UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO - UFTM

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

PROFMAT

Dissertação de Mestrado

Uma proposta de ensino de funções usando a História da Matemática como recurso pedagógico

Maria Teresa Costa Barboza

Uberaba - Minas Gerais

Maio de 2019

Uma proposta de ensino de funções usando a História da Matemática como recurso pedagógico

Maria Teresa Costa Barboza

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFTM como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines

Uberaba - Minas Gerais

maio de 2019

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

B214p

Barboza, Maria Teresa Costa
Uma proposta de ensino de funções usando a história da matemática como recurso pedagógico / Maria Teresa Costa Barboza. -- 2019.
68 f. : il., fig., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2019
Orientador: Prof. Dr. Mônica de Cássia Siqueira Martines

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Funções (Matemática). 3. Matemática - História. 4. Prática de ensino. I. Martines, Mônica de Cássia Siqueira. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III.Título.

CDU 51(07)

Maria Teresa Costa Barboza

Uma proposta de ensino de funções usando a História da Matemática como recurso pedagógico

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

30 de maio 2019 .

Banca Examinadora

Prof. Dra. Mônica de Cássia S. Martines
Orientadora
Unviversidade Federal do Triângulo Mineiro.

Prof. Dra. Verônica Klepka
Universidade Federal do Triângulo Mineiro.

Prof. Dr. Zaqueu Vieira Oliveira
Universidade São Paulo.

Aos meus familiares e aos meus alunos que sempre me incentivaram a seguir a docência e a aprender com o processo de ensino.
À família PROFMAT pelos ensinamentos que fizeram de mim uma profissional apta a estar em processo de aprendizado contínuo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus em primeiro lugar, como tudo em minha vida.

Agradeço aos meus pais, Edma e João Batista (in memorian), por tudo que me ensinaram, princípios e valores e pela doação de amor incondicional.

Ao meu irmão Amauri, que tenho um amor sem fronteira; à minha tia Eva, que fez um esforço descomunal para que eu pudesse vencer várias etapas dessa fase tão complexa, e à minha tia Dinair pelos momentos de risos e descontração, juntamente com o primo Fábio Jr.

Agradeço a todos da família Barboza, aos tios, primos, em especial aos meus avós Elza Maria e Aramísio que em seus ensinamentos a honestidade e a humildade estavam sempre em primeiro lugar.

Um agradecimento especial a minha vó Tereza Costa (in memorian) e ao meu avô Alcides Muniz de Moraes (in memorian), por terem se dedicado tanto a esse meu objetivo. Ao meu companheiro Elton D. S. Franco, sempre disposto a me incentivar com sua compreensão e amor, bem como todos da minha nova família Silveira e Franco.

Agradeço a minha orientadora, Mônica de Cássia Siqueira Martines, por todas as sugestões, pela paciência, pela ajuda e pelos ensinamentos que me seguirão eternamente.

Aos meus amigos Anna Gabriela, Pietra, Eurípedes, Valda, Dagmar, Lúcia, Allan, Kênia, Marquinhos, Guel, Maria Gertrudes, Gilberta, Léia, Juliete, Luiz Carlos, Carlos, Oneide, Amanda, Girlene, Genes, tia Sônia, Francisca, aos diretores Robinson, Gislene, Marisa, Katiúcia, João Manoel e Maria Hermione.

Aos professores que tive, em especial os do PROFMAT, pelos ensinamentos oferecidos com tamanha dedicação. À CAPES pelo apoio financeiro para realização deste trabalho de pesquisa.

A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo
Galileu Galilei.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo propor atividades utilizando a História da Matemática como recurso pedagógico para o ensino e aprendizagem de Funções, conteúdo proposto a ser ensinado na Educação Básica e que se torna a base para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Desejamos que o aluno ao se aproximar do conhecimento da História da Matemática, compreenda que a Matemática foi e ainda é uma ciência em construção, e assim tenha condição de ter um olhar crítico nos processos de formalização dos conceitos e das práticas matemáticas. O trabalho foi desenvolvido em forma de pesquisa bibliográfica, onde analisamos, artigos e dissertações de autores que especificaram seus trabalhos no ensino de funções, bem como obras originais digitalizadas e disponibilizadas em sites oficiais. Trabalhamos com o livro da autora Tatiana Roque, História da Matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas - ferramenta útil para a pesquisa desenvolvida e alcance do objetivo proposto. Relacionamos História da Matemática e Função com atividades propostas para a sala de aula, em específico para o nono ano do Ensino Fundamental da Educação Básica.

Palavras-chave: História da Matemática. Recurso Pedagógico. Funções.

Abstract

This work aims to propose activities using the History of Mathematics as a pedagogical resource for the teaching and learning of Functions, proposed content to be taught in Basic Education and which becomes the basis for the teaching of Differential and Integral Calculus. We hope that the student, when approaching the knowledge of the History of Mathematics, understands that Mathematics is a science under construction, and thus has the condition to have a critical look at the processes of formalization of mathematical concepts and practices. The work was developed in the form of a bibliographical research, where we analyzed articles and dissertations of authors who specified their works in the teaching of functions, as well as original digitized works and made available on official websites. We work with the book by the author Tatiana Roque, História da Matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, a useful tool for the research developed and reaching the proposed objective. We relate History of Mathematics and Function, with activities proposed for the classroom, in specific to the ninth year of Basic Education of Basic Education.

Keywords: History of Mathematics. Pedagogical Resource. Functions.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Código Alfanumérico BNCC 17
Figura 2 – **Definição de Função no Contexto Escolar** 37
Figura 3 – **Números figurados** 41
Figura 4 – **Figura de um gnomon - Atividade 2** 43
Figura 5 – **Figura de dois gnomons - Atividade 2** 43
Figura 6 – **Latitudes de Formas - Atividade 2** 44
Figura 7 – Malha quadriculada 45
Figura 8 – Plano com orientação 46
Figura 9 – Localização de pontos 47
Figura 10 – **Leibniz - Atividade 4** 55
Figura 11 – **Imagem de Johann Bernoulli - Atividade 4** 59
Figura 12 – **Capa do livro escrito por L'Hôpital. *Analyze des infinit petits pour l'intelligence des lignes courbes*** - Atividade 4 60
Figura 13 – **Imagem atribuída a D'Alembert - Atividade 4** 62
Figura 14 – **Primeira página da Enciclopédia de D'Alembert e Diderot - Atividade 4** 63
Figura 15 – **Imagem atribuída a Cauchy - Atividade 4** 65
Figura 16 – **Leonhard Euler - Atividade 4** 67
Figura 17 – **Página de rosto do livro de Euler "Mechanica", São Petersburgo, 1736 - Atividade 4** 69
Figura 18 – **Capa de Rosto do Livro: *Introductio in Analysin Infinitorum*, 1748 - Atividade 4** 71

Lista de tabelas

Tabela 1 – **Tabela dos números triangulares.** 42
Tabela 2 – **Tabela dos números quadrangulares.** 42
Tabela 3 – **Tabela dos números retangulares.** 42
Tabela 4 – **Tabela dos gnomons quadrangulares.** 44
Tabela 5 – **Tabela dos gnomons retangulares.** 44
Tabela 6 – **Situação 1: Arrefecimento do café - Atividade 2** 47
Tabela 7 – **Situação 2: Subida de um projétil - Atividade 2** 48
Tabela 8 – **Situação 3: Temperatura durante dois dias do mês de Janeiro - Atividade 2** 48
Tabela 9 – **Situação 4: A temperatura de um forno eléctro em função do tempo - Atividade 2** 48

Sumário

	INTRODUÇÃO	**13**
1	**ANÁLISE DOCUMENTAL DO CBC E DO BNCC.**	**15**
1.1	**O tema Função no Estado de Minas Gerais**	**15**
1.2	**O tema Função no Documento BNCC**	**16**
2	**UM OLHAR SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**	**22**
2.1	**Os caminhos da pesquisa em História da Matemática**	**23**
2.2	**História da Matemática como recurso pedagógico**	**24**
3	**FUNÇÃO: UM POUCO DE HISTÓRIA**	**28**
3.1	**Uma história do conceito de Função**	**28**
3.1.1	Função e a ligação com o Cálculo Infinitesimal: uma versão	30
3.1.2	As várias definições de função ao longo dos séculos	32
4	**ATIVIDADES USANDO HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**	**39**
4.1	**Atividade 1: Leitura e Interpretação**	**39**
4.2	**Atividade 2: A matemática do mundo antigo e o Século XIV**	**41**
4.3	**Atividade 3: Conhecendo o contexto histórico de alguns matemáticos dos séculos XVII a XIX**	**48**
4.4	**Atividade 5: Século XX: Função e o Grupo Bourbaki**	**49**
5	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	**50**
6	**BIBLIOGRAFIA**	**51**
7	**ANEXOS**	**55**
7.1	**Gottfried Wilhelm von Leibniz**	**55**
7.2	**Johann Bernoulli**	**59**
7.3	**Jean D'Alembert**	**61**
7.4	**Augustin-Louis Cauchy**	**65**
7.5	**Leonhard Euler**	**67**

INTRODUÇÃO

Como cidadã inserida numa sociedade de escola pública de periferia, aos 13 anos de idade tive a percepção das dificuldades que muitos colegas possuíam em relação ao ensino - aprendizagem de matemática, e isso me chamou muito a atenção. E, mesmo sendo considerada uma boa discente, com boas notas, fui convidada a participar de um projeto de monitoria, que era uma parceria entre a escola que eu estudava e uma universidade da nossa cidade. Nessa monitoria, nós, estudantes, recebíamos auxílio nas atividades escolares, podíamos sanar nossas dúvidas com os alunos do curso de licenciatura em matemática da universidade parceira.

Participar desse projeto e ver o quanto ele fez bem a mim e aos meus colegas no que tange ao nosso rendimento escolar e a nossa autoestima que só melhorava, despertou em mim o interesse de cursar a licenciatura em Matemática nessa mesma universidade. Escolhi a licenciatura sabendo que estava escolhendo uma profissão que me daria dignidade com o trabalho em educação.

O tempo passou, fiz o curso Superior de Licenciatura Matemática e, como professora da educação básica das escolas públicas e particulares, percebi que precisava aprofundar meus conhecimentos para tornar o ensino da matemática mais significativo para os meus alunos e, também, para a comunidade escolar, uma vez que sempre buscamos o trabalho em equipe. Quando fiquei sabendo do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), corri atrás da possibilidade de voltar a estudar e aprofundar os meus conhecimentos para melhorar a qualidade das minhas aulas.

No período em que estava cursando o mestrado, através das reuniões pedagógicas semanais denominadas de módulo II da Escola Estadual Antônio Souza Martins, onde atuo como professora de matemática da educação básica, soube das dificuldades que os alunos estavam tendo em relação ao ensino - aprendizagem de *Função*. E, através desta problemática, surgiu o interesse em pesquisar sobre metodologias para ensinar *Funções*.

Dessa forma, escolhi fazer o trabalho final de curso do PROFMAT na área de Educação Matemática, mais precisamente escolhi a metodologia da História da Matemática para ensinar Função. A História da Matemática foi escolhida como abordagem e recurso pedagógico para que assim, segundo Gaspar(2003), pudéssemos desenvolver estratégias de ensino-aprendizagem no qual convidaríamos os alunos a serem pesquisadores da Matemática para deixarem de lado o papel de receptores de resultados prontos e acabados.

Também escolhi a História da Matemática para a pesquisa, uma vez que se trata de uma tendência em educação matemática, com possibilidades de análises internas, em que o foco de estudo é o conteúdo em si e toda sua trajetória até sua formalização e descoberta na íntegra, bem como análises externas com envolvimentos dos contextos políticos, culturais e sociais que abrangem a descoberta do conteúdo envolvido. Sem contar que a História da Matemática nos possibilita o trabalho como recurso pedagógico, que é o desenvolvimento de atividades pedagógicas envolvendo o contexto histórico do conteúdo.

Mas, como ensinar funções às turmas de 9º ano usando a História da matemática como recurso pedagógico?

Para respondermos à questão, nosso objetivo principal consistiu em propor atividades para ensinar *Função* usando a história da matemática como recurso pedagógico. Também se tornaram objetivos específicos justificar o tema função na educação básica em documentos oficiais, compreender a metodologia de pesquisa em História da Matemática, aprender a pesquisa documental, compreender o contexto de criação do conceito de função, elaborar atividades.

Para apresentarmos os resultados da pesquisa, no capítulo dois, trabalhamos com os documentos: Currículo Básico Comum (CBC), a nível estadual; a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), a nível nacional, que norteia o desenvolvimento do estudo de *funções* na Educação Básica.

Em seguida, no capítulo três, abordamos a linha de pesquisa da História da Matemática na Educação Matemática que, segundo Flemming, Luz e Melo(2005), tem como objetivo principal tornar o conhecimento significativo, acessível e inclusivo. Para tanto, citamos a tendência História da Matemática que pode ser eficaz para atividades e abordagens no ensino da matemática.

No capítulo quatro, apresentamos um breve estudo sobre o desenvolvimento do processo histórico do conteúdo de Funções, como evidência dos lugares, dos profissionais, dos materiais utilizados e de como alguns processos consolidaram esse conteúdo.

E, para finalizarmos, no capítulo cinco, apresentamos propostas de atividades a serem usadas em sala de aula para ensinar funções usando a história da matemática.

1 Análise documental do CBC e do BNCC.

1.1 O tema Função no Estado de Minas Gerais

Para justificar a pertinência do conteúdo escolhido, desenvolvemos uma análise documental, no Conteúdo Básico Comum (CBC) documento a nível estadual, que orienta curricularmente todo o estado de Minas Gerais, como segue:

> O Conteúdo Básico Comum (CBC) é um documento para o ensino da Matemática no Ensino Fundamental e Médio em todo o Estado de Minas Gerais. O objetivo principal deste foi estabelecer os conhecimentos, as habilidades e as competências a serem adquiridas pelos alunos que se encontram na educação básica, bem como as metas a serem buscadas pelos professores a cada ano letivo. Analisamos e reforçamos que os CBCs não definem todos os conteúdos a serem abordados nas escolas e, sim, os aspectos fundamentais de cada disciplina que não pode deixar de ser ensinado e que o aluno não pode deixar de aprender. (MINAS GERAIS, 2005, p.9).

Por esse motivo, "os CBCs, são a principal referência entendida, inclusive, como base para a elaboração de avaliações tais como: o Programa de Avaliação da Educação Básica (PROEB) e para o Programa de Avaliação da Aprendizagem Escolar (PAAE)", assim como o estabelecimento de um plano de metas para cada escola.

Neste trabalho utilizamos o CBC de Matemática,

> o documento foi baseado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), bem como nas sugestões obtidas ao longo do ano de 2005, por meio de contatos diretos com professores da rede estadual e durante os cursos de capacitação, palestras, debates e fóruns realizados com estudantes de licenciatura em Matemática e com docentes do ensino superior, este possui considerações didático - metodológicas, orientações pedagógicas, orientações sobre o ensino da matemática através de exercícios contextualizados, dinâmicas diferenciadas, e, ainda, orientações a respeito das diferentes formas de avaliação, e como lidar com os erros. (MINAS GERAIS, 2005, p.9-19)

"O CBC de Matemática, das séries finais do Ensino Fundamental, é um documento, dividido em quatro Eixos Temáticos, e cada eixo possui dois Temas, sendo eles:"

- **Eixo Temático I**: Números e Operações: Tema 1 Conjuntos Numéricos e Tema 2 Grandezas Proporcionais.
- **Eixo Temático II**: Álgebra: Tema 1 Expressões Algébricas e Tema 2 Equações Algébricas.
- **Eixo Temático III**: Espaço e Forma: Tema 1 Relações Geométricas entre Figuras Planas e Tema 2 Expressões Algébricas.
- **Eixo Temático IV**: Tratamento de Dados: Tema 1 Representação Gráfica e Média Aritmética e Tema 2 Probabilidade.

> Os conteúdos foram distribuídos em seus respectivos **Eixos e Temas**, classificados em tópicos obrigatórios escritos em números arábicos e os tópicos complementares estão escritos em algarismos romanos (MINAS GERAIS, 2005, p. 21-30)

Já o CBC de Matemática, do Ensino Médio,

[...] é um documento que está fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) e nas orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias), é diferente da divisão do Ensino Fundamental, pois este possui as seguintes subdivisões para o Primeiro Ano do Ensino Médio (Secretaria do Estado de Minas Gerais, 2005, p.21).

- **Eixo Temático I**: Números, Contagem e Análise de Dados: Tema 1: Números, Tema 2: Contagem, Tema 3: Probabilidade e Tema 4: Estatística.
- **Eixo Temático II**: Funções Elementares e Modelagem: Tema 5: Funções, Tema 6: Matemática Financeira.
- **Eixo Temático III**: Geometria e Medidas: Tema 7: Semelhança e Trigonometria, Tema 8: Geometria Analítica. (Secretaria do Estado de Minas Gerais, 2005, p. 44-48)

Para o Segundo Ano do Ensino Médio, "os conteúdos são considerados de aprofundamento:"

- **Eixo Temático IV**: Números, Contagem e Análise de Dados: Tema 9: Contagem, Tema 10: Probabilidade.
- **Eixo Temático V: Funções Elementares e Modelagem: Tema 11: Funções**
- **Eixo Temático VI**: Geometria e Medidas: Tema 12: Semelhança e Trigonometria, Tema 13: Geometria Analítica, Tema 14: Geometria Métrica e de Posição. (MINAS GERAIS, 2005, p. 49-54)

Para o Terceiro Ano, tem se o que diz sugestão de tópicos, sendo estes:

- **Eixo Temático VII**: Números, Contagem e Análise de Dados, Tema 15: Números, Tema 16: Contagem, Tema 17: Probabilidade, Tema 18: Estatística.
- **Eixo Temático VIII: Funções Elementares e Modelagem, Tema 19: Funções, Tema 20: Matemática Financeira.**
- **Eixo Temático IX**: Geometria e Medidas, Tema 21: Semelhança e Trigonometria, Tema 22: Construções Geométricas, Tema 23: Geometria Analítica, Tema 24: Geometria de Posição no Espaço e Tema 25: Geometria Métrica. (MINAS GERAIS, 2005, p. 55-60)

1.2 O tema Função no Documento BNCC

Ainda relacionado a pertinência do conteúdo foi desenvolvida uma análise documental da Base Nacional Curricular Comum (BNCC).

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p.7).

A BNCC tem sua estrutura formada em três etapas da Educação Básica, sendo elas: "Educação Infantil, que compreende a faixa etária de 0 a 5 anos e 11 meses, Ensino Fundamental, que compreende os anos iniciais do (1º ao 5º ano) e os anos finais do (6º ao 9º ano) e Ensino Médio, que compreende (1ª à 3ª série)". As aprendizagens estão organizadas nessas etapas e esse processo vai desde o "reconhecimento dos códigos, dos quais os conteúdos são divididos, até as habilidades desenvolvidas em suas etapas e anos dos ciclos da educação básica" .(BRASIL, 23 - 34)

Para compreendermos o BNCC temos Código alfa numérico. Que pode assim ser interpretado:

Figura 1 – Código Alfanumérico BNCC

FONTE: Guia Prático da BNCC.

Nesse documento, a área Matemática está dividida em cinco unidades temáticas, sendo elas": Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística (BRASIL, 2018).

Ainda de acordo com o BNCC(2018, p. 268)

> a BNCC leva em consideração que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações.Entre eles têm-se: equivalência, ordem, proporcionalidade,

> interdependência, representação, variação e aproximação. Nessa direção, a BNCC propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental.(BRASIL, 2018, p. 268)

Tal conteúdo é sugerido no nono ano do ensino fundamental. O ensino de funções está previsto no BNCC(2018, p.316):" Unidade temática: **Álgebra**, tem como objeto de conhecimento, Funções: representações numérica, algébrica e gráfica". Uma das habilidades específicas desta unidade temática, de acordo com a BNCC(2018, p. 317) é:

> (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

De acordo com a (BNCC, 2018, p. 531), "no Ensino Médio, ocorre algumas mudanças no formato da disposição das habilidades que estão subdivididas em cinco competências, sendo elas":

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
>
> 2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
>
> 3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
>
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Por exemplo: o código alfanumérico EM13MAT101, é interpretado assim: EM = Ensino Médio, 13 = habilidade a ser trabalhada do primeiro ao terceiros anos, MAT = Matemática, 1 = Competência Específica 1, 01 = Primeira habilidade do Bloco da Competência Específica 1 (BRASIL, 2018, p. 533).

Sendo assim, o CÓDIGO ALFANUMÉRICO tem algumas alterações em relação ao do Ensino Fundamental, como exemplo temos:

- Primeiro par de letras:Indica a etapa do Ensino Médio: EM
- Primeiro par de números: anos (1, 2 e 3) no qual a habilidade deverá ser trabalhada, ou bloco de anos. Por exemplo, (13 = primeiro ao terceiro ano)
- Trio de letras: indica a componente curricular, exemplo: MAT = Matemática
- Segundo número: Indica a competência específica, como mencionada anteriormente pode ser de 1 a 5.
- Terceiro número: Habilidade da competência específica.

Assim, temos os exemplos de aplicações do conteúdo.

> **COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1** Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral:
>
> (EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.
>
> **COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3** Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1^o ou 2^o graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
>
> (EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
>
> (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
>
> (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
>
> (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4 Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5 Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

(EM13MAT503) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

"De um total de 43 habilidades dentro das cinco competências específicas do Ensino Médio, temos treze destinadas ao conteúdo *Função*" (BRASIL, 2018,p. 532-541).

Esse conteúdo *Função*, bem como outros, foram avaliados a nível nacional pelo governo através da Prova Brasil, tendo como referência para elaboração as habilidades descritas no BNCC.

Como exemplo, citamos a nossa experiência na escola em que a mestranda atua como docente, a Escola Estadual Antônio Souza Martins. Analisamos os resultados baseados nas habilidades para cada questão da Prova Brasil, baseados no Índice de Desenvolvimento da Educação Brasileira (IDEB), para mensurar o desempenho do sistema educacional brasileiro. A escola, no referido ano, teve a participação de 123 estudantes do total de 153 alunos matriculados.

O desempenho médio da escola em matemática pela Prova Brasil em 2017, foi de 269,23 com os alunos do terceiro ano do ensino médio, sendo que a média de escolas similares é de 284,60, nesse contexto, o percentual dos estudantes que são capazes de desenvolver as habilidades, de reconhecer as coordenadas de pontos representados em um plano cartesiano localizados no primeiro quadrante, reconhecer os zeros de uma função dada graficamente, bem como dado sua lei de formação, foi apenas de 20,23 por cento. E, para finalizar, apenas 16,21 por cento dos discentes sabem reconhecer o valor máximo de uma função quadrática representada graficamente (INEP, 2018).

O conteúdo *Funções* permite perceber, algebricamente, através das notações e, geometricamente, através dos gráficos, a dependência unívoca entre duas grandezas e como estas se relacionam, dentro de contextos que podem ser manipulados pelos estudantes, com análises determinísticas ou aproximadas. O conteúdo *Função* permite que o estudante desenvolva essas manipulações desde o ensino fundamental, quando ele compara grandezas como velocidade e tempo, oferta e demanda, dentre outras, e isso se extende ao Ensino Médio quando o aluno constrói gráficos e projeta *funções* mais abstratas como a exponencial, polinomial, trigonométricas por exemplo.

Ao analisarmos as dificuldades dos alunos desenvolvemos, em equipe, um plano de intervenção pedagógica, com o objetivo de melhorar o índice desta escola. Neste plano de intervenção optamos por acrescentar as atividades elaboradas usando a História da Matemática para o ensino - aprendizagem de função, no nono ano do Ensino Fundamental, para que no terceiro ano esse aluno tenha a possibilidade de desenvolver uma boa prova.

2 Um olhar sobre a História da Matemática

Neste capítulo, falamos um pouco sobre a Educação Matemática destacando a preocupação com um ensino mais significativo através de recursos desenvolvidos por seus pesquisadores.

De acordo com Flemming, Luz e Mello, (2005, p. 12 e 13)

> A Educação Matemática surgiu no século XIX, em consequência dos primeiros questionamentos sobre o ensino de Matemática. Os matemáticos da época preocupavam-se em como tornar os conhecimentos mais acessíveis aos alunos e buscavam uma renovação no ensino de Matemática. A partir da década de 1980, a Educação Matemática foi cada vez mais ampliando seu espaço no cenário educacional. Possui um discurso autônomo, com intersecção na Educação e na Matemática. [...] É na busca por mudanças no ensino da Matemática que surgem práticas inovadoras e que se destacam como tendências em Educação Matemática. A pesquisa na Educação Matemática ao longo de sua história apontou caminhos que podem ser seguidos quando se pretende alcançar mudanças efetivas no processo ensino-aprendizagem. Estes caminhos passam a se consolidar como uma tendência, a partir do momento em que sua prática produz resultados positivos em sala de aula.

Falamos sobre o processo de desenvolvimento, com ênfase no objetivo principal da pesquisa em Educação Matemática, e como essas pesquisas passam a se consolidar como tendência.

Nesse contexto, ainda segundo Flemming, Luz e Mello (2005), "é fundada a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), em 27 de janeiro de 1988."

É importante ressaltar que tornar esses conhecimentos mais acessíveis através do ensino aprendizagem não é tão simples como entender que são necessárias atitudes que aproximem os alunos desses conhecimentos matemáticos. "É preciso sensibilizar o profissional da educação a fazer essa reflexão sobre como atingir esse aluno, levando em consideração sua realidade, e os conceitos, associando assim, a uma metodologia apropriada" (FLEMMING, LUZ E MELLO, 2005, p. 12-13).

> A análise descritiva sistematizada nesta elaboração tem o intuito de contribuir para o estudo reflexivo dos profissionais da área, bem como aos que estão em processo de formação, possibilitando a ambos elementos para que, além de conhecerem a sua própria prática, contribua para a construção de proposta metodológica para o ensino da matemática. (ZORZAN, 2007, p.78)

Na busca por esses procedimentos, ou seja, formas de tornar o ensino - aprendizagem em matemática mais significativo, ao longo dos anos, surgiu o que hoje denominamos por Tendências em Educação Matemática, a partir das situações e/ou necessidades de determinado contexto histórico-escolar.

Assim, Resolução de Problemas, Etnomatemática, Modelagem Matemática, Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), História da Matemática, Leitura Crítica, entre outras, surgiram como campo de pesquisa e, que eventualmente, podem ser usadas como metodologias para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Optamos pela área de pesquisa História da Matemática e apresentaremos uma abordagem desta como metodologia de ensino, uma vez que acreditamos que a mesma pode auxiliar a responder aos "porquês" dos alunos referente ao assunto escolhido ou para que possamos "compreender as características desta, assim como seus princípios pedagógicos e seus modos de abordagem, visando nos situar acerca das possibilidades de uso na pesquisa construída." (MENDES, 2008, p.10).

2.1 Os caminhos da pesquisa em História da Matemática

A pesquisa histórica bibliográfica teve início em fontes terciárias tais como Baron e Bos (1985), Roque (2012) e, também, de autores de artigos científicos ainda citados no decorrer do trabalho sobre a história das funções. Em seguida, utilizamos a busca, por meio eletrônico, das fontes secundárias e/ou primárias para compor o capítulo sobre atividades usando a história da matemática como recurso pedagógico, sempre com a intenção de ser fiel ao contexto histórico. Segundo Pereira, et al (2015, p. 245).

> O estudo de fontes históricas para o meio acadêmico, na maioria das vezes, baseia-se em fontes originais, chamadas assim as fontes primárias, as quais não passaram por nenhuma modificação. Já as fontes secundárias são as que necessitam das primárias, sendo uma espécie de mediador entre o pesquisador e a fonte primária. Estas são utilizadas quando não se tem acesso às fontes originais, como por exemplo, a análise e avaliações dos documentos originais, livros, artigos, bibliografias que foram baseados em fontes primitivas.

Levando-se em consideração de que "as fontes e a forma de obtenção dessas fontes são um fator preponderante para uma fiel produção do conhecimento histórico", pois através destas pesquisas, teremos o nosso embasamento teórico fiel para a preservação da memória histórica e assim "uma sequência para novas produções, evitando mera reprodução" (CASTANHA, 2006, p.1)

Ainda de acordo com Castanha (2006, p.1)

> As fontes ou documentos são requisitos fundamentais para a produção e sistematização do conhecimento histórico. O trabalho de levantamento, catalogação, identificação e interpretação das fontes são elementos constituintes da pesquisa histórica e representam o alicerce para a preservação da memória histórica. Dessa forma, a compreensão do conhecimento acumulado historicamente e da própria História são condições indispensáveis tanto para a produção de novos conhecimentos, quanto para evitar a sua mera reprodução, ou até mesmo sua manipulação em favor de determinados segmentos da sociedade.

É importante ressaltar que "nem todos os papéis que são encontrados em bibliotecas", peças guardadas em museus, "entre outros objetos considerados como fontes o são". Os objetos e escritas só adquirem "estatuto de fonte diante do historiador, quando este, ao formular o problema, delimitará os elementos, ou os objetos, que responderão às questões levantadas". Por esse motivo, é importante a preservação das fontes assim como suas classificações em primária que seria o documento original, secundária um documento derivado do original e terciária um documento derivado do secundário, em ordem gradativa, através destas, teremos a possibilidade de construir novos conhecimentos através de uma sequência de elementos históricos, "fontes que geram novas fontes, são conhecimentos que geram novas produções de conhecimentos" (SAVIANI, 2006, p. 3-4).

2.2 História da Matemática como recurso pedagógico

"A Educação Matemática é a área de estudos e pesquisas que tem constituído um corpo de atividades com métodos diferenciados visando a pluri e a interdisciplinaridade para a divulgação de métodos de ensino inovadores." (MENDES, 2008, p.9).

De acordo com Gomes e Rodrigues (2014, p.59)

> A área da Educação é alvo de constantes pesquisas que buscam transformar positivamente a dinâmica da sala de aula, bem como desenvolver uma prática docente criativa e adequada as necessidades dos educandos do século XXI. Diante disso, a Educação Matemática também abriu espaços para pesquisas e discussões envolvendo o trabalho com o ensino da Matemática. Nesse sentido, surgem tendências na área da Educação Matemática, que incorporam diferentes abordagens consideradas importantes, quando aplicadas ao processo de ensino aprendizagem.

Segundo Gomes e Rodrigues (2014), a História da Matemática é uma tendência em Educação Matemática, na qual a matemática é ensinada através de contextos históricos. Esta tendência possui potencial, uma vez que, através desta, o aluno terá acesso aos conceitos em conexão com o contexto histórico, que como consequência traz informações culturais dos povos envolvidos no processo, o que pode tornar esse estudo interessante, pois há um resgate da identidade cultural.

De acordo com Flemming, Luz e Melo (2005, p. 18)

> Hoje é muito evidente no contexto educacional que a universalidade, a objetividade, a verificabilidade, a clareza e precisão das linguagens usadas na Matemática não garantem o relacionamento entre a sociedade e a Matemática. A abstração e a análise de algumas estruturas matemáticas geram preocupações didáticas e impulsionam para um caminho de busca de novas alternativas, novas técnicas e novas metodologias. O entendimento da evolução do conhecimento matemático permite aos educadores produzir estratégias para facilitar a construção do conhecimento dos alunos. O contexto histórico é, portanto,uma fonte de inspiração.

Gomes e Rodrigues (2014), corroboram com a afirmação quando dizem ser de fundamental importância não fazer simplesmente uma reconstituição de um momento histórico e sim o de se adequar essa tendência pedagógica ao objetivo pedagógico do conteúdo, até onde este conteúdo pode ser aplicado com tudo o que temos, e nesse meio termo os profissionais da educação terão a chance de desenvolver aulas e processos pedagógicos diferenciados.

Para reforçar Zorzan (2007, p. 90-91) afirma que

> A existência humana configura-se com desejos, valores e necessidades. É a partir de suas necessidades que o ser humano produz os bens materiais e os não materiais. Os primeiros são constituídos pela espécie humana para sua própria sobrevivência; já os segundos originam-se dos pensamentos e concepções que gestam a maneira do ser construir e produzir o mundo. Tanto o pensamento quanto a sociedade são organizados e estruturados de forma dependente, pois as necessidades do ser humano tornam-no sujeito construtor de uma forma de vida, de existência. Esse processo é constituído pela ação do sujeito, como também pelo mundo das ideias, que ora fazem nascer as diferentes organizações de sociedade, ora fortalecem uma época histórica ou um tipo de organização social. Na luta constante pela sobrevivência, o ser humano constitui o mundo da cultura, que é oriunda da sua ação, de sua maneira de pensar, agir, produzir, viver... Essa dinâmica da cultura presentifica-se na história da humanidade porque é comunicada a todas as gerações. É através dessa comunicação que ocorre o elo entre o passado, o presente e o futuro, ou seja, é comunicada de um ser para outro a noção de ser e estar neste mundo, o que transcorre e se constitui pela educação. Nesse sentido, a educação possibilita ao ser humano a interação com o mundo interior e exterior de sua existência. Essa possibilidade se faz presente no sujeito porque, enquanto ser inacabado, precisa dialetar seu viver, seu pensar e seu ser no mundo com o outro. (ZORZAN, 2007, p.90-91)

Nesse sentido, escolhemos usar a História da Matemática como tendência em Educação Matemática para ser usada como recurso pedagógico em sala de aula visando tornar o conhecimento matemático mais significativo através dos contextos históricos associados aos conteúdos trabalhos, pois a matemática tem uma relação direta com a história do homem, uma vez que o objetivo do indivíduo estudioso era conhecer, entender, explicar e atuar no mundo.

De acordo com Onuchic (1999), a Matemática não fora desenvolvida por uma ou outra pessoa, uma ou outra nação e, sim, por um conjunto de pessoas de diferentes nacionalidades, e muitos conteúdos que estudamos e trabalhamos com a disciplina veio da necessidade de alguns povos em determinados períodos históricos. Afirma que ainda temos uma falta de conexão entre o que é aprendido e a prática do dia a dia, sendo esse contexto um possível motivo de desinteresse dos alunos. Sendo assim, a História da Matemática, pode ser usada como uma abordagem pedagógica que propõe ensinar a Matemática utilizando-se do contexto histórico.

Gaspar (2003, p.1) afirma que,

> Com relação à dimensão histórica, no ensino da matemática, vários pesquisadores consideram que a história da matemática como um recurso pedagógico a ser incorporado ao trabalho do professor é benéfico, e que é importante saber como ela pode ser introduzida em algumas atividades de sala de aula, contribuindo para o ensino-aprendizagem da matemática e como a mesma pode facilitar o alcance dos objetivos dentro do currículo de matemática.

Porém, é importante ressaltar que não se trata de aulas de história da matemática e, sim, do uso da história como recurso pedagógico associado ao conteúdo estudado.Por esse motivo, é importante ter um cuidado com as fontes pesquisadas.

As fontes ou documentos são requisitos fundamentais para a produção e sistematização do conhecimento histórico. O trabalho de levantamento, catalogação, identificação e interpretação das fontes são elementos constituintes da pesquisa histórica e representam o alicerce para a preservação da memória histórica. Dessa forma, a compreensão do conhecimento acumulado, historicamente, e da própria História, são condições indispensáveis tanto para a produção de novos conhecimentos, quanto para evitar a sua mera reprodução, ou até mesmo sua manipulação em favor de determinados segmentos da sociedade.

A busca por novas fontes que usamos para justificar o assunto pesquisado, ou seja, um determinado conteúdo matemático, poderá gerar ao aluno um motivo para entender e buscar novos conhecimentos ao conteúdo estudado, podendo assim acontecer novas produções (CASTANHA, 2006, p.1).

Segundo Castanha (2006, p. 4)

> A pesquisa histórica surge de "achados" de novas fontes, de novas conexões entre as mesmas, de comparações, releituras, ou de inquietações com os acontecimentos ou explicações existentes, insatisfações que, por sua vez, são provocadas pelo aparecimento de novos pontos de vista, de novas "teorias", ou de novas formas de trabalhar com a documentação.

Ainda em preocupação com a origem da fonte, uma vez que esta trata-se do início da pesquisa, vale ressaltar que nem sempre todas as fontes terão segurança em sua totalidade, uma vez que não é possível conhecer o passado em sua plenitude (CASTANHA, 2006, p.4).

Existem elementos da História da Ciência que sempre estarão sob suspeita, pois muito pouco há de concreto sobre algumas informações prestadas por terceiros, que, muitas vezes, viveram séculos após a ocorrência do evento mencionado. Exemplo a isso é encontrado na história antiga da Matemática. A não existência de documentos comprovatórios relativos a fatos relevantes na História da Ciência, levou os historiadores a juntar informações para se reconstruir a história de forma aproximada àquilo que de fato possa ter acontecido (NOBRE, 2004, p. 534).

Ainda de acordo com Nobre (2004 p. 537)

> Assuntos como os relatados no item anterior fazem parte de um grande conjunto que, por falta de informações precisas, historiadores coletam e confrontam informações oriundas de diferentes fontes e escrevem a versão histórica a partir delas. Enquanto não aparecer algum dado contraditório

> ao que fora escrito, essa história é aceita pelo meio acadêmico. Em Historiografia da Ciência, o caso o da falta de informações precisas sobre a ocorrência de determinado evento é apenas um entre outros tantos que estão sempre na mira de historiadores em busca de novos elementos para o confronto com a história estabelecida.

A matemática, nos currículos da educação básica, tem se mantido em sua grade curricular com a mesma carga horária, o que determina que esta é uma disciplina importante para a nossa sociedade (GASPAR, 2003 p. 15).

Para Gaspar (2003, p.15)

> [...] no ensino, a matemática ainda continua revestida de verdades absolutas, universais e atemporais. Para ele, é necessário que chegue à escola a concepção de uma matemática construída pelo homem, imperfeita e sem verdades universais e que devemos mostrar para os professores-alunos que a crença na verdade universal dos conceitos matemáticos é fruto de uma visão da ciência, uma visão evolucionista e eurocentrista desta ciência. Não existe uma matemática, mas cada sociedade constrói a sua matemática. Como estamos mergulhados em uma sociedade que traz em sua bagagem toda ciência ocidental, com o dogma da verdade absoluta, somos levados a olhar a ciência do outro no máximo como uma fase da evolução para atingir o nosso saber. No entanto, para chegar à forma a que temos acesso hoje, a matemática levantou hipóteses, alimentou dúvidas, viveu incertezas, imprecisões, enfim, cometeu "erros" e acertos no movimento de sua constituição como ciência. Não podemos negar aos alunos a oportunidade de percorrer tais caminhos na busca de conhecimentos, devemos valorizar todo o "ensaio" na busca de verdades.

A beleza da construção está, justamente, na possibilidade de acertos e erros e de perceber que os conhecimentos podem ser redescobertos a cada momento em que se usa uma metodologia em que a realidade do aluno pode ser contextualizada pelo conteúdo estudado. E, para que isso aconteça, o aluno não precisa necessariamente ser um professor ou um aluno do curso de matemática e suas tecnologias, tal estudo pode ser desenvolvido por qualquer pessoa que tenha interesse em aprender o conteúdo de maneira significativa como era feito pelos estudiosos antigos (GASPAR, 2003, p. 22 e 23).

De acordo com Gaspar (2003), a importância do conhecimento da história da matemática não se restringe apenas aos matemáticos e estudantes de pós-graduação que optaram pela carreira de matemático. A tese de que a história da matemática tem um papel valioso no ensino-aprendizagem da matemática é defendida por muitos matemáticos e educadores que há muito tempo concordam com o fato de que a educação matemática pode ser melhorada, de algum modo, com a incorporação da história da matemática. Muitos matemáticos e professores, de diferentes modos e por diferentes razões, têm algumas ideias sobre as relações entre a matemática e sua história. É nisso que acreditamos e pretendemos fazer nos próximos capítulos.

3 Função: Um pouco de História

Como mencionado anteriormente, escolhemos esse assunto, *Funções*, por ser trabalhado na educação básica e em diversos cursos da área de exatas, sendo a base da disciplina Cálculo Diferencial e Integral.

Nos colocamos no contexto da época do século XVII ao início do século XX, esse é o período que abordamos nesse capítulo. Comentamos sobre alguns conceitos que estavam em desenvolvimento e que serviram de base para o conceito de função. Entre eles: "a descoberta do Cálculo Infinitesimal; o retrospecto por Paradoxos de Zenão; Método grego da exaustão; Método de Cavalieri para calcular áreas, as ideias de Newton e Leibniz e o desenvolvimento das Funções." Esse não fora um desenvolvimento linear, como em nosso planejamento, os conhecimentos foram surgindo de acordo com a necessidade das pessoas (ROQUE, 2012, p. 274 - 300).

De acordo com Baron e Bos (1985), antes dos séculos XVII a XX, mais especificamente na Grécia antiga, os estudiosos pesquisavam sobre astronomia e movimentos dos corpos celestes e faziam analogias, tais como "Speusipo(IV a.E.C[1]) que afirmava existir relações entre os números e as formas geométricas, números poligonais; Nicômano (c. 100 d.E.C), que forneceu a definição e a descrição de números figurados, bem como os trabalhos de Nicole Oresme (1323 - 1382)". Tais autores foram importantes para os estudos como ponto de partida para pesquisas posteriores, seja como referência, ou seja como críticas para um novo processo de desenvolvimento da ciência, no contexto dos séculos XVII a XX (Baron e Bos, 1985, p. 15 - 60).

E, "como consequência, os estudos de movimento dos corpos na Terra e na Lua, estiveram presentes nos trabalhos de Kepler (571 - 1630) e de Galileu Galilei (1564 - 1642), e como essa relação com a física/matemática influenciou no desenvolvimento do conteúdo *Funções* "(Baron e Bos, 1985, p. 9).

É importante ressaltar que nos permitimos analisar referências bibliográficas de autores conhecidos, uma vez que estes são comumente usados em cursos de graduação na disciplina de História da Matemática, bem como direcionamos aos trabalhos mais atuais, inclusive o da autora Tatiana Roque.

3.1 Uma história do conceito de Função

Quando pensamos em função, em geral, temos duas ideias tendenciosas a seguir: "a primeira de que ela é uma curva que representa graficamente a sua expressão analítica, e a

[1] Roque (2012) nos indica usar a sigla antes da Era Comum para evitarmos a conatação religiosa.

segunda ideia é a de correspondência, como uma máquina de entradas e saídas" (ROQUE, 2012, p. 295).

Se pensarmos em função de acordo com a "segunda ideia, poderemos afirmar que nas tabelas babilônicas e egípcias teriam a ideia de função", uma vez que estas também tratavam de registros de correspondências (entre um número e o resultado das operações que envolvem esse número)," o que justificaria a noção de que função teve sua origem na matemática antiga." (ROQUE, 2012, p. 295).

No entanto, se analisarmos, historicamente, não ganhamos nada com essa ideia de associação, uma vez que existe uma componente fundamental para o desenvolvimento do conceito de função que seria a **variação**. "Uma função é expressa em termos do que chamamos de 'variável' e a variação não estava presente nessas correspondências numéricas descritas nas tabelas babilônicas e egípcias" (ROQUE, 2012, p. 295).

Podemos questionar: "Mas, o que vem a ser uma variável? Como representá-la? Como é possível representar, simbolicamente, uma variável?"

De acordo com Roque (2012), "a noção de variável só foi introduzida formalmente no século XIX, isso porque durante o tempo entre a noção intuitiva das correspondências e a definição formal houve a necessidade do nascimento da física/matemática", e a representação simbólica de uma quantidade desconhecida, sendo esta representação proposta inicialmente por Viète(1540- 1603), mas desenvolvida no século XVII (ROQUE, 2012, 295)

"O que vem a ser a física/matemática? É o que hoje denominamos de física quantitativa." Esta física buscou quantificar e estabelecer relações entre as grandezas envolvidas e, foi, "justamente, essa interpretação, a de que duas grandezas que variam uma dependendo da outra, é que tornou o conteúdo função, um instrumento útil para a ciência num contexto geral."(ROQUE, p. 297)

Como exemplo da utilidade prática do conteúdo, temos o clássico problema de queda livre de um corpo, registrado no século XVII, em 1602, por Galileu Galilei (1564-1642), filósofo italiano, que através de um estudo quantitativo concluiu que "a distância d percorrida por um corpo que cai está em função do tempo t" e hoje que a relação funcional é dada por: $d = \frac{g \cdot t^2}{2}$, onde $g =$ aceleração da gravidade. (SILVA, 1999, p. 31)

Outro exemplo registrado por Galileu foi sobre a trajetória de um projétil que desliza sobre um plano e cai em seguida. "Este cientista verificou que tal trajetória seria dada por uma curva, que hoje chamamos de parábola. A partir dessa constatação, Roberval(1602-1675), matemático francês profissional, conseguiu determinar a curva tangente à parábola"(ROQUE, 2012, p. 268).

"A física/matemática fora marcada pelos diversos trabalhos que apresentavam estudos sobre os movimentos de fenômenos físicos através das curvas, que descreviam esses movimentos", curvas matemáticas, conhecidas ou não, "que seriam descritas de maneira algébrica ou geométrica" (ROQUE, 2012, p. 268).

Segundo Roque (2012), "houveram vários processos de transição entre a física/matemática até a matemática do século XX.” Assim como a autora, destacamos três divisões nesse campo da matemática, que representam esses processos de transições, sendo eles:

- Problemas de natureza geométrica;
- Estágio analítico ou algébrico, com os trabalhos de Euler(1707-1783), e atingiu sua forma finalizada com Lagrange(1736-1813) no século XVIII;
- Uma nova arquitetura para a análise matemática, proposta inicialmente por Cauchy (1789-1857) no início do século XIX, continuada por diversos matemáticos no século XX. (ROQUE, 2012, , p.297 - 300)

Na busca por entender a definição de noções centrais adotadas no ensino básico, em específico o conteúdo ***Função***, “temos que analisar a ligação direta com o Cálculo Infinitesimal, uma vez que, para investigar conceitos, devemos analisar os contextos” e, nesse sentido, “o Cálculo Infinitesimal está interligado com o desenvolvimento do conceito de Função”. (ROQUE, 2012, p. 274)

3.1.1 Função e a ligação com o Cálculo Infinitesimal: uma versão

Nesta seção, descrevemos uma versão do Cálculo Infinitesimal e, para isso, baseamos no livro História da Matemática da autora Tatiana Roque, uma vez que através deste tivemos uma visão do conteúdo Função e o porquê este conteúdo pode ser considerado a base do Cálculo Diferencial e Integral.

“ O desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal ocorreu nos séculos XVII e XVIII, quando as regras desenvolvidas nesse cálculo passaram a integrar o campo da Análise Matemática”, culminando em mudanças nas escritas matemática, “consolidadas no século XIX e início do século XX, culminando no que temos hoje”.

A matemática se subdividiu em três momentos: “Geométrico, com as curvas que descreviam os movimentos, Álgébrico ou Analítico com os trabalhos de Euler e as contribuições de Lagrange no final do século XVIII, e uma nova arquitetura iniciada por Cauchy no início do século XIX”, e continuada por matemáticos do século XX (ROQUE, 2012, p. 274).

Na segunda metade do século XVII, houveram mudanças em relação aos trabalhos com as curvas que tinham como conceito:

- Curva como expressão algébrica, eventualmente infinita;
- Curva como trajetória de um ponto em movimento;
- Curva como polígono com um número infinito de lados; (ROQUE, 2012, p. 283)

Os trabalhos com as curvas geravam questões que envolviam matemática e estudos físicos, ou seja, de natureza não puramente matemática. O que levou cientistas do século XVII a analisarem problemas na busca de tangentes.

Os debates para as soluções destas questões, eram gerados a partir das demonstrações dos resultados alcançados e publicados entre tradição que são métodos com “demonstrações gregas" e modernidade com as novas "formas de escritas matemáticas" refletiam na verdade "uma disputa entre o método sintético e o analítico".(ROQUE, 2012, p. 282)

> Descartes(1596-1650) e Fermat(1601-1665) com seus métodos analíticos, juntamente com John Wallis(1616-1703), James Gregory(1638-1675) e Isaac Barrow(1630-1677), tiveram seus estudos motivados em propriedades aritméticas de séries infinitas, onde estes resolviam com sucesso um grande número de problemas, de como encontrar a tangente de uma curva, calcular quadraturas (áreas), ou retificar curvas (calculo de volumes curvas) influenciando Leibniz(1646-1716) e Newton(1643-1727). (ROQUE, 2012, p. 283)

"Leibniz, enunciou as regras para encontrar a derivada de somas, diferenças, produtos, quocientes, potências e raízes. Essas regras constituíam o algoritmo desse cálculo, que ele denominava 'diferencial' ". (ROQUE, 2012, 284)

Com isso, Leibniz queria mostrar que novos métodos eram necessários para se estudar relações entre grandezas, "surgindo assim um novo domínio da relação entre quantidades, o que contribuirá para o surgimento de *Função*, como relação entre quantidades" (ROQUE, 2012, 284). A partir daí, encontrava se quantidades a partir de novas quantidades, isso também pela influência dos problemas físicos.

Sendo assim, "durante séculos os matemáticos se debateram com o problema de fundamentar o uso de quantidades infinitamente pequenas", também conhecidos por infinitesimais, designados por Leibniz como diferenciais com a notação de "dx" e "dy", uma novidade no mundo científico que de acordo com as regras de demonstrações, exigiam assim algo de definitivo para essas novas notações e novos tratamentos ao Cálculo, isso fez com que Leibniz tivesse que propor diversas justificativas. (ROQUE, 2012, p. 288)

Em síntese, temos que "$\frac{dy}{dx}$" designa uma razão que de acordo com a visão de Leibniz representa uma divisão de duas quantidades, ou seja, "esta é independente dos termos que a compõem, não sendo assim conveniente interpretá-la como uma fração, uma vez que esta representa apenas a divisão entre dois números". Portanto, essa relação pode ser expressa por uma *Função*, que é o que acontece "quando escrevemos: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$"

Mesmo Leibniz não tendo o conceito definido de *Função*, este já admitia que as quantidades devem estar em relação". (ROQUE, 2012, p. 289).

É sempre necessário saber qual variável se deseja derivar, em que uma quantidade varia em função da outra, noção de dependência e independência, por isso é necessário introduzir a expressão "diferenciar em relação a", vemos aqui claramente a diferenciação como noção central do Cálculo e não as diferenciais (ROQUE, 2012, p. 290). De modo que escolher a variável em relação a qual se quer diferenciar indica uma dupla variação, uma associação da relação diferencial, fundamento do Cálculo Infinitesimal para Leibniz. A busca por "legitimidade da diferencial levou os matemáticos à noção e à definição de *Função* e à substituição definitiva de diferencial por derivada, que é Função"(ROQUE, 2012, p. 290).

Newton também trabalhava com os infinitesimais, "porém com um rigor mais tradicional dos métodos gregos, exprimia a lei da continuidade das propriedades físicas sempre no decorrer do tempo como variável".(ROQUE, 2012, p. 290)

De acordo com Baron e Bos (1974) ao longo dos tempos, desde a Grécia antiga, até meados do século XVII, a busca por soluções aos problemas envolvendo quadraturas[2], cálculo de volumes (cubaturas) e volumes de arcos (retificação) desenvolveu conceitos que hoje denominamos de integração.

"O desenvolvimento do conceito de diferenciação esteve associado aos problemas de tangente e aos problemas de valores extremos, normais e curvaturas". A unificação destes problemas, através do Teorema Fundamental do Cálculo, trouxe o desenvolvimento de notações e símbolos e, ao aparecimento do conceito de função (BARON E BOS, 1985, p.4).

Segundo (MENDES, 2008), quando os alunos entram nesse universo histórico, estes têm a oportunidade de interagir nesse contexto trazendo a realidade para o aluno de que aquele teorema é muito mais do que uma simples fórmula.

3.1.2 As várias definições de função ao longo dos séculos

A definição de derivada sempre é antecedida de: "Seja uma função $y = f(x)$", porém o conceito de função só fora introduzido na matemática anos depois, após o aprimoramento das técnicas e escritas de diferenciais de Leibniz e Newton, "confirmando mais uma vez que os conteúdos matemáticos não são organizados de modo cronológico" (ROQUE, 2012, p. 274).

"A falta de um termo geral para exprimir as quantidades arbitrárias, dependentes de outras quantidades variáveis, fora o que definiu função formalmente por correspondência entre Leibniz e Bernoulli." Somente no final do século XVII, Bernoulli(1667-1748) empregava o termo geral, relacionando-o a quantidades formadas a partir de quantidades indeterminadas e constantes, porém não fazia isso de uma maneira direta. (ROQUE, 2012, p. 299).

"Registros de correspondências mostram que Leibniz já havia introduzido os conceitos de constantes e de variáveis, sendo que estes conceitos se tornaram populares com a publicação do primeiro tratado de Cálculo, feita por L'Hospital(1661-1704), em 1696." Sabemos, também, que L'Hospital teve aulas de Matemática com Johann Bernoulli, portanto, a noção explícita de função, veio com Bernoulli, em 1718, enquanto professor da Academia de Ciências de Paris, em que ele afirma: "Chamamos de função de uma grandeza variável uma quantidade composta de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes" (ROQUE, 2012, p. 299).

[2] Quadratura consiste em construir com régua não graduada e compasso, um quadrado cuja área fosse igual a área da figura inicial dada

Segundo Silva (1999), "para Bernoulli, função era uma única expressão analítica, como $2x + 1$ e $x^2 + x$, entre outras, pois, para ele, era inadmissível que uma função pudesse ser representada por duas expressões distintas analiticamente" (SILVA, 1999, p. 30).

Chamando, assim, a atenção para a seguinte questão: **Mas o que vem a ser variável? Como representá-la?**

De acordo com Silva (1999), o conceito de *Função* está intimamente ligado com o conceito de variável, uma vez que "função é um instrumento matemático, cujo objetivo é o estudo das leis com a essência de correspondência entre dois conjuntos" que representam as grandezas. Isso culmina na necessidade de uma representação simbólica para esses conjuntos, "e essa representação simbólica fora obtida pela introdução do conceito de variável"(SILVA, 1999, p. 29)

Segundo Roque (2012), "a descoberta da variável teve sua noção intuitiva nos problemas práticos da física/matemática, proposta, inicialmente, por Viète(1540-1603), desenvolvida no século XVII, por meio de leis matemáticas pós Galileu". Isso por conta de variações em função do tempo, ou seja, há duas grandezas que variam baseadas em uma proporção geométrica. (ROQUE, 2012, p. 298 - 299)

Tal estudo dividiu opiniões ao longo dos tempos. Para Descartes(1596-1650), por exemplo, a relação deveria ser algébrica; para Galileu(1564-1642), deveria ser geométrica, uma vez que ele desejava entender o movimento. Atualmente, a noção de trajetória que associa o movimento a uma curva pode ser expresso por meio de uma equação, e esta pode ser:

- **Determinada:** Aqui, a quantidade desconhecida assume um valor dado quando resolvemos a equação, ou seja, as determinadas possuem incógnitas.
- **Indeterminada:** Estas podem ter duas ou mais variáveis, aqui não é possível encontrar um só valor para uma quantidade desconhecida e sim uma infinidade de valores que variam de acordo com os valores de outra quantidade.

Segundo Roque (2012), para Descartes, as Funções de natureza algébrica, poderiam ser expressas analiticamente. Euler buscava com essa descoberta a unificação da matemática com base na álgebra. Bernoulli, interessado em expressões analíticas de curvas, ou seja, expressões algebrizadas, não diz mais nada sobre o modo de constituir funções da variável independente, lembrando que Bernoulli privilegiava problemas geométricos e mecânicos.

"Foi com Euler (1707-1783) que o cálculo passou a ser visto como uma teoria das funções, tidas como algo diferente de curvas"(ROQUE, 2012, p. 299).

Gerando grande influência sobre a matemática do século XVIII, através da ideia de que a matemática é uma ciência geral das variáveis e de suas funções, e com essa ideia publicou o *Introductio in analysin infinitorum*, editado em 1748, e, no início dessa publicação, Euler define: "Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes" (ROQUE, 2012, p. 298-299).

Euler, em 1748, "usou o símbolo $f(x)$ para uma função de x, símbolo que se consagrou, pois tornou-se o mais usual para representar esse conceito" (SILVA, 1999, p. 30).

Até o advento do Cálculo Diferencial, "tivemos o período de estágio analítico ou algébrico, com os trabalhos de Euler, e estes trabalhos atingiram sua forma finalizada com Lagrange(1736-1813)", matemático italiano que iniciou suas atividades matemáticas em 1770, mas seus métodos de análise só foram construídos nos anos de 1795-1796, por ser mais ao final do século XVIII, "ele foi considerado como integrante da segunda geração de analistas. Lagrange afirmava que toda função pode ser expandida em uma série de potências (com exceção a valores isolados de x)":

$$f(x+h) = f(x) + p(x)h + q(x)h^2 + r(x)h^3 + ...$$

Assim, a noção de diferencial ficaria livre da consideração dos infinitamente pequenos, ou seja, dos incrementos dos infinitesimais e a derivada foi definida pelo coeficiente de $p(x)$. A função era dada por uma fórmula finita, podendo ser representada por uma série de potências como a citada acima. Lagrange usou séries de potências em diversas funções algébricas e as exponenciais, logarítmicas e trigonométricas (ROQUE, 2012, p. 310).

Segundo Roque (2012), o século XIX foi considerado o século do rigor, onde duas ideias se destacam das demais dentro do nosso contexto de estudo de *Função*, sendo elas: a primeira era a constituição de número como um objeto matemático desvinculado de quantidades, e a segunda ideia era a de reformular as funções em termos de conjuntos.

A primeira ideia buscava uma reformulação das noções de número, uma vez que, no século XVIII, somente os números absolutos eram aceitos e isso relacionava a matemática a uma noção de "realidade" que, de certa forma, limitava os contextos, pois enquanto os números eram vistos em aplicações geométricas, estes eram fechados a abstrações, por isso era necessário migrar para um conceito abstrato e diferente da matemática como ciência das quantidades do século XVII, o que culminou para a matemática pura, que não se opõe à aplicada, porém com a concepção de que a matemática poderia ser aplicada a partir do momento que é vista como um saber puro.

A segunda ideia é a de reformular as funções em termos de conjuntos, uma vez que as análises numéricas agora sem ser do ponto de vista de quantidades exclusivamente, teve como consequência a aparição de números problemáticos como os irracionais e os imaginários, culminando na formalização dos conjuntos. A profissionalização da matemática também contribuiu para essa nova arquitetura da análise, onde Cauchy(1789-1857) se destaca por desenvolver uma proposta que visa organizar e alinhar com rigor e formalização essa nova análise matemática.

"Cauchy tinha a preocupação e o rigor de atestar as expressões dentro de seus domínios para garantir sua validade, seja de uma definição ou de um teorema, por isso sempre trabalhava com as convergências de séries e de continuidade", bem como as provas de existência, como as somas de séries e das soluções de equações diferenciais, caso que não iremos estender por não ser o nosso foco de estudo. Porém, "é importante ressaltar que foi justamente essa arquitetura proposta por Cauchy que mudou a história da análise, pois, assim, todo conceito teria que ser definido em termos de outros conceitos", firmemente conhecidos e provados por seus teoremas anunciados, como base a estrutura de resultados válidos pertencentes à teoria (ROQUE, 2012, p. 311).

Segundo Silva (1999), Cauchy fundamentou os conceitos básicos do cálculo nos conceitos de função e limite, e transformou todo o cálculo diferencial e integral de variáveis em cálculo diferencial e integral de funções, como vemos nos livros da atualidade, e assim substituiu a busca por tangentes em curvas do século XVII, pela derivada de funções no século XIX.

Mencionamos, anteriormente, que para "Bernoulli, no século XVIII, uma função analítica só poderia ter uma única variável", segundo Silva (1999), no século XIX, Fourier(1768-1830), físico e matemático francês relacionou função com o conceito de somas infinitas, ao afirmar, em seu livro, *Théorie analytique de la chaleur*, " algumas funções poderiam ser representadas por séries", como exemplo:

$$f(x) \cong \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi kx}{L} + b_n sen\frac{n\pi kx}{L})$$

onde os coeficientes $a_n's$ e $b_n's$ são denominados posteriormente pela "Transformada de Fourier"(SILVA, 1999, p. 30).

Dirichilet (1805-1859), um matemático alemão, ao tentar demonstrar as fórmulas de Fourier, interpretou "que função precisava de uma ideia de correspondência entre elementos de conjuntos e assim descobriu uma definição de função mais clara e explícita", sendo esta: " Uma função $y(x)$ é dada se temos qualquer regra que associe um valor definido y a cada x em um certo conjunto de pontos". Acrescentando ainda em sua definição que: " Não é necessário que a função esteja sujeito a mesma lei, quando x percorre o intervalo". (SILVA, 1999, p. 30)

E, para mostrar a característica arbitrária da lei de correspondência, ele desenvolveu uma função com a seguinte lei: "$f(x) = 1$, para x racional, e $f(x) = 0$, para x irracional". "Sendo que esta função hoje é classificada como descontínua para qualquer valor de x "(SILVA, 1999, p. 30).

Segundo Pires (2016), o conceito de função passou por aprimoramentos e, como consequência, "apresentou descobertas referentes às funções contínuas, diferenciáveis e descontínuas" em determinados pontos e, para tais avanços, houve destaque nos trabalhos de: "Cantor (1845-1918), Richard Dedekind (1831-1916), Hermann Hankel (1839-1873), René Baire (1874-1932), Emile Borel (1871-1956) e Henri Leon Lebesgue (1875-1941)."

De acordo com (SILVA, 1999 p.30 e 31), os matemáticos tinham diferentes interpretações de função.

Boole (1815 - 1864), matemático britânico, "que utilizou da transformação para interpretar o conceito de função com a ideia de que se trocar o x por 1, o resultado expresso seria $f(1)$, ou seja, a cada elemento de x, tem-se um elemento transformador, $f(x)$."

Hardy (1877 - 1947), um matemático inglês, em 1908, "explicitou as propriedades básicas do conceito de função, generalizando e utilizando a ideia de relação entre quantidades, de três maneiras":

1. y é sempre determinado por um valor de x;
2. para cada valor de x, para qual y é dado, corresponde um e, somente um, valor y.
3. a relação entre x e y é expressa por meio de uma fórmula analítica na qual o valor de y corresponde a um dado valor de x e pode ser calculado por substituição direta de x.

Peano (1858 - 1932), um matemático italiano, "traduziu a definição de Hardy com símbolos: "Função = Relação $u/(y,x)\hat{I}u, (z,x)\hat{I}u, \forall x,y,z; y = z$"."(SILVA, 1999, p. 31)

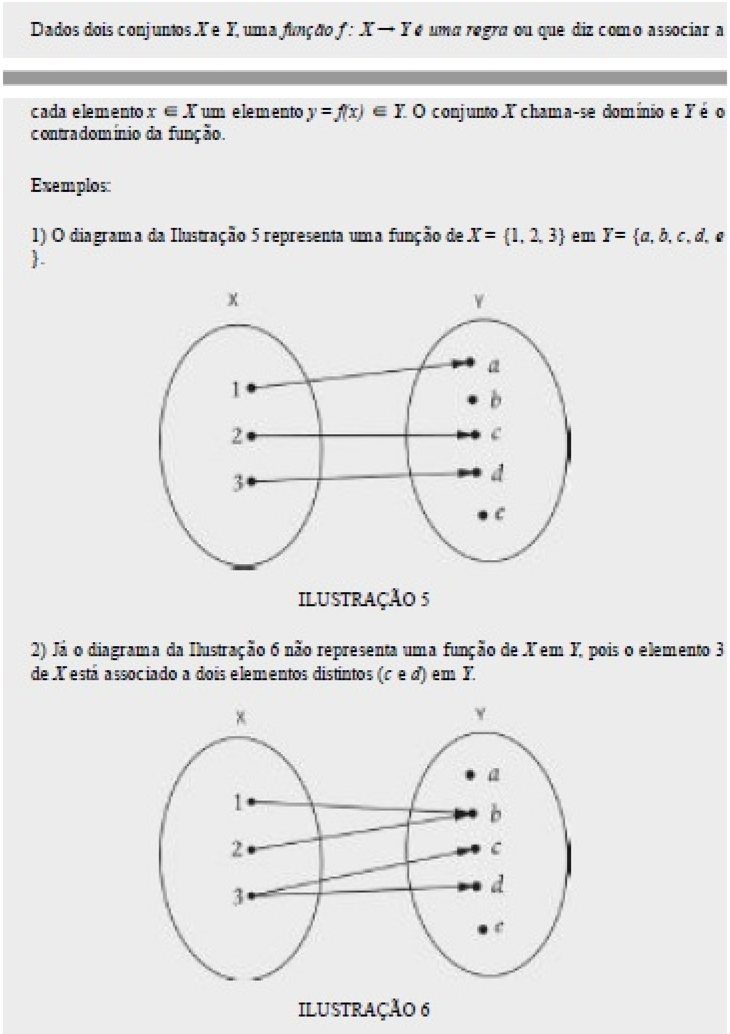
No século XX, o grupo Boubarki[3], "assim como Peano, interpretou a definição de Hardy, incorporando nesta definição o contexto da teoria dos conjuntos", sendo esta: "Sejam E e F dois conjuntos, os quais podem ou não podem ser distintos. A relação entre o elemento variável x de E e o elemento variável y de F é chamado relação funcional em y, se para todo $x\hat{I}E$ existe um único $y\hat{I}F$, o qual é dado pela relação com x."(SILVA, 1999, p. 31)

O grupo Boubarki trouxe a definição de função em forma de operação de conjuntos, onde cada elemento de x, de um determinado conjunto E, associamos a um elemento de y, pertencente a um conjunto F, assim, y, é dito ser o valor da função para o elemento x, e a função é dita ser determinada pela relação entre os conjuntos E e F.

De acordo com Roque (2012), a definição escolar de função encontrada com mais frequência, nos livros do ensino médio, pode ser vista na figura 2:

[3] Psedônimo usado para um matemático imaginário Boubarki foi idealizado por um grupo de matemáticos, principalmente de franceses, que escreveram uma série de livros matemáticos na primeira metade do século XX.

Figura 2 – **Definição de Função no Contexto Escolar**



Dados dois conjuntos X e Y, uma *função* $f: X \to Y$ *é uma regra* ou que diz como associar a

cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se domínio e Y é o contradomínio da função.

Exemplos:

1) O diagrama da Ilustração 5 representa uma função de $X = \{1, 2, 3\}$ em $Y = \{a, b, c, d, e\}$.

ILUSTRAÇÃO 5

2) Já o diagrama da Ilustração 6 não representa uma função de X em Y, pois o elemento 3 de X está associado a dois elementos distintos (c e d) em Y.

ILUSTRAÇÃO 6

Fonte: ROQUE, T. p. 295 - 296

De acordo com Pires (2016), o grupo Boubarki, publicou o primeiro livro da coleção *Théorie dês Ensembles* e nesse livro, tem-se a definição de função:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja $x \in E$, existe um elemento y de F, e somente um, que esteja na relação considerada com x. (PIRES, 2016, p. 10)

Ainda, segundo Pires(2016), essa definição além de evidenciar a unicidade, faz uma distinção entre **relação funcional** e **função**, onde **relação funcional** é utilizada para a relação de variação existente entre elementos de dois conjuntos, e **função** é utilizada para determinar a operação que associa os elementos x de um conjunto com os elementos y de outro conjunto. Sendo importante ressaltar que essa relação funcional estabelecida entre esses elementos é o que determina função.

No processo do conceito de Função, surgiram três interpretações distintas, sendo estas: "a de relação entre quantidades variáveis, a de relação entre conjuntos e a de transformação". Sendo a variação a ideia essencial desse conceito que, juntamente com a interpretação como relação entre quantidades variáveis, "proporciona a interdisciplinaridade trabalhada na Física, no Cálculo Diferencial e Integral, na Economia, na Química, entre outros. "(SILVA, 1999, p. 32)

"É possível perceber que desde a antiguidade até o movimento estruturalista empregado na Matemática, pelo grupo Bourbaki, houveram diferentes concepções de função entre a maneira de olhar o objeto matemático e o modo de utilizar ou enfatizar suas propriedades", existe uma diversidade de ideias que, respaldadas no pensamento científico e filosófico, contribuiu com o conceito e com as definições que temos na atualidade (PIRES, 2016, p. 10).

4 Atividades usando História da Matemática

Neste capítulo, propomos atividades a serem desenvolvidas com os alunos do nono ano do Ensino Fundamental. Utilizamos a História da Matemática como recurso pedagógico para o ensino de *Função*.

De acordo com Base Nacional Curricular Comum (BNCC), no nono ano do ensino fundamental, o aluno deverá: "(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica, gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis."(BRASIL, 2018, p. 317)

Desenvolvemos as atividades com os alunos do nono ano do Ensino Fundamental, com referência na habilidade 6.

4.1 Atividade 1: *Leitura e Interpretação*

Objetivo: Desenvolver as habilidades de leitura, interpretação e a comunicação oral.
Exercício 1: Façam a leitura do texto a seguir: Roque(2012, p. 10 - 12)

> Muitas vezes, o contato com seus conceitos e ferramentas torna-se difícil, pois a imagem que se tem dessa disciplina é marcada por seu caráter mecânico, abstrato e formal, o que produz uma sensação de distância na maioria das pessoas. Um de nossos principais objetivos aqui é mostrar que o modo tradicional de contar a história da matemática ajudou a construir esta visão: a de que a matemática seria um saber unificado envolvendo quantidades, números ou grandezas geométricas.[...] analisamos, de um modo novo, alguns temas tratados pela história da matemática tradicional que, embora tenham ajudado a compor a visão dominante sobre essa disciplina, são questionados pelos historiadores atuais. Listamos e criticamos, a seguir, três aspectos-chave dessa visão tradicional, indicando como foram criados ou ratificados, ainda que de modo fragmentado e inconsciente, pelos relatos históricos usuais:
>
> *A matemática é um saber operacional, de tipo algébrico, e tem como um de seus principais objetivos a aplicação de fórmulas prontas a problemas (muitas vezes enumerados como uma lista de problemas parecidos).*
>
> Desde tempos muito antigos, povos como os babilônicos já saberiam resolver equações de segundo grau. Em seguida, cada época teria acrescentado uma pequena contribuição, até que, por volta do século XVI, a álgebra começaria a se desenvolver na Europa, tendo adquirido os contornos definitivos da disciplina que chamamos por este nome.
>
> *A matemática é uma disciplina formal e abstrata, por natureza, que ajuda a desenvolver o raciocínio, mas é destinada a poucos gênios, a quem agradecemos por nos terem legado um saber unificado e rigoroso.*
>
> A sistematização da matemática em teoremas e demonstrações teria se iniciado na Grécia antiga. Desde então, destaca-se a importância do método lógico-dedutivo, que seria desconhecido de outros povos antigos

> e relegado a segundo plano por pensadores medievais e mesmo renascentistas. Esse ideal teria sido retomado, ainda que de modo insuficiente, nos séculos XVII e XVIII, porém, recolocado no centro da atividade matemática a partir do século XIX. Só então, com a explicitação de seus fundamentos, o edifício matemático teria adquirido uma consistência interna.
>
> *Ainda que possua aplicações a problemas concretos, a matemática é um saber eminentemente teórico. Parte-se, algumas vezes, de dados da experiência, mas para elaborar enunciados que os purifiquem e traduzam sua essência.*
>
> Em contraposição aos tempos áureos da Grécia, o saber teórico teria começado a decair desde a Antiguidade tardia, atingindo seu nível mais baixo na Idade Média, quando a matemática teria sido exercida somente para fins práticos. Seu caráter teórico voltaria a ser valorizado com o Renascimento e, apesar de alguns percalços, teria triunfado em diferentes épocas, segundo uma narrativa que destaca seu antagonismo em relação ao conhecimento prático. Nosso objetivo não é discutir até que ponto são falsos ou verdadeiros os três aspectos que acabamos de listar e que moldam a imagem corrente da matemática. Pretendemos mostrar, todavia, que os relatos históricos que contribuíram para a constituição dessa imagem são bastante aproximativos e devem ser discutidos com base em novas pesquisas e em um modo mais atual de fazer história.
>
> Abordaremos, portanto, épocas, personagens e localidades já tratados pela narrativa tradicional. Mas, não para reproduzi-la, e,sim, para mostrar o que se pode dizer hoje que permita desconstruir essa narrativa e começar a construir uma nova.

Exercício 2: Respondam às questões a seguir:

(a) Em algum momento, você como aluno, sentiu alguma dificuldade em aprender a matemática?

(b) Essa dificuldade foi por algum dos motivos citados no texto?

(c) Isso fez com que você desistisse de conhecer ou aprofundar seus conhecimentos em matemática?

(d) Quando você ouve falar em História da Matemática, qual a principal ideia que você tem?

(e) De acordo com o texto, a matemática é puramente teórica? Justifique.

(f) Existe em você a vontade de conhecer os contextos dessa História da Matemática?

(g) Quais as vantagens de se conhecer a História da Matemática, na sua opinião?

Ao final dos exercícios propostos e reflexões individualizadas, os alunos serão convidados para uma roda de conversa, para que estes possam expor e debater suas ideias sobre História da Matemática.

4.2 Atividade 2: *A matemática do mundo antigo e o Século XIV*

Objetivos:

1. Propor uma análise, em que a matemática do período antigo, mais precisamente na grécia antiga tinha em seu ápice a magnitude de uma matemática qualitativa.

2. Mostrar um dos trabalhos de Nicole Oresme (1323 - 1382).

3. Relacionar os dois objetivos anteriores 1 e 2, e assim concluir os motivos pelos quais não se tem uma definição formal de *Função* nesse período.

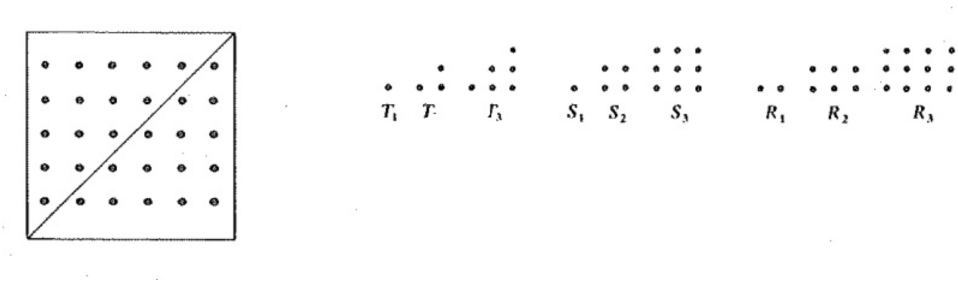
4. Revisar, com o aluno, o valor numérico de uma expressão algébrica.

5. Apresentar ao aluno um problema de preenchimento de tabela, envolvendo termos algébricos.

Exercício 1: Leia o texto.

De acordo com Baron e Bos (1985), é possível fazer algumas analogias quanto às correspondências entre termos ou variáveis existentes nos mais diversos estudos sobre astronomia e movimento. Speusipo (IV a.E.C) dizia que existiam relações entre números e as formas geométricas conhecidas por seguidores de Pitágoras, sendo estes números triangulares, quadrangulares, retangulares e outros números poligonais. E foi Nicômano (c. 100 E.C), que forneceu a definição e a descrição de números figurados que apresentamos na figura 3:

Figura 3 – **Números figurados**



Fonte: Baron e Bos, 1985, p.16

Baseado no texto, responda as seguintes questões:

(a) De acordo com a figura 3, em que estão presentes os números figurados, $T_1, T_2, ..., T_n$ preencha a tabela abaixo baseado na sequencia formada pelos números figurados, considerando: n = posição do número figurado, T_n = número de pontos que formam o triângulo de posição n.

Tabela 1 – **Tabela dos números triangulares.**

n	1	2	3	4	5	6
T_n	1	3	6			

Autoria própria

(b) De maneira análoga, faça o mesmo com os números figurados $S_1, S_2, ..., S_n$, em que:

n = posição do número figurado, S_n = número de pontos que formam o quadrado de posição n.

Tabela 2 – **Tabela dos números quadrangulares.**

n	1	2	3	4	5	6
S_n	1	4	9			

Autoria própria

(c) E, para finalizar, faremos a tabela dos números figurados $R_1, R_2, ..., R_n$, em que: n= posição do número figurado, R_n = número de pontos que formam o retângulo de posição n

Tabela 3 – **Tabela dos números retangulares.**

n	1	2	3	4	5	6
R_n	2	6	12			

Autoria própria.

Exercício 2: Responda às seguintes questões:

(a) Foi possível perceber a formação de uma sequência?

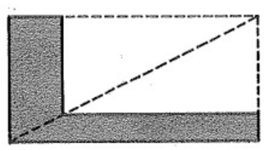
(b) Usando a notação moderna, qual a relação geral existente entre n e T_n?

(c) Qual a relação entre n e S_n?

(d) Qual a relação entre n e R_n?

Exercício 3: (Adaptado de Baron e Bos). Um gnomon tinha, originalmente, a forma retangular sombreada ao longo da superfície de um relógio solar, que.... Depois, atribui-se a esta palavra o significado de "perpendicularidade" e foi usada para descrever uns instrumentos utilizados para o traçado de ângulos retos, assim como um esquadro de carpinteiro, conforme figura 4:

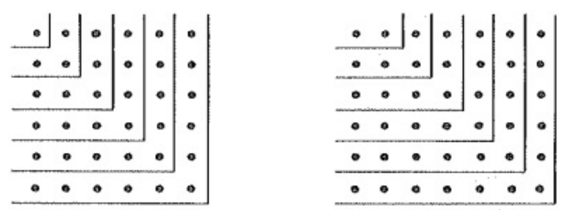
Figura 4 – **Figura de um gnomon - Atividade 2**



Fonte: Baron e Bos, 1985, p.17

O uso do gnomom (a porção da fronteira dos números quadrados e retangulares nos dois lados em forma de L) produz o seguinte:

Figura 5 – **Figura de dois gnomons - Atividade 2**



Fonte: Baron e Bos, 1985 p. 17

(a) Observando o gnomon quadrado, preencha a tabela a seguir:

Tabela 4 – **Tabela dos gnomons quadrangulares.**

n	1	2	3	4	5	6
Q_n	1	3	5			

Autoria própria

(b) Qual a relação entre n e Q_n?

(c) Observando o gnomon retangular, preencha a tabela a seguir:

Tabela 5 – **Tabela dos gnomons retangulares.**

n	1	2	3	4	5	6
R_n	2	4	6			

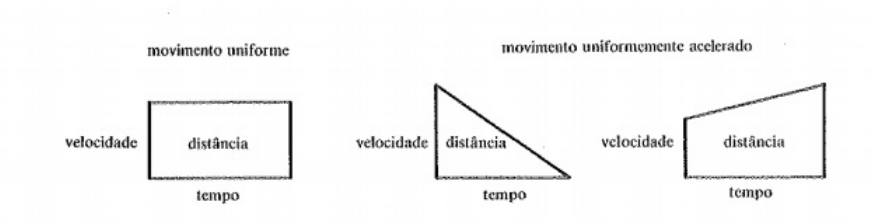
Baron e Bos, 1985, p.17

(d) Qual a relação entre n e R_n?

(e) Baseado em seus conhecimentos, use a criatividade e desenvolva um gnomon.

Exercício 4: No século XIV, Nicole Oresme (1323 - 1382), publicou um trabalho relacionado ao que hoje entendemos como parte da Geometria Analítica, através da Teoria da latitude de formas, encontra-se pela primeira vez o conceito de técnicas gráficas, sendo esta ferramenta útil, para representar toda espécie de formas, que é a representação gráfica de uma função. Assim sendo, Oresme buscou demonstrar, através de uma figura, como as coisas variam. Figura esta que está representada a seguir como 6:

Figura 6 – **Latitudes de Formas - Atividade 2**



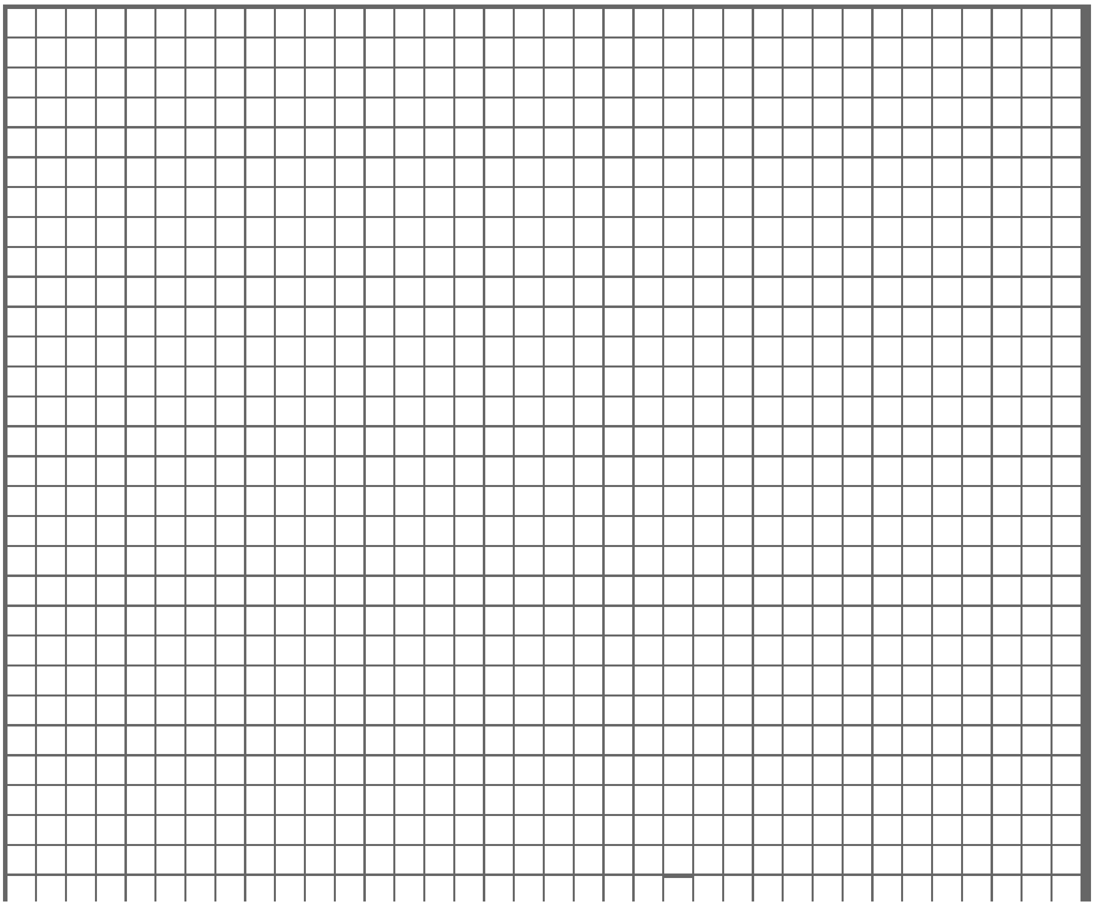
Fonte: Baron e Bos, 1985, p.60

(a) Na imagem acima, vimos que Nicole usa palavras como: velocidade, tempo e distância. Pesquise em um dicionário o significado destas palavras.

(b) Como podemos relacionar tempo e distância, que são duas grandezas diferentes?

(c) Usando a malha quadriculada da figura 7 desenhe como essa relação pode ser feita.

Figura 7 – Malha quadriculada

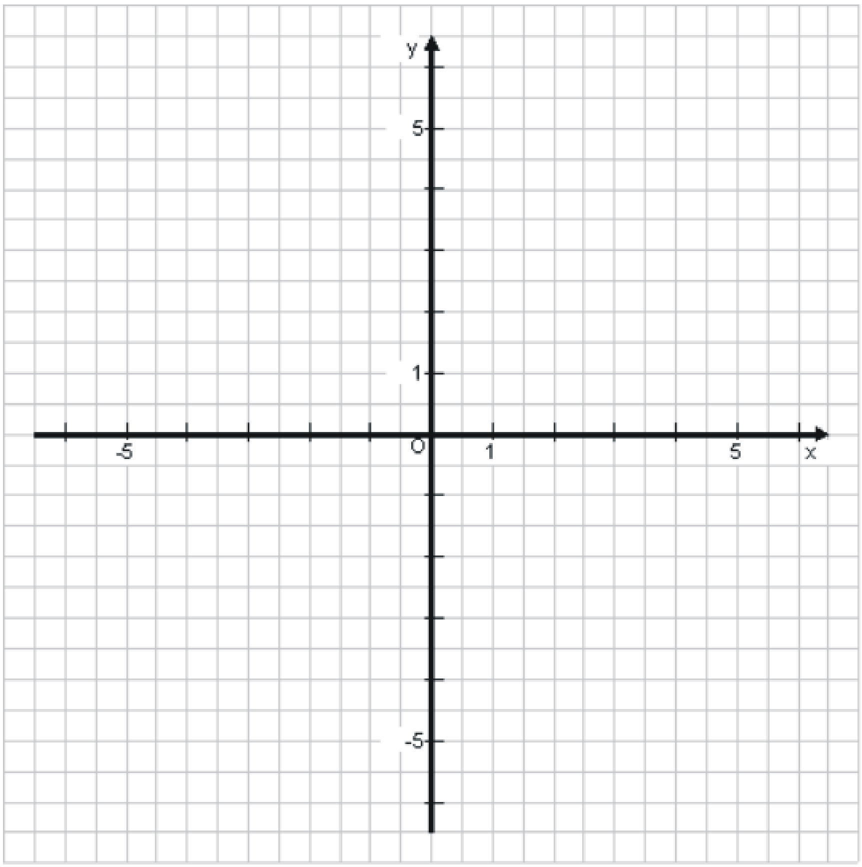


Autoria Própria

(d) Observe a malha quadriculada da figura 7. Vamos dar sentido a ela? Baseado no texto, use a malha para marcar com caneta de cor diferente, a representação de velocidade e tempo.

(e) Oresme acreditava que para medir coisas mensuráveis eram necessários pontos, retas e superfícies, ou suas propriedades, e assim utilizou segmentos de retas para representar tudo que varia, os mensuráveis, e considerava por latitudes e longitudes, e hoje conhecemos por abscissas e ordenadas. Como não haviam técnicas precisas de álgebra e nem de geometria, as representações não foram aprofundadas (BARON E BOS, 1985, p. 59 - 60). Vamos então padronizar a forma de representar duas grandezas em um mesmo plano. Usando duas retas ortogonais, que chamaremos de abscissa a reta horizontal e, de ordenada a vertical. Como na figura 8.]

Figura 8 – Plano com orientação

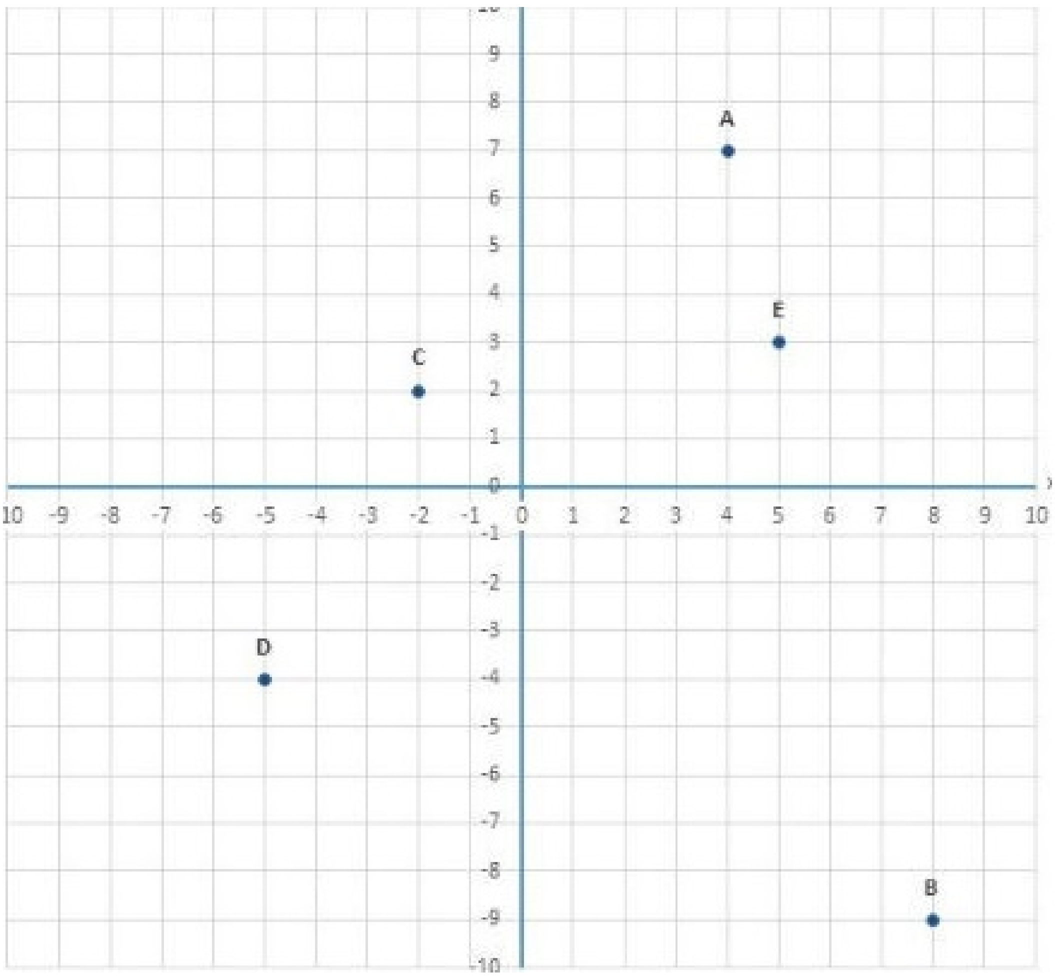


Exercício 5 Vamos aprender a localização.

(a) Escreva a localização dos pontos indicados na figura 9 em pares ordenados, ou seja, entre parenteses indique primeiro a distância que o ponto se encontra da origem, para o lado positivo ou negativo horizontalmente falando, e depois indique a distância em que o ponto se encontra da origem de modo vertical.

(b) Faça uma tabela com os pontos que você encontrou no exercício anterior.

Figura 9 – Localização de pontos



Gouvea, 2019.

Exercício 6: (Adaptado Mafra (2009, p. 27). As atividades a seguir estão baseadas em Mafra .

(a) As funções descrevem fenômenos. Observe as quatro situações abaixo indicadas, e ligue os pontos usando uma malha quadriculada, para cada caso.

Situações

Tabela 6 – **Situação 1: Arrefecimento do café - Atividade 2**

Tempo (minutos)	0	5	10	15	20	25
Temperatura (C)	90	79	70	62	55	49

Mafra, 2009

Tabela 7 – **Situação 2: Subida de um projétil - Atividade 2**

Tempo (segundos)	0	2	4	6	8
Altura (metros)	0	75	140	195	240

Mafra, 2009

Tabela 8 – **Situação 3: Temperatura durante dois dias do mês de Janeiro - Atividade 2**

Horas	0	3	6	9	12	15
Temperatura	1	-2	-1	5	130	14

Mafra, 2009

Tabela 9 – **Situação 4: A temperatura de um forno eléctro em função do tempo - Atividade 2**

Tempo (minutos)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (graus)	20	20,5	22	40	80	120

Mafra, 2009

(b) Estabeleça uma correlação gráfica entre variáveis a partir de cada situação indicada.

(c) Que tipos de gráficos surgiram?

(d) Consegue determinar expressões analíticas para os mesmos?

4.3 Atividade 3: *Conhecendo o contexto histórico de alguns matemáticos dos séculos XVII a XIX*

Objetivos:

1. Incentivar a pesquisa didático/pedagógica, para que os alunos tenham uma orientação sobre os formalizadores do conhecimento do conteúdo Função.
2. Desenvolver o hábito da pesquisa histórica em sala de aula.
3. Produzir atividades expositivas, através de seminários.

Exercício 1: Faça uma pesquisa sobre a vida dos seguintes matemáticos:

(a) Leibniz;

(b) Johann Bernoulli;

(c) D' Alembert;

(d) Cauchy;

(e) Euler.

Exercício 2: De acordo com os seminários desenvolvidos, e com a Roda de Conversa, responda as questões:

(a) Qual a impressão que vocês tiveram, em relação as biografias resumida de cada um desses matemáticos?

(b) Os matemáticos tinham suas vidas particulares ou eram gênios que se dedicavam apenas aos seus trabalhos?

(c) Explicite a contribuição de cada um desses matemáticos para o conteúdo *Função*.

4.4 Atividade 5: *Século XX: Função e o Grupo Bourbaki*

Os objetivos desta atividade são:

1. Mostrar aos alunos do primeiro ano do Ensino Médio as diferentes interpretações de função dos matemáticos do século XIX e XX.

2. Desenvolver as representações gráficas de função através de conjuntos, de acordo com a definição formal estabelecida pelo grupo Boubarki.

3. Conhecer a interpretação de função como transformação.

4. Analisar funções que são objetos de estudo de outros conteúdos.

Exercício 1: Adaptado de Silva (1999)

Seja $X = \{0, 1, 2, 3\}$ e $Y = \{2, 3, 4, 5, 7\}$ e $f : X \longmapsto Y$, a função definida por: $(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)$.

Represente a função graficamente usando o diagrama.

Exercício 2: Transformação Mafra (2009) A temperatura T na qual a água ferve depende da altitude A acima do nível do mar. Se a altitude é medida em metros e a temperatura em graus Celsius,

$$A \approx 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2$$

(a) em que altitude o ponto de ebulição é $99,5$ graus Celsius?

(b) Discuta o caso $T = 100$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer deste trabalho, tivemos a oportunidade de refletir sobre o ensino de *Funções*, na educação básica, e sobre os nossos métodos utilizados em sala, bem como o planejamento das atividades a serem desenvolvidas.

Investigamos o desenvolvimento do processo histórico do conteúdo de Funções através de fontes terciárias como Baron e Bos (1985), tal como a bibliografia da História da Matemática da autora Tatiana Roque. Utilizamos, também, os documentos e normativas, sendo o CBC e BNCC, respectivamente, uma vez que acompanhamos as mudanças do BNCC, com sua nova homologação em 2018. Tal mudança visou incorporar a realidade dos discentes em seus objetivos. Selecionamos artigos científicos, dissertações e teses relacionados ao nosso objetivo que era o de desenvolver esse processo histórico, sendo estes fundamentais para a construção desta pesquisa.

Participamos do Encontro Mineiro de Educação Matemática (EMEM) - 2018, bem como do XIII Seminário Nacional de História da Matemática (XIII SNHM) - 2019, sendo estes importantes para as discussões e análises do desenvolvimento da pesquisa.

A vertente usada da História da Matemática foi de recurso metodológico e pedagógico no sentido de desenvolver estratégias de ensino - aprendizagem, através de atividades desenvolvidas, tais como: leitura e interpretação, a matemática do mundo antigo e o século XIV, séculos XVI e XVII com a matemática das quantidades e os movimentos de Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei (1564-1642), conhecendo o contexto histórico de alguns matemáticos dos séculos XVII e XIX e, finalizando, com o século XX, onde desenvolvemos uma atividade entre função em termos de conjuntos com o Grupo Bourbaki. Tais atividades foram desenvolvidas com o objetivo de estimular os discentes a pesquisar e, assim, deixarem de lado o papel de meros receptores de informações e, consequentemente, perceberem que a matemática é uma ciência em construção.

Encontramos, na História da Matemática, um importante recurso a ser utilizado pelos professores, pois ela aproxima o aluno do conteúdo e da disciplina que, às vezes, acredita ser impossível lidar com o conteúdo. E, cabe ao professor, conhecer esse recurso e usá-lo ao seu favor.

Ao final da pesquisa, foi possível perceber que não se trata de um trabalho de fácil aplicação, uma vez que este exige muito estudo, muitas discussões entre as pessoas envolvidas no processo, pela busca de humanização e inclusão no ensino.

Cada passo foi gratificante para o processo, pois o aprender sempre vale a pena, pela sua gratificação em atingir o aluno e gerar reflexões que poderão tornar a matemática uma disciplina próxima do aluno, e, assim a abertura para novas reflexões.

6 Bibliografia

1. BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base.** Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: ⟨http://basenacionalcomum.mec.gov.br⟩. Acesso em: 23 mar. 2019.

2. BARON, Magaret E.; BOS, H.J.M.**Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo.** Trad. De José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Ma José M.M.Mendes. Universidade de Brasília: 1985, c1974.

3. CASTANHA, André Paulo. **As fontes e a problemática da pesquisa em História da Educação.** In: JORNADA DE HISTEDBR, 7., 2007, Campo Grande. **Anais**... Campo Grande: UFMT, 2007, p. 01-14.

4. D'ALEMBERT, Jean. DIDEROT, Denis. **Primeira página da Enciclopédia de D'Alembert e Diderot.** Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Encyclopedie-de-D%27Alembert_et_Diderot-Premiere_Page - ENC_1-NAS.jpg.
Acesso em: 8 dez. 2018.

5. D'AMBROSIO, U. **Elo entre as tradições e modernidade.** Belo Horizonte. Autêntica Editora, 2009.

6. EULER, Leonhard. **Mechanica. (Capa)**. Disponível em:
https://www.researchgate.net/figure/Frontispicio-do-livro-de-Euler-Mechanica-São-Petersburgo-1736-esquerda-e-Lombada-e fig5 277168213
Acesso em 8 de dez. 2018.

7. EULER, Leonhard. **INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM, 1748 (Capa).** Disponível em:
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k33529.r=euler
%2C%20leonhard%20introductio%20in%20analysin%20infinitorum?rk=21459;2. Acesso em: 25 de jan. de 2019

8. FLEMMING, D. M.; LUZ E. F.; MELLO, A. C. C. de **Tendência em Educação Matemática: Disciplina na modalidade a distância.** 2 edição - Palhoça: UnisulVirtual, 2005, 87p.

9. GASPAR, M. T. J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores.** 2003. 307 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

10. GOMES, Thiago de Azevedo; RODRIGUES, Chang Kuo. **A evolução das Tendências na educação matemática e o enfoque da História da Matemática no ensino.** Revista de Educação. Ciências e Matemática v.4 n.3 set/dez2014. Disponível em: ⟨http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/2687/1264⟩

11. GOUVEA, Rosimar. **Plano Cartesiano**. Disponível em https://www.todamateria.com.br/plano-cartesiano/. Acesso em 09 de ago de 2019.

12. GUIA PRÁTICO DA BNCC. Disponível em Disponível em https://www.construir noticias.com.br/guia-pratico-da-bncc/. Acesso em 09 de ago de 2019.

13. INEP(Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) - Resultado Prova Brasil. Disponível em:
http://sistemasprovabrasil.inep.gov.br/provaBrasilResultados /view /boletimDesempenho/boletimDesempenho.seam.
Acesso em 20 dez. 2018.

14. L'HÔPITAL, Guillaume François Antoine Marquês de. **L'Hôpital. Analyze des infinit petits pour l'intelligence des lignes courbes. (Capa).** Disponível em: http://www.sophiararebooks.com/pages/books/2848/ guillaume-francois-antoine-lhospital-marquis-de/ analyze-des-infiniment'petits-pour -lintelligence-des-lignes-courbes-paris-limprimerie-royale. Acesso em: 4 dez. 2018.

15. MAFRA, José R. e S. **Um desenvolvimento histórico do conceito de função.** Coleção História da Matemática para professores. Belém - PA, 2009, p. 26 -40.

16. MENDES, I.A. **Tendências Metodológicas no Ensino de Matemática** - Belém - PA: Formação Continuada de Professores, 2008. 71p.

17. MICHALOVICZ, Solange; PACHECO, Edilson Roberto. **Uma atividade pedagógica articulando história da matemática e resolução de problemas:** X Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2009, p. 505 - 509.

18. MINAS GERAIS, Governo do Estado. Secretaria do Estado de Minas Gerais. **Currículo Básico Comum - Matemática. Educação Básica - Ensino Fundamental e Ensino Médio.** 2005.

19. NOBRE, Sérgio. **LEITURA CRÍTICA DA HISTÓRIA: REFLEXÕES SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA.**.Revista Ciência & Educação, v.10, n.3, 2004, p. 531 –543.

20. O'CONNOR, J.J., ROBERTSON, E.F.**Jean Le Rond d'Alembert**. **Indice de Biografias. (Imagem)** Disponível em:

⟨http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PictDisplay/DAlembert.html⟩
Acesso em: 7 de dez. 2018.

21. O'CONNOR, J.J., ROBERTSON, E.F.**JOHAN BERNOULLI**. Disponível em: ⟨http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PicDisplay/BernoulliJohann.html⟩. Acesso em: 4 de dez. 2018.

22. O'CONNOR, J.J., ROBERTSON, E.F. **CAUCHY, August Louis**. Disponível em:
⟨http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PictDisplay/Cauchy.html⟩. Acesso em: 6 de dez. 2018.

23. O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E.F. **EULER, Leonhard**. Disponível em:
⟨http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Euler.html⟩
Acesso em: 8 dez. 2018.

24. O'CONNOR, J.J., ROBERTSON, E.F.**Galileo Galilei Indices de Biografias**. Disponível em: ⟨https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Galileo.html⟩. Acesso em: 4 de dez. 2018.

25. O'CONNOR, J.J., ROBERTSON, E.F. **LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm Von**. Disponível em:
⟨http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PictDisplay/Leibniz.html.⟩
Acesso em: 8 de dez. 2018.

26. ONUCHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V. (Org.) Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-220.

27. PEREIRA, Ana Carolina, SILVA, Isabelle Coelho da, NOGUEIRA, Raniele Sampaio, ALVES, Francisco Régis Vieira. **Sobre o uso de fontes, na disciplina de História da Matemática: Problema 56 de Papiro de Rhind.** REVEMAT. Florianópolis (SC). v.10, n.2, p. 243-257, 2015.

28. PIRES, Fernando R. **O CONCEITO DE FUNÇÃO: UMA ANÁLISE EPISTEMOLÓGICA.** Comunicação Científica. Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) - São Paulo - 2016.

29. ROQUE, Tatiana. **História da Matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012, 8-15 295-343.

30. SAVIANI, Dermeval.**Breves considerações sobre as fontes para a história da educação.**Revista HISTEDBR On-line. Artigo Campinas, n. especial, p. 28-35, ago. 2006.q

31. SILVA, Maria H. M. **Análise Histórica do Conceito de Função.** Caderno de Licenciatura em Matemática, n. 2 Ano 2, p. 29-33.

32. ZORZAN, A. S. L. **Ensino-aprendizagem: algumas tendências na Educação Matemática.** R. Ciências Humanas, Frederico Westphalen, v.8, n.10, Jun. 2007, p. 78-93.

.

7 Anexos

Esperamos que as pesquisas realizadas pelos alunos na atividade 3 fiquem próximas as pesquisas aqui descritas.

7.1 Gottfried Wilhelm von Leibniz

A biografia de Leibniz que apresentamos está baseada numa tradução do texto de O'Connor e Robertson, 1998, disponível em http://wwwhistory.mcs.standrews.ac.uk/Biographies/Leibniz.html.

Gottfried Wilhelm von Leibniz, representado na figura 10, nasceu em Leipzig, Saxônia (atual Alemanha), em 1646, filho de Friedrich Leibniz, professor de filosofia moral e de Catharina Schmuck. Seu pai faleceu quando Leibniz tinha seis anos de idade. Aos sete anos, adentrou a escola onde aprendeu o latim e consta que aos doze anos aprendeu sozinho o latim avançado e um pouco de grego, estudou filosofia de Aristósteles e desenvolveu suas ideias e, mais tarde, percebeu que estava tentando encontrar ordenamentos de verdades lógicas, que futuramente descobriu ser as ideias por trás das provas matemáticas.

Figura 10 – **Leibniz - Atividade 4**

Fonte: O'Connor e Robertson, 1998

Leibniz estudou em livros de seu pai, bem como livros de teologia de escritores católicos e protestantes, tendo assim uma cultura religiosa. Aos quatorze anos, ingressou na Universidade de Leipzig, onde estudou filosofia e matemática sendo que a segunda disciplina não fora bem sucedida, devido a aspectos didáticos. Estudou retórica, latim, grego e hebráico, formando-se dois anos depois com uma tese de *De Principio Individui*, que enfatizou o valor existencial do indivíduo, independente da forma ou da matéria, mas pelo seu ser.

Em seguida, em 1663, fora para Jena passar o verão e lá estudou matemática com Erhard Weigel (1625 - 1669), que era filósofo. Weigel acreditava que o número era o conceito fundamental do universo, fazendo assim com que Leibniz entendesse a necessidade do método da prova, para a lógica e para a filosofia. Nesse mesmo ano, Leibniz retornou para Leipzig, iniciando seus estudos para um doutorado em direito, fazendo um trabalho que associou tudo o que ele havia aprendido até então, o que lhe rendeu prêmios e reputação em seu reconhecimento acadêmico. Logo após receber o diploma de bacharel em direito, recusou-se a fazer o doutorado em direito, em Leipzig, e o fez em Altdorf, onde concluiu o doutorado em 1667, com a dissertação *De Casibus Perplexis*,na qual mostra a aplicação da lógica à solução das dificuldades jurídicas.

Em sua trajetória de vida, trabalhou como advogado, conselheiro, secretário da sociedade alquímica de Nuremberg, empreendeu diversos projetos científicos, literários e políticos, continuou sua carreira no direito, foi bibliotecário, secretário, assistente, entre outros trabalhos.

Ao trabalhar como secretário da sociedade alquímica, conheceu o barão Johann Christian von Boineburg, e o barão contratou Leibniz em 1667, indo morar em Frankfurt, sendo o advogado e conselheiro de Boineburg, tendo com este uma relação de amizade pessoal e familiar. Eles eram de religiões diferentes, o barão era católico e Leibniz luterano, isso que fez com que Leibniz quisesse a reunificação das igrejas, com monografias sobre os temas, bem como o conhecimento humano com outros objetivos de vida. A partir disto, Leibniz estudou o movimento, com ideias abstratas de movimentos, ele buscava comunicações com ilustres e nobres da época, tais como Oldenburg, o secretário da Royal Society of London e, Carcavi, a bibliotecária real de Paris.

Durante suas idas a Paris a trabalho, em nome de Boineburg, na busca de desviar Louis XIV de atacar áreas alemãs, apesar de seu objetivo principal ser outro, ele fez contatos com matemáticos e filósofos, tais como Arnauld (1612 - 1694) que desenvolveu trabalhos voltados para a filosofia e a lógica, e Malebranche (1638 - 1715), filósofo e seguidor de Descartes, que discutia tópicos da reunificação das igrejas. Com o matemático holandês Christiaan Huygens (1629 - 1695), que patenteou o primeiro relógio de pêndulo, o que aumentou a precisão da medição do tempo, trabalhando também com astronomia e probabilidade. Leibniz estudou física e matemática, e Huygens o aconselhou a ler o trabalho de Saint-Vincent, que era em uma série de resumos, fazendo algumas descobertas na área.

Em 1673, Leibniz teve que ir à Inglaterra após uma missão fracassada de paz feita pelo sobrinho de Boineburg e, ao vistar a Royal Society, ele demonstrou sua máquina de calcular incompleta, tendo contato com Hooke (1635 - 1703), um cientista inglês com contribuições em diferentes áreas, tais como: matemática, óptica, mecânica, arquitetura e astronomia, Boyle (1627 - 1691), um dos fundadores da Royal Society, que através da química via uma possibilidade de se estabelecer na matemática, através da teoria mecanicista da matéria, e Pell (1611 - 1685) um matemático inglês. Ao perceber que seus conhecimentos matemáticos eram rasos, Leibniz redobrou seus esforços para adquirir conhecimentos na área, ausentando-se, assim, das reuniões da Royal Society, dando a oportunidade às críticas sem chances de defesa.

Mesmo diante de tantos ocorridos e, com o fracasso da máquina de calcular, a Royal Society of London elegeu Leibniz como membro em 19 de abril de 1673, onde ele se encontrou novamente com Huygens e conheceu Ozanam (1640 - 1718), um matemático francês, popular por escrever livros - textos. Leibniz estudou obras de personalidades como as de Pascal (1623 - 1662), matemático e filósofo francês influente que contribuiu para muitas áreas da matemática. Ele trabalhou em seções cônicas e geometria projetiva, e, em correspondência com Fermat estabeleceu as bases para a teoria da probabilidade. Estudou ainda sobre Fabri (1608 - 1688), trabalhou com astronomia, física e matemática, Gregore(1638 - 1675), cientista escocês e o primeiro professor de matemática em St. Andrews, o qual trabalhou usando infinitas séries convergentes para encontrar as áreas do círculo e da hipérbole, Saint-Vincent (1584 - 1667), um matemático Jesuíta que escreveu sobre matemática contemporânea. Descartes (1596 - 1650), um filósofo francês, que aplicou a álgebra na geometria, sendo responsável pela geometria cartesiana que temos atualmente, e Sluze (1622 - 1685), conhecido por seu trabalho com as curvas. Com toda essa influência de matemáticos e filósofos, Leibniz começou a estudar a geometria dos infinitesimais, e em 1673, desenvolveu o básico a respeito de sua versão para o cálculo, em suma, com enfase em notação, seus primeiros cálculos foram bem desajeitados.

Nem um pouco desanimado, dois anos depois, em 1675, ele escreveu um manuscrito usando notações de integral pela primeira vez, e a regra do diferencial para produto. Todo esse esforço de Leibniz fora reconhecido pelos acadêmicos fazendo com que correspondências com renomados como Newton (1643 - 1727), considerado o matemático inglês da sua geração, acontecesse. Alguns conflitos entre Leibniz e Newton foram sendo desenvolvidos, inclusive com acusações graves de plágio.

A primeira correspondência de Newton para Leibniz, listava resultados de Newton, porém sem os métodos, o que fez com Leibniz entendesse que deveria escrever um relato mais completo de seus métodos próprios. Na segunda carta escrita por Newton, em 24 de outubro de 1676, em que Leibniz não teve conhecimento até junho de 1677, por Leibniz estar em Hanover, já era uma carta em que Newton dizia que Leibniz havia roubado seus métodos e em resposta Leibniz deu detalhes sobre os princípios do seu cálculo diferencial, inclusive a regra para diferenciar uma função de uma função. Leibniz nunca pensou em derivada como limite, uma das provas de que não se tratava de plágio que fora descoberta anos depois.

Os métodos dos infinitesimais já eram conhecidos e trabalhados por vários matemáticos da época, porém estes resolviam seus problemas de maneira independente e, nesse contexto, Newton e Leibniz introduziram com seus trabalhos a novidade de generalizar usando métodos específicos para a resolução de tais problemas.

Leibiniz começara a publicar artigos sobre o cálculo no ano de 1684, em um jornal científico denominado de *Acta eruditorum*, e é exatamente nessa publicação que se tem um dos textos mais importantes, tratando de um novo método para o cálculo de máximos e mínimos, enfatizando a relação com a álgebra e a possibilidade de extensão para novas generalizações, deixando Leibniz mais famoso por tal feito. Em sequência, ele desenvolveu fórmulas simbólicas, enunciando as regras para encontrar as derivadas das somas, diferenças, produtos, potências, onde tais regras constituíam o algoritmo do cálculo que ele denominava de "diferencial"(ROQUE, 2012 p. 283 -284).

E, com esse cálculo inovador, Leibniz deu a abertura para incluir o trabalho com curvas transcendentes, ou seja, aquelas que não podem ser reduzidas ao cálculo algébrico, e, portanto, sendo excluídas da geometria de Descartes (1596-1650), lembrando que uma curva era sempre o dado de um problema, e a partir desta buscava se uma tangente (ROQUE, 2012, p. 284).

O método novo de Leibniz gerou diversas discussões entre os matemáticos sobre a legitmidade deste, sendo que a ideia que inspirou a invenção do cálculo infinitesimal, foi a leitura que Leibniz fez a respeito de uma escrita de Pascal (1623 - 1662), que fora desenvolvida em 1659. É nesse contexto que Leibniz introduz a palavra Função, no artigo de 1684, citado anteriormente, mas para a designação de uma grandeza em relação a uma figura, caso da tangente (ROQUE, 2012, p. 286-288).

É importante ressaltar que Leibniz, não propôs um conceito de Função, foram as discussões sobre a legitimidade dos métodos dos infinitesimais que levaram a definição de função um século depois, já no século XVIII (ROQUE, 2012 p. 290).

7.2 Johann Bernoulli

A biografia de Johann Bernoulli que aqui apresentamos é uma tradução do texto de O'Connor e Robertson, 1998, disponível em http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Johann.html.

Johann Bernoulli, aqui representado na figura 11, nasceu em Basiléia, na Suíça, no dia 27 de Julho de 1667. Filho de Nicolaus e Margaretha Bernoulli, irmão de Jacob Bernoulli (1655 - 1705), um matemático suíço, sendo o primeiro a usar o termo integral, e as coordenadas polares, entre tantas outras contribuições matemáticas. Jacob, sendo mais velho teve grande influência sobre os desenvolvimentos matemáticos de Johann, onde ambos contribuíram para a ciência.

Figura 11 – **Imagem de Johann Bernoulli - Atividade 4**

Fonte: Fonte:O'Connor e Robertson, 1998

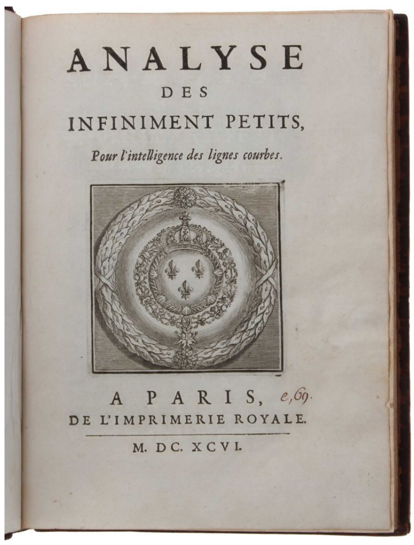
Através de relatos do próprio Johann, em sua autobiografia, seus pais não pouparam esforços e nem despesas para que a família tivesse uma educação moral e religiosa, porém seus pais eram contra que estudassem matemática, sendo assim, incentivaram Johann a seguir por uma carreira de negócios em especiarias, tendo Johann trabalhado por um ano, mas não obtendo bons resultados por não se identificar com o trabalho. Após esforços para convencer seu pai, em 1683, entrou na Universidade de Basel e fez o curso de medicina, mas sempre estudando matemática com seu irmão Jacob, que era professor de física na mesma universidade. Johann tinha interesse especial em estudar os trabalhos desenvolvidos por Leibniz (1646 - 1716), os quais se dedicou por dois anos, adquirindo assim habilidades no assunto.

Lecionou cálculo diferencial, em 1691, na cidade de Genebra. Em Paris, ele conheceu matemáticos do círculo de Malebranche (1638 - 1715), um seguidor de Descartes, estando num cenário em que a matemática francesa era o foco da época. Nesse círculo, conhecera um matemático, na época chamado L'Hôpital (1661 - 1704), os dois discutiram muitas ideias matemáticas e uma delas fora a que mais chamou a atenção de L'Hôpital, o fato de

Johann compreender novos métodos do cálculo publicado e escrito por Leibniz, pedindo instruções a Bernoulli que foram oferecidas, presencial e por correspondências, onde Johann recebera pagamentos generosos para tal fim.

Os ensinamentos recebidos por L'Hôpital, se materializaram através de seu primeiro livro de cálculo chamado de *Analyze des infinit petits pour l'intelligence des lignes courbes*, em (1696), que reservou a ele um lugar na história da matemática. Isso deixou Johann chateado por considerar que não fora evidenciado de maneira adequada na obra, uma vez que fora feito um simples agradecimento aos senhores Bernoulli, em especial ao mais jovem de todos. Nesse mesmo livro, existe uma regra, que hoje denominamos de regra L'Hôpital. Trata-se de um resultado de Johann Bernoulli, sendo que esta descoberta só fora formalizada como sendo do senhor Johann em 1922, através de uma cópia de um curso feita por Nicolaus Bernoulli, sobrinho de Johann, que fora encontrada em Basiléia. Porém, vale ressaltar que L'Hôpital fez várias correções em tal obra, o que não amenizou os protestetos de Johann.

Figura 12 – **Capa do livro escrito por L'Hôpital. *Analyze des infinit petits pour l'intelligence des lignes courbes* - Atividade 4**



Fonte:http://blog.kleinproject.org/wp-content/uploads/2014/05/Book.png

Apesar desse cenário conturbado, em 1692, ao conhecer Varignon (1654 - 1722), um matemático francês que trabalhou com estática gráfica e mecânica, Johann permaneceu com seus ensinamentos, mostrando suas formas de aplicações no cálculo, através de correspondências por anos e anos, inclusive com o próprio Leibniz, extraindo bons resultados com essas relações, concomitante a sua tese de doutorado em medicina. Johann, que antes seguia os passos do irmão Jacob, começou a resolver problemas, tais como, o problema da Catenária (uma família de curvas, geradas por pontos extremos e sujeitas a ação da gravidade), e mesmo aprendendo muito um com o outro, o clima de companheirismo deu espaço a uma certa hostilidade, que fora se graduando ao ponto deles deixarem de realizar publicações conjuntas. Em 1695, Johann recebeu a oferta de duas cadeiras matemáticas, uma em Halle e a outra em Groningen. Aconselhado por Huygens, Johann aceitou a oferta e, assim, conquistou o mesmo status do irmão Jacob, que já possuia uma cadeira de matemática em Basiléia.

Os conflitos não cessavam, os problemas familiares foram surgindo e, com a formação em medicina exigindo atuação, várias mudanças de planos foram ocorrendo em 1713. Johann envolveu-se na controvérsia de Newton - Leibniz, apoiando Leibniz, acrescentando fundamentos em seus argumentos baseados na solução de certos problemas que Newton não conseguiu resolver com seus métodos. Johann Bernoulli ficou famoso, sendo eleito membro das academias de Paris, Berlim, Londres, São Petersburgo e Bolonha. Ele era conhecido como o "Arquimedes de sua idade" e isso realmente está inscrito em sua lápide, tendo este falecido no dia 1 de Janeiro de 1748, na cidade da Basiléia na Suíça. (O'Connor e Robertson, 1998)

7.3 Jean D'Alembert

A biografia de Johann Bernoulli que aqui apresentamos é uma tradução do texto de O'Connor e Robertson, 1998, disponível em http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/DAlembert.html.

D'Alembert nasceu no dia 17 de novembro, de 1717, em Paris, na França. Seu pai Louis-Camus Destouches, era um oficial de artilharia. Sua mãe Madame de Tencin, uma freira com dispensa papal que teve uma ligação amorosa com seu pai. D' Alembert foi deixado pela mãe nas escadarias da igreja de *St Jean Le Rond*, também em Paris, tendo sido encontrado e levado para uma casa destinada a crianças em situações de abandono. Como seu pai estava ausente da cidade no dia de seu nascimento, quando ele retornou, providenciou que D'Alembert fosse educado pela esposa de um vidraceiro, Madame Rousseau, sendo ela sua mãe em reconhecimento já que sua mãe biológica nunca o reconhecera.

Amparado por recursos financeiros que seu pai deixara, frequentou escolas particulares, sendo a educação uma prioridade da família que o abrigou. Ele foi matriculado no Colégio das Quatro Nações, ótimo para o estudo de matemática, pois lá haviam excelentes livros na biblioteca e ele tinha instruções de matemática com o professor Carron e ouvia palestras ministradas por Varignon, amigo e companheiro de estudos dos Bernoulli, que tinha como complemento as ideias físicas de Descartes. Após sua formatura, no ano de 1735, D'Alembert decidiu seguir carreira em lei, qualificando-se como defensor em 1738, porém não deixara de se dedicar à matemática, continuando seus estudos na área em tempo livre, com progresso notável.

Sua carreira matemática, teve início formal em julho de 1739, ao encontrar erros no livro escrito por Reyneau (1656 - 1728), matemático francês que publicou um livro

Figura 13 – **Imagem atribuída a D'Alembert - Atividade 4**

Fonte: O'Connor e Robertson, 1998

influente sobre o cálculo recém-inventado, em 1740. D'Alembert publicou um trabalho sobre mecânica dos fluídos, chamando a atenção e recebendo elogios de Clairaut (1713 - 1765), um matemático francês, que acreditava que a Terra era achatada nos pólos. Não cessando seus estudos e publicações, fora admitido na Academia de Ciências de Paris em 1741.

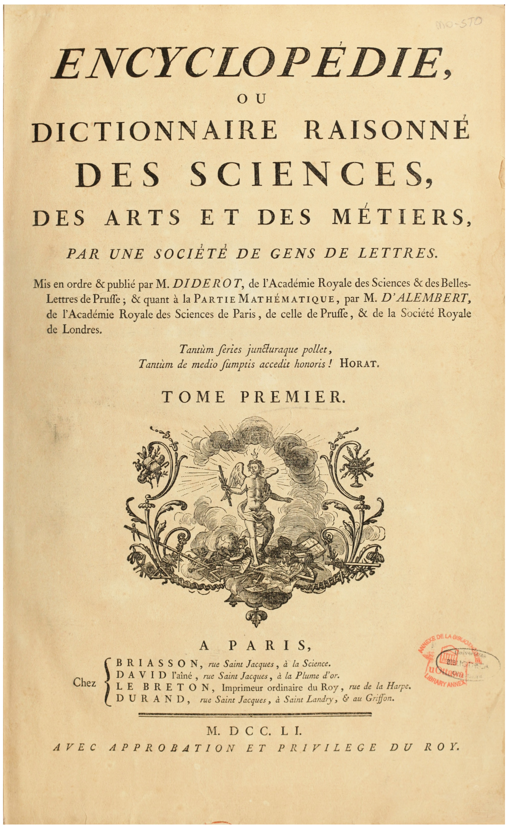
Por possuir personalidade forte, ele estava sempre cercado de inimigos, pois defendia suas ideias com muita autenticidade, e teimosia, pois tinha convicção de que estava sempre correto, mas não se pode negar que suas contribuições foram notáveis, isso porque ajudou a resolver problemas da física matemática, tais como sobre a conservação de energia cinética. Ele acreditava que a mecânica era tão parte da matemática quanto a geometria e a álgebra. Mas de fato, o que era essa mecânica? Para a época, era uma ciência baseada em princípio simples, em que todo fenômeno particular pudesse ser deduzido por métodos matemáticos rigorosos, com demonstrações.

D'Alembert, acreditava veementemente que essa mecânica deveria ser transformada num sistema matemático racional, e acreditava que a mecânica se baseava em metafísica, e não em experimentos, para ele era lógico tais acontecimentos, entrando em contradição com Newton e com o próprio Clairaut.

Em 1744, publicou o *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, que era uma aplicação de seus resultados ao equilíbrio e movimento dos fluídos, entrando em contradição com Daniel Bernoulli (1700 - 1782), que era um membro holandês da matemática suíça, que publicou também sobre os fluídos, e por conta dessas e outras controvérsias com os membros da Academia de Paris, D'Alembert, começou a ficar infeliz e diminuira suas publicações e popularidade entre os membros, optando por voltar a casa da mãe adotiva.

Em 1746, conheceu a Madame Geoffrin, uma poderosa mulher, bem sucedida e com boas relações sociais, tornou a vida social de D'Alembert, movimentada e com essa popularidade, participou como editor da Encyclopédie (Enciclopédia), representada aqui como figura 14, na qual contribuía com conhecimentos matemáticos e astronomia física, em amplo conhecimento. Com Diderot(1713 - 1784) renomado filósofo e escritor francês, D'Alembert se dedicou ao trabalho por longos anos, e foi responsável pela maioria dos artigos matemáticos, composto por 28 volumes, sendo pioneiro em equações diferenciais parciais, e no uso dessas equações em estudos da física. Esse trabalho lhe rendeu um prêmio, em 1747, da Academia Prussiana, com o artigo *Réflexions sur la cause générale des vents* e, como consequência desse ter mais evidências matemáticas do que físicas, e de suas desavenças do passado, encontraram erros comuns, como acontecia na maioria dos trabalhos, mas com críticas fortes por seus desafetos como Clairaut, o que gerou uma sequência de insultos entre dois matemáticos.

Figura 14 – **Primeira página da Enciclopédia de D'Alembert e Diderot - Atividade 4**



ENCYCLOPÉDIE,
OU
DICTIONNAIRE RAISONNÉ
DES SCIENCES,
DES ARTS ET DES MÉTIERS,
PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES.

Mis en ordre & publié par M. *DIDEROT*, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Pruſſe ; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. *D'ALEMBERT*, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Pruſſe, & de la Société Royale de Londres.

Tantùm ſeries juncturaque pollet,
Tantùm de medio ſumptis accedit honoris! HORAT.

TOME PREMIER.

A PARIS,
Chez
BRIASSON, *rue Saint Jacques, à la Science.*
DAVID l'aîné, *rue Saint Jacques, à la Plume d'or.*
LE BRETON, Imprimeur ordinaire du Roy, *rue de la Harpe.*
DURAND, *rue Saint Jacques, à Saint Landry, & au Griffon.*

M. DCC. LI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Fonte: Wikipedia: Encyclopedie: de D'Alembert e Diderot

No mesmo ano o de 1747, D'Alembert publicou um trabalho sobre cordas vibrantes, um importante artigo que contém a equação de onda impressa, pela primeira vez, porém suas observações e simplificações matemáticas foram vistas com algumas contradições às suas observações.

Euler foi um matemático que usufruiu dos conhecimentos de D'Alembert, por meio de cartas com Daniel Bernoulli, e quando D'Alembert ganhou um prêmio na Academia Prussiana de Ciências com seu ensaio sobre os ventos, ele produziu uma obra que chamou a atenção de Euler e fez com que estes trocassem informações por correspondências. Mas, como era comum após disputas acadêmicas, esse clima de bom relacionamento durou pouco, porque os dois entraram numa disputa à Academia de Berlim, que começou em 1751, e complementadas com acusações de plágio, entre outros.

D'Alembert começou a enviar seus trabalhos para a Academia de Berlim, mas isso não durou muito tempo, pois, Euler, que tinha forte influência na Academia, evitava publicar essas obras. Porém, D'Alembert reuniu suas obras e publicou em oito volumes no período de 1761 e 1780 em *Opuscules mathématiques.*

Em 1754, publicou um artigo denominado *Différentiel* no volume 4 da *Encyclopédie*, onde sugeriu uma base firme para os limite, sendo um pioneiro ao entendimento da importância das Funções, definindo nesse mesmo artigo que a derivada de uma função como o limite de um quociente de incrementos, e suas ideias sobre os limites levou a prova da convergência, conhecido hoje como a razão de D'Alembert.

D'Alembert foi eleito para a Academia Francesa no mesmo ano. Em 1772, foi eleito secretário perpétuo da Academia Francesa e passou muito tempo escrevendo para a academia.

Ao final de sua vida, D'Alembert se dedicou mais à literatura e à filosofia. Faleceu em 1783, em Paris, França.

7.4 Augustin-Louis Cauchy

A biografia de Johann Bernoulli que aqui apresentamos é uma tradução do texto de O'Connor e Robertson, 1997, disponível em http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Cauchy.html

Cauchy, nasceu na França, em 21 de agosto, de 1789, bem no cenário da Revolução Francesa. Temendo pela sua segurança, seu pai providenciou a saída da família para Arcueli quando ele tinha apenas quatro anos de idade. Após passar dificuldades, inclusive para se alimentar, Cauchy e sua família tiveram que voltar para Paris em um curto espaço de tempo. O pai de Cauchy priorizou sua educação. Seus principais influentes foram Laplace (1749 - 1827), que comprovou a estabilidade do sistema solar, e consolidou a teoria da probabilidade, e também Lagrange (1736 - 1813) matemático francês, de origem italiana,que destacou-se na análise e teoria dos números e mecânica analítica e celeste. Os dois, Lagrange e Laplace, eram visitantes assíduos da casa dos Cauchy, sendo Lagrange uma maior influência por Cauchy, ele incentivou os estudos de línguas para que Cauchy tivesse mais facilidade ao estudar matemática.

Figura 15 – **Imagem atribuída a Cauchy - Atividade 4**

Fonte: O'Connor e Robertson, 1997

Cauchy tinha uma certa ficção por religião e isso influenciava em suas pesquisas, publicações e convivências. Ele frequentou aulas de matemática desde 1804, dois anos após adentrar na *École Centrale du Pantheón*, formou-se em 1807 na *École Polytechnique* e ingressou para a escola de engenharia em *École des Ponts et Chaussées*, onde trabalhou com Pierre Girard(1765 - 1836), que era um matemático e engenheiro francês, que publicou sobre fluxo de fluídos.

Em 1810, ele trabalhou em instalações portuárias da frota de invasão inglesa de Napoleão Bonapart. Nesse contexto, levou consigo duas obras matemáticas, uma de Laplace, *Laplace's Mecanica Celeste* e a outra de Lagrange *Lagrange's Theórie des Fonctions*, para seus estudos matemáticos. Estudava matemática mesmo tendo uma pesada carga de trabalho e, em 1811, provou que os ângulos de um poliedro são determinados por suas faces. Como Paris estava em um ótimo contexto matemático. Cauchy retornou a sua cidade natal em busca de desenvolver uma carreira acadêmica.

Em 1814, ele publicou o livro de memórias sobre integrais definida, sendo esta a base de sua teoria de funções complexas e, como consequência, em 1815, foi nomeado professor assistente de análise.

Cauchy lecionou sobre os métodos de integração que ele havia descoberto, mas não publicou, foi pioneiro em fazer um rigoroso estudo das condições de convergências de séries infinitas e, também, foi responsável pela definição de integral. Em 1821, publicou um texto denominado *Cours d'analyse* que procurava desenvolver os teoremas básicos do cálculo respeitando o rigor matemático exigido pelas demonstrações.

Definiu pela primeira vez uma função complexa, em 1829. Cauchy produziu 789 trabalhos de matemática, sendo considerado hoje o pai da análise real e complexa, bem como sendo eficiente em várias outras áreas.

Cauchy, faleceu no dia 23 de maio de 1857 em Sceaux (perto de Paris), França. (O'Connor e Robertson, 1998)

7.5 Leonhard Euler

A biografia de Leonhard Euler que aqui apresentamos é uma tradução do texto de O'Connor e Robertson, 1998, disponível em http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Euler.html.

Euler nasceu no dia 15 de abril de 1707, na cidade da Basileia na Suíça. Era filho de Paul Euler, que estudou teologia na Universidade de Basel, tendo dividido casa com Jacob Bernoulli e Johann Bernouli, e conhecimento de alguns trabalhos de Jacob através das palestras assistidas por Paul no período da faculdade. A mãe de Euler era Margaret Brucker, filha de um pastor protestante. Apesar do nascimento de Euler ter sido em Basiléia, a família se mudou pra uma cidade próxima chamada Riehen, quando Euler tinha apenas um ano de idade, sendo a cidade onde Euler e sua família passou por algum tempo.

Figura 16 – **Leonhard Euler - Atividade 4**

Fonte: O'Connor e Robertson, 1998

O pai de Euler teve instruções matemáticas, e por esse motivo, ensinou o elementar a Euler que foi enviado para estudar em Basiléia aos 14 anos de idade, em 1720, para uma educação geral e depois obter conhecimentos mais aprofundados. Nesse período, morou com a avó materna, porque seu pai, que era pastor protestante, tinha o interesse que ele seguisse a igreja, e mesmo não tendo tido ensinamentos matemáticos profundos nesta escola, Euler tinha um interesse pela matemática, sendo este despertado por seu pai. Dessa forma, ele tomou a iniciativa de estudar matemática lendo textos e buscando instruções particulares. Johann Bernoulli percebeu o potencial de Euler ao orientá-lo num desses atendimentos planejados pelo próprio Euler.

Em 1723, concluiu seu mestrado em filosofia, comparando ideias filosóficas de Descartes e de Newton. Nesse mesmo ano, Euler começou a estudar teologia, grego e hebráico, porém ele não se identificou em teologia da mesma forma que se identificou com a matemática, e nesse momento entra Johann Bernoulli, que convenceu Paul Euler a dar o consentimento para que seu filho se dedicasse à matemática.

Estudou muitas obras de Varignon e de Descartes, que foi um filósofo francês cuja obra, *La géométrie*, inclui sua aplicação da álgebra à geometria, da qual agora temos a geometria cartesiana. O mesmo estudou as obras de Newton(1643-1727), matemático inglês, que trabalhou com o Cálculo Diferencial e Integral, com óptica e gravitação, Galileu (1564-1642) um cientista italiano que formulou a lei básica da queda dos corpos e construiu um telescópio com o qual estudou as crateras lunares e descobriu quatro luas girando em torno de Júpiter e abraçou a causa copernicana. Pode se dizer ainda que Euler buscava seus conhecimentos em Van Schooten(1615-1660), matemático holandês que foi uma das principais pessoas a promover a disseminação da geometria cartesiana, Jacob Bernoulli(1655-1705), matemático suíço que foi o primeiro a usar o termo integral, Hermann(1678-1733) matemático suíço que contribuiu para dinâmica, Taylor(1685 - 1731) matemático inglês que inventou a integração por partes e descobriu a célebre fórmula conhecida como expansão de Taylor, e Wallis(1616 - 1703) matemático inglês que construiu o método de indivisibilidade de Cavalieri para conceber um método de interpolação, entre outros.

Euler completou seus estudos em 1726, e nesse mesmo ano, foi oferecido a ele um cargo o qual o mesmo seria envolvido no ensino de aplicações de matemática e em mecânica, tendo ele aceitado com a condição de um tempo para entrar em exercício, tempo esse que ele usou para estudar tópicos relacionados ao seu novo cargo e, também porque Euler estava analisando a chance de um cargo na Universidade de Basel com o falecimento de um professor de física.

Em 1727 ele publicou um artigo sobre o melhor arranjo de mastros em um navio, que tinha uma relação entre matemática e navios, concorrendo a um Grande Prêmio da Academia de Paris que lhe rendeu um segundo lugar.

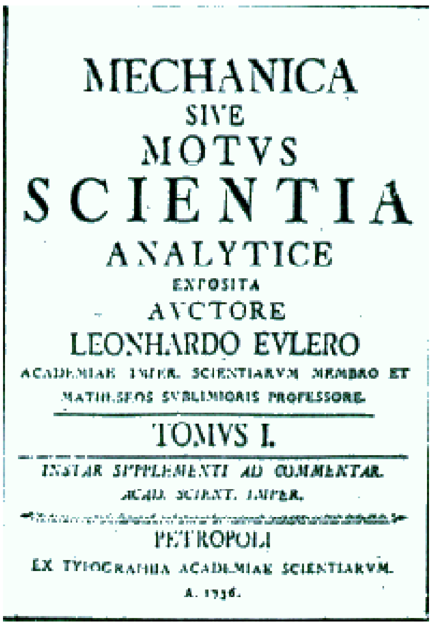
Euler chegou a São Petersburgo no dia 17 de maio, de 1727, ingressando na Acadêmia de Ciências de São Petersburgo dois anos depois de ter sido fundada por Catarina I, sendo nomeado para a área de físico - matemática, por influências de Daniel Bernoulli e Jakob Hermmann, e para o cargo de fisiologia. Tratava-se de uma nova fase na vida de Euler, uma vez que este teve a oportunidade de conviver com colegas que contribuíram muito para o seu desenvolvimento, tais como Christian Goldbach (1690 - 1764), matemático prussiano, com quem Euler discutiu problemas de análise e teorias dos números, que o envolvia em um ambiente propenso a muitas discussões e resultados matemáticos, com cientistas conhecidos por pesquisas de alto nível.

Serviu por três anos como tenente médico da marinha russa, vivendo com Daniel Bernoulli, Euler tornou-se professor de física na Rússia e, por esse motivo, deixou seu posto na marinha russa, assim que se tornou membro pleno da Academia. Daniel Bernoulli estava descontente na Rússia e com saudades de suas origens na Suiça, e mesmo ocupando uma cadeira sênior em matemática, voltou pra Basiléia, em 1733, deixando vaga sua cadeira sendo esta ocupada por Euler.

Com a nomeação, veio a melhoria das finanças que permitiu que o casamento com Katharina Gsell, filha de um pintor, se concretizasse. Eles tiveram 13 filhos juntos, sendo que apenas cinco sobreviveram a infância. E, mesmo cuidando de sua família, Euler não deixou de produzir projetos estatais relacionados com cartografia, educação científica, magnetismo, carros de bombeiros, máquinas e construção naval, entre outros. O núcleo de seu programa de pesquisa tinha sido estabelecido: **teoria dos números** ; análise infinita, incluindo seus ramos emergentes, **equações diferenciais** e o **cálculo das variações** ; e mecânica racional, sendo esses três campos de pesquisas considerados por ele como interligados, pois, para ele, a teoria dos números foi essencial para as fundações do cálculo e funções ditas especiais juntamente com equações diferenciais essenciais para a mecânica racional, culminando em problemas concretos.

E as publicações não cessavam, seu livro *Mechanica* (1736-37), aqui representado na figura 17, é um exemplo disso, uma vez que foi nesse livro que Euler apresentou dinâmicas newtonianas, ou seja, dinâmicas da física, na forma de análise matemática, sendo Euler pioneiro em tal publicação.

Figura 17 – **Página de rosto do livro de Euler "Mechanica", São Petersburgo, 1736 - Atividade 4**



MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.
TOMVS I.
INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.
PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

Fonte: Oliveira, 2007

Em 1735, Euler foi surpreendido por alguns problemas de saúde, começando por uma febre altíssima que quase fez com que ele perdesse sua vida, e, mesmo assim, ele só comunicou a sua família depois de sua completa recuperação. Em 1738, seus excessos com o trabalho cartográfico trouxeram como consequência problemas em sua visão, tendo boa parte da visão de um olho comprometida dois anos depois, em 1740. Mesmo diante desse problema, a reputação de Euler era alta, com conquistas como o Grande Prêmio da Academia de Paris, em 1738 e 1740, tendo recebido a oferta de ir para Berlim. Oferta essa que Euler recusou para permanecer em São Petersburgo. Porém, sua permanência não durou muito devido aos problemas políticos que prejudicaram estrangeiros na Rússia e, em 19 de junho, de 1741, ele tem que deixar São Petersburgo e se mudar para Berlim. Euler continuou investindo em suas pesquisas, comprando livros, escrevendo relatórios científicos, fez amizade com o presidente da Academia de Berlim Maupertuis (1698 - 1759), matemático francês, tendo-o substituído em sua ausência.

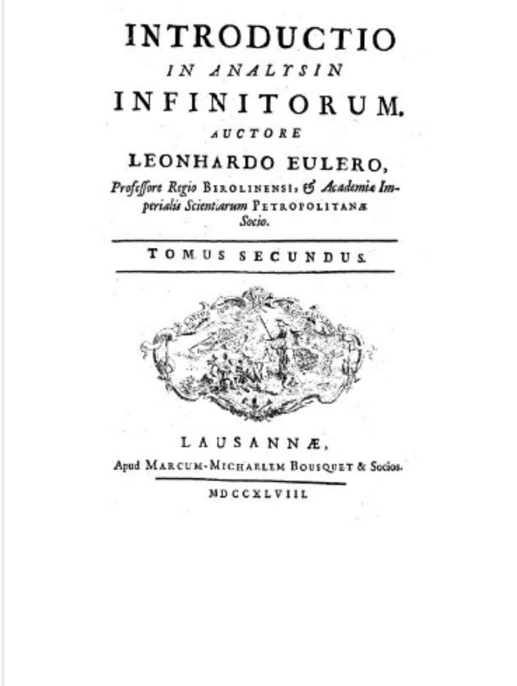
Numa visão ampla, podemos verificar que Euler contribuiu com a Academia de diversas maneiras, entre elas: supervisionando o observatório e os jardins botânicos, cuidou de assuntos financeiros, gerenciou a publicação de vários calendários e mapas geográficos, gerando renda para a academia com a venda destes. Supervisionou trabalhos em bombas e canos do sistema hidráulico da residência real, uma vez que já era admirado pelo rei. E, como se não fosse suficiente, Euler atuou como assessor do governo em loterias, seguros, anuidades, pensões e artilharias, e mesmo atuando em áreas diferentes de sua pesquisa, durante os vinte e cinco anos passados em Berlim, Euler escreveu cerca de 380 artigos sobre o cálculo das variações; cálculo de órbitas planetárias, em artilharia e balística, na análise, na construção naval e navegação, no movimento da lua, sobre o cálculo diferencial, e a publicação de Cartas a uma princesa da Alemanha, resultando em três volumes, sendo lançadas nos períodos de 1768-1772.

Em 1748, Euler publica o livro *Introductio in analysin infinitorum*, aqui representado como figura 18, ele trabalhou com as ideias de Johann Bernoulli, tornando-as mais precisas na definição de uma função, e afirmou que a análise matemática era o estudo das funções. Este trabalho baseia o cálculo na teoria das funções elementares e não nas curvas geométricas, como foi feito anteriormente.

Por conta de seus feitos, e com reputação social, Euler assumiu a liderança da Academia de Berlim, em 1759, com a morte de Maupertuis.Mas, Euler nunca recebeu o título de presidente, pois teve problemas de relacionamento com o rei da Alemanha, Frederico, que ofereceu presidência da Academia a D'Alembert em 1763, justamente com quem Euler teve discussões por questões científicas. Mesmo D' Alembert tendo recusado, Euler ficou perturbado com as interferências de Frederico na administração da Academia e assim resolveu sair, retornando a São Petersburgo, em 1766.

Em 1766, Euler retornou a São Petersburgo e Frederico ficou muito irritado com sua partida. Logo após seu retorno à Rússia, Euler ficou quase totalmente cego depois de uma doença. Em 1771, sua casa foi destruída pelo fogo e ele foi capaz de salvar apenas a si mesmo e seus manuscritos matemáticos. Uma operação de catarata logo após o incêndio, ainda em 1771, restaurou sua visão por alguns dias, mas Euler parece não ter tomado o cuidado necessário e ficou totalmente cego. Por causa de sua notável memória, ele foi capaz

Figura 18 – **Capa de Rosto do Livro: *Introductio in Analysin Infinitorum*, 1748 - Atividade 4**



INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio Berolinensi, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.

TOMUS SECUNDUS.

LAUSANNÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLVIII.

Fonte: Euler, Introductio in Analysin Infinitorum, 1748

de continuar com seu trabalho em óptica, álgebra e movimento lunar. Surpreendentemente, após seu retorno a São Petersburgo (quando Euler tinha 59 anos), ele produziu quase metade de suas obras totais, apesar da cegueira total.

Euler morreu no dia 18 de setembro de 1783, em São Petersburgo, na Rússia.E, após sua morte, em 1783, a Academia de São Petersburgo continuou publicando trabalhos inéditos de Euler por quase 50 anos. Euler deu contribuições para as formalizações matemáticas na geometria, trigonometria sendo o primeiro a considerar seno e cosseno, entre outros, como funções e não como acordes como Ptolomeu introduziu funções beta e gama, integrando-as para equações diferenciais, pois integrou o cálculo de Leibniz, entre tantas outras publicações.

Devemos a Euler notação $f(x)$ para uma função.