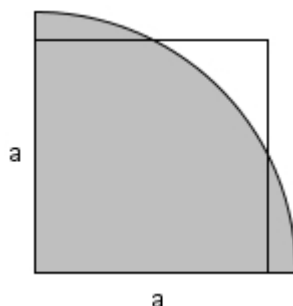
$$A = 4 \times \left(\frac{8}{9}r\right)^2 \quad (1.1)$$

Utilizaremos uma notação moderna para tentar explicar como esta civilização chegou à esta fórmula. Desenhemos um quadrante circular de raio r e um quadrado de lado a (figura 1.3), de modo que a área do quadrante circular seja igual à área do quadrado (a^2). Para o cálculo da área do quadrante circular, aplicamos a fórmula, como conhecemos hoje em dia, da área de um setor circular com ângulo central de 90° :

$$\pi r^2 \times \frac{90}{360} = \frac{\pi r^2}{4}$$

Consideramos agora $\pi = 3$, pois é a estimativa que encontramos ante-

Figura 1.3: Quadrante circular



Fonte: Arquivo do autor

riormente:

$$\frac{\pi r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$$

Como a área do quadrante circular é igual à área do quadrado (a^2), temos que

$$a^2 = \frac{3r^2}{4} \Rightarrow a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Consideramos $\sqrt{3} \approx 1,777\dots = 1\frac{7}{9} = \frac{16}{9}$. Logo,

$$a = \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{r \times \frac{16}{9}}{2} = \frac{16}{18}r = \frac{8}{9}r \Rightarrow a = \frac{8}{9}r$$

Então, a área do quadrado e, conseqüentemente, a área do quadrante circular é igual a

$$a^2 = \left(\frac{8}{9}r\right)^2$$

Como a área do círculo (A) de raio r é igual a quatro vezes a área do quadrante circular, chegamos então à fórmula 1.1 procurada

$$A = 4 \times a^2 \Rightarrow A = 4 \times \left(\frac{8}{9}r\right)^2$$

■

Podemos desenvolver esta fórmula e encontrar uma boa aproximação para o valor de π .

$$A = 4 \times \left(\frac{8}{9}r\right)^2 = 4 \times \frac{64}{81}r^2 = \frac{256}{81}r^2 = 3\frac{13}{81}r^2 \Rightarrow$$

$$A = \pi r^2, \text{ com } \pi = 3\frac{13}{81} \approx 3,1605$$

Ressaltamos que na época não eram utilizadas fórmulas e sim regras de cálculo que constavam como sendo “uma receita” geométrica para resolver o problema. Também destacamos que o símbolo π só passou a ser utilizado a partir do século XVIII, aparecendo pela primeira vez no trabalho de William Jones, de 1706, como podemos ver na figura 1.4.

Figura 1.4: Jones (1706), mostrando o símbolo π .

There are various other ways of finding the Lengths, or Areas of particular Curve Lines, or Planes, which may very much facilitate the Practice; as for Instance, in the Circle, the Diameter is to Circumference as 1 to

$$\frac{16}{5} - \frac{4}{239} - \frac{1}{3} \frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3} + \frac{1}{5} \frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5} - , \text{ \&c.} =$$

3.14159, \&c. = π . This Series (among others for the same purpose, and drawn from the same Principle) I receiv'd from the Excellent Analyst, and my much Esteem'd Friend Mr. John Machin; and by means thereof, Van Ceulen's Number, or that in Art. 64.38. may be Examin'd with all desirable Ease and Dispatch.

Fonte: <http://archive.org>

Ao longo deste capítulo, vimos algumas aproximações utilizadas por civilizações antes dos Gregos, para o cálculo da área do círculo e, consequentemente, para o valor de π . Primeiro, uma aproximação por falta, com $\pi = 3$.

Depois, uma aproximação por excesso, com $\pi \approx 3,1605$, que é uma ótima aproximação, considerando que $\pi \approx 3,14159$.

Aproximar um valor, seja por falta ou por excesso, já traz embutida a ideia de limite. Quanto melhor for a aproximação para o valor de π , mais próximos estamos do seu valor correto, ou seja, do limite para o valor de π .

CAPÍTULO 2: Um relato sobre a questão da soma infinita na Matemática Grega

Neste capítulo, vamos falar sobre algumas contribuições da Matemática Grega para os conceitos relacionados com “limite”. Muitas destas contribuições envolvem o limite de seqüências.

2.1 A Escola Pitagórica e os números figurados

Um matemático que costuma ser destacado na História da Matemática é Pitágoras de Samos (≈ 570 - 490 a.e.C.). De acordo com Baron e Bos (1985), ele fundou uma escola mística e filosófica em Crotona (colônia grega na península itálica): a escola Pitagórica.

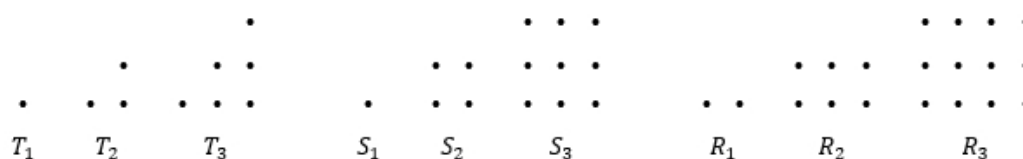
Segundo Baron e Bos (1985), o nosso conhecimento sobre esse matemático e sobre os que o seguiram até os tempos de Platão (≈ 347 a.e.C.) baseia-se especialmente em informações de terceiros (algumas vezes obtidas após muitos séculos). E, mesmo com informações por escrito, nunca se obtém as provas e os métodos originais.

Assim, de acordo com Baron e Bos (1985), na Escola Pitagórica, o número tinha um papel central. Eles chamavam um ponto de um, uma reta de dois, uma superfície de três, e um sólido de quatro. A partir daí, com um conjunto de pontos era possível formar retas, com um conjunto de retas,

superfícies e com um conjunto de superfícies, sólidos. E assim, somente com esses números, era possível construir o universo.

De acordo com Speusipo (século IV a.e.C.) apud Baron e Bos (1985, unidade 1, p. 16), os mais velhos seguidores de Pitágoras conheciam os números triangulares, quadrangulares, retangulares e outros números poligonais.

Figura 2.5: Representação dos números triangulares, quadrangulares, e retangulares



Fonte: Arquivo do autor

Em notação moderna, vamos nos referir à esses números como T , Q e R , respectivamente. Já as representações do somatório dos números T , Q e R , definiremos como sendo T_n , Q_n e R_n . Logo:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n \Rightarrow T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$Q_n = 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 \Rightarrow Q_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$R_n = 2 + 6 + 12 + \dots + n(n+1) \Rightarrow R_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

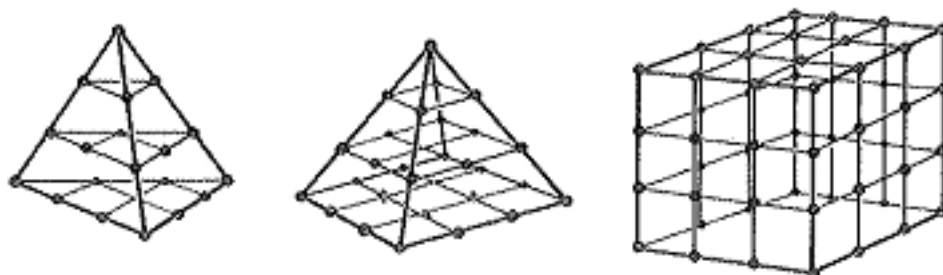
Para construções em três dimensões, utilizamos o somatório de T_n e Q_n para obter, respectivamente, pirâmides triangulares (ST_n) e pirâmides quadrangulares (SQ_n). Obtemos também cubos (C_n). A figura 2.6 ajuda a entender melhor estas construções.

Analisando os somatórios, temos que:

$$ST_1 = T_1 = 1 \quad ST_2 = T_1 + T_2 = 1 + 3 = 4$$

$$ST_3 = T_1 + T_2 + T_3 = 1 + 3 + 6 = 10$$

Figura 2.6: Representação das pirâmides triangulares, quadrangulares e dos cubos



Fonte: Baron e Bos

$$SQ_1 = S_1 = 1 \quad SQ_2 = S_1 + S_2 = 1 + 4 = 5$$

$$SQ_3 = S_1 + S_2 + S_3 = 1 + 4 + 9 = 14$$

$$C_1 = 1^3 = 1 \quad C_2 = 2^3 = 8 \quad C_3 = 3^3 = 27$$

Segundo Baron e Bos (1985), o conceito de números figurados, relacionado a coleções de unidades geometricamente arrumadas e disponíveis para se formar outras coleções, continha a semente da ideia dos “indivisíveis” que viria a ser explorada no século XVII, especialmente por Cavalieri. Isto ocorre pois, com a união de infinitos pontos podemos formar retas, com a união de infinitas retas podemos formar superfícies e com a união de infinitas superfícies (que seriam os “indivisíveis”) podemos formar sólidos. Através deste tipo de construção, podemos formar qualquer sólido e, o “limite” do somatório de todos os sólidos existentes será igual a todo universo.

2.2 Os indivisíveis

Segundo Baron e Bos (1985), a ideia dos elementos indivisíveis finitos encontrou na doutrina materialista do atomismo físico, surgida, em Abdera,

na Trácia (≈ 430 a.e.C.), uma grande ligação com o conceito de números dos pitagóricos. Leucipo foi quem formulou inicialmente a “teoria atômica”.

A palavra átomo vem do grego e significa “indivisível”. Na teoria atômica, o átomo era visto como a menor partícula da matéria, não podendo ser dividido. Podemos entender isto da seguinte maneira: escolhemos um objeto qualquer e o dividimos em partes cada vez menores, até que ele não possa mais ser dividido. Este seria o átomo.

De acordo com Baron e Bos (1985, unidade 1, p. 20), Demócrito (≈ 400 a.e.C.), discípulo de Leucipo, não aceitava a ideia dos indivisíveis da matemática. Segundo Boyer (2010, p. 59), os problemas matemáticos que mais interessavam a Demócrito eram aqueles que exigiam alguma forma de tratamento infinitesimal. Arquimedes de Siracusa ($\approx 287-212$ a.e.C.) atribuiu à Demócrito proposições importantes, tais como:

- i) o volume de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma de mesma base e altura.
- ii) o volume de um cone é igual a $\frac{1}{3}$ do volume de um cilindro de mesma base e altura.

Plutarco ($\approx 46-120$) apud Baron e Bos (1985, unidade 1, p. 20), historiador e geógrafo grego, cita um dilema proposto por Demócrito em relação às seções paralelas de um cone.

Se cortamos um cone por um plano paralelo à base (plano bem próximo à base), o que podemos dizer das superfícies que formam as seções? Elas são iguais ou diferentes? Se elas são diferentes, elas tornarão o cone irregular, cheio de dentes, como degraus, e imparidades; mas se elas são iguais, as seções serão iguais, e parece que o cone terá a propriedade do cilindro de ser constituído por círculos iguais e não diferentes: o que é um grande absurdo.

O dilema utiliza o método da exaustão (absurdo duplo). Ao partirmos um cone por planos bem finos paralelos à base, ou esses planos são diferentes entre si ou são iguais (áreas iguais).

Figura 2.7: Heath (1921), citando o dilema de Demócrito

‘If’, said Democritus, ‘a cone were cut by a plane parallel to the base [by which is clearly meant a plane indefinitely near to the base], what must we think of the surfaces forming the sections? Are they equal or unequal? For, if they are unequal, they will make the cone irregular as having many indentations, like steps, and unevennesses; but, if they are equal, the sections will be equal, and the cone will appear to have the property of the cylinder and to be made up of equal, not unequal, circles, which is very absurd.’

Fonte: <http://archive.org>

- i) Se os planos são diferentes entre si, então o cone na verdade é formado por inúmeras fatias finas com diâmetros diferentes. Isto dá ao cone um formato com degraus, não um formato liso como imaginamos. Portanto, não se trata de um cone.
- ii) Se os planos são iguais entre si, então o cone, na verdade, tem a propriedade de um cilindro.

Nos dois casos temos um absurdo e, portanto, o cone não pode nem existir.

Ao analisarmos o dilema, devemos deixar de lado o conceito moderno de limite e evitar qualquer noção do “infinitamente pequeno” e do “infinitamente grande”.

O conceito de sólido constituído de (infinitas?) seções planas paralelas à base gerou frutos: sólidos em que as seções correspondentes têm áreas iguais, determinam sólidos iguais, ou seja, com volumes iguais. Arquimedes usou tais conceitos em seu tratado e Cavalieri, no século XVII, demonstrou um teorema, usando considerações semelhantes.

2.3 Alguns paradoxos de Zenão

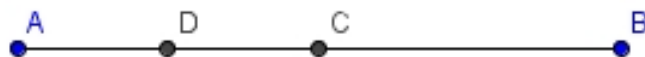
Zenão de Eleia (≈ 460 a.e.C.) utilizou-se do espaço e do tempo para propor seus paradoxos. Em seu argumento, haveria duas possibilidades para o espaço e o tempo:

- i) serem ambos infinitamente divisíveis;
- ii) não serem infinitamente divisíveis (indivisíveis).

Nos dois primeiros paradoxos apresentados (Dicotomia e Aquiles), supomos o espaço e o tempo infinitamente divisíveis. Já nos dois últimos paradoxos apresentados (Flecha e Estádio), supomos que o espaço e o tempo não são infinitamente divisíveis. Vejamos os paradoxos a seguir:

- Dicotomia - A suposição é de que o espaço e o tempo são infinitamente divisíveis. Portanto, para que possamos ir de um ponto A até um ponto B (sendo A e B quaisquer), devemos primeiro chegar até C, sendo C a metade da distância entre A e B. Mas para chegar até C, devemos primeiro chegar até D, sendo D a metade da distância entre A e C. Seguindo este argumento “infinitamente”, chegamos à conclusão de que o movimento entre A e B seria impossível. Podemos representar este paradoxo como uma sequência de termos em uma Progressão Geométrica de razão $\frac{1}{2}$ com primeiro termo igual a d (distância entre A e B). Neste caso, a sequência seria a seguinte: $d, \frac{d}{2}, \frac{d}{4}, \frac{d}{8}, \dots, \frac{d}{n}$. Se aplicarmos o conceito moderno de limite com n tendendo a ∞ , ou seja, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d}{n}$, teremos como resultado o valor 0, confirmando que o movimento entre A e B “tende” a não existir. Mas, sabemos que o movimento entre A e B é possível. Então, a suposição inicial é falsa e o espaço e o tempo não são infinitamente divisíveis.
- Aquiles - Novamente aqui a suposição é de que o espaço e o tempo são infinitamente divisíveis. Imagine então uma corrida entre um certo guerreiro chamado Aquiles e uma tartaruga. Suponha que a corrida seja de

Figura 2.8: Representação do paradoxo da Dicotomia



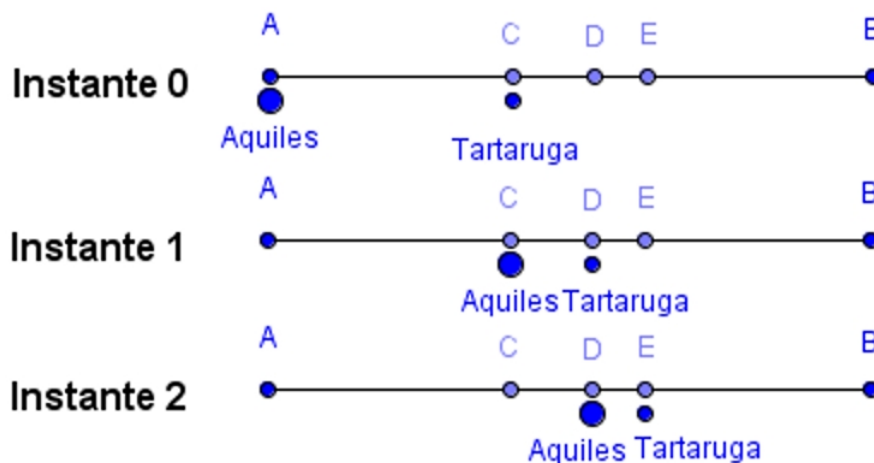
Fonte: Arquivo do autor

um ponto A até um ponto B (sendo A e B quaisquer). Como Aquiles é, supostamente, mais veloz que a tartaruga, ele foi generoso e deixou a tartaruga começar a corrida à sua frente, num ponto C, entre A e B (Instante 0). Começada a corrida, quando Aquiles alcançar o ponto C, a tartaruga já terá caminhado um pouco e estará em um ponto D, à frente de C (Instante 1). Quando Aquiles alcançar o ponto D, a tartaruga já estará em um ponto E, à frente de D (Instante 2). Repetindo estes argumentos “infinitamente”, Aquiles nunca alcançará a tartaruga, pois sempre que Aquiles chegar ao ponto onde a tartaruga estava no instante anterior, a tartaruga já não estará mais lá e sim em um ponto à frente do ponto anterior. Isto é um absurdo, pois sabemos que se Aquiles é mais rápido do que a tartaruga, em algum instante ele irá alcançar a tartaruga e, em outro instante, irá ultrapassá-la. O absurdo vem de supormos que o espaço e o tempo são infinitamente divisíveis. Então, a suposição inicial é falsa e o espaço e o tempo não são infinitamente divisíveis.

Agora, a suposição é que o espaço e o tempo não são infinitamente divisíveis. Sendo assim, existe uma menor unidade de espaço (um ponto) e uma menor unidade de tempo (um instante).

- Flecha - No lançamento de uma flecha, suponha que ela esteja em um determinado ponto em determinado instante. Neste instante, a flecha não pode estar em movimento, pois ela não pode estar em dois lugares no mesmo instante. Logo, a flecha só pode estar em repouso. Mas se ela estiver em repouso, como tomamos ponto e instante aleatoriamente, então ela estará sempre em repouso e o movimento de lançamento da flecha não pode existir.

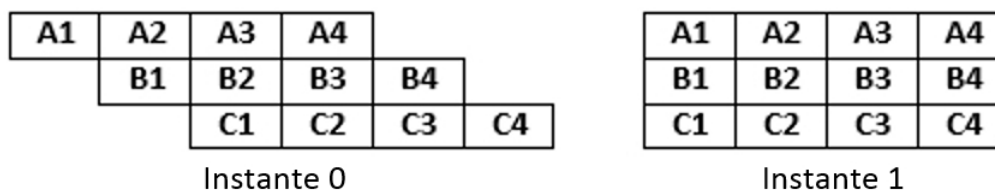
Figura 2.9: Representação do paradoxo de Aquiles



Fonte: Arquivo do autor

- Estádio - Imagine um conjunto de blocos A , B e C , todos do mesmo tamanho. Os blocos A movem-se um espaço para a direita em cada instante, os blocos B permanecem imóveis e os blocos C movem-se um espaço para a esquerda em cada instante. No instante 0, A_4 está posicionado logo acima de C_2 . Um instante após (Instante 1), A_4 passa a estar posicionado acima de C_4 . Logo, em relação ao bloco C , o bloco A moveu dois espaços em um único instante, o que é um absurdo.

Figura 2.10: Representação do paradoxo do Estádio de Zenão



Fonte: Arquivo do autor

Podemos entender a estrutura dos paradoxos de Zenão em termos de símbolos de lógica. Na lógica clássica, pelo “Princípio do terceiro excluído”,

dada uma proposição p , ou ela é verdadeira, ou a sua negação, que escrevemos como $\sim p$ (lê-se “não p ”), é verdadeira, ou seja, $p \vee \sim p$ (lê-se “ p ou não p ”). Temos ainda, pelo “Princípio da não-contradição”, que uma proposição p não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo, ou seja, $p \wedge \sim p$ (lê-se “ p e não p ”) é falso.

Seja p a proposição “espaço e tempo são infinitamente divisíveis” e q a proposição “há movimento”. Sendo assim, temos duas possibilidades para o espaço e o tempo: “espaço e tempo são infinitamente divisíveis” ou “espaço e tempo não são infinitamente divisíveis” ($p \vee \sim p$).

- 1- De acordo com os dois primeiros paradoxos de Zenão (Dicotomia e Aquiles), quando supomos que espaço e tempo são infinitamente divisíveis, chegamos à conclusão de que não há movimento, ou seja, $p \Rightarrow \sim q$ (Se espaço e tempo são infinitamente divisíveis, então não há movimento). Mas sabemos que há movimento (q). Usamos agora a “contrapositiva”, que consiste em escrever a expressão lógica inicial de uma maneira equivalente e funciona da seguinte maneira: se “ $p \Rightarrow \sim q$ ” é verdadeira, então “ $q \Rightarrow \sim p$ ” também é verdadeira. Logo, se há movimento, então espaço e tempo não são infinitamente divisíveis ($\sim p$).
- 2- No paradoxo da Flecha, quando supomos que espaço e tempo não são infinitamente divisíveis, chegamos também à conclusão de que não há movimento ($\sim p \Rightarrow \sim q$). Mas sabemos que há movimento (q). Usamos novamente a “contrapositiva”: se “ $\sim p \Rightarrow \sim q$ ” é verdadeira, “ $q \Rightarrow p$ ” também é verdadeira. Logo, se há movimento, então espaço e tempo são infinitamente divisíveis (p).

Neste caso, chegamos a um absurdo: do item 2, temos que “espaço e tempo são infinitamente divisíveis” e, do item 1, temos que “espaço e tempo não são infinitamente divisíveis” ($p \wedge \sim p$). Pelo “Princípio da não-contradição”, estas duas situações não podem ocorrer simultaneamente. Logo, algo está errado e precisamos mudar ou até mesmo descartar: ou a suposição inicial de que o espaço e o tempo são ou não infinitamente divisíveis, ou a nossa ideia de movimento ou a forma de dedução lógica utilizada.

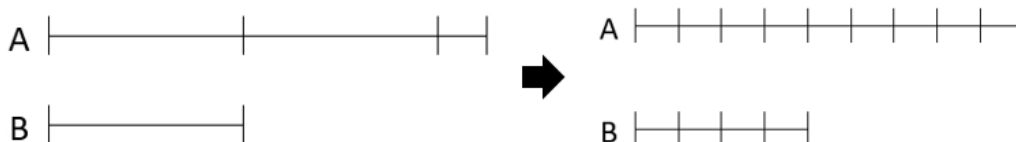
Isto evidencia uma questão bem discutida nessa época: como algo pode ser e não ser ao mesmo tempo? Como solucionar essa questão?

Essa discussão continuou por muito tempo. Somente com a definição do infinito, dada por Georg Cantor (1845 – 1918), no final do século XIX, é que essa discussão foi parcialmente resolvida.

2.4 O problema dos incomensuráveis e os números irracionais: outra questão do infinito

Ao medirmos dois segmentos quaisquer, procuramos uma unidade (u) comum a ambos para sabermos quantas vezes u cabe em cada segmento e estabelecemos a razão entre eles. Neste caso, dizemos que os segmentos são comensuráveis.

Figura 2.11: Representação de segmentos comensuráveis



Fonte: Arquivo do autor

Como exemplo, tomamos dois segmentos A e B, tais que $A = 9$ cm e $B = 4$ cm. Se definirmos a unidade como $u = 4$ cm, temos que u cabe 1 vez inteira no segmento B e cabe 2 vezes inteiras no segmento A, mas restará um “pedaço” (menor do que u) a ser medido. Para resolvermos isto, tomamos a unidade como sendo um quarto do segmento B, ou seja, $u = 1$ cm. Neste novo cenário, a unidade u caberá 4 vezes inteiras no segmento B e 9 vezes inteiras no segmento A. Encontramos então, uma unidade u para mensurar os dois segmentos e podemos dizer que o segmento A está para o segmento B na razão de 9 para 4. A figura 2.11 ilustra este processo.

De acordo com Roque e Pitombeira (2012, p. 73), é deste tipo de comparação que surgem os números racionais, que trazem associados a ideia de razão.

Porém, nem sempre dois segmentos são comensuráveis. Neste caso, dizemos que os segmentos são incomensuráveis.

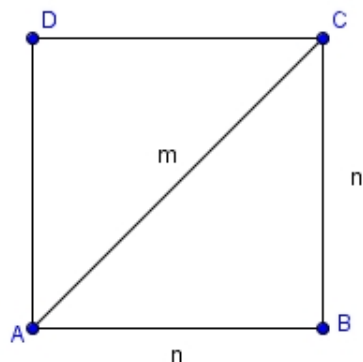
Há muita lenda em torno da descoberta dos incomensuráveis. Segundo Baron e Bos (1985, unidade 1, p. 25), não se sabe exatamente quando a Escola Pitagórica tomou conhecimento da existência de grandezas que não poderiam ser comparadas por meio de números inteiros. Comenta-se que um tal de Hipasus de Metapontum (≈ 400 a.e.C.) foi expulso da vizinhança e depois afogado no mar como punição por ter dito que descobriu tais grandezas. Para Roque e Pitombeira (2012, p. 76), apesar de haver muita lenda em torno da descoberta dos incomensuráveis e, em particular, sobre a crise que isso teria provocado, podemos afirmar que a descoberta da incomensurabilidade não provocou uma crise nos fundamentos da Matemática, mas foi uma descoberta interessante que motivou novos desenvolvimentos matemáticos.

Um exemplo clássico da prova dos incomensuráveis, citado por Baron e Bos (1985), é uma demonstração, atribuída a Aristóteles, de que a diagonal e o lado de um quadrado são incomensuráveis. A demonstração é feita “por absurdo” e utilizamos uma notação moderna para representá-la.

Em um quadrado ABCD (figura 2.12), consideramos o lado AB e a diagonal AC. Vamos supor que AB e AC são comensuráveis. Logo, podemos estabelecer uma razão entre eles: $\frac{AC}{AB} = \frac{m}{n}$. Como a razão entre m e n é uma fração irredutível, m e n não podem ser simultaneamente pares.

Temos que $AC^2 = AB^2 + BC^2$, mas como $AB = BC$, então $AC^2 = AB^2 + AB^2 \Rightarrow AC^2 = 2AB^2$. Portanto, $\frac{AC^2}{AB^2} = 2 = \frac{m^2}{n^2}$, logo $m^2 = 2n^2$. Com isso, vemos que m^2 é par, logo m é par. Se m é par, podemos escrevê-lo como $m = 2k$. Assim, temos que $m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2$. Então, n^2 é par e n também é par, o que é um absurdo, pois m e n não podem ser simultaneamente pares. O absurdo veio de supormos que AB e AC são comensuráveis. Logo, AB e AC são incomensuráveis. Concluimos então, que a diagonal e o lado de um quadrado são sempre incomensuráveis.

Figura 2.12: Quadrado utilizado na demonstração dos incomensuráveis



Fonte: Arquivo do autor

Vemos então, que não é possível representar todas as quantidades contínuas (como segmentos de reta) utilizando apenas números inteiros ou razões entre números inteiros (números racionais). Certas quantidades, como a diagonal de um quadrado, a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado, o número π , podem ser apenas estimadas, comparadas com números racionais. As estimativas usadas podem representar boas aproximações, seja por falta ou por excesso, para o valor destas quantidades incomensuráveis. Porém, só poderíamos encontrar o valor exato destas quantidades se buscássemos “infinitamente”, aproximações cada vez mais precisas, ou seja, o “limite” destas aproximações resultaria no valor exato.

Segundo Baron e Bos (1985, unidade 1, p. 26), com os incomensuráveis, a matemática dos gregos distanciou-se da ênfase em aritmética da Escola Pitagórica e tornou-se inteiramente geométrica, sendo sua preferência, em termos de operações, centrada na “teoria da proporção”.

2.5 Algumas contribuições de “Os Elementos”

De acordo com os historiadores, é atribuído a Euclides (≈ 300 a.e.C.) a autoria da obra “Os Elementos”, um livro de impacto para a Matemática, pois

Em certo sentido os Elementos de Euclides são a mais importante obra na história da matemática. Tornaram-se quase num símbolo do que significa o próprio raciocínio matemático, pois, embora se recolham muitos resultados conhecidos, a estruturação e o rigor lógico com que as matérias são apresentadas é inovadora. A sua importância transcendeu inclusivamente a matemática, a ponto de o desenvolvimento lógico de tipo euclidiano se ter tornado numa ambição de muitas outras disciplinas. O impacto desta obra foi tal que durante cerca de 2000 anos os Elementos de Euclides foram a obra fundamental em todos os estudos de matemática (NUNES, apud LEITÃO, 2002, p. 163).

Tal livro conta com 13 capítulos chamados de “Livros”, que segundo Nunes apud Leitão (2002), podem ser divididos em quatro blocos:

1. Geometria Plana Elementar - Livros I ao VI;
2. Aritmética e Teoria dos Números - Livros VII ao IX;
3. Grandezas Irracionais (Incomensuráveis) - Livro X;
4. Geometria dos Sólidos (Espacial) - Livros XI ao XIII.

De acordo com Baron e Bos (1985), a estrutura axiomática da matemática grega estabeleceu-se com “Os Elementos” e uma grande parte dos livros desta obra deve-se à antiga Escola Pitagórica, da qual Eudoxo ($\approx 408-355$ a.e.C.) contribuiu com a maior parte. Tal obra unificou uma coleção completa de teoremas isolados, colocando-os sob um sistema simples e dedutivo, baseado em postulados iniciais, definições e axiomas. Para Roque e Pitombeira (2012, p. 82), “Os Elementos” não podem ser vistos apenas como uma compilação, pois, além de conter resultados originais, o livro propõe um tratamento sistemático e uniforme da Matemática grega básica.

Baron e Bos (1985) comenta que toda a “teoria de número” dos gregos é incorporada na estrutura geométrica e que todos os conceitos impossíveis de serem expressos nesses termos são logo eliminados, sem nunca se invocar o infinito. Aristóteles (≈ 387 -322 a.e.C.) apud Baron e Bos (1985, unidade 1, p. 27) comenta sobre o infinito presente nesta época grega: “Na realidade, eles não precisam e nem usam o infinito. Eles apenas postulam que a linha reta pode ser estendida como quiserem”.

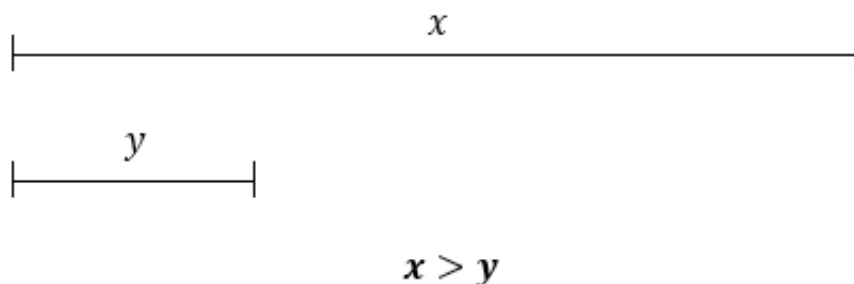
Ainda sobre o infinito, Aristóteles apud Baron e Bos (1985, unidade 1, p. 27) pensa ser desnecessária a ideia do infinitamente grande ou infinitamente pequeno, porque:

Se adicionarmos continuamente a uma quantidade finita, excederemos qualquer grandeza dada e, do mesmo modo, se subtrairmos continuamente dela chegaremos a alguma coisa menor do que ela.

Na fala de Aristóteles, o termo “continuamente” pode ser substituído, sem prejuízo algum, por “infinitamente”, no sentido de adicionarmos ou retirarmos de determinada quantidade, o quanto quisermos ou o quanto for preciso.

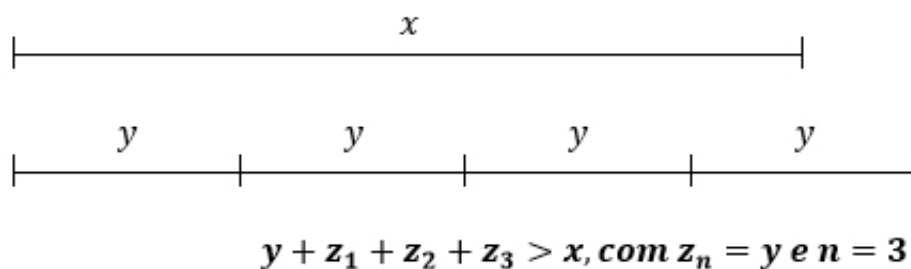
Em outras palavras, se temos grandezas x , y , z_n e t_m (com $n, m \in \mathbb{N}$), representadas por segmentos de reta, com $x > y$ (figura 2.13) e z_n e t_m tomados de forma conveniente, podemos:

Figura 2.13: Segmentos x e y



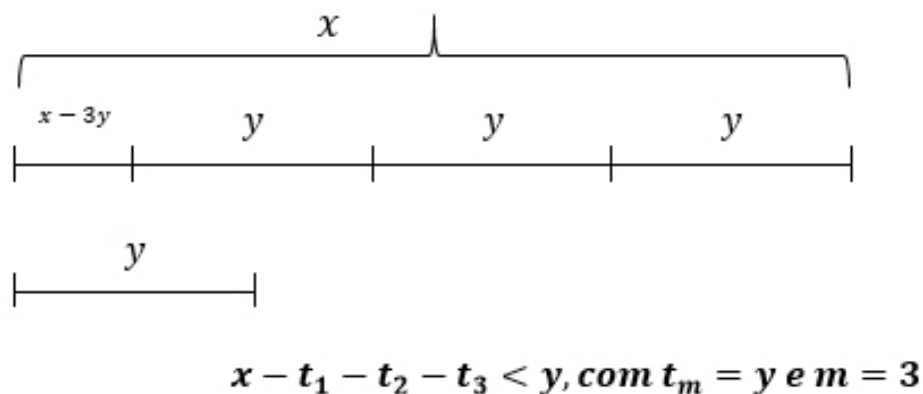
Fonte: Arquivo do autor

- aumentar a grandeza y , “continuamente” outras grandezas z_n , até um valor n que faça com que $y + z_1 + z_2 + \dots + z_n > x$ (figura 2.14);

Figura 2.14: Segmento y aumentado

Fonte: Arquivo do autor

- diminuir da grandeza x , “continuamente” outras grandezas t_m , até um valor m que faça com que $x - t_1 - t_2 - \dots - t_m < y$ (figura 2.15).

Figura 2.15: Segmento x diminuído

Fonte: Arquivo do autor

No Livro V de Euclides (2009), as definições² 3 e 4 explicam o que era entendido por razão (lembrando que nessa época o pensamento matemático era baseado na geometria):

²Usaremos os mesmos números das definições para não perdermos a originalidade.

- Definição 3 - Uma razão é a relação de certo tipo concernente ao tamanho de duas magnitudes de mesmo gênero.
- Definição 4 - Magnitudes são ditas ter uma razão entre si, aquelas que multiplicadas podem exceder uma a outra.

As definições nos dizem que somente magnitudes (grandezas) de mesmo gênero (natureza) poderiam ter uma relação entre si. Sendo assim, só poderíamos relacionar segmentos de reta com segmentos de reta, figuras planas com figuras planas e sólidos com sólidos, ou seja, só poderíamos relacionar entre si grandezas de mesma dimensão. De acordo com Baron e Bos (1985), esta restrição dimensional persistiu até o final do século XVII.

Ainda de acordo com Baron e Bos (1985), a definição 4 é extremamente importante e foi muito utilizada por Arquimedes, tanto que é conhecida como “axioma de Arquimedes” ou “axioma de Arquimedes-Eudoxo”.

Apresentamos a seguir uma proposição (e sua demonstração) que utiliza a definição 4 (Proposição I do Livro X de Euclides (2009)):

Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta.

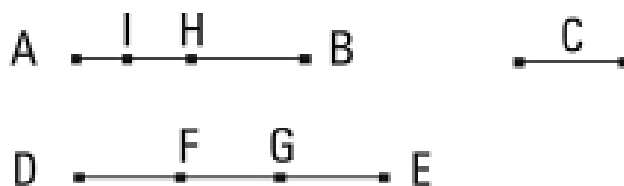
Sejam as duas magnitudes AB , C desiguais, das quais a AB é maior; digo que, caso da AB seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, será deixada alguma magnitude que será menor do que a magnitude C .

Pois, a C , sendo multiplicada, será, alguma vez, maior do que a AB . Fique multiplicada, e seja a DE , por um lado, um múltiplo de C , e, por outro lado, maior do que a AB , e fique dividida a DE nas DF , FG , GE iguais à C , e fique subtraída, por um lado, da AB a BH , maior do que a metade, e, por outro lado, da AH , a HI , maior do que a metade, e isso aconteça sempre, até que as divisões no AB se tornem iguais em quantidade às divisões no DE .

Sejam, de fato, as AI , IH , HB divisões que são iguais em quantidade às DF , FG , GE ; e, como a DE é maior que a AB , e foi subtraída da DE a EG , menor do que a metade, ao passo que da AB , a BH , maior do que a metade, portanto, a GD restante é maior que a HA restante. E, como a GD é maior do que a HA , e foi subtraída da GD a metade GF , ao passo que da HA , a HI , maior do que a metade, portanto, a DF restante é maior do que a AI restante. Mas a DF é igual à C ; portanto, também a C é maior do que a AI . Portanto, a AI é menor do que a C .

Portanto, foi deixada da magnitude AB a magnitude AI que é menor do que a menor magnitude exposta C ; o que era preciso provar. E do mesmo modo, será provado também, caso as coisas subtraídas sejam a metade (EUCLIDES, 2009, p. 354).

Figura 2.16: Segmentos utilizados para demonstrar a Proposição I



Fonte: Euclides

Consideramos os segmentos representados na figura 2.16 e apresentamos uma interpretação, usando notação usual, da demonstração da Proposição I do Livro X.

Temos que $AB > C$. A definição 4 nos garante que podemos multiplicar o segmento C até encontrar uma grandeza $nC > AB$. Neste caso, n é igual a 3. Seja então $DE = 3C > AB$. O segmento DE está dividido em três partes (DF , FG e GE), todas com tamanho igual a C .

Particionamos o segmento AB , também em 3 partes. Primeiro, dividimos AB pelo ponto H de modo que

$$AH < \frac{1}{2}AB$$

Depois, dividimos o segmento AH pelo ponto I , de modo que

$$AI < \frac{1}{2}AH < \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2^2}AB$$

Como $DE > AB$, temos que

$$DG = \frac{2}{3}DE > \frac{2}{3}AB > \frac{1}{2}AB > AH \Rightarrow DG > AH$$

e, conseqüentemente,

$$DF = \frac{1}{2}DG > \frac{1}{2}AH > AI \Rightarrow DF > AI$$

Mas, como $DF = C \Rightarrow C > AI$, ou seja, de AB conseguimos encontrar um segmento AI que é menor do que C .

Partimos da desigualdade $AB < nC$ e subtraímos de AB , segmentos a_1, a_2, \dots, a_n (todos maiores do que a metade do que restou do segmento AB) até obtermos um segmento menor do que C :

$$AB - a_1 < AB - \frac{AB}{2} < (n-1)C$$

$$AB - a_1 - a_2 < AB - \frac{AB}{2} - \frac{AB}{2^2} < (n-2)C$$

⋮

$$AB - a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1} < AB - \frac{AB}{2} - \frac{AB}{2^2} - \dots - \frac{AB}{2^{n-1}} < (n - (n-1))C = C$$

Podemos aumentar o valor de n “infinitamente”, até conseguirmos que

$$AB - \frac{AB}{2} - \frac{AB}{2^2} - \dots - \frac{AB}{2^{n-1}} = AB \times \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \right)$$

e, conseqüentemente,

$$AB - a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1}$$

fique menor do que qualquer grandeza C considerada.

Isto acontece porque “tende” ao valor 1 a soma dos termos da progressão geométrica finita

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Chegamos a esse valor calculando a soma dos termos (S_n) de uma progressão geométrica finita, com primeiro termo $a_1 = \frac{1}{2}$ e razão $q = \frac{1}{2}$

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

e depois aplicando o conceito de “limite”, com $n \rightarrow +\infty$. Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

De acordo com Baron e Bos (1985), a maneira como é demonstrada originalmente a Proposição I tenta evitar a ideia do “infinito”. No entanto, mesmo usando uma linguagem não familiar, é um método efetivo para manipular operações com limites sem nenhuma formalização atual.

Em “Os Elementos”, segundo Roque e Pitombeira (2012, p. 102), acredita-se que os Livros VII a IX sejam os mais antigos e há indícios de que os Livros I ao IV tenham sido escritos após a descoberta dos incomensuráveis.

Segundo Baron e Bos (1985), é atribuído a Eudoxo o papel de escrever a teoria das proporções com rigor matemático da época.

No Livro VII de Euclides (2009), as proposições 19 e 20 nos falam sobre a proporcionalidade entre números. Vejamos primeiramente a Proposição 19.

Caso quatro números estejam em proporção, o número produzido do primeiro e quarto será igual ao número produzido do segundo e terceiro; e caso o número produzido do primeiro e quarto seja igual ao do segundo e terceiro, os quatro números estarão em proporção (EUCLIDES, 2009, p. 283).

Esta proposição nos diz que, dados quatro números a , b , c e d , nesta ordem, para que estes estejam em proporção é preciso que seja válida a igualdade $a.d = b.c$ (Relação de proporcionalidade).

Já a Proposição 20 nos diz que “os menores números dos que têm a mesma razão com eles medem os que têm a mesma razão, o mesmo número de vezes, tanto o maior, o maior quanto o menor, o menor” (EUCLIDES, 2009, p. 284).

Para entendermos esta proposição, tomemos quatro números a , b , c e d , nesta ordem, em proporção. Então, pela Proposição 19, $a.d = b.c$. Sejam $a \leq d$ e $b \leq c$. Logo, o número de vezes que a mede c é o mesmo número de vezes que b mede d , ou seja, a está para c assim como b está para d . Em notação moderna temos

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

No Livro VI de Euclides (2009), a proposição 16 fala sobre a proporcionalidade entre segmentos de reta.

Caso quatro retas estejam em proporção, o retângulo contido pelos extremos é igual ao retângulo contido pelos meios, e caso o retângulo contido pelos extremos seja igual ao retângulo contido pelos meios, as quatro retas estarão em proporção (EUCLIDES, 2009, p. 246).

Esta proposição utiliza a relação de proporcionalidade da Proposição 19, Livro VII.

Dadas quatro retas, em proporção, AB , CD , E e F , temos que

$$AB.F = CD.E$$

Então, se construirmos dois retângulos, um com lados AB e F e outro com lados CD e E , suas áreas serão iguais, pois as retas estão em proporção.

A Proposição 5 do Livro X de Euclides (2009) nos diz que “as magnitudes comensuráveis têm entre si uma razão que um número, para um número” (EUCLIDES, 2009, p. 358).

De acordo com Roque e Pitombeira (2012, p. 102-103), as diferentes definições de proporção, para grandezas e números, são reconciliadas pela Proposição 5. Porém, no caso incomensurável, as definições de proporção pela igualdade de razões não são mais aceitas como definições e passam a ser válidas apenas para o caso particular de grandezas comensuráveis.

Então, como a razão entre duas grandezas incomensuráveis não pode ser associada à razão de suas medidas, segundo Roque e Pitombeira (2012, p. 104), Eudoxo introduziu a noção de razão de grandezas, onde o conceito de razão tem uma natureza puramente geométrica. Isto porque uma razão entre grandezas não é igual a uma razão entre números, mesmo que a segunda seja um caso particular da primeira (quando as grandezas são comensuráveis).

Esse conceito de razões entre grandezas (comensuráveis ou não) foi importante nas tentativas de “quadrar” algumas curvas, entre elas o círculo e a parábola e, principalmente, nas tentativas feitas por Hipócrates para “quadrar” algumas lúnulas.

CAPÍTULO 3: Alguns trabalhos de Arquimedes e um pouco da Matemática Grega após Euclides

As figuras geométricas contidas em “Os Elementos” podem ser construídas utilizando-se apenas régua e compasso. Mas, segundo Roque e Pitombeira (2012, p. 132), estas construções não permitem resolver todos os problemas tratados pelos matemáticos gregos. Para isso, foram utilizados também outros métodos de construção, ou empregadas outras curvas. Curvas estas, que ajudaram a resolver os chamados problemas clássicos da matemática grega: a trisseção do ângulo, a quadratura do círculo e a duplicação do cubo.

Ainda, segundo Roque e Pitombeira (2012, p. 133-134), a partir de Arquimedes ($\approx 287 - 212$ a.e.C.), podemos estudar outros métodos da geometria grega que se diferenciam dos métodos euclidianos. Como exemplo disso, Arquimedes demonstrou alguns resultados de modo puramente mecânico e outros resultados utilizando mecânica e geometria.

3.1 O Problema da quadratura

De acordo com Baron e Bos (1985), é possível através de uma sequência de transformações geométricas, reduzir qualquer figura poligonal plana a um triângulo com área igual. A partir daí, podemos transformar o triângulo em um paralelogramo, o paralelogramo em um retângulo e, finalmente, o retângulo

em um quadrado, todos com área igual à do triângulo. Então, qualquer figura poligonal plana pode ser reduzida a um quadrado com área igual.

Já, ainda segundo Baron e Bos (1985), o problema da quadratura para figuras curvas foi muito difícil e regiões com formatos lunares (lúnulas) deram origem às primeiras tentativas de determinação de áreas de figuras curvas. Vejamos uma proposição que nos ajuda a verificar se determinada lúnula é “quadrável” ou não.

A Proposição 2 do Livro XII de Euclides (2009), nos diz que “os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros” (EUCLIDES, 2009, p. 528). Esta proposição é devida a Hipócrates de Quios (≈ 430 a.e.C.) apud Baron e Bos (1985) e é importante também para a “quadratura” de círculos.

Em outras palavras, a proposição 2 nos diz que dados dois círculos C_1 e C_2 , com diâmetros d_1 e d_2 , respectivamente, temos que a área do círculo 1 está para a área do círculo 2, assim como o quadrado do diâmetro do círculo 1 está para o quadrado do diâmetro do círculo 2, ou seja,

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

Em notação usual podemos verificar esta relação de proporcionalidade. Sejam r_1 e r_2 , respectivamente, os raios de C_1 e C_2 . Utilizando a fórmula para o cálculo da área de um círculo e o fato do diâmetro ser igual a duas vezes o valor do raio temos que

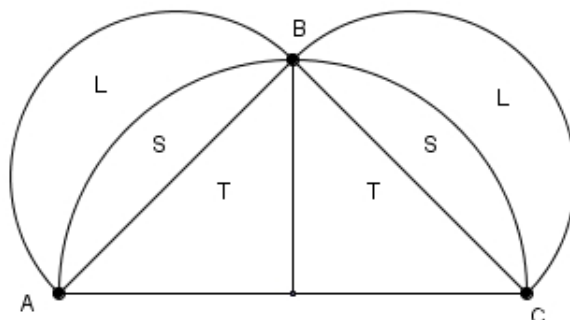
$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{e} \quad \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{(2r_1)^2}{(2r_2)^2} = \frac{4r_1^2}{4r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

Apresentamos um exemplo simples e vamos descobrir se uma determinada lúnula é “quadrável” ou não.

Consideramos um triângulo retângulo isósceles ABC, com ângulo reto em B, inscrito em um semicírculo de diâmetro AC. Traçamos outros dois semicírculos com diâmetros AB e BC. Veja a construção na figura 3.17.

Como o triângulo ABC é retângulo e $AB = BC$, usando o “Teorema de

Figura 3.17: Lúnulas



Fonte: Arquivo do autor

Pitágoras”, temos que

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + AB^2 = 2AB^2 \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1}{2}$$

Utilizando a Proposição 2 que acabamos de ver, o semicírculo com diâmetro AB (S_{AB}) está para o semicírculo com diâmetro AC (S_{AC}), assim como AB^2 está para AC^2 , ou seja,

$$\frac{S_{AB}}{S_{AC}} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

logo

$$\frac{S_{AB}}{S_{AC}} = \frac{1}{2}$$

Mas, de acordo com a figura 3.17, vemos que $S_{AB} = L + S$ e $S_{AC} = 2S + 2T$, portanto,

$$\frac{S_{AB}}{S_{AC}} = \frac{L + S}{2S + 2T} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2L + 2S = 2S + 2T \Rightarrow 2L = 2T \Rightarrow L = T$$

■

Então, a área da lúnula (L) é igual à área do triângulo (T). A área do triângulo é mais fácil de calcular do que a área da lúnula. Como o triângulo

ABC é retângulo isósceles, a altura relativa à hipotenusa AC, que também é a altura do triângulo com área T, é igual à metade do segmento AC. Portanto, o triângulo com área T é isósceles, com base e altura iguais a $\frac{AC}{2}$. Logo, temos que

$$T = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\frac{AC}{2} \times \frac{AC}{2}}{2} \Rightarrow T = \frac{AC^2}{8}$$

Para “quadrarmos” esta lúnula, basta então considerarmos um quadrado com área igual a T. Portanto, a lúnula é “quadrável” e sua área é igual a de um quadrado com lados iguais a

$$\sqrt{T} = \sqrt{\frac{AC^2}{8}} = \frac{AC}{2\sqrt{2}} = \frac{AC\sqrt{2}}{4}$$

É importante observar que os cálculos aqui apresentados são atuais. Para “quadrar” da forma como os gregos faziam, deveríamos construir, de preferência com régua e compasso, o quadrado com a medida do lado encontrada.

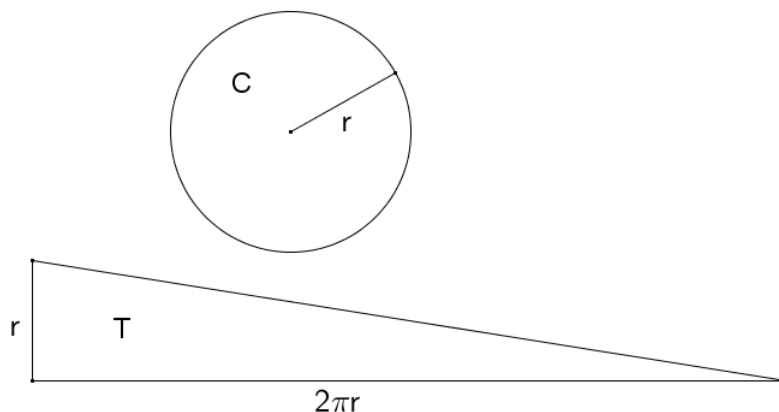
Mas nem toda lúnula é “quadrável”. Segundo Baron e Bos (1985), mesmo sem podermos inferir detalhes precisos sobre os trabalhos de Hipócrates, parece que ele estava no caminho certo para mostrar que algumas lúnulas eram “quadráveis” e outras não. Porém, ele “não conseguiu dar nenhuma contribuição a mais para resolver o problema da quadratura do círculo” (BARON E BOS, 1985, unidade 1, p. 34).

3.2 A Quadratura do Círculo

Arquimedes, na Proposição I de seu trabalho “Medição do Círculo”, nos fala que

A área de um círculo é igual à do triângulo retângulo no qual um dos lados que formam o ângulo reto é igual ao raio e o outro lado que forma o ângulo reto é a circunferência deste círculo (ARQUIMEDES apud ROQUE E PITOMBEIRA, 2012, p. 115).

Figura 3.18: Triângulo com área igual à do círculo



Fonte: Arquivo do autor

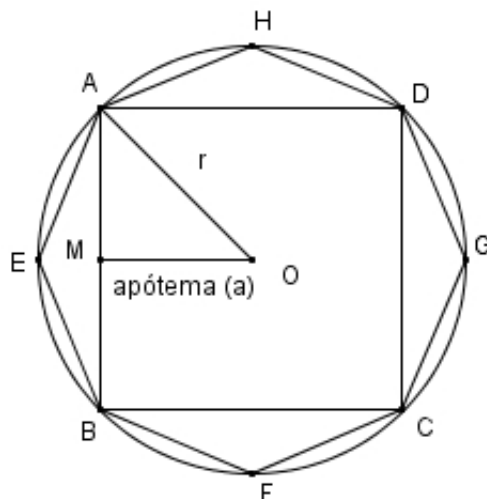
Em outras palavras, como vemos na figura 3.18, dado um círculo C , sua área é igual à de um triângulo retângulo T com base igual ao comprimento do círculo ($2\pi r$) e altura igual ao raio do círculo (r), ou seja,

$$C = T = \frac{\text{comprimento} \times \text{raio}}{2} = \frac{2\pi r \times r}{2} \Rightarrow C = \pi r^2$$

Para demonstrar a proposição I, Arquimedes utilizou o método da exaustão ou “absurdo duplo”. Neste método, se queremos mostrar que uma grandeza A é igual a uma grandeza B , supomos inicialmente que $A > B$ e chegamos a uma contradição. Depois, supomos que $A < B$ e chegamos novamente a uma contradição. Logo, se A não é maior e nem menor do que B , só é possível que $A = B$.

De acordo com Baron e Bos (1985), o termo “exaustão” foi introduzido pela primeira vez por Grégoire de Saint-Vicent em 1647 para dar nome a este método de demonstração e este método foi visto como essencial até o final do século XVII. A partir daí, ainda segundo Baron e Bos (1985), os matemáticos se cansaram da repetição constante do método e adotaram a prática da passagem direta ao “limite”.

Figura 3.19: Polígonos inscritos ao círculo



Fonte: Arquivo do autor

Vamos agora entender, usando notação atual, como Arquimedes demonstrou a Proposição I. A ideia central da demonstração é aproximar a área do círculo através das áreas de polígonos inscritos e circunscritos a ele.

Inicialmente, inscrevemos no círculo um quadrado. Em seguida, duplicamos a quantidade de lados do quadrado, inscrevendo um octógono regular no círculo. Repetimos esse processo continuamente, passando de um polígono de 2^n lados, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, para um polígono de 2^{n+1} lados (figura 3.19).

Agora, circunscrevemos no círculo um quadrado. À seguir, duplicamos a quantidade de lados do quadrado, circunscrevendo um octógono regular no círculo. Repetimos esse processo continuamente, passando de um polígono de 2^n lados, com $n \geq 2$, para um polígono de 2^{n+1} lados (figura 3.20).

Sejam I_n e C_n , respectivamente, as áreas dos polígonos de 2^n lados inscritos e circunscritos ao círculo, com $n \geq 2$. Devemos mostrar que a área do círculo C é igual à área do triângulo T (figura 3.18).

Supomos inicialmente que $C > T$. Considere d uma quantidade tal que $d = C - T > 0$.

Para calcularmos a área de cada um dos polígonos regulares inscritos (I_n) da figura 3.19, multiplicamos o apótema (medida do centro ao ponto médio de um lado do polígono - \overline{OM} no exemplo da figura) pelo semiperímetro do polígono ($\frac{P}{2}$). Podemos dizer então que esta área é igual à área de um triângulo retângulo, onde os catetos são o apótema (a) e o perímetro do polígono (P), ou seja,

$$I_n = \frac{a \times P}{2}$$

Comparando os catetos de I_n com os catetos de T (figura 3.18), temos que o apótema é menor do que o raio do círculo (pois neste caso o apótema é um dos catetos de um triângulo retângulo onde o raio é a hipotenusa) e o perímetro de cada um dos polígonos regulares inscritos é menor do que o comprimento do círculo. Daí, concluímos que $I_n < T, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, $I_n < T < C$.

Se $I_n < C$, seja f uma quantidade tal que $f = C - I_n > 0$. Para um número de lados suficientemente grande, podemos ter I_n tão próximo de C quanto quisermos, ou seja, f pode ser tão pequeno quanto quisermos. Então, o limite de f “tende” a 0:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} C - I_n = 0 \Rightarrow f < d$$

Mas, sabemos que

$$d = C - T < C - I_n = f \Rightarrow f > d$$

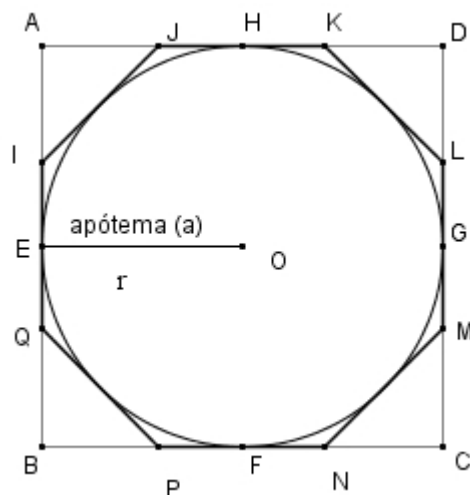
Logo, para $C > T \Rightarrow (f < d) \wedge (f > d)$. Temos então uma contradição, que veio de supormos $C > T$.

Supomos agora que $C < T$. Considere g uma quantidade tal que $g = T - C > 0$.

Para calcularmos a área de cada um dos polígonos regulares circunscritos (C_n) da figura 3.20, procedemos de modo igual ao que fizemos para os polígonos regulares inscritos e, portanto,

$$C_n = \frac{a \times P}{2}$$

Figura 3.20: Polígonos circunscritos ao círculo



Fonte: Arquivo do autor

Comparando os catetos de C_n com os catetos de T (figura 3.18), temos que agora o apótema (\overline{OE} no caso da figura 3.20) é igual ao raio do círculo e o perímetro de cada um dos polígonos regulares circunscritos é maior do que o comprimento do círculo. Daí, concluímos que $C_n > T$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, $C_n > T > C$.

Se $C_n > C$, seja h uma quantidade tal que $h = C_n - C > 0$. Para um número de lados suficientemente grande, podemos ter C tão próximo de C_n quanto quisermos, ou seja, h pode ser tão pequeno quanto quisermos. Então, o limite de h “tende” a 0:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h = \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n - C = 0 \Rightarrow h < g$$

Mas, sabemos que

$$g = T - C < C_n - C = h \Rightarrow h > g$$

Logo, para $C < T \Rightarrow (h < g) \wedge (h > g)$. Temos novamente uma contradição, que veio de supormos $C < T$. Portanto, se C não pode ser maior

e nem menor do que T , só nos resta que

$$C = T$$



Fica provado que a área de um círculo C é igual à área de um triângulo retângulo T com catetos iguais ao raio e ao comprimento da circunferência. Então, $C = \pi r^2$. Para terminarmos de “quadrar” o círculo, ou seja, encontrar um quadrado com área igual à C , basta tomarmos um quadrado com lados iguais a $r\sqrt{\pi}$. O que podemos inferir é que não é fácil (ou possível, usando apenas régua e compasso) construir um quadrado cujo lado tenha medida $r\sqrt{\pi}$.

3.3 A Quadratura da Parábola

Sabemos que um cone circular reto é obtido girando-se um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. Para Arquimedes, de acordo com Roque e Pitombeira (2012, p. 138), uma parábola é obtida pela seção de um cone circular reto. Seção esta, feita por um plano perpendicular à hipotenusa do triângulo girado.

De acordo com Roque e Pitombeira (2012, p. 138), Arquimedes, em seu trabalho “Quadratura da Parábola”³, apresenta inicialmente três proposições, sem as demonstrações. Comentam também que Arquimedes apenas se refere a uma obra sobre cônicas, de Euclides, que se perdeu.

Vamos então conhecer estas três proposições, necessárias para o bom entendimento de outras quatro proposições essenciais para a quadratura da parábola. Estas últimas revelam a ideia de limite utilizada por Arquimedes, embora ele não defina assim. Apresentaremos uma maneira de demonstrar as duas primeiras proposições, usando a Matemática atual (Geometria e Cálculo). Porém, há outras formas de as demonstrar.

A proposição 1, traduzida de Heath (1897, p. 234), figura 3.21, nos diz que

³Não encontramos a obra original disponibilizada. Usamos aqui fontes terciárias.

Se de um ponto sobre uma parábola uma linha reta for desenhada, que é ela própria o eixo ou paralela ao eixo, como PV , e se QQ' for uma corda paralela à tangente à parábola em P e encontra PV em V , então $QV = VQ'$. Por outro lado, se $QV = VQ'$, a corda QQ' será paralela à tangente em P .

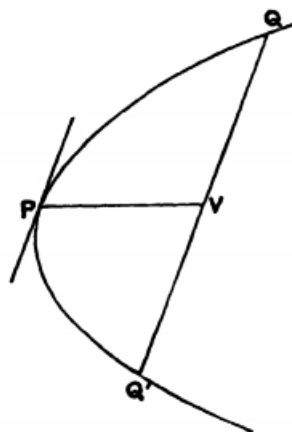
Figura 3.21: Proposição 1 da Quadratura da Parábola

Proposition 1.

If from a point on a parabola a straight line be drawn which is either itself the axis or parallel to the axis, as PV , and if QQ' be a chord parallel to the tangent to the parabola at P and meeting PV in V , then

$$QV = VQ'.$$

Conversely, if $QV = VQ'$, the chord QQ' will be parallel to the tangent at P .

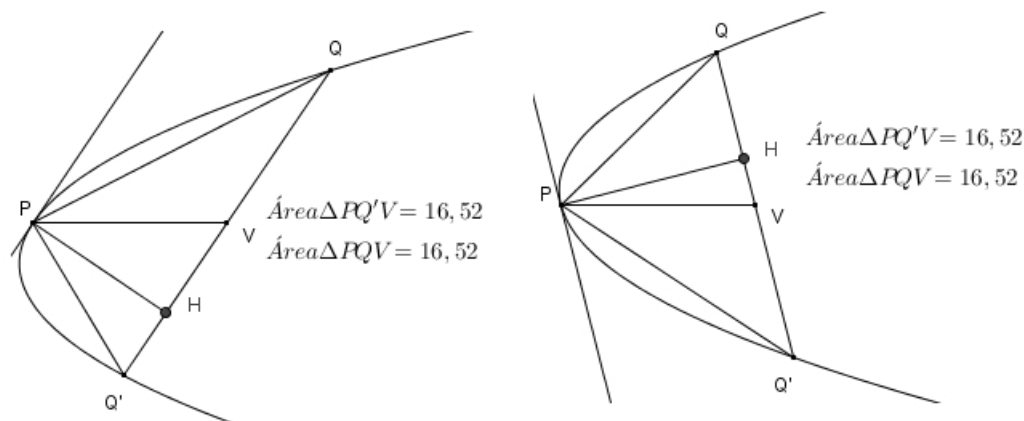


Fonte: Heath

Utilizando o software livre Geogebra, traçamos os segmentos PQ , PQ' e PH e verificamos que os triângulos formados PQV e $PQ'V$ têm a mesma área (figura 3.22). Isto acontece independentemente da posição do ponto P na parábola. Como os dois triângulos tem a mesma área e a mesma altura PH , necessariamente as bases QV e VQ' são congruentes, ou seja, $QV = VQ'$.

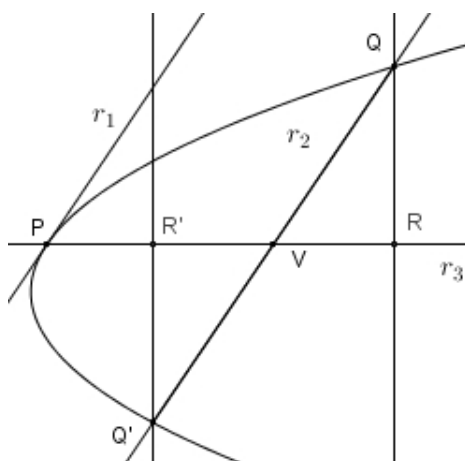
Para demonstrar a proposição 1, vamos utilizar alguns conhecimentos matemáticos de hoje, principalmente da geometria analítica e do cálculo. Inicialmente, vamos mostrar que Q e Q' estão a uma mesma distância de r_3 (reta paralela ao eixo da parábola, passando por P). Vamos nos basear na figura 3.23.

Figura 3.22: Figura ilustrativa da proposição 1 da Quadratura da Parábola



Fonte: Arquivo do autor

Figura 3.23: Demonstração da proposição 1 da Quadratura da Parábola



Fonte: Arquivo do autor

Considere uma parábola com equação $x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x}$, $P = (y_0^2, y_0)$ um ponto da parábola e r_1 a reta tangente à parábola no ponto P. O coeficiente angular m de r_1 pode ser encontrado derivando-se a função que descreve a parábola ($y = \sqrt{x}$) no ponto P. A derivada da função em relação a x , no ponto

P, é dada por:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'(y_0^2) = \frac{1}{2\sqrt{y_0^2}} = \frac{1}{2y_0} \Rightarrow m = \frac{1}{2y_0}$$

A equação da reta r_1 pode ser encontrada utilizando-se a fórmula

$$y = m(x - x_P) + y_P = \frac{1}{2y_0}(x - y_0^2) + y_0 = \frac{x}{2y_0} - \frac{y_0}{2} + y_0 \Rightarrow$$

$$r_1 : y = \frac{x}{2y_0} + \frac{y_0}{2}$$

Seja Q um ponto da parábola, diferente de P, definido por $Q = ((y_0 + k)^2, y_0 + k)$, com $k > 0$. A reta r_2 (paralela à r_1 , passando por Q) tem o mesmo coeficiente angular m e sua equação pode ser calculada por

$$y = m(x - x_Q) + y_Q = \frac{1}{2y_0}(x - (y_0 + k)^2) + y_0 + k \Rightarrow$$

$$y = \frac{x}{2y_0} - \frac{(y_0 + k)^2}{2y_0} + y_0 + k = \frac{x}{2y_0} + \frac{2y_0^2 + 2y_0k - y_0^2 - 2y_0k - k^2}{2y_0} \Rightarrow$$

$$y = \frac{x}{2y_0} + \frac{y_0^2 - k^2}{2y_0} \Rightarrow r_2 : y = \frac{x + y_0^2 - k^2}{2y_0}$$

Para encontrarmos as coordenadas do ponto Q' , que é o outro ponto de interseção de r_2 com a parábola, substituímos o valor de y encontrado na equação de r_2 , na equação da parábola:

$$x = y^2 \Rightarrow x = \left(\frac{x + (y_0^2 - k^2)}{2y_0} \right)^2 \Rightarrow 4y_0^2x = x^2 + 2y_0^2x - 2k^2x + y_0^4 - 2y_0^2k^2 + k^4 \Rightarrow$$

$$x^2 + (-2y_0^2 - 2k^2)x + y_0^4 - 2y_0^2k^2 + k^4 = 0$$

Para encontrar as soluções desta equação do 2º grau, calculamos primeiro o valor do discriminante da fórmula geral de uma equação do 2º grau:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2y_0^2 - 2k^2)^2 - 4(1)(y_0^4 - 2y_0^2k^2 + k^4) \Rightarrow$$

$$\Delta = 4y_0^4 + 8y_0^2k^2 + 4k^4 - 4y_0^4 + 8y_0^2k^2 - 4k^4 \Rightarrow \Delta = 16y_0^2k^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4y_0k$$

As soluções da equação são dadas por

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2y_0^2 + 2k^2 + 4y_0k}{2} = \frac{2(y_0^2 + 2y_0k + k^2)}{2} \Rightarrow x' = (y_0 + k)^2$$

e

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2y_0^2 + 2k^2 - 4y_0k}{2} = \frac{2(y_0^2 - 2y_0k + k^2)}{2} \Rightarrow x'' = (y_0 - k)^2$$

A solução x' refere-se ao ponto Q. Logo, a solução x'' refere-se ao ponto Q' e, portanto, $Q' = ((y_0 - k)^2, y_0 - k)$.

O eixo da parábola $x = y^2$ é a reta $y = 0$. Como a reta r_3 é paralela ao eixo e passa por $P = (y_0^2, y_0)$, temos que

$$r_3 : y = y_0 \Rightarrow r_3 : y - y_0 = 0$$

Falta agora calcularmos as distâncias dos pontos Q e Q' à reta r_3 . Para calcular a distância de um ponto $A = (x_1, y_1)$ a uma reta $r : ax + by - c = 0$, utilizamos a fórmula

$$d_{A,r} = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Logo, as distâncias de Q e Q' à reta r_3 são dadas por

$$d_{Q,r_3} = \frac{|y - y_0|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|y_0 + k - y_0|}{1} = |k| \Rightarrow d_{Q,r_3} = k$$

$$d_{Q',r_3} = \frac{|y - y_0|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|y_0 - k - y_0|}{1} = |-k| \Rightarrow d_{Q',r_3} = k$$

Portanto,

$$d_{Q,r_3} = d_{Q',r_3}$$

■

Podemos agora demonstrar a primeira parte (“ida”) da proposição 1:

“Se de um ponto sobre uma parábola uma linha reta for desenhada, que é ela própria o eixo ou paralela ao eixo, como PV , e se QQ' for uma corda paralela à tangente à parábola em P e encontra PV em V , então $QV = VQ'$ ”. Para isto, traçamos retas perpendiculares à r_3 , passando por Q e Q' , cortando r_3 em R e R' , respectivamente (figura 3.23). Temos que QR e $Q'R'$ são, respectivamente, as distâncias de Q e de Q' à reta r_3 e, portanto, são iguais, como acabamos de mostrar. Os dois triângulos formados ($\triangle QRV$ e $\triangle Q'R'V$) são congruentes pelo caso LAA_o (lado-ângulo-ângulo oposto). Isto acontece, pois $QR = Q'R'$, $Q\hat{R}V \cong Q'\hat{R}'V$ (ângulos de 90°) e $Q\hat{V}R \cong Q'\hat{V}R'$ (opostos pelo vértice). Logo, por serem lados correspondentes nos dois triângulos congruentes,

$$QV = VQ'$$

■

Vamos agora demonstrar a segunda parte (“volta”) da proposição 1. Devemos mostrar que se $QV = VQ'$, então a corda QQ' será paralela à reta r_1 . Para isto, vamos usar o método de demonstração chamado “contrapositiva”. Portanto, vamos mostrar que se a corda QQ' não for paralela à reta r_1 , então $QV \neq VQ'$.

Se a corda QQ' não for paralela à r_1 , então r_4 (reta que passa por Q e Q') deve ter um coeficiente angular m' diferente de m , que é o coeficiente angular de r_1 . Para conseguir isto, vamos manter as coordenadas do ponto Q e modificar as coordenadas do ponto Q' . Sejam $Q = ((y_0 + k)^2, y_0 + k)$ e $Q' = ((y_0 - 2k)^2, y_0 - 2k)$. Calculando o valor de m' , temos que

$$m' = \frac{y_Q - y_{Q'}}{x_Q - x_{Q'}} = \frac{y_0 + k - y_0 + 2k}{(y_0 + k)^2 - (y_0 - 2k)^2} \Rightarrow$$

$$m' = \frac{3k}{y_0^2 + 2y_0k + k^2 - y_0^2 + 4y_0k - 4k^2} = \frac{3k}{6y_0k - 3k^2} = \frac{3k}{3k(2y_0 - k)} \Rightarrow$$

$$m \neq m' = \frac{1}{2y_0 - k}$$

Utilizando as coordenadas de Q, a reta r_4 tem equação igual a

$$y = m'(x - x_Q) + y_Q = \frac{1}{2y_0 - k}(x - (y_0 + k)^2) + y_0 + k \Rightarrow$$

$$y = \frac{x - y_0^2 - 2y_0k - k^2}{2y_0 - k} + y_0 + k \Rightarrow$$

$$y = \frac{x - y_0^2 - 2y_0k - k^2 + 2y_0^2 + 2y_0k - y_0k - k^2}{2y_0 - k} \Rightarrow$$

$$r_4 : y = \frac{x + y_0^2 - y_0k - 2k^2}{2y_0 - k}$$

Vamos agora encontrar a nova coordenada x do ponto V, que é a interseção de r_4 com $r_3 : y = y_0$. Para isto, igualamos as duas equações:

$$y_0 = \frac{x + y_0^2 - y_0k - 2k^2}{2y_0 - k} \Rightarrow 2y_0^2 - y_0k = x + y_0^2 - y_0k - 2k^2 \Rightarrow x = y_0^2 + 2k^2$$

Como V pertence à reta r_3 , sua coordenada y é igual a y_0 . Logo,

$$V = (y_0^2 + 2k^2, y_0)$$

Falta agora calcularmos as distâncias de Q até V e de V até Q' . A distância de Q até V é calculada por

$$d_{Q,V} = \sqrt{(x_V - x_Q)^2 + (y_V - y_Q)^2} \Rightarrow$$

$$d_{Q,V} = \sqrt{(y_0^2 + 2k^2 - (y_0 + k)^2)^2 + (y_0 - y_0 - k)^2} \Rightarrow$$

$$d_{Q,V} = \sqrt{(y_0^2 + 2k^2 - y_0^2 - 2y_0k - k^2)^2 + k^2} = \sqrt{(-2y_0k + k^2)^2 + k^2} \Rightarrow$$

$$d_{Q,V} = \sqrt{4y_0^2k^2 - 4y_0k^3 + k^4 + k^2} = \sqrt{k^2(4y_0^2 - 4y_0k + k^2 + 1)} \Rightarrow$$

$$d_{Q,V} = |k|\sqrt{4y_0^2 - 4y_0k + k^2 + 1}$$

E a distância de V até Q' é calculada por

$$\begin{aligned}
 d_{V,Q'} &= \sqrt{(x_{Q'} - x_V)^2 + (y_{Q'} - y_V)^2} \Rightarrow \\
 d_{V,Q'} &= \sqrt{((y_0 - 2k)^2 - y_0^2 - 2k^2)^2 + (y_0 - 2k - y_0)^2} \Rightarrow \\
 d_{V,Q'} &= \sqrt{(y_0^2 - 4y_0k + 4k^2 - y_0^2 - 2k^2)^2 + 4k^2} = \sqrt{(-4y_0k + 2k^2)^2 + 4k^2} \Rightarrow \\
 d_{V,Q'} &= \sqrt{16y_0^2k^2 - 16y_0k^3 + 4k^4 + 4k^2} = \sqrt{4k^2(4y_0^2 - 4y_0k + k^2 + 1)} \Rightarrow \\
 d_{V,Q'} &= 2|k|\sqrt{4y_0^2 - 4y_0k + k^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Portanto, como $k \neq 0$, temos que

$$d_{Q,V} \neq d_{V,Q'} \Rightarrow QV \neq VQ'$$

Logo, também é verdadeira a afirmação: Se $QV = VQ'$, então a corda QQ' é paralela à tangente no ponto P. ■

A proposição 2, traduzida de Heath (1897, p. 235), figura 3.24, nos diz que

Se em uma parábola QQ' for uma corda paralela à tangente no ponto P, e se uma linha reta for puxada através de P, que é ela própria o eixo ou paralela ao eixo, e que encontra QQ' em V e a tangente no ponto Q da parábola em T, então $PV = PT$.

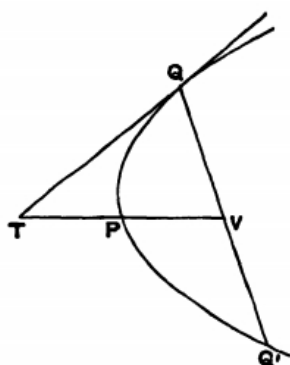
Para demonstrar a proposição 2, consideramos inicialmente a figura 3.24. Traçamos as paralelas ao eixo da parábola, passando por Q e Q' , respectivamente, e a paralela a QQ' , passando por T. Como, pela proposição 1, $QV = VQ'$, os paralelogramos formados $DQVT$ e $CQ'VT$ são congruentes e QT é uma diagonal do paralelogramo $DQVT$. Traçamos agora, os segmentos QP e CP e obtemos a figura 3.25. Os dois triângulos formados, ΔVPQ e ΔTPC são congruentes pelo caso LAA_o (lado-ângulo-ângulo oposto). Isto ocorre, pois os lados QV e TC são congruentes (já que $QV = VQ' = TC$),

Figura 3.24: Proposição 2 da Quadratura da Parábola

Proposition 2.

If in a parabola QQ' be a chord parallel to the tangent at P , and if a straight line be drawn through P which is either itself the axis or parallel to the axis, and which meets QQ' in V and the tangent at Q to the parabola in T , then

$$PV = PT.$$



Fonte: Heath

$P\hat{C}T \cong P\hat{Q}V$ (alternos internos) e $C\hat{P}T \cong Q\hat{P}V$ (opostos pelo vértice). Sendo assim, por serem lados correspondentes nos dois triângulos congruentes,

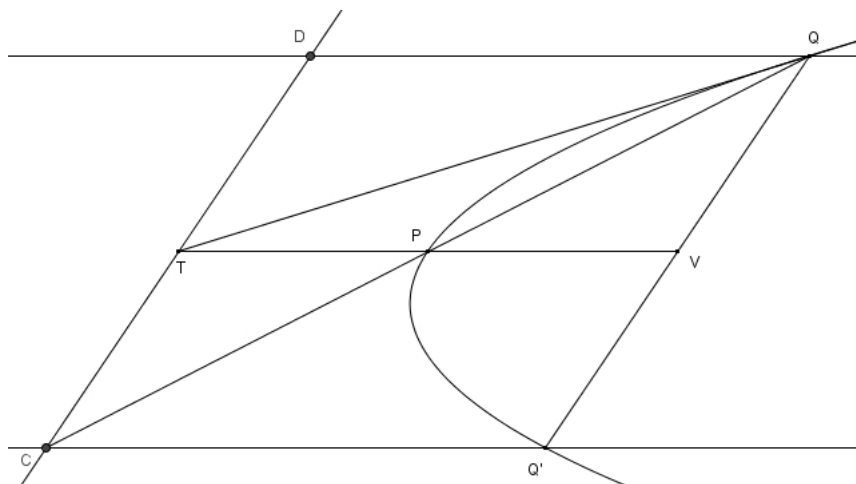
$$PV = PT$$



A proposição 3, traduzida de Heath (1897, p. 235), figura 3.26, nos diz que

Se de um ponto em uma parábola uma linha reta for desenhada que é ela própria o eixo ou paralela ao eixo, como PV , e se a partir de dois outros pontos Q, Q' sobre as linhas retas da parábola for traçada paralelamente à tangente em P , encontrando PV em V, V' , respectivamente, então $PV : PV' = (QV)^2 : (Q'V')^2$

Figura 3.25: Demonstração da proposição 2 da Quadratura da Parábola



Fonte: Arquivo do autor

Figura 3.26: Proposição 3 da Quadratura da Parábola

Proposition 3.

If from a point on a parabola a straight line be drawn which is either itself the axis or parallel to the axis, as PV , and if from two other points Q, Q' on the parabola straight lines be drawn parallel to the tangent at P and meeting PV in V, V' respectively, then

$$PV : PV' = QV^2 : Q'V'^2.$$

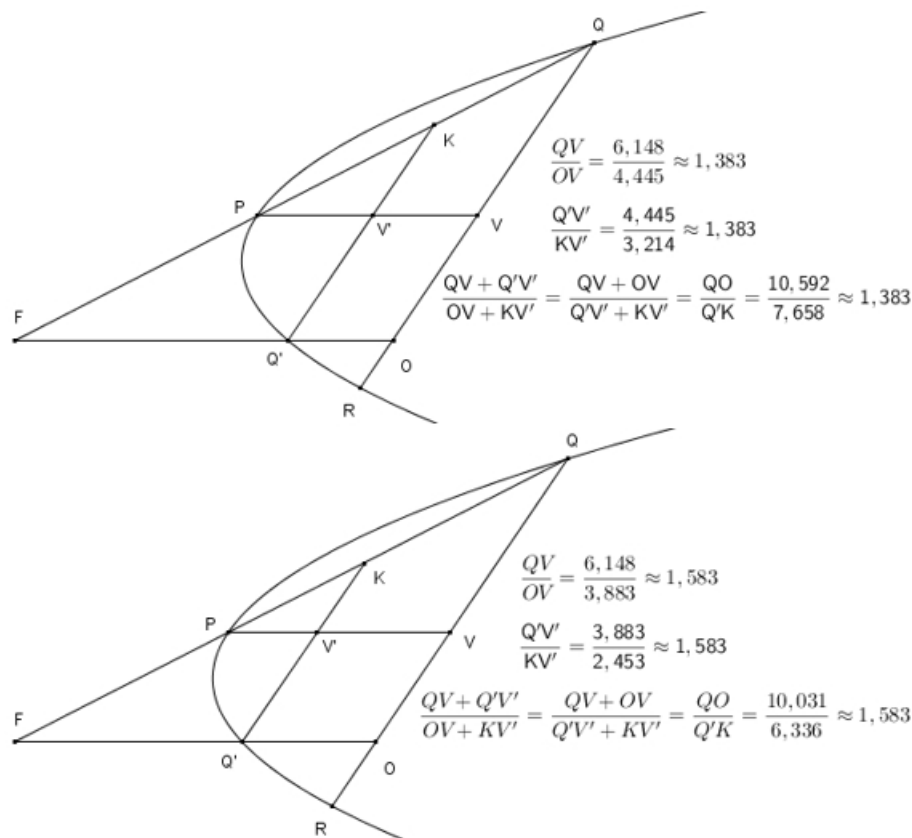
Fonte: Heath

Como $Q'V' = OV$ (figura 3.27), por serem lados opostos de um paralelogramo, podemos reescrever a igualdade da proposição 3 da seguinte maneira:

$$\frac{PV}{PV'} = \frac{(QV)^2}{(OV)^2}$$

Utilizando o software livre Geogebra, percebemos que QV está para

Figura 3.27: Figura ilustrativa da proposição 3 da Quadratura da Parábola



Fonte: Arquivo do autor

OV assim como $Q'V'$ está para KV' . Esta relação se mantém, mesmo quando alteramos a posição do ponto Q' na parábola (figura 3.27). Temos então que

$$\frac{QV}{OV} = \frac{Q'V'}{KV'}$$

Podemos utilizar uma propriedade das proporções que diz que se A está para B assim como C está para D , então também vale que A está para B assim como $A + C$ está para $B + D$, ou seja,

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{A + C}{B + D}$$

Aplicando esta propriedade, lembrando que $OV = Q'V'$, por serem lados opostos de um paralelogramo, temos que

$$\frac{QV}{OV} = \frac{Q'V'}{KV'} = \frac{QV + Q'V'}{OV + KV'} = \frac{QV + OV}{Q'V' + KV'} = \frac{QO}{Q'K} \Rightarrow$$

$$\frac{(QV)^2}{(OV)^2} = \frac{(Q'V')^2}{(KV')^2} = \frac{(QO)^2}{(Q'K)^2}$$

Logo,

$$\frac{PV}{PV'} = \frac{(QV)^2}{(OV)^2} = \frac{(Q'V')^2}{(KV')^2} = \frac{(QO)^2}{(Q'K)^2}$$

A equação da parábola, em notação atual ($x = \frac{y^2}{4p}$, pelo seu formato na figura 3.27), pode ser deduzida da proposição 3. Consideramos P como sendo o vértice da parábola. Neste caso, o eixo da parábola faz ângulo reto com a tangente no ponto P. Sejam $PV = x$, $PV' = x'$, $QV = y$ e $Q'V' = y'$. Pela proposição 3, temos que

$$\frac{PV}{PV'} = \frac{(QV)^2}{(Q'V')^2} \Rightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y^2}{(y')^2} \Rightarrow x = \frac{x'}{(y')^2} y^2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{y^2}{\frac{(y')^2}{x'}} \Rightarrow x = \frac{y^2}{4p}, \text{ com } 4p = \frac{(y')^2}{x'}$$

Vamos agora enunciar e demonstrar quatro proposições essenciais para a quadratura da parábola.

A proposição 19 nos diz que

Sejam P o vértice e Q um ponto qualquer sobre a parábola e R o ponto no segmento parabólico no qual a tangente é paralela a PQ. Seja M o ponto em que a paralela ao eixo da parábola por R corta Qq, um segmento paralelo à tangente por P. Então, $PV = \frac{4}{3}RM$ (ARQUIMEDES apud ROQUE E PITOMBEIRA, 2012, p. 141).

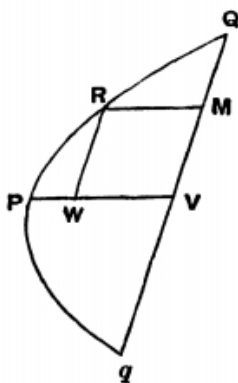
Para demonstrarmos a proposição 19, observamos a figura 3.29. A reta

Figura 3.28: Proposição 19 da Quadratura da Parábola

Proposition 19.

If Qq be a chord of a parabola bisected in V by the diameter PV , and if RM be a diameter bisecting QV in M , and RW be the ordinate from R to PV , then

$$PV = \frac{4}{3}RM.$$



Fonte: Heath

paralela a Qq passando por R , corta PV em W . Utilizando a proposição 3, temos a seguinte relação:

$$\frac{PV}{PW} = \frac{QV^2}{RW^2}$$

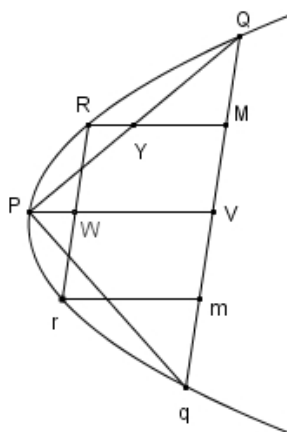
Mas, por construção, $RW = MV$, por serem lados opostos de um paralelogramo, logo

$$\frac{PV}{PW} = \frac{QV^2}{MV^2}$$

Temos também que $QV = 2MV$ pois, usando a proposição 1, RM que é paralela a PV , corta PQ (paralela à tangente em R) no ponto médio Y . O ΔPQV é semelhante a ΔYQM e, como RM corta PQ em seu ponto médio, então RM corta QV também em seu ponto médio M . Logo,

$$\frac{PV}{PW} = \frac{QV^2}{MV^2} = \frac{(2MV)^2}{MV^2} = \frac{4MV^2}{MV^2} = 4 \Rightarrow PW = \frac{1}{4}PV$$

Figura 3.29: Figura ilustrativa da proposição 19 da Quadratura da Parábola



Fonte: Roque e Pitombeira

Sabemos que $PV = PW + WV$, mas $PW = \frac{1}{4}PV$ e $WV = RM$ (por construção). Portanto,

$$PV = PW + WV = \frac{1}{4}PV + RM \Rightarrow \frac{3}{4}PV = RM \Rightarrow PV = \frac{4}{3}RM$$

■

Figura 3.30: Proposição 21 da Quadratura da Parábola

Proposition 21.

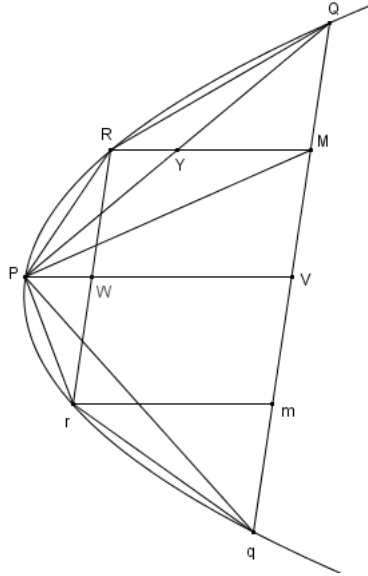
If Qq be the base, and P the vertex, of any parabolic segment, and if R be the vertex of the segment cut off by PQ , then

$$\Delta PQq = 8 \Delta PRQ.$$

Fonte: Heath

A proposição 21, enunciada por Arquimedes apud Roque e Pitombeira (2012, p. 142), nos diz que “Sejam Qq a base e P o vértice de um segmento parabólico PQq . Seja R o ponto no segmento parabólico no qual a tangente é

Figura 3.31: Figura ilustrativa da proposição 21 da Quadratura da Parábola



Fonte: Roque e Pitombeira

paralela a PQ. Então: $\Delta PQq = 8\Delta PRQ$ ”.

Vamos demonstrar a proposição 21, tomando como base a figura 3.31. Seja PV a paralela ao eixo que corta Qq em seu ponto médio V (proposição 1, pois Qq é paralela à tangente em P). A reta paralela ao eixo por R corta PQ em seu ponto médio Y (proposição 1), logo esta mesma reta corta QV em seu ponto médio M (como na proposição 19). Em seguida, traçamos o segmento PM. Pela proposição 19, $PV = \frac{4}{3}RM$. Temos também que $PV = 2YM$, pois os triângulos PQV e YQM são semelhantes e $QV = 2QM$. Logo,

$$PV = \frac{4}{3}RM \Rightarrow 2YM = \frac{4}{3}(RY + YM) \Rightarrow$$

$$6YM = 4RY + 4YM \Rightarrow 2YM = 4RY \Rightarrow YM = 2RY$$

Sabemos que $\Delta PQM = \Delta YQM + \Delta PYM$ e $\Delta PRQ = \Delta RQY + \Delta PRY$. Temos que o ΔYQM tem a mesma altura do ΔRQY e a base duas vezes maior ($YM = 2RY$), logo $\Delta YQM = 2\Delta RQY$. Do mesmo modo,

ΔPYM tem a mesma altura do ΔPRY e a base duas vezes maior, logo $\Delta PYM = 2\Delta PRY$. Sendo assim, temos que

$$\Delta PQM = \Delta YQM + \Delta PYM = 2\Delta RQY + 2\Delta PRY \Rightarrow$$

$$\Delta PQM = 2 \times (\Delta RQY + \Delta PRY) \Rightarrow \Delta PQM = 2\Delta PRQ$$

Observe que $\Delta PQM = \Delta PMV$, pois os dois triângulos têm a mesma altura e bases (QM e MV) iguais. Então,

$$\Delta PQV = \Delta PQM + \Delta PMV = \Delta PQM + \Delta PQM = 2\Delta PQM \Rightarrow$$

$$\Delta PQV = 2 \times (2\Delta PRQ) \Rightarrow \Delta PQV = 4\Delta PRQ$$

Mas, como V divide Qq em dois segmentos iguais ($QV = Vq$), temos que $\Delta PQV = \Delta PqV$, pois os triângulos tem altura e bases (QV e Vq) iguais. Concluimos então que

$$\Delta PQq = \Delta PQV + \Delta PqV = \Delta PQV + \Delta PQV = 2\Delta PQV \Rightarrow$$

$$\Delta PQq = 2 \times (4\Delta PRQ) \Rightarrow \Delta PQq = 8\Delta PRQ$$

■

Por outro lado, se prolongarmos o segmento RW até encontrar o outro lado da parábola em r , temos que $RW = rW$, pois $RW = MV = Vm = rW$. De modo análogo ao que acabamos de demonstrar, concluimos também que

$$\Delta PQq = 8\Delta Prq$$

Considerando $T = \Delta PQq$, como $T = 8\Delta PRQ = 8\Delta Prq$, então

$$\Delta PRQ + \Delta Prq = \frac{T}{8} + \frac{T}{8} = \frac{T}{4}$$

Continuando este processo, podemos construir mais triângulos na diferença entre o segmento parabólico PQq e o polígono obtido pela união dos

triângulos ΔPQq , ΔPRQ e ΔPrq . Serão adicionados assim, triângulos com áreas iguais a $\frac{T}{4^2}$, $\frac{T}{4^3}$, e assim por diante. A área do segmento parabólico PQq é a soma das áreas de todos estes “infinitos” triângulos.

Utilizando uma notação moderna, podemos calcular diretamente a área do segmento parabólico PQq. Esta área é igual a soma dos termos de uma série infinita (S_n) com primeiro termo (a_1) igual a T e razão (q) igual a $\frac{1}{4}$, que é calculada da seguinte maneira:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{T}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{T}{\frac{3}{4}} \Rightarrow S_n = \frac{4}{3}T$$

Desta forma, já encontraríamos a área do segmento parabólico. Porém, segundo Roque e Pitombeira (2012, p. 144), Arquimedes evitou utilizar a soma de uma série infinita. Isto foi feito através da proposição 23, essencial para a quadratura da parábola.

Vejam a proposição 23, enunciada por Arquimedes apud Roque e Pitombeira (2012, p. 144): “Dada uma sucessão finita de áreas, A, B, C, D, ..., Y, Z, das quais A é a maior, e cada uma é quatro vezes sua sucessora, então, $A + B + C + D + \dots + Y + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A$ ”.

Figura 3.32: Proposição 23 da Quadratura da Parábola

Proposition 23.

Given a series of areas A, B, C, D, ... Z, of which A is the greatest, and each is equal to four times the next in order, then

$$A + B + C + \dots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A.$$

Fonte: Heath

Para demonstrar o resultado, consideramos áreas b, c, \dots, z tais que

$$b = \frac{1}{3}B = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}A \Rightarrow b = \frac{1}{12}A$$

$$c = \frac{1}{3}C = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}B \Rightarrow c = \frac{1}{12}B$$

$$\vdots$$

$$z = \frac{1}{3}Z = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}Y \Rightarrow z = \frac{1}{12}Y$$

Sendo assim, temos que

$$B + b = \frac{1}{4}A + \frac{1}{12}A = \frac{4}{12}A \Rightarrow B + b = \frac{1}{3}A$$

e, conseqüentemente,

$$C + c = \frac{1}{3}B$$

$$\vdots$$

$$Z + z = \frac{1}{3}Y$$

Logo,

$$B + C + \dots + Z + b + c + \dots + y + z = \frac{1}{3}(A + B + C + \dots + Y) \Rightarrow$$

$$B + C + \dots + Z + z = \frac{1}{3}(A + B + C + \dots + Y) - (b + c + \dots + y)$$

Mas,

$$b + c + \dots + y = \frac{1}{3}(B + C + \dots + Y)$$

então

$$B + C + \dots + Z + z = \frac{1}{3}(A + B + C + \dots + Y) - \frac{1}{3}(B + C + \dots + Y) \Rightarrow$$

$$B + C + \dots + Z + z = \frac{1}{3}A \Rightarrow$$

$$A + B + C + \dots + Z + \frac{1}{3}Z = A + \frac{1}{3}A \Rightarrow$$

$$A + B + C + \dots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A$$



Substituindo A, B, C, \dots, Z pelas áreas dos triângulos $T, \frac{1}{4}T, \frac{1}{4^2}T, \dots, \frac{1}{4^{n-1}}T$, obtidos a partir do ΔPQq , ficamos com a expressão

$$T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4^2}T + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}T + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4^{n-1}}T = \frac{4}{3}T \quad (3.2)$$

A soma infinita S_n , calculada anteriormente, teve também como resultado o valor $\frac{4}{3}T$, utilizando a expressão

$$T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4^2}T + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}T = \frac{4}{3}T \quad (3.3)$$

A única diferença entre as expressões 3.2 e 3.3 está no termo $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4^{n-1}}T$. O termo $\frac{1}{4^{n-1}}T$ pode representar um valor tão pequeno quanto quisermos. Como $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4^{n-1}}T$ é um termo menor ainda, podemos dizer que o seu valor pode se tornar “infinitamente pequeno”, “tender” a zero, à medida que aumentamos o valor de n , ou seja, em linguagem atual,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4^{n-1}}T \right) = 0$$

Por isso, a adição deste termo não alterou o resultado da expressão 3.2. É como se estivéssemos somando um valor muito próximo de “zero” do lado esquerdo da expressão⁴. Esta expressão 3.2 é essencial para a demonstração da proposição 24.

A partir de situações como esta é que surge uma questão principal do conceito de limite, discutida por vários séculos. Como o valor de uma expressão “tende” a zero, mas não chega a ser exatamente zero, somente se aproxima “infinitamente” deste valor? Essa questão não foi discutida por Arquimedes e ele nem chegou a utilizar expressões deste tipo, mas implicitamente está presente em suas demonstrações. Essa e outras questões foram discutidas, ferrosamente, nos séculos XVIII e XIX e, no final do século XIX, encontramos

⁴Note que em nenhum momento as expressões usadas aqui foram utilizadas por Arquimedes. Trata-se de uma interpretação atual dos cálculos apresentados pelos autores utilizados neste trabalho.

as definições de limite usando epsilon e delta. Embora utilizemos essas definições nos dias atuais, ainda persistem os mesmos questionamentos, mostrando a dificuldade de se entender o conceito de “limite”.

Finalmente, podemos enunciar e demonstrar a proposição 24, proposição esta que nos mostra como “quadrar” uma parábola, de acordo com Arquimedes apud Roque e Pitombeira (2012, p. 145): “Qualquer segmento limitado por uma parábola e uma corda Qq é igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base que o segmento e mesma altura que ele”.

Figura 3.33: Proposição 24 da Quadratura da Parábola

Proposition 24.

Every segment bounded by a parabola and a chord Qq is equal to four-thirds of the triangle which has the same base as the segment and equal height.

Fonte: Heath

Para demonstrar esta proposição, utilizamos novamente o “método da exaustão” e provamos que a área S do segmento parabólico não pode ser maior e nem menor do que $\frac{4}{3}T$, que como vimos é a soma das áreas de todos os triângulos. Sendo assim, só nos resta que $S = \frac{4}{3}T$.

- i) Supomos inicialmente que $S > \frac{4}{3}T$. Sendo assim, devem existir n triângulos tais que a soma das suas áreas

$$T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4^2}T + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}T = A$$

seja maior que $\frac{4}{3}T$ e menor que S , ou seja, $S > A > \frac{4}{3}T$. Mas, pela expressão 3.2,

$$A = \frac{4}{3}T - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4^{n-1}}T$$

Então, A seria menor que $\frac{4}{3}T$, o que é uma contradição com a hipótese de A ser maior que $\frac{4}{3}T$. Logo, S não pode ser maior que $\frac{4}{3}T$.

- ii) Supomos agora que $S < \frac{4}{3}T$ e consideramos a diferença $\frac{4}{3}T - S > 0$. Pelo Lema de Euclides, há um inteiro m tal que a área do triângulo $T_m = \frac{1}{4^{m-1}}T$ é menor que a diferença $\frac{4}{3}T - S$, ou seja,

$$\frac{4}{3}T - S > T_m$$

Mas, por outro lado, utilizando novamente a expressão 3.2,

$$T_m > \frac{1}{3}T_m = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4^{m-1}}T = \frac{4}{3}T - T \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{m-1}} \right)$$

então

$$\frac{4}{3}T - S > T_m > \frac{4}{3}T - T \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{m-1}} \right)$$

Logo,

$$S < T \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{m-1}} \right)$$

o que é uma contradição, já que

$$T \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{m-1}} \right)$$

é a área de um polígono inscrito no segmento parabólico e, portanto, não pode ser maior que o segmento parabólico. Logo, S não pode ser menor que $\frac{4}{3}T$. Concluímos então, que

$$S = \frac{4}{3}T$$

■

Na demonstração desta última proposição, na parte i), temos que $A = \frac{4}{3}T - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4^{n-1}}T$ só seria menor do que $\frac{4}{3}T$ pois, apesar do valor de $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4^{n-1}}T$

“tender” a zero, ele nunca chega a zero, ou seja, $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4^{n-1}}T > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Na parte ii), como dissemos anteriormente, $T_m = \frac{1}{4^{m-1}}T$ pode se tornar tão pequeno quanto quisermos. Sendo assim, com uma escolha adequada de m , podemos ter $\frac{4}{3}T - S > T_m$.

Em toda a construção da “Quadratura da Parábola” feita por Arquimedes, temos implícito o conceito de “limite”, mesmo que ele tenha utilizado o artifício de evitar somas infinitas (no caso da proposição 23). A ideia do “infinito” está presente, seja na construção de “infinitos” triângulos inscritos até preencher todo o segmento parabólico, seja na escolha de um triângulo T_m de área “infinitamente pequena”, para ajudar a demonstrar a proposição 24.

Observamos que Arquimedes, em suas demonstrações, utiliza o “método da exaustão”, com o auxílio de somas “infinitas” de figuras inscritas e/ou circunscritas. Porém, há um tratado de Arquimedes, chamado de “O método”, que segundo Baron e Bos (1985), foi escrito para auxiliar outros matemáticos em suas descobertas. Este método de descoberta é interessante por deixar de utilizar figuras inscritas e circunscritas nas demonstrações e por introduzir conceitos da mecânica, pelo método dos “pesos”. Ainda segundo Baron e Bos (1985), métodos semelhantes a este foram desenvolvidos no século XVII, sem necessariamente serem influenciados por ele, e, apesar de causarem muitas controvérsias, contribuíram para o desenvolvimento das técnicas de integração.

3.4 A espiral de Arquimedes

A espiral de Arquimedes desempenhou um papel importante na história da matemática, além de proporcionar uma maneira de resolver um dos três problemas clássicos da antiguidade: Trissecção do ângulo.

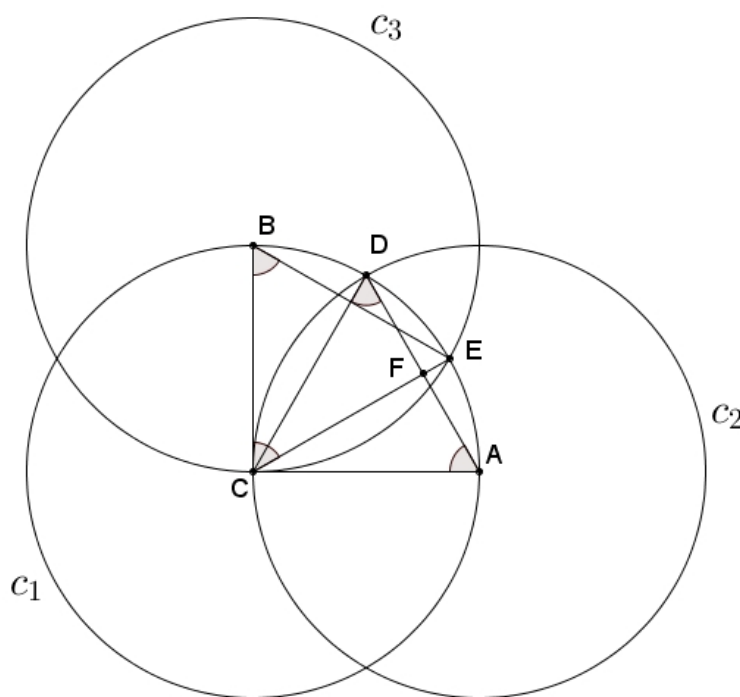
Esse problema consiste em: dado um ângulo α qualquer, temos que dividir esse ângulo em três partes iguais.

Segundo Rizzato (2001), dos três problemas clássicos da antiguidade, o da trissecção do ângulo talvez seja o que tem o maior número de provas falsas. Há muitas “provas” de como trissectar um ângulo qualquer, usando régua e

compasso. Porém, todas essas “provas” são incorretas, pois essa construção é impossível, como demonstrado no século XIX.

Ainda segundo Rizzato (2001), o problema da trisseção do ângulo é diferente dos outros dois problemas clássicos (quadratura do círculo e duplicação do cubo) por alguns motivos. Primeiro, por não haver referência sobre quando este problema começou a ser estudado. Segundo, por ser um problema diferente, já que é impossível, só com régua e compasso, quadrar um círculo ou duplicar um cubo, porém, há alguns ângulos que podem ser trissectados. Um exemplo disso é o ângulo reto, que pode ser trissectado a partir da construção que faremos a seguir, com base na figura 3.34.

Figura 3.34: Trisseção do ângulo reto



Fonte: Arquivo do autor

Trace os círculos a seguir, todos com raio igual a r : c_1 de centro $C = (0, 0)$, c_2 de centro $A = (r, 0)$ e c_3 de centro $B = (0, r)$. Por construção, o ângulo \hat{ACB} é reto, ou seja, igual a 90° . Devemos então, trissectar \hat{ACB} .

Marque as interseções D de c_1 com c_2 , E de c_1 com c_3 e F de CE com AD . Temos formados dois triângulos equiláteros e congruentes, $\triangle ACD$ e $\triangle BCE$, com lados iguais a r . Desta forma, os ângulos \widehat{BCE} , \widehat{CBE} , \widehat{CDA} e \widehat{CAD} são todos congruentes e iguais a 60° . Como

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACF} + \widehat{BCE} \Rightarrow 90^\circ = \widehat{ACF} + 60^\circ \Rightarrow \widehat{ACF} = 30^\circ$$

Logo, no $\triangle ACF$, $\widehat{AFC} = 90^\circ$ e, portanto, no $\triangle CFD$, $\widehat{CFD} = 90^\circ$ e, conseqüentemente, $\widehat{FCD} = 30^\circ$. Como

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACF} + \widehat{FCD} + \widehat{BCD} \Rightarrow 90^\circ = 30^\circ + 30^\circ + \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{BCD} = 30^\circ$$

Portanto, o ângulo reto \widehat{ACB} foi trissectado nos ângulos \widehat{ACF} , \widehat{FCD} e \widehat{BCD} , todos iguais a 30° . ■

De acordo com Rizzato (2001), Nicomedes (≈ 280 -210 a.e.C.), contemporâneo de Arquimedes, produziu uma solução para a trissecção de um ângulo qualquer, através de uma curva chamada “conchóide”. Outra solução foi dada por Hípias de Elis (≈ 460 -400 a.e.C.), através da “trissetriz”.

O processo para dividir um ângulo α qualquer em duas partes iguais, ou seja, encontrar a sua bissetriz, já era conhecido e foi demonstrado, utilizando régua e compasso, no Livro I de “Os Elementos”.

Agora, iremos estudar as espirais e algumas de suas propriedades, através da obra “*Sobre Espirais*” de Arquimedes, onde encontramos proposições, com suas respectivas demonstrações, sobre as espirais. Para determinar o valor da área da primeira volta da espiral, Arquimedes utiliza-se do “limite” de figuras circunscritas e inscritas à espiral, através do método da exaustão. A própria construção da espiral, com régua e compasso, traz embutida a ideia de “limite”, para que o esboço feito se aproxime mais do desenho de uma espiral. Lembramos que estamos usando uma fonte terciária, pois não encontramos disponível a obra original, escrita por Arquimedes.

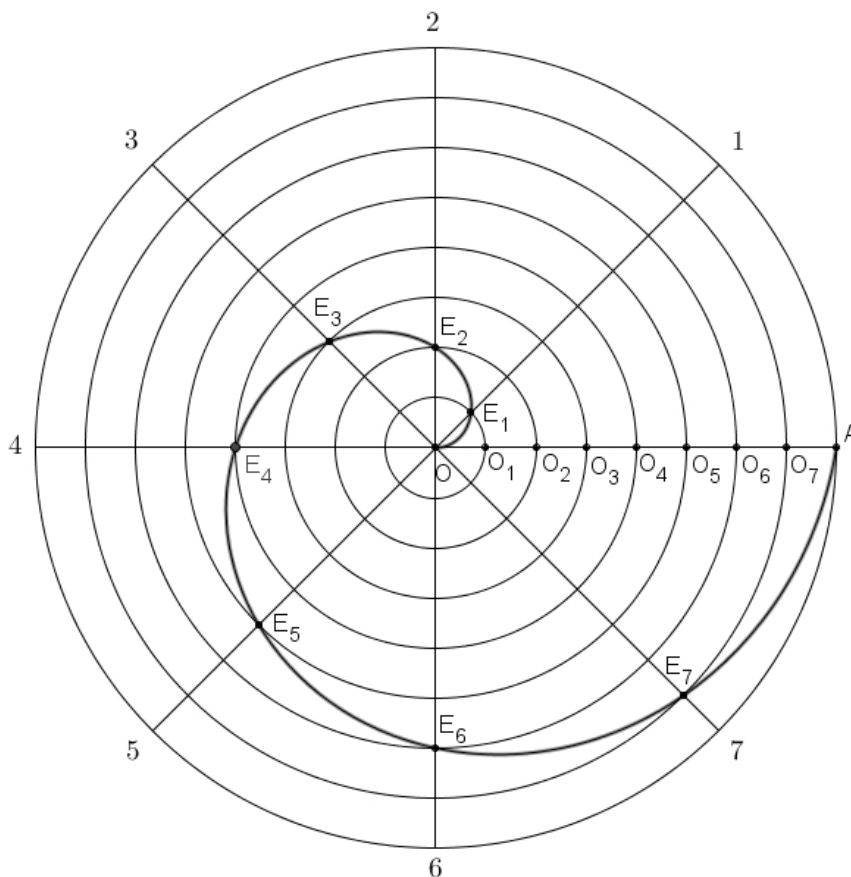
Uma espiral é definida da seguinte maneira por Arquimedes:

Se uma linha reta traçada em um plano se move uniformemente em torno de uma extremidade fixa e retorna à sua posição de partida, e se ao mesmo tempo em que a reta se move (uniformemente), um ponto que parte da origem se move (uniformemente) sobre a reta, este ponto descreverá uma espiral no plano (ARQUIMEDES apud ROQUE E PITOMBEIRA, 2012, p. 150).

Logo, Arquimedes define a espiral como uma curva plana gerada pelo movimento de um ponto ao longo de um segmento de reta, da extremidade inicial, no sentido da outra extremidade, com velocidade constante, sendo que o segmento de reta tem a extremidade inicial fixa e a outra extremidade se move, também com velocidade constante, ao longo de uma circunferência. Neste caso, o movimento do ponto é determinado por duas velocidades simultâneas e constantes: velocidade radial ao longo do segmento de reta e velocidade angular ao longo da circunferência.

Vamos agora construir a primeira volta de uma espiral, tomando como base a figura 3.35. Para isso, marcamos um centro O e um ponto A diferente de O , formando o segmento OA . Agora, dividimos o segmento OA em quantas partes quisermos. Como exemplo, dividimos OA em 8 partes, marcando os pontos O_1 até O_7 . Feito isto, traçamos 8 círculos concêntricos, com raios OO_1 , OO_2 , e assim, sucessivamente, até o círculo de raio OA . Em seguida, dividimos o círculo de raio OA na mesma quantidade de vezes em que foi dividido o segmento OA , ou seja, em 8 partes iguais, com cada parte representando $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ do círculo. Marcamos cada uma das divisões do círculo, no sentido anti horário (pode ser feito também no sentido horário). O próximo passo é marcar mais 8 pontos da espiral, sendo que o ponto O é o ponto inicial. Para isto, marcamos o ponto E_1 que é a interseção do círculo que contém O_1 com a primeira divisão do círculo de raio OA . Depois, marcamos o ponto E_2 que é a interseção do círculo que contém O_2 com a segunda divisão do círculo de raio OA . Continuamos esse processo, até marcar o penúltimo ponto E_7 . O último ponto da espiral coincide com o ponto A . Para finalizar, ligamos os pontos O , E_1 , E_2 , ..., E_7 e A , nesta ordem, obtendo uma aproximação do desenho da primeira volta da espiral.

Figura 3.35: Construção de uma espiral



Fonte: Arquivo do autor

Essa aproximação vai depender do número de divisões feitas inicialmente no segmento OA . Quanto mais divisões, mais próximo ficará o desenho de representar a primeira volta da espiral. Ou seja, se dividíssemos “infinitamente” o segmento OA , teríamos o desenho exato da primeira volta da espiral.

Na proposição 14 de seu trabalho “Sobre Espirais” (figuras 3.36 e 3.37), traduzida de Heath (1897, p. 167), Arquimedes define a propriedade fundamental da espiral da seguinte maneira:

Se O é a origem, e P, Q dois pontos da primeira volta da espiral, e se OP, OQ encontram o “primeiro círculo” $AKP'Q'$ em P', Q' , respectivamente, OA sendo a linha inicial, então

$$OP : OQ = (\text{arco } AKP') : (\text{arco } AKQ')$$

(ARQUIMEDES apud HEATH, 1897, tradução nossa).

Figura 3.36: Proposição 14 de Arquimedes sobre a Espiral

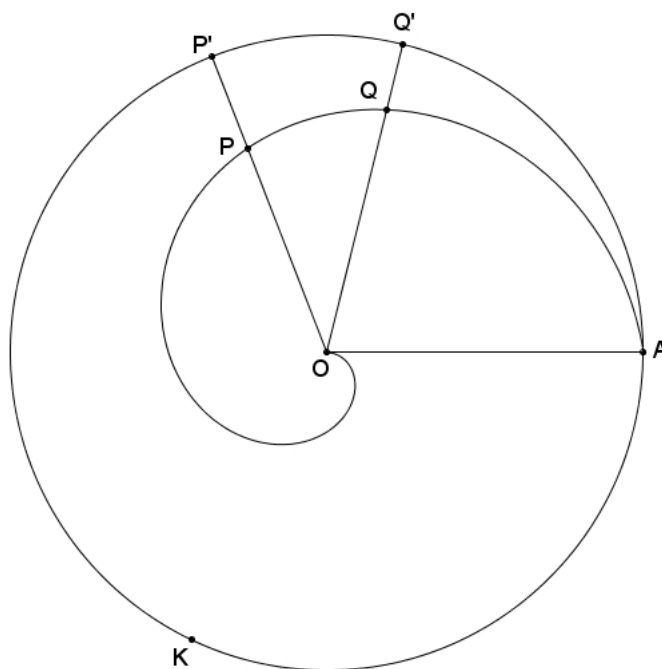
Proposition 14.

If O be the origin, and P, Q two points on the first turn of the spiral, and if OP, OQ produced meet the ‘first circle’ $AKP'Q'$ in P', Q' respectively, OA being the initial line, then

$$OP : OQ = (\text{arc } AKP') : (\text{arc } AKQ').$$

Fonte: Heath

Figura 3.37: Figura ilustrativa da Proposição 14 de Arquimedes sobre a Espiral



Fonte: Heath

De acordo com Roque e Pitombeira (2012, p. 150-151), a proporção presente na proposição 14 ocorre, pois quando a reta OA gira, no sentido horário, os pontos A_i (pontos que pertencem ao círculo de raio OA) se movem com velocidade uniforme sobre a circunferência, enquanto os pontos O_i (pontos que pertencem ao segmento OA) se movem com velocidade uniforme sobre o segmento de reta OA . Sendo assim, quando A chega a P' , o ponto O chega a P e quando A chega a Q' , o ponto O chega a Q .

Para determinar a área da região limitada pela primeira volta da espiral, Arquimedes utiliza resultados da proposição 10 (figura 3.38) e do corolário 1 desta proposição (figura 3.39), ambos presentes em seu trabalho “Sobre Espirais”.

A proposição 10, traduzida de Heath (1897, p. 162), nos diz que

Se $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ são n linhas formando uma progressão aritmética crescente em que a diferença comum é igual a A_1 , o menor termo, então

$$(n+1)A_n^2 + A_1(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 3(A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2)$$

(ARQUIMEDES apud HEATH, 1897, tradução nossa).

Figura 3.38: Proposição 10 de Arquimedes sobre a Espiral

Proposition 10.

If $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ be n lines forming an ascending arithmetical progression in which the common difference is equal to A_1 , the least term, then

$$(n+1)A_n^2 + A_1(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 3(A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2).$$

Fonte: Heath

O corolário 1 desta proposição, traduzido de Heath (1897, p. 162), nos diz que “Segue-se a partir desta proposição que $n.A_n^2 < 3(A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2)$, e também que $n.A_n^2 > 3(A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_{n-1}^2)$ ”.

Figura 3.39: Corolário 1 da Proposição 10 de Arquimedes sobre a Espiral

COR. 1. *It follows from this proposition that*

$$n \cdot A_n^2 < 3(A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2),$$
and also that

$$n \cdot A_n^2 > 3(A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_{n-1}^2).$$

Fonte: Heath

Vale lembrar que uma progressão aritmética crescente é uma sequência de termos onde a “diferença comum” ou razão, que é a diferença entre um termo e o seu antecessor, é sempre igual e maior do que zero. Ou seja, é uma sequência de termos onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior mais o valor da razão, que é sempre positivo. No caso da progressão aritmética crescente da proposição 10, a razão é igual ao primeiro termo A_1 .

Figura 3.40: Proposição 24 de Arquimedes sobre a Espiral

Proposition 24.

The area bounded by the first turn of the spiral and the initial line is equal to one-third of the ‘first circle’ [$= \frac{1}{3} \pi (2\pi a)^2$], where the spiral is $r = a\theta$].

[The same proof shows equally that, if OP be any radius vector in the first turn of the spiral, the area of the portion of the spiral bounded thereby is equal to one-third of that sector of the circle drawn with radius OP which is bounded by the initial line and OP , measured in the ‘forward’ direction from the initial line.]

Fonte: Heath

Na proposição 24 de seu trabalho “Sobre Espirais” (figura 3.40), Arquimedes determina a área da região limitada pela primeira volta da espiral.

Esta proposição, traduzida de Heath (1897, p. 178), incluindo a nota abaixo da proposição, feita por Heath, nos diz que

A área limitada pela primeira volta da espiral e a linha inicial é igual a um terço do “primeiro círculo” [= $\frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$, onde a espiral é $r = a\theta$].

[A mesma demonstração mostra igualmente que, se OP é um raio vetor qualquer da primeira volta da espiral, a área da porção da espiral limitada desse modo é igual a um terço do setor circular desenhado com raio OP o qual é limitado pela linha inicial e OP , medido no sentido “frontal” a partir da linha inicial] (ARQUIMEDES apud HEATH, 1897, tradução nossa).

Na nota da proposição 24, feita por Heath, a área do setor circular limitado pela linha inicial e OP deve ser calculada no sentido em que foi construída a espiral, ou seja, no sentido horário ou no sentido anti-horário.

Vamos agora demonstrar a proposição 24, de acordo com Heath (1897), tomando como base a figura 3.41, a qual construímos no sentido anti-horário.

Seja O a origem, OA a linha inicial, A a extremidade da primeira volta. Desenhe o “primeiro círculo”, isto é, o círculo com O como centro e OA como raio. Então, se C é a área do primeiro círculo, R_1 a área da primeira volta da espiral limitada por OA , devemos provar que

$$R_1 = \frac{1}{3}C$$

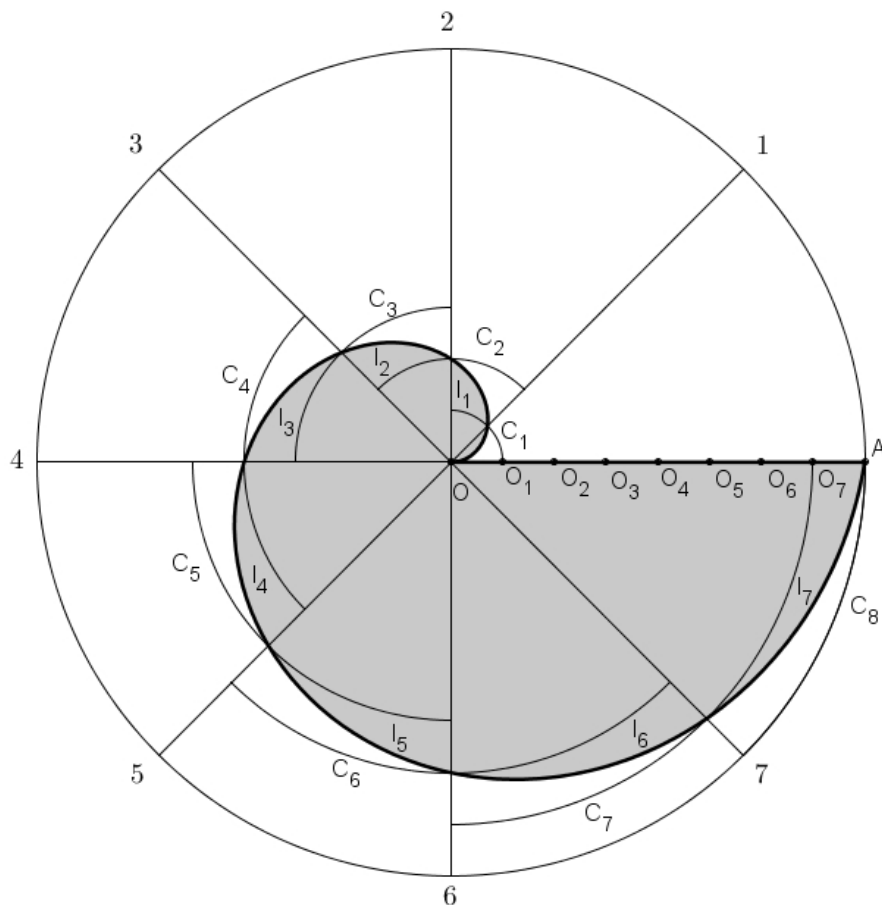
Se não, R_1 deve ser maior ou menor do que $\frac{1}{3}C$.

I. Se possível, suponha $R_1 < \frac{1}{3}C$.

Podemos então circunscrever uma figura sobre R_1 composta de setores circulares semelhantes de tal modo que, se F é a área desta figura,

$$F - R_1 < \frac{1}{3}C - R_1,$$

Figura 3.41: Figura ilustrativa da Proposição 24 de Arquimedes sobre a Espiral



Fonte: Arquivo do autor

daí $F < \frac{1}{3}C$. (1)

Sejam OO_1, OO_2, \dots , os raios dos setores circulares, começando pelo menor. O raio do maior é naturalmente OA . Os raios formam então uma progressão aritmética crescente no qual a diferença comum é igual ao menor termo OO_1 . Se $n \in \mathbb{N}$ é o número de setores, temos [da Proposição 10, Corolário 1]

$$n.OA^2 < 3(OO_1^2 + OO_2^2 + \dots + OA^2) \quad (3.4)$$

Mas, os setores semelhantes são proporcionais aos quadrados dos seus raios. Isso ocorre pois, se um setor circular tem raio r , sua área é dada por $\frac{\phi \cdot r^2}{2}$, com o ângulo ϕ dado em radianos. Logo, a área de um setor circular é proporcional ao quadrado do seu raio.

Então, se multiplicarmos ambos os lados da equação 3.4 por $\frac{\phi}{2}$, teremos

$$n \cdot \frac{\phi \cdot OA^2}{2} < 3 \left(\frac{\phi \cdot OO_1^2}{2} + \frac{\phi \cdot OO_2^2}{2} + \dots + \frac{\phi \cdot OA^2}{2} \right)$$

Logo, como $\frac{\phi \cdot OA^2}{2}$, $\frac{\phi \cdot OO_1^2}{2}$ e $\frac{\phi \cdot OO_2^2}{2}$ são, respectivamente, as áreas dos setores circulares de raios iguais a OA , OO_1 e OO_2 , segue que

$$C < 3F \Rightarrow F > \frac{1}{3}C.$$

Mas isto é impossível, uma vez que $F < \frac{1}{3}C$ em (1).

Portanto, R_1 não é menor do que $\frac{1}{3}C$.

II. Se possível, suponha $R_1 > \frac{1}{3}C$.

Podemos então inscrever uma figura composta de setores circulares semelhantes de tal modo que, se f é a sua área

$$R_1 - f < R_1 - \frac{1}{3}C,$$

daí $f > \frac{1}{3}C$. (2)

Se há $(n - 1)$ setores, seus raios OO_1, OO_2, \dots formam uma progressão aritmética crescente no qual o menor termo é igual à diferença comum, e o maior termo, OO_{n-1} (no caso da figura 3.41 seria O_7), é igual a $(n - 1)OO_1$.

Assim [da Proposição 10, Corolário 1]

$$n \cdot OA^2 > 3(OO_1^2 + OO_2^2 + \dots + OO_{n-1}^2) \Rightarrow$$

$$n \cdot \frac{\phi \cdot OA^2}{2} > 3 \left(\frac{\phi \cdot OO_1^2}{2} + \frac{\phi \cdot OO_2^2}{2} + \dots + \frac{\phi \cdot OO_{n-1}^2}{2} \right)$$

daí $C > 3f \Rightarrow f < \frac{1}{3}C$;

o que é impossível, uma vez que $f > \frac{1}{3}C$ em (2).

Portanto, R_1 não é maior do que $\frac{1}{3}C$.

De I e II, R_1 não é maior e nem menor do que $\frac{1}{3}C$, portanto,

$$R_1 = \frac{1}{3}C$$

■

Além deste resultado, Heath (1897) demonstra a nota abaixo da Proposição 24, generalizando o resultado que acabamos de encontrar. Ele mostra que se tomarmos um ponto P qualquer da primeira volta da espiral, a área da espiral limitada pelo raio vetor OP e pela linha inicial OA será um terço da área do setor circular de centro O e raio OP , limitado por OP e OA . Além disso, ele mostra que esse resultado ainda é válido se tomarmos um ponto P , qualquer, de qualquer volta da espiral.

Na demonstração da proposição 24, Arquimedes utilizou novamente o artifício de construir figuras circunscritas e inscritas à espiral. Em notação moderna, se dividirmos o círculo de raio maior OA (no caso da figura 3.41) em n setores circulares semelhantes, temos que, a medida que aumentamos o valor de n , o limite da área da figura F , formada por todos os setores circulares circunscritos à espiral (C_1, C_2, \dots, C_n), “tende” a um terço da área do círculo de raio OA (C), ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F = \frac{1}{3}C$$

Ao dividirmos o círculo de raio OA em setores circulares semelhantes, se temos n setores circulares circunscritos à espiral, então temos $n - 1$ setores circulares inscritos à espiral, pois os setores circulares inscritos começam a ser contados à partir da segunda divisão do círculo de raio OA . Vemos isso

claramente na figura 3.41. E, a medida que aumentamos o valor de n , o limite da área da figura f , formada por todos os setores circulares inscritos à espiral $(I_1, I_2, \dots, I_{n-1})$, “tende” a um terço da área do círculo de raio OA (C), ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f = \frac{1}{3}C$$

Mas, por construção, se R_1 é a área da primeira volta da espiral, então

$$f \leq R_1 \leq F$$

Então, para n “suficientemente grande”, como o limite comum de F e f é $\frac{1}{3}C$, temos que

$$\frac{1}{3}C \leq R_1 \leq \frac{1}{3}C$$

o que só é possível se

$$R_1 = \frac{1}{3}C$$

3.5 Tangentes

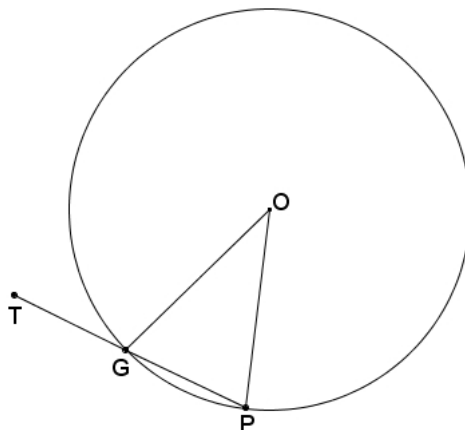
Vamos entender o conceito de reta tangente a um círculo. Hoje sabemos que para uma reta r ser tangente a um círculo C em um ponto P , significa cumprir com uma das afirmações a seguir:

1. r passa por P perpendicularmente à reta de P ao centro de C .
2. r passa somente por um ponto de C : o ponto P .
3. r passa por P e fica somente de um lado de C .

No livro III de Euclides (2009), na proposição 16, temos a demonstração de que uma reta PT passando por um ponto P do círculo é tangente ao círculo se, e somente se, \hat{OPT} for um ângulo reto (figura 3.42).

Euclides faz esta demonstração por absurdo, supondo que a reta PT , tangente ao círculo, toca o círculo em dois pontos, P e G . Sendo assim, o

Figura 3.42: Reta tangente



Fonte: Baron e Bos

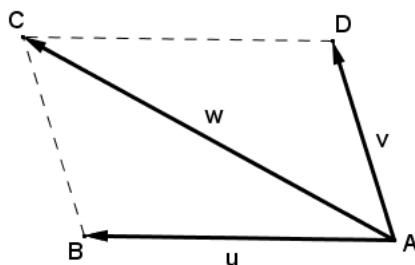
$\triangle OPG$ teria dois ângulos retos, $\hat{O}PG$ e $\hat{O}GP$, o que é impossível. Logo, a reta tangente PT só pode tocar o círculo em apenas um ponto, o ponto P .

No caso de outras curvas em geral, a definição de reta tangente a um círculo não funciona para todos os casos. Podemos ter: retas que cortam uma curva em somente um ponto, mas que não são retas tangentes; retas tangentes que cortam uma curva em vários pontos; retas tangentes que estão dos dois lados de uma curva.

Segundo Baron e Bos (1985), há um possível método de construção da tangente à espiral, feito por Arquimedes, que pode ter utilizado o “método do paralelogramo”. Tal fato se justificaria, pois, ainda segundo Baron e Bos (1985), o “método do paralelogramo” para composição de velocidades já era conhecido pelos gregos e pode ter sido utilizado por Arquimedes, mesmo que esta parte não tenha sobrevivido até nossa época. Utilizando este método, um ponto que se move com duas velocidades (u e v) ao longo das retas AB e AD , respectivamente, terá velocidade resultante igual a w , que é a diagonal do paralelogramo $ABCD$ (figura 3.43).

Antes de trazer o possível método de construção da tangente à espiral, feito por Arquimedes, vamos mostrar como encontrar a reta tangente a espiral

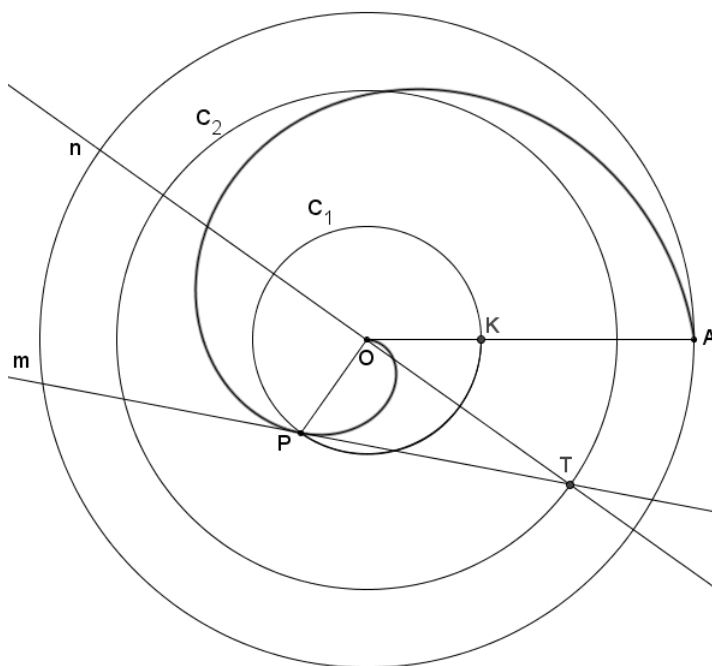
Figura 3.43: Paralelogramo de velocidades



Fonte: Arquivo do autor

por um ponto, utilizando o conhecimento matemático que temos atualmente, tomando como base a figura 3.44.

Figura 3.44: Construção da reta tangente à espiral



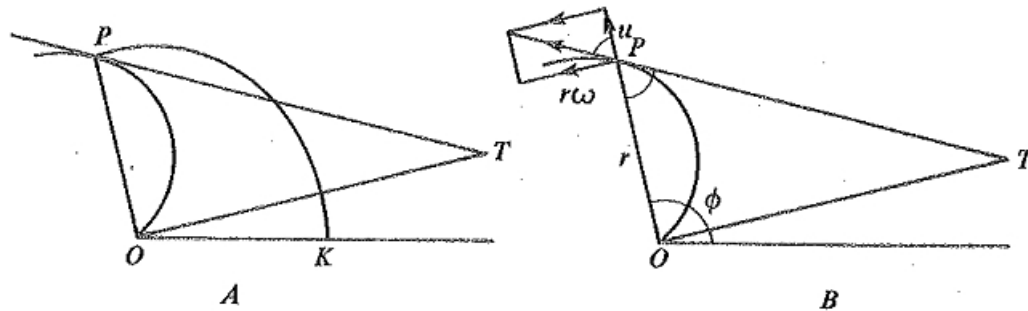
Fonte: Arquivo do autor

Seja P um ponto qualquer da espiral. Ligamos o ponto O ao ponto P , obtendo o segmento OP . Em seguida, traçamos a reta n , perpendicular ao

segmento OP , passando por O . Depois, traçamos o círculo C_1 de centro O e raio OP , marcando a interseção K do círculo C_1 com o segmento OA . Agora, traçamos o círculo C_2 de centro O e raio igual ao comprimento do setor circular KP (medido desde o ponto K , no sentido horário), marcando o ponto T , que é uma das interseções do círculo C_2 com a reta n . Para finalizar, traçamos a reta m , passando por P e T , que é a reta tangente à espiral no ponto P .

O método de construção da tangente à espiral feito por Arquimedes será explicado a seguir, de acordo com Baron e Bos (1985), utilizando a figura 3.45.

Figura 3.45: Reta tangente à espiral



Fonte: Baron e Bos

Na parte A da figura, está construída a reta tangente à espiral no ponto P , de uma maneira semelhante ao que acabamos de fazer. A reta OT foi construída perpendicularmente ao raio vetor OP , com comprimento igual ao comprimento do arco de circunferência PK . Desta forma, a reta que passa por P e T é a reta tangente à espiral no ponto P .

Na parte B da figura, em notação moderna, tomamos $OP = r \Rightarrow u = \frac{r}{t}$, $\omega = \frac{\phi}{t}$, onde t é o tempo, u a velocidade ao longo de OP e ω a velocidade angular em torno do ponto O . Como a velocidade escalar é dada pela multiplicação do raio pela velocidade angular, então, a velocidade escalar em torno do ponto O é dada por $r\omega = \frac{r\phi}{t}$. Sendo assim, podemos considerar que o ponto $P(r, \phi)$ está se movendo com duas velocidades (velocidade u ao longo do raio vetor OP e velocidade $r\omega$, perpendicular ao raio vetor). A

velocidade resultante em P, utilizando o “método do paralelogramo”, se dá ao longo da diagonal do paralelogramo formado à partir das duas velocidades e coincide com a reta tangente à espiral em P. Utilizando a semelhança entre o triângulo de catetos u e $r\omega$ e o triângulo de catetos r e OT , podemos calcular o valor do segmento OT , em função do raio r :

$$\frac{u}{r\omega} = \frac{r}{OT} \Rightarrow \frac{r\omega}{u} = \frac{OT}{r} \Rightarrow OT = r^2 \frac{\omega}{u}$$

mas

$$\frac{\omega}{u} = \frac{\frac{\phi}{t}}{\frac{r}{t}} \Rightarrow \frac{\omega}{u} = \frac{\phi}{r}$$

então

$$OT = r^2 \frac{\omega}{u} = r^2 \frac{\phi}{r} \Rightarrow OT = r\phi$$

A importância desta construção da tangente por Arquimedes, segundo Baron e Bos (1985), está na ideia de um ponto movendo-se com duas velocidades, com a velocidade resultante na direção da reta tangente. Esta maneira de interpretar a tangente foi útil no século XVII (com Isaac Barrow, Evangelista Torricelli e Gilles de Roberval) e teve um papel central na teoria das fluxões de Isaac Newton. Utilizando ainda a figura 3.45, podemos pensar em r e ϕ como sendo os *fluentes* (espaços percorridos) e $u = \frac{r}{t}$ e $r\omega = \frac{r\phi}{t}$ como sendo as *fluxões* (velocidades do movimento) de Newton.

Quando calculamos o “limite” de funções (ou curvas), é importante o conceito de “movimento”, pois a medida que alteramos o valor da incógnita, alteramos também o valor da função correspondente, ou seja, o movimento ocorre simultaneamente em duas direções (abscissa e ordenada). É o que ocorre também com a curva da espiral.

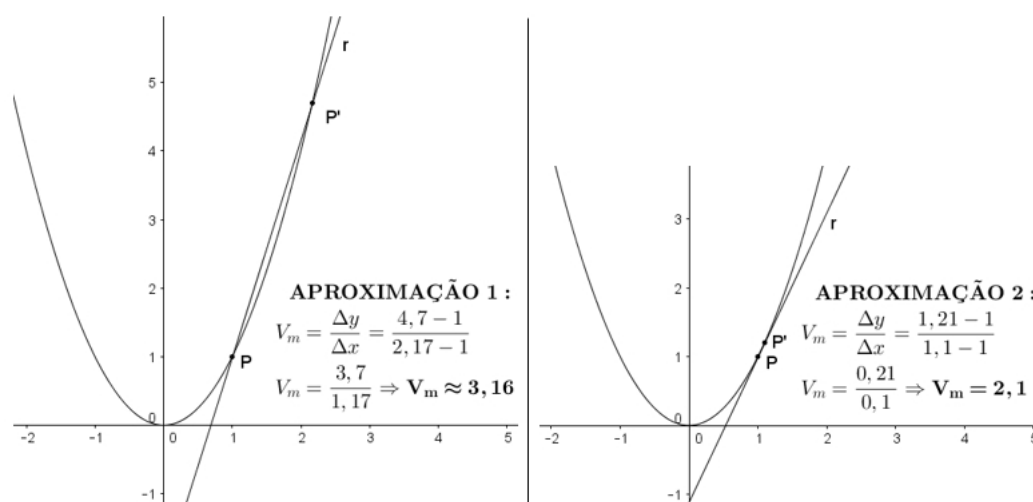
3.6 Alguns conceitos de movimento

Nas fontes consultadas para este trabalho, há pouco sobre conceito de movimento. A única exceção está na construção da tangente à espiral feita

por Arquimedes, com a ideia de um ponto movendo-se com duas velocidades, com a velocidade resultante localizada na direção da reta tangente.

Porém, segundo Baron e Bos (1985), conceitos de movimento são muito importantes para o estudo de curvas, pois se uma curva é definida a partir de um ponto em movimento, então as leis da cinemática podem ser úteis para encontrar propriedades geométricas desta curva. Um exemplo é a reta tangente a uma curva por um ponto que pode ser encontrada sabendo-se a “velocidade instantânea” do movimento neste ponto.

Figura 3.46: Aproximações da velocidade instantânea



Fonte: Arquivo do autor

Para entendermos o conceito de velocidade instantânea, devemos primeiro entender o conceito de velocidade média. Considere uma curva qualquer em um eixo de coordenadas xOy . No caso, consideramos a curva $y = x^2$ (figura 3.46). A velocidade média (V_m) entre dois pontos diferentes P e P' desta curva é dada pelo quociente entre a variação no eixo y e a variação no eixo x , ou seja,

$$V_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{P'} - y_P}{x_{P'} - x_P}$$

Este valor é também a inclinação da reta r , secante à curva, passando por P e P' .

Para calcular a velocidade instantânea referente à curva $y = x^2$, no ponto $P = (1, 1)$, consideramos um ponto P' qualquer, pertencente à curva, diferente de P . Depois, calculamos a velocidade média entre os pontos P e P' . Desta forma, obtemos a aproximação 1 ($\approx 3,16$) para a velocidade instantânea no ponto P . Agora, aproximamos mais o ponto P' do ponto P e calculamos novamente a velocidade média entre P e P' . A aproximação 2 (2, 1) encontrada é melhor do que a aproximação 1, para velocidade instantânea no ponto P . Quanto mais próximo estiver o ponto P' do ponto P , melhor será a aproximação para a velocidade instantânea e a inclinação das retas secantes (retas com inclinação igual à velocidade média entre P e P') irá se aproximar cada vez mais da inclinação da reta tangente no ponto P . A inclinação da reta tangente no ponto P é dada pela derivada da função $y = x^2$ no ponto P , que é calculada por

$$y'(x) = 2x \Rightarrow y'(1) = 2$$

Logo, a velocidade média do movimento entre os pontos P e P' “tenderá” para o valor 2 (inclinação da reta tangente no ponto P), a medida que P' se aproxima de P . Sendo assim, a velocidade instantânea do movimento no ponto P , que é o limite da velocidade média entre P e P' , quando P' se aproxima de P , será também igual a 2.

Em outras palavras, considere dois pontos diferentes $P = (x_0, f(x_0))$ e $P' = (x_0 + h, f(x_0 + h))$, pertencentes a uma curva qualquer $y = f(x)$. Em notação moderna, o limite da velocidade média entre P e P' , quando h “tende” a zero, é igual ao valor da velocidade instantânea (V_i) do movimento no ponto P , ou seja,

$$V_i = \lim_{h \rightarrow 0} V_m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} \Rightarrow$$
$$V_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

mas, pela definição da derivada em um ponto,

$$y'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

logo,

$$V_i = y'(x_0)$$

ou seja, a velocidade instantânea do movimento no ponto P é igual à derivada da curva no ponto P que é exatamente a inclinação da reta tangente no ponto P .

Diferentemente do que apresentamos agora quando, usando o conceito atual de limite, mostramos que a inclinação da reta tangente a uma curva por um ponto pode ser calculada diretamente através da derivada da curva neste ponto, Arquimedes pode ter encontrado a direção da reta tangente a espiral por um ponto através da velocidade resultante de duas velocidades (figura 3.45).

Em notação moderna, a primeira velocidade (v_1) pode ser encontrada através do limite da razão entre a variação do espaço percorrido ao longo de OP (Δr) e a variação do tempo (Δt), quando Δt tende a zero:

$$v_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

e este limite nada mais é do que a derivada do espaço em relação ao tempo, ou seja,

$$v_1 = \frac{dr}{dt}$$

A segunda velocidade (v_2) pode ser encontrada através do limite da razão entre a variação do espaço percorrido em torno do ponto O ($\Delta r\phi$) e a variação do tempo (Δt), quando Δt tende a zero:

$$v_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r\phi}{\Delta t} \Rightarrow v_2 = \frac{dr\phi}{dt}$$

CAPÍTULO 4: Alguns conceitos sobre limite na Europa Medieval e no século XVII

Segundo Baron e Bos (1985), as conquistas territoriais dos árabes não evitaram por completo o processo de aprendizagem vindo das escolas europeias, mas durante algum tempo a ideia de demonstração parece ter sido completamente esquecida.

Ainda segundo Baron e Bos (1985), a ciência grega, juntamente com contribuições dos hindus e dos árabes, começou a adentrar na cristandade ocidental no século XII e as demonstrações clássicas dos gregos foram bem aceitas. Porém, até o século XVII, nenhuma tentativa de modificação ou desenvolvimento destas demonstrações foi tão importante e relevante.

4.1 Algumas discussões sobre o infinito

A matemática na Europa medieval, segundo Baron e Bos (1985), era mais objeto de discussões filosóficas do que uma atividade em si. As discussões, influenciadas pelas obras de Aristóteles, giravam em torno da natureza de quantidades infinitas, relacionadas com o mundo físico ou matemático.

Baron e Bos (1985) nos traz algumas discussões e paradoxos que enunciaremos a seguir. Todas essas questões são relevantes para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal. O infinitesimal (ou infinitésimo) é uma grandeza tão

pequena quanto se queira, porém maior do que zero, ou seja, o “limite” de uma grandeza infinitesimal “tende” a zero, mas não chega a ser exatamente zero. Este conceito está associado a ideia de não haver um menor elemento indivisível, que é uma das discussões que trazemos a seguir.

- Para Aristóteles, o mundo é finito. Sendo assim, nenhuma grandeza, mesmo que sucessivamente aumentada, poderia se tornar “infinitamente grande”. Ou seja, dada uma grandeza qualquer x , mesmo que a aumentemos “continuamente” n vezes, o limite desta grandeza tenderia a um valor finito S e não ao infinito, como sabemos hoje em dia. Por outro lado, Aristóteles considerava que qualquer grandeza, por menor que fosse, poderia ser dividida “infinitamente”, não existindo portanto, um menor elemento indivisível. Em notação moderna, dada uma grandeza x , dividindo-a “continuamente” n vezes, o limite tenderá a zero (mas nunca chegará a ser zero, como vimos anteriormente): $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = 0$.
- Já os neopitagóricos (pessoas com pensamentos semelhantes aos pitagóricos e aos atomistas físicos) negavam a divisibilidade ao infinito, considerando o ponto como indivisível e sem dimensão. Com esse modo de pensar, surgem alguns paradoxos. Se o ponto não tem dimensão, como é possível formar segmentos de retas finitas à partir destes pontos? Por outro lado, se o ponto tiver dimensão, como é possível que ele seja indivisível? Neste caso, ainda conseguiríamos dividir o ponto, por menor que ele seja.
- Há outro paradoxo que envolve a correspondência biunívoca entre pontos sobre círculos concêntricos (com mesmo centro). Para que dois conjuntos, no caso, dois círculos, estejam em correspondência biunívoca é necessário que cada ponto de um círculo possa se corresponder com um único ponto do outro círculo, não sobrando pontos. Se isto acontecer, teremos também uma relação bijetiva (injetiva e sobrejetiva) entre os dois conjuntos. Se todo raio corta cada círculo em um e somente um ponto, os números de tais pontos são iguais ou não? Lembrando que estamos pensando em dois círculos com raios diferentes e, portanto, com comprimentos de

circunferência diferentes. Assim, é possível que haja um mesmo número de pontos nos dois círculos? E ainda, esses círculos, por menor que sejam, podem ser constituídos de um número finito de pontos indivisíveis? Entendemos que o número de pontos de cada círculo deve ser “infinito”. Como os comprimentos de circunferência são diferentes, então devemos ter “diferentes infinitos” na contagem dos pontos de cada círculo. Mas é possível que os infinitos tenham quantidades diferentes? A “teoria do ponto” nos diz que sim ao trazer a ideia de que quantidades infinitas podem ser iguais ou não, do mesmo modo que quantidades finitas, ou seja, a ideia de “diferentes infinitos”. Mas, se o número de pontos de cada um dos dois círculos não é igual, como pode a correspondência ser biunívoca? Neste caso, ao correspondermos cada ponto de um círculo com somente um ponto do outro círculo, alguns pontos sobrariam, deixando de ser biunívoca a correspondência.

Um aspecto central das duas primeiras discussões é saber se há ou não um menor elemento indivisível e se este tem dimensão. Consideramos uma grandeza qualquer x e vamos pensar em duas situações:

- Se existir um menor elemento indivisível $y > 0$, ao dividirmos continuamente n vezes a grandeza x , o seu limite deve tender a $y \neq 0$ e não a zero como sabemos que acontece. Logo, y não pode ser diferente de zero e sim igual a zero. Seja então o menor elemento indivisível $y = 0$ e, portanto, sem dimensão. Se considerarmos o ponto como o menor elemento indivisível, ele também não terá dimensão. Mas se o ponto não tiver dimensão, qualquer conjunto “finito” ou “infinito” de pontos continuará sem dimensão. Logo, um conjunto de pontos não pode dar origem à segmentos de reta finitas. Portanto, chegamos a uma contradição e não pode existir um menor elemento indivisível, mesmo que este seja igual a zero.
- Se não existir um menor elemento indivisível, então podemos dividir “infinitamente” a grandeza x , encontrando um valor tão pequeno quanto desejarmos. Em notação moderna, sabemos que o limite destas divisões

tende a zero, mesmo que este valor nunca alcance o zero. Como neste caso não chegamos a uma contradição, então realmente não deve existir um menor elemento indivisível. Mas como adotar que o limite de uma grandeza que se torna “infinitamente pequena” é igual a zero se ela nunca assume o valor zero? Afinal, o limite é zero ou algo muito próximo de zero?

Essas e outras questões parecidas produziram longos debates entre inúmeros matemáticos até que o conceito de limite ficasse bem definido, o que ocorreu somente no final do século XIX. No século XVII, vários foram os matemáticos que discutiram esta questão. Escolhemos trazer algumas contribuições de Bonaventura Cavalieri (1598-1647) para o Cálculo Integral, pois em seus trabalhos há um aspecto importante, em relação ao infinito. Isto se deve à utilização que ele fez dos “indivisíveis” para comparar figuras planas ou sólidos, no “Princípio de Cavalieri”. Porém, para que estas comparações fossem realmente precisas, as figuras planas ou sólidos deveriam ser divididas em infinitos “indivisíveis”. Cavalieri utilizou também os “indivisíveis” para calcular áreas (ou volumes) de figuras curvas, por um processo parecido com o da Integral que conhecemos hoje em dia.

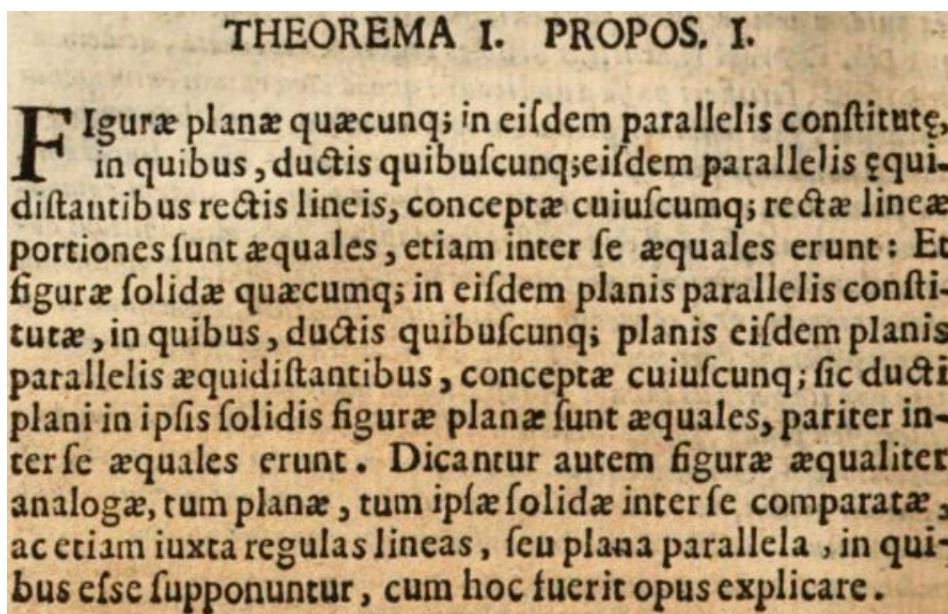
4.2 Algumas contribuições de Cavalieri para o Cálculo Integral

Cavalieri, no século XVII, em sua teoria dos “indivisíveis”, traz a ideia de que um plano qualquer é formado pela união de infinitas retas “indivisíveis”, paralelas e equidistantes e que um sólido qualquer é formado pela união de infinitos planos “indivisíveis”, paralelos e equidistantes. Segundo Baron e Bos (1985), usando essa teoria, Cavalieri transformou o uso de retas e planos “indivisíveis” em uma poderosa ferramenta para comparar áreas e volumes, no que ficou conhecido como “Princípio de Cavalieri”.

Cavalieri enuncia e demonstra o seu “Princípio de Cavalieri” (figura 4.47) no livro VII de sua obra *Geometria Indivisibilis Continuorum - Noua*

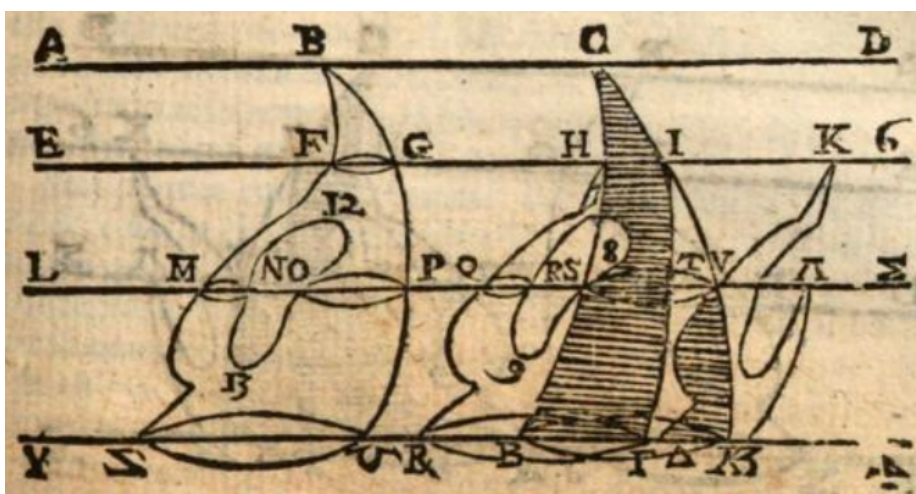
quadam ratione promoti.

Figura 4.47: Princípio de Cavalieri



Fonte: Cavalieri

Figura 4.48: Figura utilizada na demonstração do Princípio de Cavalieri

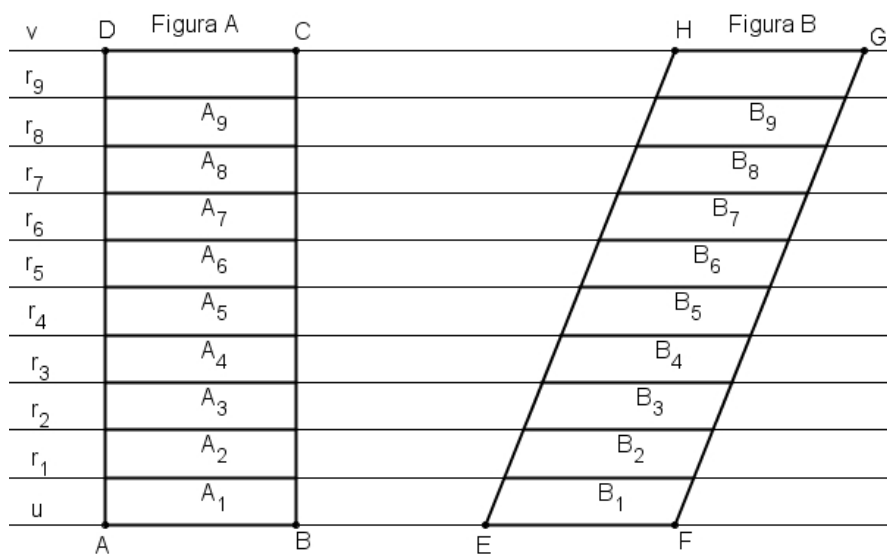


Fonte: Cavalieri

Vejamos agora o enunciado do “Princípio de Cavalieri”, traduzido de Cavalieri (1653, p. 484):

Quaisquer figuras planas, construídas entre as mesmas paralelas, em que traçarmos retas paralelas e equidistantes entre si e as interseções com as figuras planas forem iguais, serão iguais; quaisquer sólidos, construídos entre os mesmos planos paralelos, em que traçarmos planos paralelos e equidistantes entre si e as figuras planas das interseções com os sólidos forem iguais, do mesmo modo serão iguais. Digo que os desenhos são parecidos, tanto o das figuras planas quanto o dos sólidos, em comparação um com o outro, de acordo com a disposição das retas ou dos planos paralelos; é o que é suposto ser e é necessário provar (CAVALIERI, 1653, tradução nossa).

Figura 4.49: Exemplo de aplicação do Princípio de Cavalieri



Fonte: Arquivo do autor

Para compreendermos melhor o “Princípio de Cavalieri”, vamos trazer um exemplo, de acordo com a figura 4.49. Sejam $ABCD$ (figura A) e $EFGH$ (figura B), duas figuras planas contidas entre as retas paralelas u e v . Traçamos, entre u e v , nove retas paralelas a u e v , todas equidistantes entre si, e

as nomeamos de r_1 a r_9 . Chamamos de A_n e B_n , com $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq n \leq 9$, o comprimento das interseções das retas paralelas r_n com as figuras planas A e B , respectivamente. Se $A_n = B_n, \forall n$, então, pelo “Princípio de Cavalieri”, as áreas das figuras planas A e B são iguais. Do mesmo modo, sejam dois sólidos C e D , contidos entre dois planos paralelos. Entre esses planos, traçamos n planos paralelos e equidistantes entre si. Se as interseções entre cada plano paralelo traçado e os sólidos C e D , têm a mesma área, então, pelo “Princípio de Cavalieri”, os volumes dos sólidos C e D são iguais.

As interseções das retas paralelas com as figuras planas ou dos planos paralelos com os sólidos são os “indivisíveis” pensados por Cavalieri. Quanto mais “indivisíveis” tivermos, ou seja, quanto mais retas ou planos (paralelos e equidistantes) traçarmos, mais próximos estaremos do “todo” da figura plana ou do sólido. Podemos então dizer, que o limite desses “indivisíveis” quando a sua quantidade n “tende” ao infinito é igual à figura plana ou ao sólido tomado.

Vale ressaltar que quando comparamos figuras planas (ou sólidos), com áreas (ou volumes) iguais, através do “Princípio de Cavalieri”, obtemos apenas que as áreas (ou volumes) são aproximadamente iguais. As áreas (ou volumes) só seriam exatamente iguais, se considerássemos as figuras inteiras, ou seja, se tomássemos uma quantidade infinita de “indivisíveis” que cobrisse totalmente as figuras consideradas.

Segundo Baron e Bos (1985), uma vez implantados os fundamentos dos “indivisíveis” de Cavalieri, tornou-se possível derivar extensas cadeias de teoremas euclidianos por métodos mais simples do que os encontrados em “Os Elementos”. Ainda segundo Baron e Bos (1985), o conceito das potências dos elementos de reta teve papel fundamental no desenvolvimento conseguido por Cavalieri para os métodos sistemáticos de integração. Vejamos um dos problemas trabalhados por Cavalieri, envolvendo o conceito das potências dos elementos de reta, na proposição 23 de sua obra “*Exercitationes geometricae sex*”.

A proposição 23 (figura 4.50), traduzida de Cavalieri (1647, p. 279), nos diz que

Em um paralelogramo qualquer, por exemplo, BD, de base CD, com uma paralela qualquer EF, em relação a CD, que corta a diagonal AC em G; DA está para AF assim como CD ou EF está para FG. Digo que AC é a primeira diagonal. Novamente, o quadrado de DA está para o quadrado de AF assim como EF está para FH, e assim em todas as paralelas a CD, de modo que todas as retas como HF terminem em uma curva AHC. Bem como o cubo de DA está para o cubo de AF, assim como EF está para FI, descrevendo uma outra curva CIA. E, o quadrado do quadrado de AD está para o quadrado do quadrado de AF, assim como EF está para FL, descrevendo a curva CLA. Em outros casos, pode-se supor. Digo que, CHA é a segunda diagonal, CIA é a terceira diagonal, CLA é a quarta diagonal, etc. Do mesmo modo, o triângulo AGCD é a primeira diagonal espacial do paralelogramo BD, AHCD a segunda diagonal espacial, AICD a terceira, ALCD a quarta, etc. Digo, pois, que o paralelogramo BD é o dobro do primeiro espaço, o triplo do segundo, o quádruplo do terceiro, o quádruplo do quarto, etc (CAVALIERI, 1647, tradução nossa).

Trazemos, a seguir, a demonstração da proposição 23 (figura 4.51), traduzida de Cavalieri (1647, p. 279-280). Cavalieri utiliza os seguintes termos abreviados: “o.l. = omnes lineas” (todas as retas), “o.q. = omnes quadratum” (todos os quadrados das retas), “o.c. = omnes cubium” (todos os cubos das retas) e “o.qq. = omnes quadratoquadrata” (todos os quadrados dos quadrados das retas).

O paralelogramo BD é duas vezes o primeiro espaço ACD. É evidente pela proposição 19 que todas as retas de BD são o dobro de todas as retas de ACD, e, portanto, pela proposição 3 do segundo livro da Geometria dos Indivisíveis, BD é o dobro do espaço ACD. Mas, de fato, BD é três vezes o segundo espaço AHCD, provado, porque, por exemplo, o quadrado de DA está para o quadrado de AF ou o quadrado de EF está para o quadrado de FG, assim como EF está para FH, assim, então, todos os quadrados de BD estão para todos os qua-

drados do triângulo ACD, por isso todas as retas de BD estão para todas as retas do espaço AHCD, assim, então, BD está para AHCD e de fato, todos os quadrados de BD são o triplo de todos os quadrados do triângulo ACD e, portanto, BD será três vezes o espaço AHCD. Pela mesma razão mostra-se que todas as retas de BD estão para todas as retas do terceiro espaço AICD, assim como todos os cubos de BD estão para todos os cubos do triângulo ACD, isto é, BD será quatro vezes o espaço AICD. Da mesma forma prova-se que todas as retas de BD estão para todas as retas do espaço ALCD, assim como todos os quadrados dos quadrados de BD estão para todos os quadrados dos quadrados do triângulo ACD, ou seja, BD será cinco vezes o espaço ALCD. E assim, prova-se, seguindo os mesmos passos, que todas as próximas potências de BD em relação a todas as próximas potências do triângulo ACD serão seis vezes, sete vezes, oito vezes, ... do mesmo modo o paralelogramo BD será seis vezes o quinto espaço, sete vezes o sexto, oito vezes o sétimo e, assim, infinitamente (CAVALIERI, 1647, tradução nossa).

Vamos agora compreender melhor a proposição 23, de acordo com Baron e Bos (1985), tomando como base o paralelogramo da figura 4.50. Considere A como a origem, $AF = x$, $AD = b$, $AB = a$, $FG = y_1$, $FH = y_2$, $FI = y_3$ e $FL = y_4$. Utilizando as hipóteses da proposição 23, podemos encontrar as equações de y_1 , y_2 , y_3 e y_4 , da seguinte maneira:

$$\frac{DA}{AF} = \frac{EF}{FG} = \frac{AB}{FG} \Rightarrow \frac{b}{x} = \frac{a}{y_1} \Rightarrow y_1 = \frac{ax}{b}$$

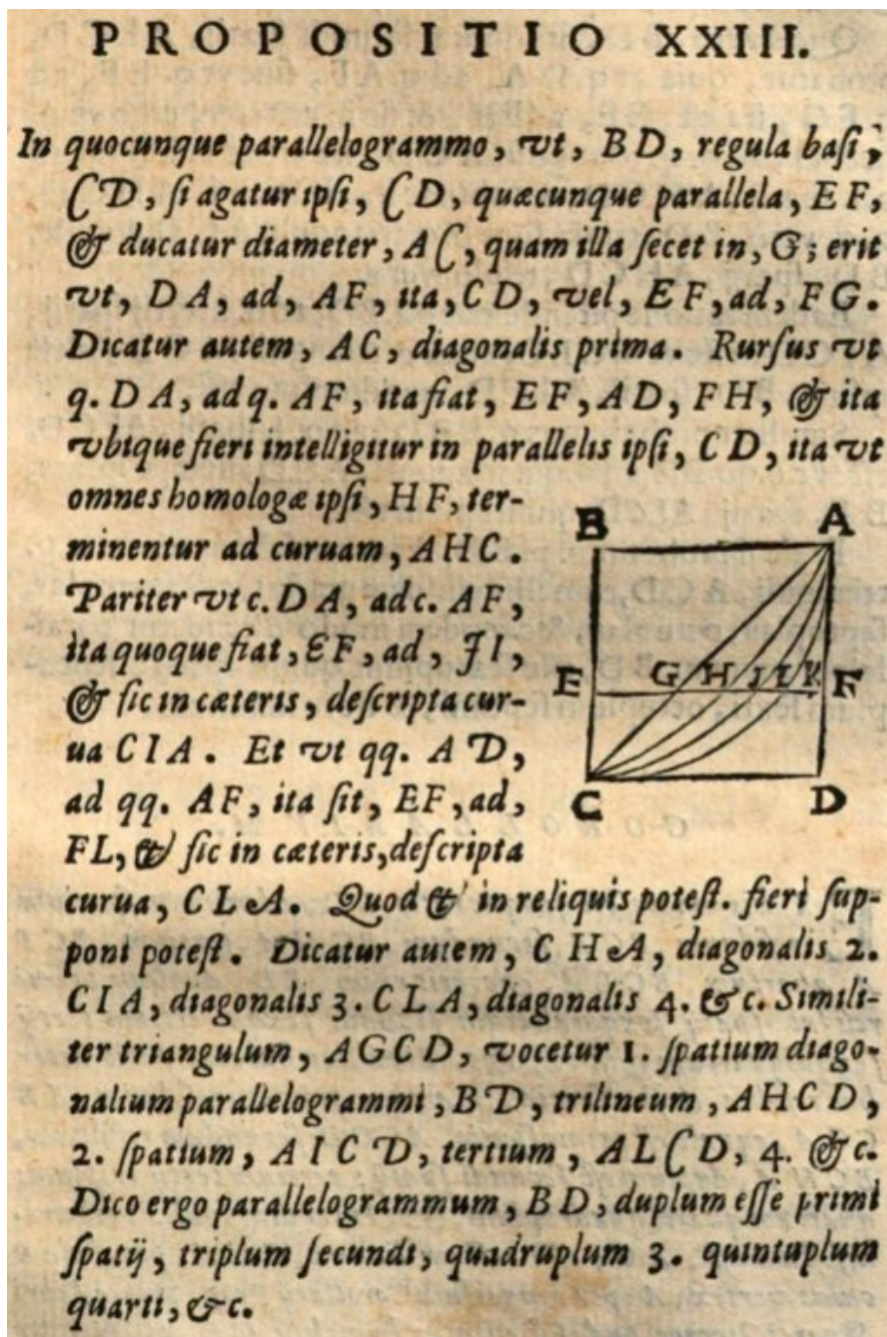
$$\frac{DA^2}{AF^2} = \frac{EF}{FH} = \frac{AB}{FH} \Rightarrow \frac{b^2}{x^2} = \frac{a}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{ax^2}{b^2}$$

$$\frac{DA^3}{AF^3} = \frac{EF}{FI} = \frac{AB}{FI} \Rightarrow \frac{b^3}{x^3} = \frac{a}{y_3} \Rightarrow y_3 = \frac{ax^3}{b^3}$$

$$\frac{DA^4}{AF^4} = \frac{EF}{FL} = \frac{AB}{FL} \Rightarrow \frac{b^4}{x^4} = \frac{a}{y_4} \Rightarrow y_4 = \frac{ax^4}{b^4}$$

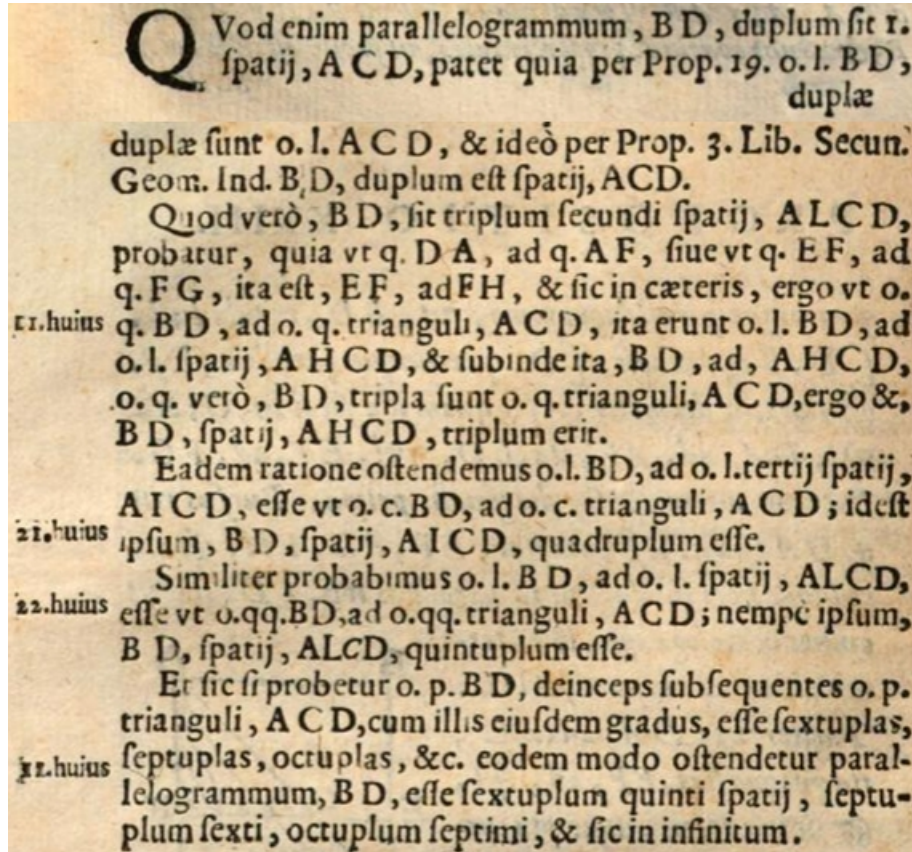
A partir daí, usando a notação moderna da integral, podemos calcular

Figura 4.50: Proposição 23 de Cavalieri



Fonte: Cavalieri

Figura 4.51: Demonstração da Proposição 23 de Cavalieri



Fonte: Cavalieri

as áreas dos espaços $AGCD$, $AHCD$, $AICD$ e $ALCD$:

$$AGCD = \int_0^b y_1 dx = \int_0^b \frac{ax}{b} dx = \frac{a}{b} \times \frac{b^2}{2} = \frac{ab}{2} \Rightarrow ab = ABCD = 2AGCD$$

$$AHCD = \int_0^b y_2 dx = \int_0^b \frac{ax^2}{b^2} dx = \frac{a}{b^2} \times \frac{b^3}{3} = \frac{ab}{3} \Rightarrow ab = ABCD = 3AHCD$$

$$AICD = \int_0^b y_3 dx = \int_0^b \frac{ax^3}{b^3} dx = \frac{a}{b^3} \times \frac{b^4}{4} = \frac{ab}{4} \Rightarrow ab = ABCD = 4AICD$$

$$ALCD = \int_0^b y_4 dx = \int_0^b \frac{ax^4}{b^4} dx = \frac{a}{b^4} \times \frac{b^5}{5} = \frac{ab}{5} \Rightarrow ab = ABCD = 5ALCD$$

Em termos de indivisíveis, usando somatórios de retas “indivisíveis”, podemos estabelecer as seguintes relações entre os espaços formados e o paralelogramo $ABCD$ (Cavalieri representava este paralelogramo por BD):

$$1^\circ \text{ espaço: } AGCD \Rightarrow \frac{b}{x} = \frac{a}{y_1} \Rightarrow \frac{\sum b}{\sum x} = \frac{\sum a}{\sum y_1} = 2$$

pois a área do paralelogramo $ABCD$ é o dobro da área do “triângulo” $AGCD$.

Temos também que

$$2^\circ \text{ espaço: } AHCD \Rightarrow \frac{b^2}{x^2} = \frac{a}{y_2} \Rightarrow \frac{\sum a}{\sum y_2} = \frac{\sum b^2}{\sum x^2} = \frac{\sum a^2}{\sum y_1^2}$$

$$3^\circ \text{ espaço: } AICD \Rightarrow \frac{b^3}{x^3} = \frac{a}{y_3} \Rightarrow \frac{\sum a}{\sum y_3} = \frac{\sum b^3}{\sum x^3} = \frac{\sum a^3}{\sum y_1^3}$$

$$4^\circ \text{ espaço: } ALCD \Rightarrow \frac{b^4}{x^4} = \frac{a}{y_4} \Rightarrow \frac{\sum a}{\sum y_4} = \frac{\sum b^4}{\sum x^4} = \frac{\sum a^4}{\sum y_1^4}$$

Assim, a determinação das áreas dos espaços foi reduzida, em cada caso, à comparação das somas das potências das retas do paralelogramo $ABCD$ com as somas das mesmas potências das retas do triângulo $AGCD$, isto é, $\frac{\sum a}{\sum y_1}$,

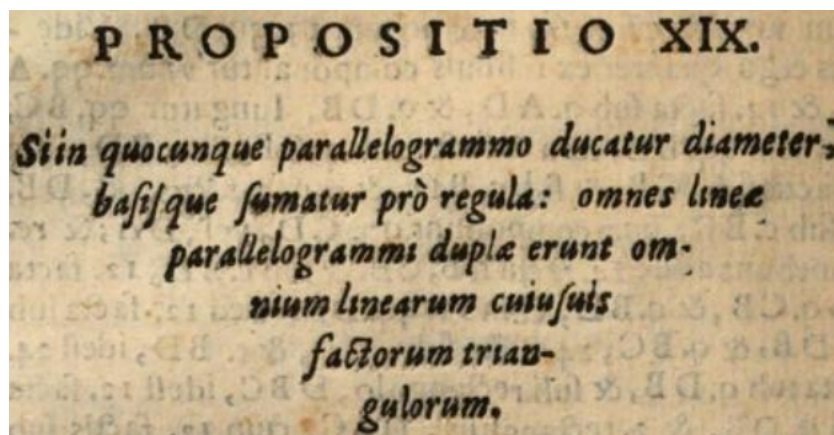
$$\frac{\sum a^2}{\sum y_1^2}, \frac{\sum a^3}{\sum y_1^3}, \frac{\sum a^4}{\sum y_1^4}.$$

Mas, Cavalieri já conhecia estas potências e nas proposições 19, 20, 21 e 22 de sua obra “Exercitationes geometricae sex”, demonstrou que, respectivamente, $\frac{\sum a}{\sum y_1} = 2$, $\frac{\sum a^2}{\sum y_1^2} = 3$, $\frac{\sum a^3}{\sum y_1^3} = 4$ e $\frac{\sum a^4}{\sum y_1^4} = 5$.

A proposição 19 (figura 4.52), traduzida de Cavalieri (1647, p. 272), nos diz que

Seja um paralelogramo qualquer com uma diagonal da base desenhada: Todas as retas do paralelogramo são duas vezes todas as retas de qualquer um dos triângulos (CAVALIERI, 1647, tradução nossa).

Figura 4.52: Proposição 19 de Cavalieri

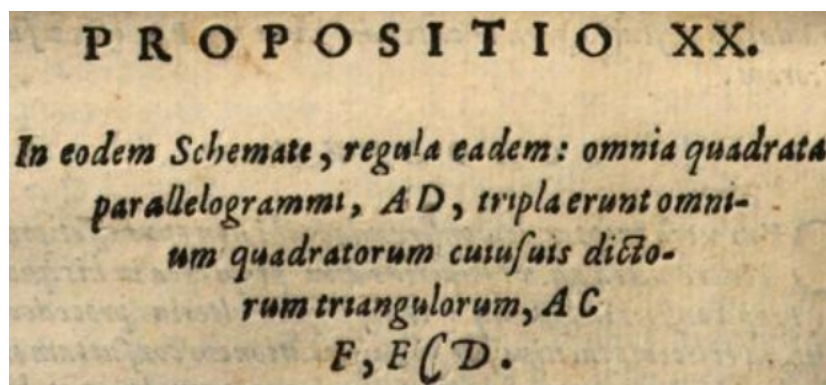


Fonte: Cavalieri

A proposição 20 (figura 4.53), traduzida de Cavalieri (1647, p. 272), nos diz que

Da mesma forma, a mesma regra: todos os quadrados do paralelogramo AD são três vezes todos os quadrados de qualquer um destes triângulos, ACF, FCD (CAVALIERI, 1647, tradução nossa).

Figura 4.53: Proposição 20 de Cavalieri

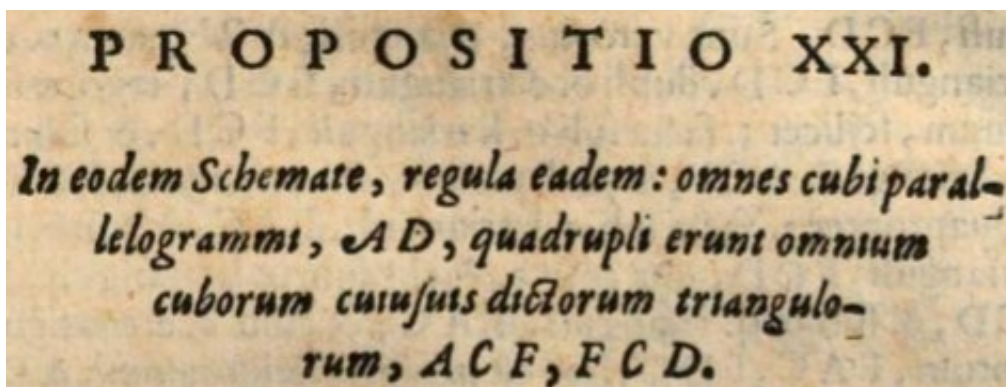


Fonte: Cavalieri

A proposição 21 (figura 4.54), traduzida de Cavalieri (1647, p. 273), nos diz que

Da mesma forma, a mesma regra: todos os cubos do paralelogramo AD são quatro vezes todos os cubos de qualquer um destes triângulos, ACF, FCD (CAVALIERI, 1647, tradução nossa).

Figura 4.54: Proposição 21 de Cavalieri



Fonte: Cavalieri

Struik (1969), em notação moderna, traz as demonstrações que provam que $\frac{\sum a}{\sum y} = 2$, $\frac{\sum a^2}{\sum y^2} = 3$ e $\frac{\sum a^3}{\sum y^3} = 4$ (utilizando y em vez de y_1). Vamos reproduzi-las aqui, com interpretação nossa, utilizando a figura 4.56.

Sejam $NE \parallel BG \parallel AF$, de modo que $HE = BM$, $NH = MG$. Tome $HE = x$, $NH = y$, $AF = a$. Logo, $x + y = a \Rightarrow \sum x + \sum y = \sum a$. Quando somamos todas as linhas paralelas a NE , de AF a CD , para cada NH , corresponde uma e somente uma MG . Mas, uma vez que $HE = BM \Rightarrow \sum x = \sum y$. Consequentemente,

$$\sum x + \sum y = 2 \sum x = \sum a \Rightarrow \frac{\sum a}{\sum x} = 2 \Rightarrow \frac{\sum a}{\sum y} = 2$$

sendo $\sum x$ a área do triângulo FCD , $\sum y$ a área do triângulo FAC e $\sum a$ a área do paralelogramo.

Figura 4.55: Demonstração da Proposição 21 de Cavalieri

E Tenim o. c. parallelogrammi, AD , æquantur o. c. triangulorum, $ACDF$, FCD , & 3. factis sub o. l. trianguli, ACF , & sub o. q. trianguli, FCD , vna cum 3. factis sub o. l. trianguli, FDC , & sub o. q. trianguli, FCD , vna cum 3. factis sub o. l. trianguli, FDC , & sub o. q. trianguli, ACF . Sunt autem o. c. AD , hoc est factum sub o. l. AD , & sub o. q. AD , ad factum sub iisdem o. l. AD , & sub o. q. trianguli, FDC , vt o. q. parallelogrammi, AD , ad o. q. trianguli, FDC (quia communis est altitudo, nempe o. l. AD ,) hoc est in ratione tripla. o. c. ergo, AD , tripli erunt facti sub o. l. AD , & sub o. q. FDC , trianguli: & hoc æquatur facto sub o. l. trianguli, FAC , & sub o. q. trianguli, FDC , vna cum facto sub o. l. trianguli, FDC , & sub o. q. eiusdem trianguli, FDC , hoc est vna cum o. c. trianguli, FDC . Ergo o. c. AD , tripli erunt o. c. trianguli, FDC , & facti sub o. l. trianguli, ACF , & sub o. q. trianguli, FDC . Quapropter resoluendo o. c. AD , in suas partes; erunt o. c. ACF , o. c. FCD , 3. facta sub o. l. trianguli, ACF , & sub o. q. FCD , vna cum 3. factis sub o. l. trianguli, FDC , & sub o. q. trianguli, ACF , tripli o. c. FCD , simul cum facto sub o. l. trianguli, ACF , & sub o. q. trianguli, FDC . Sed & 3. facta sub o. l. trianguli, ACF , & sub o. q. trianguli, FCD , sunt tripla vnus istorum factorum. Ergo & reliquum reliqui triplum erit. Nempe o. c. Mm ACF ,

ACF , o. c. FCD , & 3. facta sub o. l. trianguli FCD , & sub o. q. trianguli, FAC , simul, tripli erunt o. c. trianguli, FCD . Sunt verò o. c. trianguli, ACF , cum o. c. trianguli, FCD , dupli o. c. trianguli, FCD , ergo residuum, scilicet 3. facta sub o. l. trianguli, FCD , & sub o. q. trianguli, ACF , æqualia erunt o. c. trianguli, FCD . Quapropter 3. facta sub o. l. trianguli, FAC , & sub o. q. trianguli, FCD , vna cum 3. factis sub o. l. trianguli, FCD , & sub o. q. trianguli, FAC , & cum o. c. triangulorum, FAC , FDC , hoc est o. c. parallelogrammi, AD , quadrupli erunt o. c. trianguli, FCD , vel trianguli, FAC . Cum enim factum sub o. l. ACF , & o. q. FCD , æquetur facto sub o. l. FCD , & o. q. ACF , propter æqualitatem coalternè respondentium linearum, & quadratorum in ipsis triangulis, FAC , FCD , ideo 3. facta sub o. l. ACF , & o. q. FCD , 3. factis sub o. l. FCD , & o. q. FAC , adæquantur. Vnde patet, &c. Quod, &c.

14. huius
Cor. 18.
huius.

Cor. 1.
11. huius

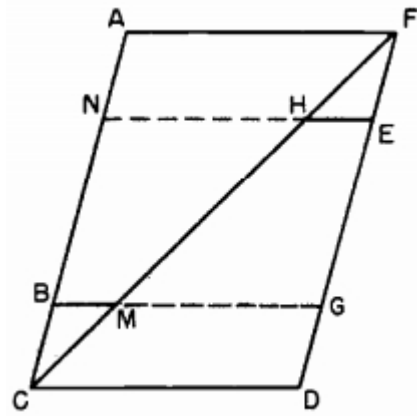
2. huius.

14. huius
& Cor.
18. huius

14. huius
& Cor.
18. huius

Fonte: Cavalieri

Figura 4.56: Paralelogramo utilizado para demonstrar as potências de Cavalieri



Fonte: Struik

Agora, temos que $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = a^2$ e $\sum x = \sum y \Rightarrow \sum x^2 = \sum y^2$, logo

$$\begin{aligned} \sum x^2 + 2 \sum xy + \sum y^2 &= \sum a^2 \\ 2 \sum x^2 + 2 \sum xy &= \sum a^2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Para encontrar $\sum xy$, podemos escrever $x = \frac{1}{2}a + z$ e $y = \frac{1}{2}a - z$. Então

$$\sum xy = \sum \left(\frac{1}{2}a + z \right) \left(\frac{1}{2}a - z \right) = \sum \frac{1}{4}a^2 - \sum z^2$$

Por triângulos semelhantes, obtemos $\sum z^2 = \frac{1}{4} \sum x^2$. Consequentemente,

$$\sum xy = \sum \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4} \sum x^2$$

Substituindo o valor encontrado na equação 4.5, temos

$$2 \sum x^2 + 2 \left(\sum \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4} \sum x^2 \right) = 2 \sum x^2 + \sum \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2} \sum x^2 = \sum a^2 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2} \sum x^2 = \frac{1}{2} \sum a^2 \Rightarrow 3 \sum x^2 = \sum a^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\sum a^2}{\sum x^2} = 3 \Rightarrow \frac{\sum a^2}{\sum y^2} = 3$$

Utilizando ainda a figura 4.56, vamos trazer a demonstração feita por Struik (1969), em notação moderna, para a proposição 21 de Cavalieri. Inicialmente, temos que

$$\frac{\sum (x+y)^3}{\sum (x+y)x^2} = \frac{\sum (x+y)^2}{\sum x^2} = \frac{\sum a^2}{\sum x^2} = \frac{3}{1} \text{ (como acabamos de demonstrar)} \Rightarrow$$

$$\sum (x+y)^3 = 3 \sum (x+y)x^2 = 3 \sum (x^3 + x^2y) = 3 \sum x^3 + 3 \sum x^2y$$

Mas, temos também que

$$\sum (x+y)^3 = \sum x^3 + \sum y^3 + 3 \sum xy^2 + 3 \sum x^2y$$

logo,

$$\sum x^3 + \sum y^3 + 3 \sum xy^2 + 3 \sum x^2y = 3 \sum x^3 + 3 \sum x^2y$$

Subtraindo $3 \sum x^2y$ de ambos os lados da equação, temos

$$\sum x^3 + \sum y^3 + 3 \sum xy^2 = 3 \sum x^3$$

mas, como $\sum x = \sum y \Rightarrow \sum x^3 = \sum y^3$, temos que

$$\sum x^3 + \sum y^3 + 3 \sum xy^2 = 2 \sum x^3 + 3 \sum xy^2 = 3 \sum x^3 \Rightarrow$$

$$3 \sum xy^2 = \sum x^3$$

De modo análogo ao que acabamos de mostrar, usando agora a relação $\frac{\sum (x+y)^3}{\sum (x+y)y^2}$, encontramos que

$$3 \sum x^2y = \sum x^3$$

Então,

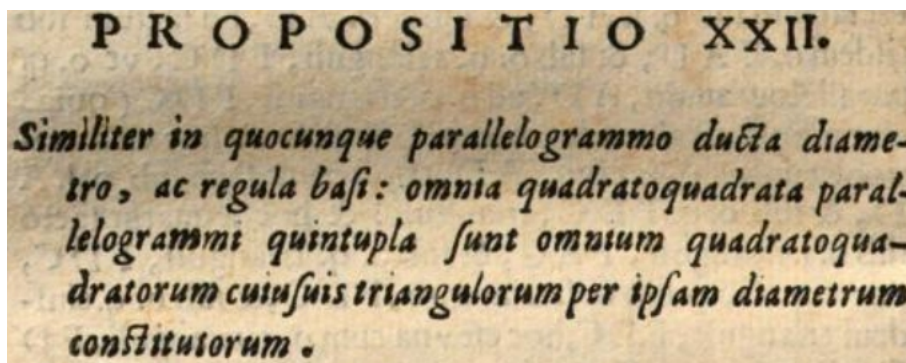
$$\begin{aligned} \sum x^3 + \sum y^3 + 3 \sum xy^2 + 3 \sum x^2y &= \sum x^3 + \sum x^3 + \sum x^3 + \sum x^3 \Rightarrow \\ \sum x^3 + \sum y^3 + 3 \sum xy^2 + 3 \sum x^2y &= \sum (x + y)^3 = \sum a^3 = 4 \sum x^3 \Rightarrow \\ \frac{\sum a^3}{\sum x^3} &= 4 \Rightarrow \frac{\sum a^3}{\sum y^3} = 4 \end{aligned}$$

■

A proposição 22 (figura 4.57), traduzida de Cavalieri (1647, p. 274), nos diz que

Da mesma forma, em qualquer paralelogramo com uma diagonal da base desenhada: todos os quadrados dos quadrados do paralelogramo são cinco vezes todos os quadrados dos quadrados de qualquer um dos triângulos formados pela diagonal (CAVALIERI, 1647, tradução nossa).

Figura 4.57: Proposição 22 de Cavalieri



Fonte: Cavalieri

De acordo com Baron e Bos (1985), estas potências foram descobertas por Cavalieri com trabalho árduo, muita engenhosidade e algum conhecimento da expansão binomial em potências inteiras. Além disso, Cavalieri não usou nenhuma notação algébrica e isto dificulta ainda mais o entendimento de suas

demonstrações. Ainda segundo Baron e Bos (1985), usando esse método sistematicamente, Cavalieri conseguiu construir as razões entre as somas de potências sucessivas das retas do paralelogramo e das retas do triângulo. Além disso, ele foi capaz de usar estes resultados para a quadratura e a cubatura de um grande número de curvas e sólidos, incluindo as espirais.

Para calcular áreas (ou volumes) de figuras curvas, Cavalieri utilizou a ideia da soma de infinitos pontos “indivisíveis” formando retas e da soma de infinitas retas “indivisíveis” formando superfícies, ideia essa que é utilizada hoje em dia no cálculo de áreas (ou volumes) pelo conceito da Integral.

Segundo Pinto (2008), Cavalieri foi duramente criticado na época, em sua concepção de indivisível, por não apresentar o rigor matemático desejado. Um de seus maiores críticos foi o matemático suíço Paul Guldin (1577-1642), que dizia que números infinitos não podem ser comparados entre si. Cavalieri teria publicado a obra *Exercitationes Geometricae sex*, em 1647, em resposta aos críticos, apresentando de maneira mais clara sua teoria (GANDT apud PINTO, 2008, p. 49).

Ainda segundo Pinto (2008), François de Gandt afirma que a Filosofia, à primeira vista, aparece como um obstáculo ao estudo dos indivisíveis de Cavalieri e que este se esquivou desta discussão afirmando que sua teoria é válida, aceitando-se ou não que o contínuo é composto por pontos. Além disso, Cavalieri não parecia preocupado em transgredir a Filosofia, mas sim em chegar a resultados falsos ou estéreis.

No entanto, segundo Baron e Bos (1985), outros matemáticos consideravam os indivisíveis de Cavalieri uma ferramenta poderosa na solução de problemas e tentaram modificá-los para justificar sua utilização. Um destes matemáticos foi Gilles Personne de Roberval (1602-1675), que concentrou suas discussões sobre os indivisíveis inteiramente nos números figurados dos pitagóricos e suas propriedades.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente, em civilizações antes dos gregos, encontramos a ideia de “limite” embutida em aproximações para o cálculo de áreas. Primeiro, em figuras planas mais complexas transformadas em figuras mais simples como o retângulo, através de transformações geométricas elementares. Após essas transformações, ficaria mais fácil “quadrar” essas figuras. Depois, em aproximações por falta e por excesso, para o valor da área de um círculo.

Já com os gregos, além da ideia anterior, que também foi absorvida por esta civilização, ainda notamos a ideia de limite com os pitagóricos, quando estudaram seus quatro elementos “indivisíveis” (1 - ponto, 2 - reta, 3 - superfície, 4 - sólido) que formavam todo o universo, sendo que infinitos pontos formam retas, infinitas retas, superfícies e infinitas superfícies, sólidos. Também notamos a ideia de limite com Zenão, através dos seus paradoxos, que levam a uma contradição: o espaço e o tempo são infinitamente divisíveis e o espaço e o tempo não são infinitamente divisíveis. Porém, usando argumentos lógicos, uma proposição não pode ser e não ser, ao mesmo tempo. Onde está o erro nisso tudo: nas suposições iniciais, na estrutura lógica usada ou na nossa ideia de movimento? Estes paradoxos só poderiam ser resolvidos com as ferramentas que temos hoje em dia, como por exemplo a soma de uma série infinita e o conceito de funções contínuas.

Em relação aos dois últimos paradoxos de Zenão citados no nosso trabalho, podemos fazer uma ligação com o nosso dia-a-dia. Ao analisarmos os relógios analógicos, é mais comum encontrarmos relógios analógicos “discretos” onde, a cada segundo, o ponteiro dos segundos se move em direção ao próximo segundo. Estes tipos de relógios podem nos dar a falsa impressão de que existe

um menor elemento indivisível (no caso, o segundo), quando falamos de tempo. Porém, o tempo é uma quantidade contínua, e sempre podemos dividir uma unidade de tempo em uma unidade menor do que a anterior. Por exemplo, o segundo pode ser dividido em milésimos de segundo. Já os relógios analógicos “contínuos” mantêm o ponteiro dos segundos em constante movimento, dando a impressão correta de como o tempo se move. Na prática, não sentimos diferença entre estes dois tipos de relógios. Porém, somente o relógio analógico “contínuo” pode ser considerado matematicamente correto em sua operação.

Ainda com os gregos, vimos outra ideia relacionada com o conceito de limite: a descoberta dos incomensuráveis. Esta descoberta é cercada de lendas, porém o que podemos perceber de fato, é que ela trouxe novas discussões e gerou novos conhecimentos matemáticos. Outro conceito que estudamos neste trabalho, através de “Os Elementos”, está relacionado com razões entre grandezas e razões entre números. Nesta época, só era possível relacionar entre si grandezas de mesma dimensão, ou seja, pontos com pontos, retas com retas e superfícies com superfícies. Posteriormente, com os “indivisíveis” de Cavalieri, houve a quebra desta restrição dimensional, quando com infinitas retas “indivisíveis” formamos superfícies e com infinitas superfícies “indivisíveis” formamos sólidos.

Após o estudo de alguns trabalhos da Matemática Grega, especialmente de Arquimedes, compreendemos melhor algumas demonstrações que calculam a área de determinadas curvas, utilizando-se do limite de figuras circunscritas e/ou inscritas à estas. O Teorema do Confronto (ou Teorema do Sanduíche), presente hoje em dia nas disciplinas de Cálculo, utiliza basicamente a mesma ideia destas demonstrações. Para exemplificar, considere uma figura X . Se tanto o limite das áreas das figuras inscritas quanto o limite das áreas das figuras circunscritas a esta figura “tendem” a A , então, pelo Teorema do Confronto, a figura X tem área A .

Além disso, compreendemos melhor um método de demonstração muito utilizado ao longo da História da Matemática, especialmente por Arquimedes, que é o método da exaustão (ou absurdo duplo). Através deste método, para provar que determinada grandeza A é igual a uma grandeza B , supomos que

$A < B$ e, depois, que $A > B$ e chegamos a dois absurdos, só nos restando que $A = B$. Vimos também que este método foi visto como essencial até o final do século XVII. A partir daí, segundo Baron e Bos (1985), os matemáticos se cansaram da repetição constante do método e adotaram a prática da passagem direta ao “limite”.

Buscamos compreender melhor as três primeiras proposições de Arquimedes, sobre a quadratura da Parábola, pois as demonstrações destas proposições foram perdidas ao longo do tempo. Mesmo usando conceitos modernos de Geometria Analítica, de Geometria e do Cálculo, não foi fácil “demonstrar” as propriedades presentes nestas três proposições. Este estudo se fez necessário, pois os resultados destas três proposições é usado posteriormente nas demonstrações das outras proposições, referentes à quadratura da Parábola. No estudo dessas outras proposições, Arquimedes utiliza artifícios para calcular somas infinitas sem usar a ideia do “limite” e, para confirmar o valor da área do segmento parabólico e da espiral, utiliza o método da exaustão.

Ao analisarmos alguns trabalhos de Cavalieri, utilizamos suas obras originais escritas em latim. Mesmo com o auxílio de tradutores na Internet, não foi um trabalho fácil traduzir suas obras para algo próximo do original. Neste sentido, pensamos que um curso de latim (mesmo que básico) é essencial para quem quer compreender melhor alguma obra neste idioma.

Em nosso trabalho, percebemos que a busca por fontes originais pode ser bem trabalhosa, principalmente quando buscamos por autores mais antigos. Em alguns casos, algumas obras simplesmente se perderam ao longo do tempo, impossibilitando uma análise mais precisa dos fatos. Em outros casos, as obras originais podem estar escritas em um idioma que não temos facilidade para traduzir. Nestes casos, o que nos resta é utilizar fontes não originais. Porém, devemos ter muito cuidado ao analisar estas fontes, pois estas podem trazer modificações importantes na estrutura das obras, além de comentários adicionais que podem comprometer a originalidade dos dados.

BIBLIOGRAFIA

BARON, M. E. BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática:** Origens e desenvolvimento do Cálculo por Margaret E. Baron e H. J. M. Bos. Trad. de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e M^a. José M. M. Mendes. Brasília, Editora Universidade de Brasília, Vol. 1-2, 1985, c1974.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** Prefácio de Isaac Asimov; revista por Uta C. Merzbach; tradução de Elza F. Gomide. 3.ed. São Paulo: Blucher, 2010.

CAVALIERI, Bonaventura. **Geometria Indivisibilus Continuorum - Noua quadam ratione promota.** Bolonha: Typographia de Ducijs, 1653. Disponível em: <<https://books.google.com.br>>. Acesso em: 17 nov. 2015.

_____. **Exercitationes geometricae sex.** 1647. Disponível em: <<https://books.google.com.br>>. Acesso em: 17 nov. 2015.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **A interface entre História e Matemática:** uma visão histórico-pedagógica. In: FOSSA, Jhon A. (org.). Facetas do Diamante: ensaios sobre Educação Matemática e História da Matemática. Rio Claro-SP: Editora da SBHMAT, 2000.

_____. **Tendências e Perspectivas Historiográficas e Novos Desafios na História da Matemática e na Educação Matemática.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 14, n. 3, p. 336-347, 2012.

EUCLIDES. **Os Elementos/Euclides**: tradução e introdução de Irineu Bicudo. Tradução do grego para o português. São Paulo. Editora UNESP, 2009.

HEATH, T.L. **A history of Greek Mathematics**. Volume I, p. 179-180, 1921, Oxford. Disponível em: <<http://archive.org>>. Acesso em: 04 ago. 2015.

_____. **The works of Archimedes**. 1897. Disponível em: <<http://archive.org>>. Acesso em: 07 out. 2015.

JONES, William. **Synopsis Palmariorum Matheseos**: ou uma nova introdução à Matemática. p. 263, 1706. Disponível em: <<http://archive.org>>. Acesso em: 25 jul. 2015.

LEITÃO, Henrique de Sousa. **Pedro Nunes, 1502-1578**: novas terras, novos mares e o que mays he : novo ceo e novas estrellas. Biblioteca Nacional de Portugal: comissário científico Henrique de Sousa Leitão; coordenação técnica Lígia de Azevedo Martins - Lisboa: BN, 2002. Disponível em: <<https://books.google.com.br>>. Acesso em: 07 set. 2015.

NASCIMENTO, J. C. do. **O conceito de limite em cálculo**: obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática. 2003. 341 f. Tese (Doutorado) Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, 2003. Disponível em: <<http://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/8244>>. Acesso em: 13 dez. 2015.

NOBRE, Sergio. **Leitura Crítica da História**: Reflexões Sobre a História da Matemática. *Ciência & Educação*, v. 10, n. 3, p. 531-543, 2004.

PINTO, Aníbal. **A teoria dos indivisíveis**: uma contribuição do padre Bonaventura Cavalieri. 2008. 84 f. Dissertação (Mestrado) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: <<http://livros01.livrosgratis.com.br/cp067821.pdf>>. Acesso em: 02 fev. 2016.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo**: Dificuldades de Natureza Epistemológica. 2003. 450 f. Tese (Doutorado) Faculdade de Educação,

Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003. Disponível em:
<<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-27022014-121106/pt-br.php>>. Acesso em: 13 dez. 2015.

RIZZATO, Fernanda Buhner. **Trisseccção do ângulo**. Supervisão e orientação: Francisco César Polcino Milies. 2001. Disponível em:
<http://www.matematica.br/historia/trissec_angulo.html>. Acesso em: 08 nov. 2015.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco de Carvalho. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

STRUIK, D. J. (ed.). **A source book in mathematics**. Harvard University Press, 1969. p. 210 e 217. Disponível em:
<<http://web.csulb.edu/~scrass/teaching/math410/reading/cavalieri.pdf>>. Acesso em: 14 nov. 2015.