Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

# Ensino da Matemática por meio de Problemas Clássicos de Otimização Combinatória

**Roberto Campos Lima Taveira**

**Prof(a). Dr(a). Michelli Maldonado Carretero de Oliveira**

Departamento de Matemática (DMAT)

Instituto de Ciências Exatas, Naturais e Educação (ICENE)

Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM)

Uberaba – MG 2019

Roberto Campos Lima Taveira

# Ensino da Matemática por Meio de Problemas Clássicos de Otimização

v.1

Tese apresentada a Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM) para
Obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador (a): Prof(a). Dr(a). Michelli Maldonado Carretero de Oliveira

Uberaba – MG

2019

**Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro**

| | |
|---|---|
| | Taveira, Roberto Campos Lima |
| T234e | Ensino de matemática por meio de problemas clássicos de otimização combinatória / Roberto Campos Lima Taveira. -- 2019. |
| | 62 f. : il., tab. |
| | Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2019 |
| | Orientador: Prof. Dr. Michelli Maldonado Carretero de Oliveira |
| | 1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Base Nacional Comum Curricular. 3. Otimização combinatória. I. Oliveira, Michelli Maldonado Carretero de. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III.Título. |
| | CDU 51(07) |

**Roberto Campos Lima Taveria**

**Ensino de Matemática por meio de Problemas Clássicos de Otimização Combinatória**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, sob a orientação da professora Dra. Michelli Maldonado Carretero de Oliveira

09 de Outubro 2019.

**Banca Examinadora**

Michelli M C de Oliveira

Profa. Dra. Michelli M. C. de Oliveira
Orientadora
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
-UFTM

Alyne Toscano Martins

Profa. Dra. Alyne Toscano Martins
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
-UFTM

Leandro Martins da Silva

Prof. Me. Leandro Martins da Silva
Instituto Federal do Triângulo Mineiro -
IFTM

**Agradecimentos**

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus por me conceder a oportunidade de cursar esse programa de mestrado e assim poder aprimorar meus conhecimentos matemáticos, por sempre estar presente em minha jornada de vida, me guiando e incentivando.

Aos professores do Programa de Mestrado PROFMAT que contribuíram bastante em aumentar o meu acervo de conhecimento. Em especial, a minha orientadora professora doutora Michelli Maldonato Carretero que com todo seu traquejo matemático e paciência me auxiliou com o maior carinho.

Gostaria de agradecer também os meus colegas de sala, foram dois anos nos reunindo toda sexta feira, anos de muitos estudos e boas risadas, em especial, aos conterrâneos: Guilherme, Jorge, Gustavo e Jhonny.

E por fim, gostaria de agradecer aos meus pais que desde sempre apostaram em mim, em minha educação, sempre estiveram ao meu lado nos momentos difíceis e dolorosos me dando força e apoio.

**Dedicatória**

Dedico esse trabalho aos meus pais que sempre apostaram em mim e a Deus por guiar meus caminhos nos momentos difusos da vida.

**Resumo**

Este trabalho apresenta um pouco sobre a evolução da educação brasileira, as habilidades e competências propostas pela Base Nacional Comum Curricular, otimização e por fim como pode-se conciliar, de maneira atrativa, problemas de otimização no ensino básico.

Mediante o aspecto atual da educação, o objetivo principal desse trabalho é mostrar o quão interessante pode ser a sala de aula dependendo de sua aula. Notar que os tempos mudaram e que a tecnologia veio à tona é imprescindível para elaboração de aulas.

Independente do assunto abordado, outras metodologias de ensino devem ser levadas em consideração, o comum e o usual são avessos da inovação. Neste trabalho explora-se, através da resolução de problemas e da ludicidade, metodologias de aulas motivadas pelas versões mais simples de alguns problemas de otimização, como: O Problema do caixeiro Viajante, O Problema do Carteiro Chinês, O Algoritmo de Dijkstra, O Problema da Mochila e o Problema do Dimensionamento de Lotes.

**Palavras chave: Educação matemática, BNCC, Otimização Combinatória**

**Abstract**

This paper presents a little about the evolution of Brazilian education, the skills and competences proposed by the Common National Curriculum Base, optimization and finally how one can conciliate, in an attractive way, optimization problems in basic education. Through the current aspect of education, the main purpose of this paper is to show how interesting the classroom can be depending on your class. Note that times have changed and that technology has surfaced is essential for lesson design. Regardless of the subject matter, other teaching methodologies should be taken into consideration, the common and the usual are innovation-averse. This work explores through problem solving and playfulness the simplest version of some optimization problems, such as: The Traveling Salesman Problem, The Chinese Postman, Dijkstra Algorithm, the Backpack Problem and the Batch sizing.

**Keywords: Math Education, Operation Research, BNCC.**

# Lista de Ilustrações

# Sumário

**Introdução**

A Otimização combinatória é o ramo da matemática aplicada que faz uso de modelos matemáticos para se encontrar a solução ótima de um problema. Como diversos problemas estão intimamente ligados a rotina de nosso cotidiano, como: o melhor caminho para o recolhimento do lixo, melhor caminho para o patrulhamento policial, para a ronda escolar, a menor distância entre duas cidades, maximizar ou minimizar uma função objetiva e etc, a ideia foi trazer esses problemas para a sala de aula, de maneira atrativa e inovadora, seguindo assim os parâmetros vigentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

O capítulo 1 apresenta a linha do tempo da educação, isto é, um breve resumo dos principais marcos da evolução educacional brasileira. Traz também referências de alguns precursores da educação, as habilidades e competências propostas pela BNCC, como a BNCC e a otimização estão ligadas uma a outra e por fim alguns exemplos de problemas da otimização tratados no ensino básico.

O capítulo 2 apresenta o contexto histórico, a modelagem matemática e alguns exemplos dos problemas de otimização combinatória que serão trabalhados, como: o Problema do Caixeiro Viajante, o Problema do Carteiro Chinês, o Algoritmo de Dijkstra, o Problema da Mochila e o Problema do Dimensionamento de Lotes. A ideia aqui é criar aulas que fujam aos padrões tradicionais cuja a motivação seja os problemas clássicos de otimização combinatória (para que a realidade se infiltre na teoria) linchados a conteúdos do próprio ensino básico e com auxílio de matérias lúdicos e tecnológicos. Este capítulo contará ainda com as propostas de atividades, ou seja, o plano de aula e a modelagem de cada aula relacionada a cada problema.

E finalmente o capítulo 3 traz os resultados das aulas ministradas adquiridos através de fotos, relatórios e depoimentos.

Espera-se que esse trabalho consiga mostrar que é possível tonar a escola um ambiente de ensino-aprendizagem interessante e agradável a ambas as partes que a frequentam, basta uma força tarefa entre escola e comunidade fazendo com que ambos saiam da zona de conforto.

# Capítulo 1 – O Ensino de Otimização na Educação Básica

Este capítulo apresentará os principais marcos da evolução da educação brasileira, fazendo uma conexão com os parâmetros vigentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e com os problemas clássicos de otimização combinatória no ambiente da educação básica.

## A linha do tempo da educação: Um Breve Resumo.

A educação afeta o ser humano em todas as áreas de sua vida. No Brasil e em muitos países é um direito de todos que ajuda no desenvolvimento da pessoa individualmente e coletivamente.

A educação no Brasil teve início em 1549 com a chegada de um grupo de padres Jesuítas que fundaram a primeira escola elementar em Salvador. Com o passar dos anos foram sendo instauradas novas sedes dessa escola nas demais cidades brasileiras (São Paulo em1554 e Rio de Janeiro em 1567).

Em 1759/1760 os Jesuítas são expulsos do Brasil e o ensino fica nas mãos do estado brasileiro, com professores pagos, livros didáticos e ensino destinado apenas a elite. Em meados de 1810 surgem indícios das primeiras faculdades do país, com aulas avulsas de cirurgia e Anatomia nasce o primeiro curso de medicina. Neste período as mulheres eram alfabetizadas e treinadas nas prendas domésticas pelas próprias mães. Em 1827 acontece a abertura dos colégios para mulheres, onde as turmas eram separadas pelo conhecimento e não por faixa etária e professoras ministravam aulas para as mulheres e professores para os homens. Neste período surgem as primeiras faculdades de direito e engenharia do país. Após os alunos concluírem as disciplinas do colégio ingressavam nas faculdades de direito, medicina ou engenharia. Em 1874, são criadas as primeiras escolas particulares, laicas, colégios femininos e protestantes do país. No período da reforma industrial, em 1883 surgem os primeiros colégios técnicos com intenção de qualificar mão de obra para a indústria. Em 1889, com a proclamação da república, o governo reforma o ensino, organiza uma rede de escolas normais e complementares com o aumento de mulheres nos cursos de formação para professores. Em 1920 surge a escola nova, onde o aluno se torna o sujeito mais importante e então há a criação de novos métodos e metodologias e reformas nos currículos escolares. Em 1932 há a universalização da escola pública, laica e gratuita com mudanças nas práticas e saberes pedagógicos. Em 1942, com a força industrial crescendo no país, surge o SENAI (Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial). Em 1960, um educador visionário se destaca com sua metodologia na alfabetização de adultos e em 1962, Paulo Freire, é convidado a reformular a alfabetização do país. Porém, em 1971, com o regime militar, os movimentos em defesa da escola pública e todos ao seu redor foram cessados, Paulo Freire exilado, disciplinas de história e geografia foram substituídas por estudos sociais e educação moral e cívica. Surge também, nessa época, o Mobral (Movimento Brasileiro de Alfabetização) com o objetivo de erradicar o analfabetismo. Em 1988, com o fim da ditadura militar, a nova constituição obriga a união e os estados a destinar cerca de 18 a 25 por cento de sua receita para a educação. Em 1996 é promulgada a LDB (Leis de Diretrizes e Bases) onde a educação infantil é incorporada e passa a ser a primeira etapa da educação básica. E o Ministério da Educação e Cultura edita os Parâmetros Curriculares Nacionais. Em 1998 são criados indicadores que avaliam o ensino do pais, como o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), Saeb (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica) destinada ao estado e Prova Brasil destinada aos municípios. Em 2004, surge o ProUni (Programa Universidade para Todos) que vincula a concessão de bolsas integrais ou parciais atreladas ao desempenho do aluno no ENEM. Em 2007, cria-se o PDE (Programa de

Desenvolvimento da Educação) com o intuito de diminuir o número de crianças fora da escola. E por fim, em 2017, surge a proposta da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) que visa padronizar o ensino e preparar o aluno para o mundo contemporâneo.

Os índices avaliadores da educação brasileira indicam, em alguns pontos, certas deficiências. A BNCC surge com uma série de competências e habilidades focadas em melhorar o ensino brasileiro sanando algumas dessas deficiências. Através de audiências públicas de carácter consultivo, destinadas a colher subsídios e contribuições, a BNCC foi elaborado captando as necessidades e interesses da educação brasileira.

## Parâmetros da BNCC.

Não se pode falar da BNCC sem antes fazer um breve comentário sobre o renomado educador Paulo Freire que já trazia em seus relatos diversas competências previstas pela BNCC. Para Paulo freire, a educação não deve ser tratada somente do ponto de vista escolar, a educação deve ser não formal, ou seja, que se dá em espaços extraescolares (tudo e todo lugar que influencia a vida do aluno). Está intimamente ligada a formar cidadãos em amplos sentidos: profissional, social, sustentável e etc.

Segundo ele, há uma necessidade de relação entre a escola e a sociedade em que a escola se inseri. O professor deve fazer uso da realidade do aluno para extrair conteúdos a serem ensinados. Menciona também que a relação entre professor e aluno deve se dar de maneira horizontal fugindo as vertentes da pedagogia do oprimido. O professor e o aluno devem ser, ambos, sujeitos-ativos, criando assim um bom relacionamento interpessoal. A aprendizagem acontecerá de forma natural através das trocas de experiência, o diálogo deve ser a base da relação professor/aluno e o mais importante, a motivação deve se dar através da problematização de uma situação concreta.

Tendo em vista um pouco das tendências freireanas percebe-se que elas estão no mesmo sentido dos parâmetros apontados pela BNCC.

A BNCC é um documento que visa padronizar a educação do Brasil através de conhecimentos essenciais, direitos e objetivos de aprendizagem. A BNCC traz competências e habilidades que regerão esta nova “versão” da educação.

As competências foram criadas para um desenvolvimento integral do aluno, auxiliando-o na sua formação para a vida e preparando-o para ser um cidadão do século XXI.

Assim, as competências devem ajudar no desenvolvimento do pensamento científico, crítico e criativo, no desenvolvimento da comunicação e da empatia entre outras habilidades essenciais para o mundo contemporâneo. As competências que regem o documento são:

1) Conhecimento:

Deve-se utilizar e valorizar os conhecimentos históricos construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e então colaborar para uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2) Pensamento científico, crítico e criativo:

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, análise crítica, a imaginação e a criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas).

3) Repertório cultural:

Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4) Comunicação:

Usar diferentes linguagens-verbal (oral ou visual-motora e escrita), corporal, visual, sonora e digital, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica para se expressar e partilhar informações, experiências e idéias.

5) Cultura digital:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimento e resolver problemas.

6) Trabalho e projeto de vida:

Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimento e experiências que lhes possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida.

7) Argumentação:

Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promova os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito global, com posicionamento ético, em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8) Autoconhecimento e autocuidado:

Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade de lidar com elas.

9) Empatia e cooperação:

Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes e identidades, culturas e potencialidades, sem preconceito de qualquer natureza.

10) Responsabilidade e cidadania:

Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Essas competências serão trabalhadas mediante conteúdos que serão abordados em sala de aula, conteúdos, estes, que também passarão por reformulações. Esses conteúdos, também chamados por habilidades e objetivos da BNCC são aptidões desenvolvidas ao longo de cada etapa de ensino, funcionam como subsídios para que o aluno adquira as competências propostas.

## BNCC e Otimização.

A pesquisa operacional e otimização apoia o processo de tomada de decisão. Ela é responsável pelo processo de tomada de decisão no contexto diário de uma pessoa. Cabe ao decisor identificar e definir o problema, formular objetivos, analisar limitações, avaliar as alternativas e por fim, dentre elas, escolher a melhor a ser tomada.

Por se tratar de um método que auxilia na tomada de decisão pode-se aplica-la nas mais diversas áreas, como: em um ambiente coorporativo, comercial e até mesmo escolar.

Explicitamente, a BNCC, em suas competências, deixa claro que a nova vertente da educação deve deixar a escola mais interessante ao aluno, a escola deve acompanhar o desenvolvimento global, alunos do século XXI para escolas do século XXI. Desta forma, os conteúdos a serem tratados na escola devem ser abordados e elaborados de maneiras diferentes sendo buscados em um contexto real e esta, sim, deve ser a principal motivação para os objetos de estudo. O aluno de hoje tem a informação e a solução de seus percalços a apenas um clique, a evolução digital é um atributo desta nova geração e este fato não pode ser deixado de lado.

O estudo de otimização, por se tratar de um método de tomada de decisão, pode ser modelado para grande parte de diversos problemas rotineiros como por exemplo: qual o melhor caminho que o aluno deve fazer de sua casa até a escola ou como ele pode comprar mais itens, com determinada relevância, na cantina da escola com a mesma quantia em dinheiro e etc. Outra vantagem que pode ser explorada na otimização é que pode-se construir planilhas ou *softwares* que resolvem exemplos simples de alguns problemas auxiliando assim na contextualização e visualização do problema.

Olhando desta forma percebe-se que o estudo de otimização, adequado a situações problemas em âmbito real encontrados no dia a dia do aluno, e trabalhados segundo o norte dado pelas tendências freireanas, vão de acordo ou se encaixam nos requerimentos da BNCC.

Sendo assim, um novo método de ensinamento pode ser criado, o professor deve, através de sua imaginação, elaborar suas aulas mediante uma nova metodologia de forma a resgatar a atenção e restaurar o conhecimento do aluno, fugindo do habitual.

## Como os problemas de otimização são abordados na educação básica:

Alguns pesquisadores já fazem uso da Otimização como ferramenta de aperfeiçoamento e aprimoramento de suas aulas, pelo menos em teoria. O renomado matemático e escritor George Polya já trazia em sua obra: *Problemas e teoremas de análise* e *Métodos de resolução de problemas*, [5] a importância de buscar motivação em situações problemas que envolviam o cotidiano do aluno e deixou uma enorme contribuição no como proceder. Para Polya a resolução de problemas se dividia em quatro processos: Compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Polya afirmava ainda que, cabe ao professor escolher minuciosamente cada situação problema a se trabalhar pois conduzir o aluno a uma situação problema cuja solução está muito além de sua capacidade de compreensão acarreta efeito contrário, ou seja, a aula acaba por desestimular ainda mais o aluno.

Roberto Rech em seu artigo: *Resolvendo problemas de otimização no ensino médio*, [5] faz uso da otimização para seu plano de aula. Através da resolução de problemas propõe duas possíveis situações problemas, pede para que seus alunos pensem na solução e conclui apresentando um a solução ótima através de modelos de otimização. O primeiro problema se baseia em um fabricante que deseja maximizar sua receita bruta. Para isso apresenta uma tabela, figura 1, com a composição de cada liga fabricada por ele, com o preço e as limitações de matérias-primas:

*Figura 1: Composição de ligas.*

| | Liga A ($x_1$) | Liga B ($x_2$) | Matéria – prima disponível |
|---|---|---|---|
| **Cobre** | 2 | 1 | 16 |
| **Zinco** | 1 | 2 | 11 |
| **Chumbo** | 1 | 3 | 15 |
| Preço unitário de venda | R$ 30,00 | R$ 50,00 | |

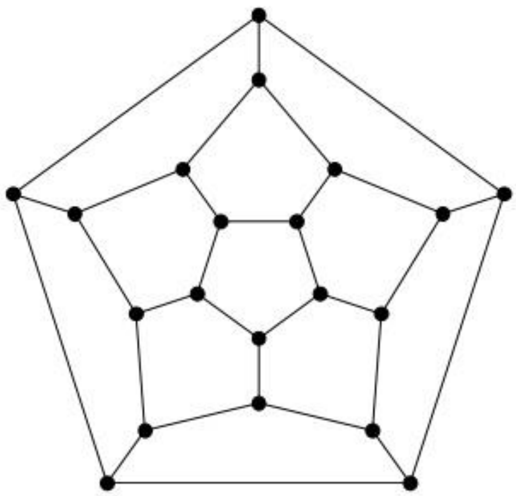
*Fonte: [4]*

Deseja-se saber, quanto deve ser produzido de cada liga A e B de modo que a receita seja máxima.

O segundo problema faz referência a uma empresa que foi contratada para fornecer alimentação a alunos de uma rede pública de ensino. Esta empresa deve entregar a merenda escolar seguindo um certo balanceamento nutricional proposto pelo estado. O problema apresenta diversos itens com valores nutricionais diferentes que a empresa deve escolher para compor as exigências nutricionais. Obviamente, cada item apresenta um preço diferente e a questão a ser debatida é: Como deve ser essa refeição para a empresa ter o menor custo possível? O desenrolar da aula se deu com a análise das possíveis respostas encontradas pelos alunos e foi concluída com a apresentação da solução ótima encontrada via *software* pelo professor.

Outra aplicação do assunto se dá através de teoria de grafos, que se trata de uma parte da otimização que é mais utilizada para aplicações lúdicas, com o propósito de compreender e resolver jogos. Um jogo famoso que em meados de 1860 foi vendido a uma grossista de jogos e puzzles e fez bastante sucesso é o conhecido jogo de Hamilton ou “Icosian Game”. O jogo consiste em um tabuleiro de vinte furos unidos por arestas e vinte peças, numeradas de 1 a 20 para se encaixar nos furos.

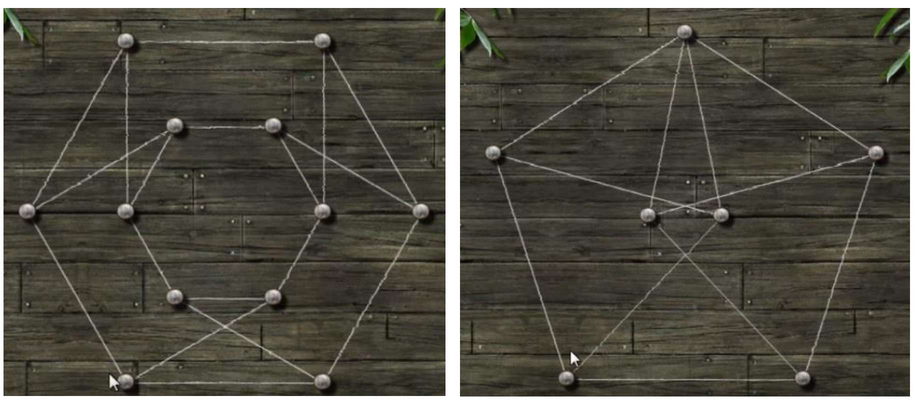
*Figura 2: Grafo do Jogo de Hamilton*



*Fonte: imagens google*

O objetivo é colocar as vinte peças numeradas nos vinte furos por ordem, de modo que duas peças com números consecutivos estejam em furos unidos por uma aresta e além disso o último furo deve estar unido com o primeiro. Depois deste foram lançadas várias versões do jogo, com o mesmo objetivo claro, porém com diferentes números de furos e peças.

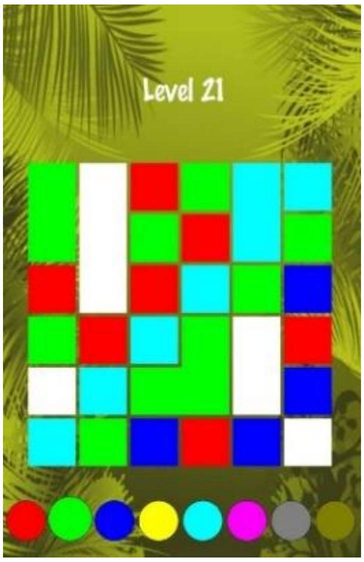
*Figura 3: Icosian Game*



*Fonte: <http://mathworld.wolfram.com/IcosianGame.html>*

Desde então foram surgindo outros jogos e aplicações da otimização como fonte de estudo na educação básica. O jogo das quatro cores, torre de hanoi, o desafio de se construir uma casinha sem retirar o lápis do papel e etc.

*Figura 4: Jogo das Quatro Cores*




*Fonte: imagens google*

*Figura 5: Torre de Hanoi*

*Fonte: imagens google*

*Figura 6: Desafio da Casinha*


*Fonte: imagens google*

# Capítulo 2 – " Problemas Clássicos da Otimização Combinatória"

A otimização é um ramo da matemática que faz uso de modelos matemáticos que auxiliam na tomada de decisões para encontrar a solução ótima de problemas rotineiros, como por exemplo: a ronda escolar, patrulhamento policial, recolhimento do lixo e etc.

Como os Problemas Clássicos de Otimização Combinatória possuem carácter motivacional para este trabalho, este capítulo apresentará o contexto histórico, a modelagem matemática e alguns exemplos dos quatro problemas clássicos da otimização: O Problema do Caixeiro Viajante, o Problema do Carteiro Chinês, o Problema da Mochila e o Problema do Dimensionamento de lotes, dispensando assim os métodos, *softwares* e algoritmos de solução.

## O que é e quais são alguns dos problemas clássicos da otimização: Um pouco de História

O termo pesquisa operacional surgiu por volta de 1936 pelo Ministério Britânico com o intuito de entender o funcionamento do radar e como essa tecnologia poderia ser útil para interceptar aviões inimigos. Em 1941 foi inaugurada a seção de pesquisa operacional do comando da força aérea de combate, com equipes envolvidas em problemas de operações de guerra como: manutenção e inspeção de avião, melhoria da probabilidade da destruição de submarinos, controle de artilharia antiaérea, dimensionamento de comboios de frota, etc. Após o fim da guerra a pesquisa operacional evoluiu rapidamente na Inglaterra e Estados Unidos. Em 1947 foi implantado o primeiro projeto de pesquisa operacional liderado pelo economista Marshall Wood e pelo matemático George Dantzig, durante esse projeto Dantzig desenvolveu, formalizou e testou o método simplex de resolução de problemas lineares. Em 1957 foi realizada a primeira conferência internacional de pesquisa operacional em Oxford onde constatou diferentes focos nas linhas de estudo da otimização inglesa e americana. Os ingleses se dedicavam a estudos de caso ou problemas específicos enquanto os americanos enxergaram que a pesquisa operacional poderia ser aplicada através de métodos e modelos matemáticos em diversas áreas. Com o passar dos anos a ideia foi se difundindo e em 1967, foram identificados 766 grupos que já possuíam um departamento de pesquisa operacional e algumas de suas aplicações em setores industriais e financeiros como: mineração, metalúrgico, construção civil e militar, têxtil, farmacêutico, bancário e transporte. O setor público fazia utilização em aplicações que envolviam coleta de lixo, transporte e roteamento do setor policial. Desde então a pesquisa operacional veio sendo aplicada para as mais diversas áreas e a partir de 1970 veio sendo estudada nos cursos de graduação e pós-graduação.

De maneira geral, a pesquisa operacional consiste no desenvolvimento de métodos científicos de sistemas complexos, com a finalidade de prever e comparar estratégias ou decisões alternativas, isto é, análise e desenvolvimento de estudos que auxiliam na tomada de decisões procurando sempre a melhor alternativa.

Com o passar dos anos o estudo de pesquisa operacional foi se adaptando e se aperfeiçoando e assim modelos matemáticos foram aplicados em diversos problemas de diversas áreas. Desta forma surgiram alguns problemas que são rotineiramente estudados quando se fala em otimização, são eles: Problema da mistura; do transporte, transbordo e designação; planejamento da produção;

programação de projetos; gestão financeira; corte e empacotamento; o problema da mochila, do caixeiro viajante, do carteiro chinês; roteamento de veículos, dimensionamento e programação de lotes e o problema do caminho mínimo. Alguns desses serão “brevemente” mencionados no tópico seguinte.

## Problema do Caixeiro Viajante

O Problema do Caixeiro Viajante se baseia em um caixeiro que sai de uma cidade base, visita todas as cidades, dentro de um conjunto de cidades, passando somente uma vez por cada cidade e retorna para a cidade base de modo a otimizar seus objetivos.

A origem do nome “ Problema do caixeiro viajante” é desconhecida assim como o nome de seu autor. Relatos afirmam que, por volta de 1800, o matemático escocês Willian Rowan Hamilton e o matemático britânico Thomas Penyngton Kerkman começaram a estudar soluções para todo problema deste tipo. Em meados de 1950, o problema foi novamente estudado por Hasster Whitney e Merril Flood em Princeton, ano em que se tornou globalmente conhecido.

O problema do caixeiro viajante é dividido em simétrico, quando a distância de uma cidade A até a cidade B é a mesma da cidade B até a cidade A, e assimétrico em caso contrário. Uma aplicação prática desta variação se dá quando nos deparamos com rodovias onde para irmos de uma cidade até outra passamos por pedágios, porém na volta isso não acontece, outra aplicação se dá no transporte público, no itinerário da coleta de lixo, disque entregas entre outros.

Note que podemos ter um número $n$ de cidades fazendo parte de nosso itinerário e que uma maneira corriqueira de se pensar em resolvê-lo é descobrir todas as possíveis rotas e compara-las escolhendo assim aquela que lhe traz maiores benefícios. Sendo assim podemos classificá-lo como um problema de otimização combinatória e logo perguntas do tipo: “É possível determinar todas as rotas existentes? ” “Qual a melhor rota? ” Se tornam totalmente pertinentes. Para determinarmos o número de rotas existentes, caso exista um caminho para cada uma das cidades, ou seja, forme um grafo completo, basta utilizarmos o princípio fundamental da contagem. Verificaremos que para problemas assimétricos o número de rotas será:

$$(n-1)!$$

Já para problemas simétricos será:

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

Por exemplo, para $n = 4$, seja A, B, C e D cidades e considerando um problema assimétrico, teremos as seguintes combinações:

ABCDA

ABDCA

ACBDA

ACDBA

ADBCA

ADCBA

Pelo Princípio fundamental da contagem, se há x modos de se tomar uma decisão $D_1$ e y modos de se tomar a decisão $D_2$, então o número de modos de se tomar sucessivamente as decisões $D_1$ e $D_2$ é o produto x.y, Assim, temos:

A __ __ __ A

1 . 3 . 2 . 1 . 1 = 6, pelo princípio multiplicativo.

Se o problema fosse simétrico, então, a distância de A até B seria igual a de B até A, ou seja, as rotas seriam as mesmas, sendo assim teríamos que as dividir por 2, veja:

ABCDA

ABDCA

ACBDA

ACDBA

ADBCA

ADCBA

As cores iguais denotam rotas iguais, basta lê-las de traz para frente.

A __ __ __ A

$\frac{1.3.2.1.1}{2} = 3$, pelo princípio multiplicativo.

O grande problema acontece quando temos um número muito grande de cidades, o que torna o problema inviável de ser resolvido, pois fica impossível calcular todas as rotas.

A importância do Problema do Caixeiro Viajante é devida a pelo menos três de suas características:

- Grande aplicação prática;
- Uma enorme relação com outros modelos;
- Grande dificuldade de solução exata;

Dessa forma, a importância do modelo é indiscutível, tanto sob aspecto prático como teórico.

Modelo Matemático:

Definiremos a variável $x_{ij}$ tal que:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, se\ o\ caixeiro\ vai\ da\ cidade\ i\ para\ a\ j. \\ 0, se\ ele\ não\ vai\ da\ cidade\ i\ para\ a\ j. \end{cases}$$

onde i,j são cidades com $i, j = \{1, \ldots, n\}$. E seja $c_{ij}$, com $i \neq j$, a distância percorrida da cidade i até a j.

Sendo assim, a fica a função objetiva do nosso problema fica expressa por:

$$\min_{x \in N: 0 \leq x \leq 1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \,.\, x_{ij}$$

Mas para respeitarmos as exigências do problema precisamos de algumas restrições:

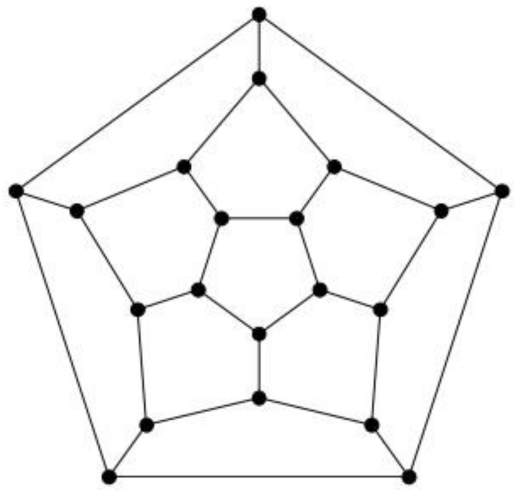
1) $\left\{\begin{matrix} \sum_{i: i \neq j} x_{ij} = 1, \forall j \\ \sum_{j: j \neq i} x_{ij} = 1, \forall i \\ x_{ij} \in \{0,1\} \forall i, j \end{matrix}\right\}$, garantem que exista apenas uma rota da cidade i até a j.

2) $\left\{\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, com\ S \subset n\right\}$,

Na restrição 2, seja S o conjunto de sub-rotas contido em n, essa restrição limita o número de variáveis associadas a essas cidades que podem receber valores diferentes de zero, ou seja, elimina as sub-rotas encontradas no problema.

Exemplos: Um exemplo simples do problema do caixeiro viajante é o próprio jogo de Hamilton.

*Figura 7: Grafo do Jogo de Hamilton.*



*Fonte: imagens google.*

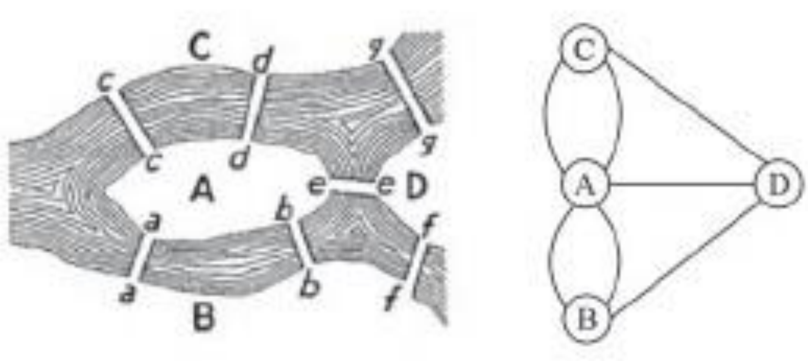
O jogo consiste em um tabuleiro de vinte furos unidos por arestas e vinte peças, numeradas de 1 a 20 para se encaixar nos furos. O objetivo é colocar as vinte peças numeradas nos vinte furos por ordem, de modo que duas peças com números consecutivos estejam em furos unidos por uma aresta e além disso o último furo deve estar unido com o primeiro.

## O Problema do Carteiro Chinês:

O problema do carteiro chinês se baseia em determinar um caminho de comprimento mínimo que passe de um ponto a outro utilizando todas as passagens possíveis pelo menos uma vez.

O primeiro problema similar, ou da mesma categoria do problema do carteiro chinês foi o problema das pontes de Konigsberg, na época, cidade alemã que hoje pertence a Rússia com o nome de Kaliningrad. A questão era determinar a existência de um caminho fechado passando em cada ponte somente uma vez.

*Figura 8: Pontes de Konigsberg.*




*Fonte: wikipédia*

Em 1736, o matemático famoso suíço, Leonhard Euler, encontrou condições para a existência deste caminho e demonstrou não ser possível encontrar uma solução para tal problema neste caso específico. Este problema foi um marco para o início dos estudos sobre teoria de grafos.

Nestes estudos, Euller, percebeu que poderia modelar problemas deste tipo em forma de conjuntos cujos elementos eram unidos por arcos e os denominou de grafos, conforme figura 7 acima. Ele percebeu também que em todo grafo não orientado conexo, isto é, existe um caminho, denominado arcos ou aresta, entre quaisquer pontos, denominados nós do grafo, existe um ciclo Eureliano que atravessa cada aresta do grafo exatamente uma vez se, e somente se, todo nó tem grau par, isto é, um número par de arcos por nó ou ter um número par de vértices com grau ímpar.

Em 1962, o matemático Mei-Ku Kuan, quando trabalhava em um correio durante a revolução cultural chinesa enunciou o problema da seguinte maneira: “Um carteiro tem que cobrir seu segmento designado antes de retornar ao posto de correio. O problema é encontrar o caminho mais curto para o carteiro”.

Este problema faz parte da classe de problemas conhecidos como problemas de roteamento de nós e são definidos por grafos orientados ou não orientados. Nestes problemas a meta é descobrir a travessia de custo mínimo de um conjunto especificado de arcos. Atualmente vemos versões deste problema, em contexto prático, no trabalho de entrega de correspondências, roteamento de ônibus escolar, patrulhamento da polícia e etc.

Vamos considerar o problema do carteiro chinês em um grafo não orientado $G = (N, E)$, onde $N$ é o número total de nós e $E$ o número total de arestas, tal que $c_e$ é o custo da aresta $e \in E$. Por Euller, se todos os nós tem grau par então existe um ciclo Eureliano e qualquer ciclo tem o mesmo custo que é a soma dos custos de todas as arestas. No caso de existir nós de grau ímpar, segundo Guan, basta fazermos a adição de arestas de mesmo custo fazendo com que o nó tenha grau par para assim encontrar o ciclo Eureliano. O problema do carteiro chinês consiste em determinar quais arestas devem ser duplicadas para se obter o ciclo Eureliano de custo mínimo.

Modelo Matemático:

Dado um grafo $G = (N, E)$, sejam $\hat{E} e \check{E}$ conjuntos de arestas orientadas, em que um conjunto contém uma cópia orientada de cada aresta de $E$ em uma direção arbitrária, e o outro conjunto contém uma cópia de cada aresta de $E$ na direção oposta. Para uma aresta $e \in E$ sejam $\hat{e} \in \hat{E}$ e $\check{e} \in \check{E}$ as arestas com direções opostas associadas a $e$. Seja $\delta_v^+$ o número de arestas orientadas que entram no nó $v$ e $\delta_v^-$ o número de arestas orientadas que saem de $v$.

Definiremos as variáveis:

$$x_{\hat{e}} = \begin{cases} 1, se\ a\ aresta\ \hat{e}\ associada\ a\ e\ \text{é}\ escolhida \\ 0, caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}$$

$$x_{\check{e}} = \begin{cases} 1, se\ a\ aresta\ \check{e}\ associada\ a\ e\ \text{é}\ escolhida \\ 0, caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}$$

Sendo assim a função objetiva do nosso problema fica expressa por:

$$\min_{x_{\hat{e}}, x_{\check{e}} \in \{0,1\}} \sum_{\hat{e} \in \hat{E}} c_e \,.\, x_{\hat{e}} + \sum_{e \in \check{E}} c_e \,.\, x_{\check{e}}$$

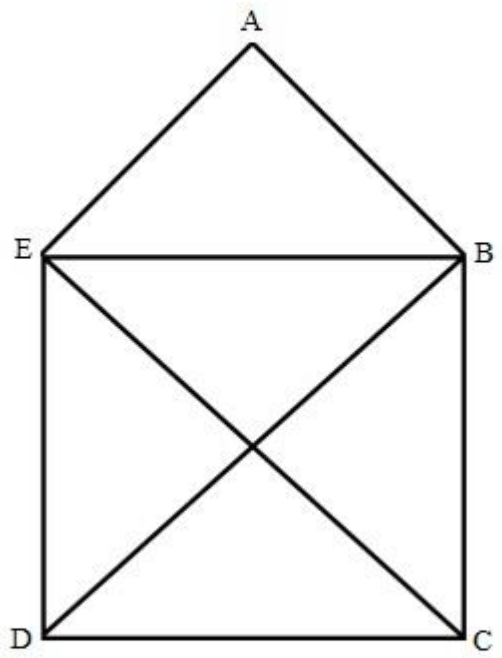
Mas para respeitarmos as exigências do problema temos algumas restrições:

1) $\{x_{\hat{e}} + x_{\check{e}} \geq 1, \forall\ par\ (\hat{e}, \check{e})\ associado\ a\ e \in E\}$, garante que o caminho passe, pelo menos uma vez, em cada aresta de E.

2) $\left\{\sum_{\hat{e} \in \delta_v^+} x_{\hat{e}} - \sum_{\check{e} \in \delta_v^-} x_{\check{e}} + \sum_{\check{e} \in \delta_v^+} x_{\hat{e}} - \sum_{\hat{e} \in \delta_v^-} x_{\check{e}} = 0, \forall\ v\ \in N\right\}$, garante que o grau do nó, independente de direção, tenha grau par.

Exemplo: Um exemplo clássico, que inclusive é uma brincadeira de criança, é desenhar uma casinha sem retirar o lápis do papel. A casinha nada mais é do que um grafo de 5 vértices e 7 arestas e o objetivo é passar por todos os vértices passando por todas as arestas apenas uma vez.

*Figura 9: Desafio da Casinha.*




*Fonte: imagens google*

Uma solução possível seria: D – E – B – A – E – C – B – D – C .

## O Algoritmo de Dijkstra:

O Algoritmo de Dijkstra encontra o menor caminho entre quaisquer dois nós de uma rede, quando todos os arcos têm comprimentos não negativos. Este algoritmo utiliza um procedimento iterativo, isto é, na iteração 1 ele determina o nó mais próximo do nó 1, na segunda iteração, o segundo nó mais próximo do nó 1 e assim por diante.

O algoritmo de Dijkstra, foi criado pelo cientista da computação holandês Edsger Dijkstra em 1956 e publicado em 1959. Uma de suas utilidades é resolver problemas onde uma pessoa precisa se deslocar de uma cidade para outra e existem vários caminhos que ele pode seguir, porém o desejo é se obter o menor caminho possível.

O algoritmo considera um conjunto de menores caminhos, iniciado com um nó I com distância inicial zero. A cada iteração, o algoritmo busca os nós mais próximos deste nó I e adiciona-se a distância de I a distância deste nó e, então, por iterações repetidas e seguindo as regras do algoritmo se encontra o menor caminho até o nó terminal. As distâncias que já foram utilizadas em iterações passadas devem ser desconsideradas.

Regras do algoritmo:

1) O processo do algoritmo consiste em rotular os nós com valores temporários até que possam ser rotulados definitivamente;

2) A cada iteração alguns nós são rotulados temporariamente e somente um definitivamente;

3) O rótulo definitivo de um nó refere-se a menor distância entre o nó de origem e este;

4) O algoritmo é encerrado ao rotular definitivamente o nó de destino;

5) Se o caminho encontrado é menor do que o que você já tem então o nó deve ser rotulado novamente, caso contrário basta mantê-lo;

6) O nó inicial é um rotulo definitivo;

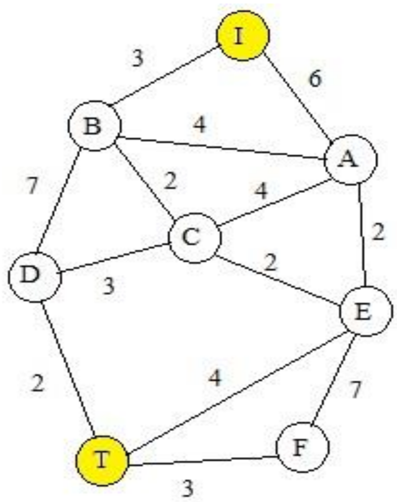
7) Em caso de empate, dois rótulos com mesma distância, a escolha do nó é arbitrária;

8) As distâncias que ligam os nós já utilizadas em iterações passadas devem ser desconsideradas;

Exemplo:

Encontre a menor distância entre os pontos I e T.

*Figura 10: Exemplo de Grafo e legenda da tabela 1*




**Legenda:**

(qual nó rotulou determinado nó, distância entre eles);

Nó com rótulo definitivo;

- Nós desconsiderados

* Nós que ainda não sabemos a menor distância;

Células na vertical: Iterações

Células na horizontal: Nós

*Tabela 1: Tabela de Dijkstra*

| | I | A | B | C | D | E | F | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (I,0) | * | * | * | * | * | * | * |
| 2 | - | (I,6) | (I,3) | * | * | * | * | * |
| 3 | - | (I,6) | - | (B,5) | (B,10) | * | * | * |
| 4 | - | (I,6) | - | - | (C,8) | (C,7) | * | * |
| 5 | - | - | - | - | (C,8) | (C,7) | * | * |
| 6 | - | - | - | - | (C,8) | - | (E,14) | (E,11) |
| 7 | - | - | - | - | - | - | (E,14) | (D,10) |

Assim o melhor caminho de I até T é: I, B, C e D.

Basta olhar os rótulos definitivos de trás para frente e ver quem rotulou quem.

## O Problema da Mochila:

Problemas da mochila envolvem a escolha de itens a serem colocados em uma ou mais mochilas de forma a maximizar uma função de utilidade respeitando o limite suportado pela mochila.

O problema da mochila é dividido em: O problema da mochila simples onde possuímos apenas uma mochila ou o problema da mochila múltipla onde possuímos mais de uma mochila. Ele também é dividido em limitado ou ilimitado. O problema da mochila limitado, também conhecido como 0-1, recebe esse nome devido ao fato de só ser possível pegar uma unidade de cada item, já o ilimitado é permitido pegar mais de uma unidade de cada item.

O problema da mochila foi publicado, possivelmente, em 1957 por Dantzig e sua versão simples somente resolvido em 1982 por Ronald Rivest, Adi Shamir e Len Adleman. Já sua versão múltipla foi resolvida dois anos depois (1984) por Ernmie Brickell.

Este problema possui uma aplicação prática muito vasta, podemos encaixá-lo em diversas situações, algumas são: investimento de capital, corte e empacotamento de itens, carregamento de veículos, orçamentos e etc.

Neste trabalho trataremos sobre o problema da mochila 0-1.

Para um melhor entendimento consideraremos um exemplo: Considere um empresário com determinado capital de investimento $b$ e $n$ projetos para serem analisados. O projeto $j$ tem um custo $a_j$e um retorno de investimento $p_j$. O problema do empresário é determinar quais projetos maximizam seu retorno de investimento sem ultrapassar o valor $b$ de seu capital de investimento.

Para isso, definiremos as variáveis:

$$x_j = \begin{cases} 1, se\ o\ projeto\ j\ for\ escolhido \\ 0, se\ o\ projeto\ não\ for\ escolhido \end{cases}$$

A função objetiva do nosso problema fica expressa por:

$$\max_{0 \le x_j \le 1} \sum_{j=1}^{n} x_j \, . \, p_j$$

Respeitando as exigências do problema, temos uma restrição:

1) $\left\{\sum_{j=1}^{n} x_j . a_j \le b\right\}$, garante que os custos dos projetos não ultrapassaram o valor do capital de investimento.

Exemplo: Um exemplo clássico do problema da mochila 0-1 e o problema do alpinista. Nesse problema, o alpinista precisa colocar alguns objetos em sua mochila que suporta determinado peso de acordo com a utilidade de cada objeto. Veja a tabela a seguir:

*Tabela 2: Utilidade vs massa.*

| Itens | Massa (kg) | Utilidade (0 á 10) |
|---|---|---|
| Corda | 4,0 | 7 |
| Faca | 2,0 | 3 |
| Água | 1,0 | 5 |
| Presilhas | 0,5 | 7 |
| Lanterna | 3,0 | 2 |

Sabendo que a mochila suporta no máximo 8 kg, o que o alpinista deve colocar na mochila para que ele leve o máximo de itens com maior utilidade?

A solução procurada se dá através da construção de todas as possíveis combinações de itens e análise da que possui a maior utilidade sem ultrapassar o peso suportado. Sendo assim, a solução desejada será: Corda, Faca, Água e as Presilhas totalizando 7,5 kg.

## O Problema de Dimensionamento de lotes:

É todo problema envolvido ou relacionado a produção de alguma coisa, onde o principal objetivo de estudo é, através da modelagem, maximizar os lucros ou minimizar os custos.

Os primeiros modelos foram introduzido por Harvey M. Wagner e Thomson M. Whitin em 1958. Como cada processo fabril se dá de uma forma diferente uns dos outros, seja por número de produtos (SKU's), por tempo de produção, por processo de produção ou outras inúmeras variáveis formalizar um modelo se torna uma tarefa complicada.

O funcionamento de uma empresa se baseia na produção e na venda de um bem. O segredo para uma empresa estar saudável financeiramente está em se produzir com custo mínimo e realizar uma boa venda. Para isso planejamento, organização, direção e controle são requisitos fundamentais.

A grosso modo um processo de produção constitui-se basicamente na manipulação de uma matéria-prima na cadeia de execução das tarefas que serão desenvolvidas por um grupo de operários para produção de um bem. Dependendo do produto a ser produzido, o processo de produção pode se dividir, havendo assim, diversas linhas de produção até que se tenha o bem-acabado.

Neste trabalho focaremos no processo de produção mais simples que seria a produção de um único bem, sem uma grande capacidade de produção, mais precisamente, uma empresa em início de carreira.

O objetivo aqui é o mesmo dos outros problemas, isto é, criar uma situação habitual aos alunos de modo que eles consigam entender um processo fabril e resolver um problema do contexto, visando aprimorar as ferramentas matemáticas e entender melhor esse processo de fabricação.

Sejam alguns parâmetros a serem considerados:

$$\begin{cases} P_t \rightarrow Custo\ unitário\ de\ produção\ no\ periodo\ t, (t = 1, \dots, T)(\$; unidade\ de\ t) \\ H_t \rightarrow Custo\ de\ estoque\ no\ periodo\ t, (t = 1, \dots, T)(\$; unidade\ de\ t) \\ Q_t \rightarrow Custo\ de\ setup\ no\ periodo\ t, (t = 1, \dots, T)(\$) \\ D_t \rightarrow Demanda\ no\ periodo\ t, (t = 1, \dots, T)(unidades) \\ M \rightarrow Um\ valor\ muito\ grande\ que\ garante\ que\ se\ houver\ produção\ haverá\ setup \\ S_0 \rightarrow Estoque\ no\ início\ do\ planejamento(unidades) \\ S_T \rightarrow Estoque\ desejado\ ao\ final\ do\ último\ periodo\ do\ planejamento\ T(unidades) \end{cases}$$

Observação:

1) Quando dizemos custo unitário de produção, custo de estoque e custo de setup significa que já somamos todos os custos fixos envolvidos no processo de produção e o rateamos por unidade.

2) Setup: tempo em que a produção é interrompida para ajustes ou manutenção dos equipamentos fabris.

3) Para cada modelo de processo de fabricação existem diversos tipos de parâmetros.

Definiremos as seguintes variáveis:

$$\begin{cases} x_t, quantidade\ produzida\ no\ periodo\ t; \\ s_t, quantidade\ em\ estoque\ ao\ final\ do\ periodo\ t; \\ y_t, variávelbinária \begin{cases} 1, se\ há\ produção\ em\ t \\ 0, se\ não\ há\ produção\ em\ t \end{cases} \end{cases}$$

Sendo assim, a função objetiva do nosso problema fica expressa por:

$$\min_{x_t, s_t, y_t \geq 0} \sum_{t=1}^{T} P_t\,.x_t + \sum_{t=0}^{T} H_t.s_t + \sum_{t=1}^{T} Q_t.y_t$$

Respeitando as exigências do nosso problema temos as seguintes restrições:

1) $\{S_{t-1} + x_t = D_t + s_t, \forall t = 1, \dots, T\}$, nos sugere que a soma do que está sendo produzido em t mais a quantidade em estoque antes do final do período t tem que ser igual a demanda do período mais a quantidade existente em estoque.

2) $\{x_t \leq M.y_t, \forall t = 1, \dots, T\}$, garante que a máquina fique ligada um ciclo inteiro quando há produção.

3) $\{s_0 = S_0\}$, garante que o que for produzido seguirá o planejamento, ou seja, o que for produzido no final do período t tem que ser o mesmo do início do período t+1.

4) $\{s_t = S_t\}$, garante que a quantidade produzida em cada período seja igual a quantidade desejada no final do último período.

5) $\left\{x \in R_{+}^{T}, s \in R_{+}^{T+1}\ e\ y \in \{0,1\}\right\}$

Exemplo: Um exemplo do problema de dimensionamento de lotes pode ser expresso por uma planilha de planejamento. Suponha uma indústria de barras de cereais que precisa cumprir um pedido de compras de 500 unidade em 7 dias, tendo o valor de custo de todos os itens o melhor planejamento terá o maior lucro.

*Figura 11: Planilha Contábil da Situação-Problema proposta*

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Produto: Barra de cereais. | | | | | | | | | | Pedido = | 500 | |
| | | | | | | | | | | Estoque inicial = | 0 | |
| | | | | | | | | | | Estoque final = | | |
| | Produção | | | | | | | | Controladoria | | | |
| Período (dias) | Quantidade produzida por periodo | Qtd em estoque | Custo por número de funcionário | Custo unitário de Produção | Custo unitário do produto parado (estoque) | Total custo prod. Parado | Custo de atraso | Preço unitário do produto acabado | Custo total da Produção | Custo total do estoque | Custo de atraso | Valor de entrada |
| 0 | | 0 | | | | | | | | | | |
| 1 | 50 | 50 | 100 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ 30,00 | FALSO | R$ 6,00 | R$ 62,00 | R$ 30,00 | | |
| 2 | 50 | 100 | 100 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ 30,00 | | R$ 6,00 | R$ 62,00 | R$ 60,00 | | |
| 3 | 50 | 150 | 100 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ 30,00 | FALSO | R$ 6,00 | R$ 62,00 | R$ 90,00 | | |
| 4 | 50 | 200 | 100 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ 30,00 | | R$ 6,00 | R$ 62,00 | R$ 120,00 | | |
| 5 | 100 | 300 | 80 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ 60,00 | | R$ 6,00 | R$ 124,00 | R$ 180,00 | 0 | R$ 3.000,00 |
| 6 | 200 | 500 | 70 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ 120,00 | FALSO | R$ 6,00 | R$ 248,00 | R$ 300,00 | | |
| 7 | 0 | 500 | 0 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ - | | R$ 6,00 | R$ - | R$ 300,00 | | |
| 8 | 0 | | 0 | | | | | | | | | |
| 9 | 0 | | 0 | | | | | | | | | |
| 10 | 0 | | 0 | | | | | | | | | |
| | 500 | | Total | | | | Total | | | | | |
| Qtd de prod. | Número de func. | Custo | R$ 550,00 | Valor entrada | Custo total | Lucro | R$ - | | Custo Produção | Custo Estoque | Total | |
| | | | | R$ 3.000,00 | R$ 2.250,00 | R$ 750,00 | | | R$ 620,00 | R$ 1.080,00 | 0 | |
| 1 a 50 | 4 | R$ 100,00 | | | | | | | | | | |
| 51 a 130 | 6 | R$ 80,00 | | | | | | | | | | |
| 131 a 210 | 8 | R$ 70,00 | | | | | | | | | | |
| 211 a 300 | 12 | R$ 170,00 | | | | | | | | | | |

# Capítulo 3 – “Propostas de Atividades”

Analisando índices medidores da proficiência matemática do país como o IDEB, que tem por base o SARESP, SAEB e a Prova Brasil, que são avaliações submetidas ao país inteiro constatamos a precariedade do ensino.

Buscando entender o motivo de tamanho discrepância nos deparamos com algumas vertentes: A falta de compreensão matemática será simplesmente descaso do aluno? Ou é culpa do professor, por falta de comprometimento ou de conhecimento? Ou a culpa é do sistema que deveria ser mudado?

Perguntas como estas regeram este trabalho. Analisando, em um contexto geral, o ambiente escolar, percebemos que as três perguntas acima contribuem para a qualidade do ensino.

Hoje em dia há um desinteresse muito grande, por parte dos alunos, em frequentar a escola por diversos motivos. Um deles, e também o que motivou este trabalho, é o fato de os alunos não acharem os conteúdos escolares interessantes e isto ocorre por alguns motivos óbvios. O primeiro deles é o fato do sistema escolar vigente não contribuir em nada neste aspecto, outro está intimamente ligado ao avanço tecnológico, as crianças de hoje em dia adquirem respostas com apenas um “clique” e em segundos, vivemos o mundo do imediatismo e se não nos reciclarmos estaremos cada vez mais distantes dos nossos alunos. Um exemplo disto, são as traduções de textos em inglês, os alunos não querem usar o dicionário pois existe um aplicativo que faz esse trabalho com apenas uma foto do texto. Um outro motivo é sim a metodologia usada em sala de aula, precisamos sair do senso comum, da lousa e giz, trabalhar os conteúdos de maneira mais palpável.

Diante desses fatos e seguindo as vertentes propostas pela BNCC, este trabalho traz modelagens de problemas estudados em otimização para serem a motivação à alguns conteúdos ministrados no ensino médio. O propósito dos problemas escolhidos é serem problemas que podem ser encontrados no cotidiano dos alunos como, por exemplo: O itinerário do ônibus escolar, a coleta do lixo de sua casa, uma promoção em uma loja entre outros.

A seguir apresenta-se os planos de aulas de cada aula ministrada, bem como as folhas atividades usadas durante as aulas com o intuito de auxiliar o leitor que deseja utilizar esse material diretamente em suas aulas.

As propostas de atividades a seguir foram criadas para o ensino médio, podendo assim, serem ministradas a alunos de primeiro e segundo ano.

## O Problema do Caixeiro Viajante:

O Problema do Caixeiro Viajante como já mencionado anteriormente consiste em encontrar o menor caminho passando por todos os nós (vértices) somente uma vez e retornando ao nó de origem. A ideia aqui foi, através de uma folha atividade despertar a curiosidade do aluno sobre questões que envolvem a perspectiva do problema, discorrer sobre o problema comentando o contexto histórico e apresentando o modelo matemático lincado ao princípio fundamental da contagem e em seguida apresentar um jogo, feito em um tabuleiro de madeira, com alfinetes de mapa (representando os nós), riscos (representando as arestas (rotas)) e um barbante no nó inicial com o tamanho exato do menor caminho cujo objetivo é encontrar esse menor caminho.

**Plano de aula:**

**Nome do professor:** Roberto Taveira.

**Nome do curso:** O ensino da matemática por meio de problemas de otimização.

**Tema:** Uma versão do jogo de Hamilton.

| | |
|---|---|
| **Objetivo** | Apresentar o conteúdo de otimização: O problema do caixeiro viajante, apresentar o conceito de grafo e grafo regular e do princípio fundamental da contagem, aprimorar o raciocínio lógico. |
| **Conteúdo** | O Problema do Caixeiro Viajante, lógica e princípio fundamental da contagem. |
| **Metodologia** | Folha atividade contextualizada em uma aula iterativa seguida de material lúdico. |
| **Recursos didáticos** | Material impresso (Folha atividade), lousa e giz, material lúdico. |
| **Cronograma** | 1 aulas. |
| **Avaliação** | Será contabilizada a participação dos alunos. |

**Observação:** Ao final da aula os alunos responderam um questionário dando um depoimento sobre a sua opinião em relação ao aula ministrada.

**Folha Atividade:**

## O problema do caixeiro viajante

### 1. O Problema

Um viajante quer visitar certo número de cidades e retornar ao lugar de origem de tal maneira que cada cidade seja visitada exatamente uma vez e que a distância percorrida seja a menor possível.

### 2. Aplicações do Problema do Caixeiro Viajante

Situações como essa do caixeiro viajante são encontradas no transporte público, no disque entregas, no recolhimento do lixo ou mesmo no trabalho feito hoje em dia pelo chamado representante comercial.

### 3. Conceitos Básicos

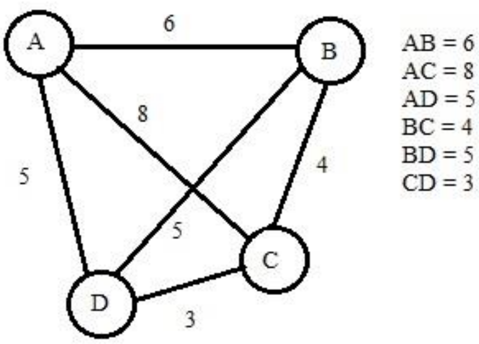
O conceito de grafo é extremamente simples e até mesmo intuitivo. Podemos considerar que um grafo nada mais é do que uma estrutura que representa a interdependência entre elementos de um determinado conjunto.

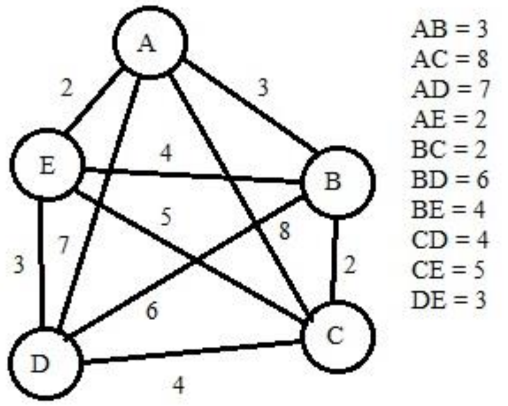
**Definição 1 (Grafo):** Um grafo **G** consiste de um conjunto não vazio de vértices, e um conjunto de pares não ordenados, o conjunto de arestas. Denotamos por **V** o conjunto de vértices, e **A** o conjunto de arestas e o grafo por **G(V, A)** ou simplesmente **G**.

**Definição 2 (Grafo Regular):** Um grafo regular é um grafo onde cada vértice tem o mesmo número de arestas, isto é, tem o mesmo grau.

### 4. Exercício

Em cada um dos grafos abaixo, saia da cidade A, através das arestas, passe por todas as demais cidades apenas uma única vez e em seguida retorne à cidade A. Você é capaz de seguir os passos acima completando o circuito com o menor caminho possível?






Você percebeu, com a resolução do professor, que por um grafo regular é possível através do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) descobrir o número total de rotas que o caixeiro poderia fazer, basta usar a formula $\frac{(n-1)!}{2}$, onde n é o número de cidades existentes no grafo. Note que a dividimos por 2 pelo fato de a distância de A até B ser a mesma de B até A. Sendo assim, uma das possibilidades de descobrirmos o melhor caminho é encontrar todas as possíveis rotas e então escolhermos a melhor, porém há um grande empecilho quando aumentamos o número de cidade. Vimos que com 4 cidades existem 6 rotas possíveis, com 10 cidade o número de rotas passa a ser de: 181.440, o que é inviável de ser feito a mão livre, porém com o auxílio de um computador em 0,36 segundos teríamos a resposta. Aumentando um pouco mais o número de cidades para n = 20, teríamos cerca de $6{,}08 \cdot 10^{16}$ rotas e então até mesmo para um computador seria "impossível" o cálculo de todas as rotas em um período de tempo vigente.

Como você notou acima o computador é uma ferramenta de trabalho usada pelos pesquisadores. Para que essa comunicação fosse possível era necessário que fosse criado uma linguagem de programação. E então, devido a essa necessidade, surgiram os modelos matemáticos apropriados para cada problema. Para esse tipo de problema, o modelo se baseia em encontrar o menor caminho através da função objetiva:

$$\min \sum c_{ij} . x_{ij}$$

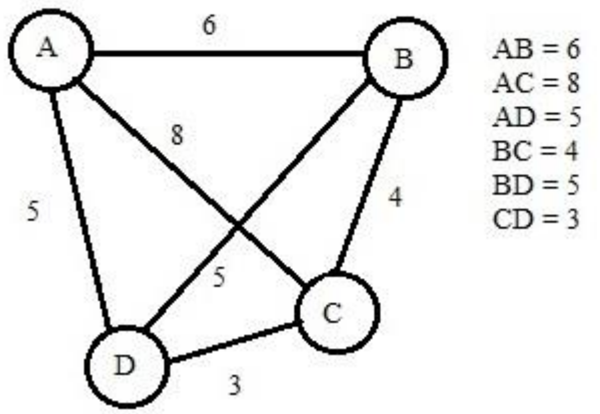
Onde $c_{ij}$ é a distância entre as cidades i e j e $x_{ij}$ é a variável que atribui 1 se sairmos de i e chegarmos em j e 0 caso contrário. E o modelo só funciona se respeitarmos as restrições:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad com\ j = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad com\ i = 1, \dots, n.$$

O que garantirá que apenas uma vez sairemos de i e apenas uma vez chegaremos a j.

Observe o primeiro grafo:




.

Pelo modelo temos que a função objetiva é:

$$\min z = 6.x_{ab} + 6.x_{ba} + 8.x_{ac} + 8.x_{ca} + 5.x_{ad} + 5.x_{da} + 4.x_{bc} + 4.x_{cb} + 5.x_{bd} + 5.x_{db} + 3.x_{cd} + 3.x_{dc}.$$

Com restrições: $\begin{cases} x_{ab} + x_{ac} + x_{ad} = 1 \\ x_{ba} + x_{bc} + x_{bd} = 1 \\ x_{ca} + x_{cb} + x_{cd} = 1 \\ x_{da} + x_{db} + x_{dc} = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_{ba} + x_{ca} + x_{da} = 1 \\ x_{ab} + x_{cb} + x_{db} = 1 \\ x_{ac} + x_{bc} + x_{dc} = 1 \\ x_{ad} + x_{bd} + x_{cd} = 1 \end{cases}$

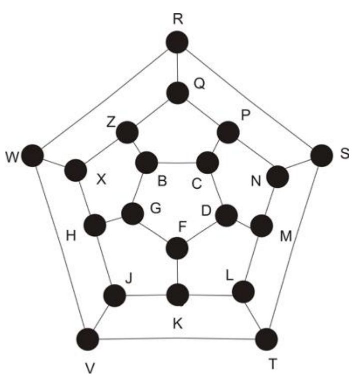
Como já descobrimos que a menor rota passa pelas arestas: $x_{ad}$; $x_{dc}$; $x_{cb}$ e $x_{ba}$ então elas são iguais a 1 (um), o restante é igual a 0 (zero). Portanto,

$$\min z = 6.0 + 6.1 + 8.0 + 8.0 + 5.1 + 5.0 + 4.0 + 4.1 + 5.0 + 5.0 + 3.0 + 3.1 = 18.$$

**5. Uma versão do jogo de Hamilton!**

Em 1859, um matemático irlandês chamado Sir William Rowan Hamilton pôs no mercado um jogo peculiar. Cada um dos vértices de um dodecaedro regular estava marcado com o nome de uma cidade importante da época. O jogo consiste em encontrar um circuito ao longo das arestas do dodecaedro, passando por cada cidade apenas uma vez.

*Figura 12: Grafo do Jogo de Hamilton*



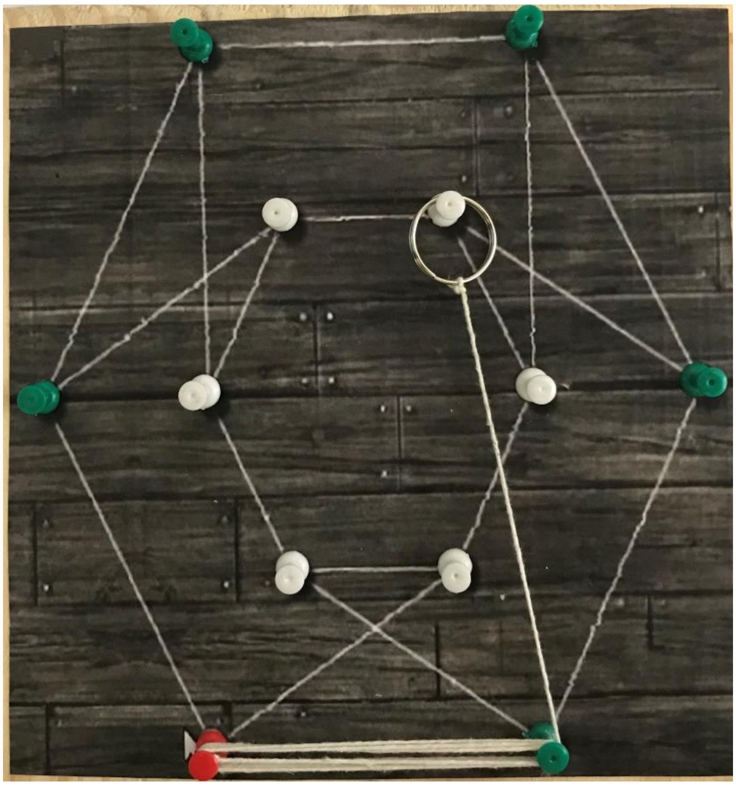

*Fonte: imagens google*

*Figura 13: Jogo de Hamilton*

*Fonte: imagens google*

O tabuleiro entregue pelo professor contém alfinetes de mapas que representam cidades, arestas que ligam os alfinetes que representam as distancias entre as cidades e um barbante preso em um dos alfinetes. O barbante representa o menor caminho e o alfinete preso com o barbante representa a cidade de origem. Seu objetivo é passar o barbante por todos os alfinetes uma única vez, respeitando as arestas, e voltar ao alfinete de origem utilizando todo o comprimento do barbante.

*Figura 14: Tabuleiro de uma Versão do jogo de Hamilton*



*Fonte: De minha própria autoria*

**Boa sorte!**

**6. Questionário:**

1) O que você aprendeu na aula de hoje?
2) Quais conceitos você achou mais interessantes?
3) Qual parte da aula mais te chamou a atenção?
4) Essa aula fugiu aos moldes de aulas que você está acostumado a ver? Sim ou não e porquê?
5) Em sua opinião o que poderia ser colocado ou retirado dessa aula?
6) Dê uma nota de 0 a 10 a esta aula, onde 0 é muito ruim e 10 é excelente!

## O Problema do Carteiro Chinês e Algoritmo de Dijkstra:

O problema do carteiro chinês consiste em encontrar o menor caminho, partindo de um nó e chegando a outro passando uma única vez por todas as arestas disponíveis e o algoritmo de Dijkstra consiste em encontrar o menor caminho entre dois nós.

Algo que está relativamente ligado aos problemas de otimização citados acima e ao cotidiano dos alunos é o GPS (Global Positioning System). Assim, a ideia é apresentar um problema de itinerário com o objetivo de encontrar o menor caminho entre duas cidades. Espera-se que os alunos lembrem-se que hoje existe o GPS para resolver esse problema dando assim o link para entendermos uma das possíveis formas de funcionamento do mesmo.

**Plano de aula:**

**Nome do professor:** Roberto Taveira.

**Nome do curso:** O ensino da matemática por meio de problemas de otimização.

**Tema:** Uma das formas de funcionamento do GPS.

| | |
|---|---|
| **Objetivo** | Apresentar o conteúdo de otimização: O problema do carteiro chinês e algoritmo de Dijkstra, aprender o conceito de grafo e grafo Euleriano e o algoritmo de Djikstra, explorar conceitos ligados a um GPS, aguçar o raciocínio lógico. |
| **Conteúdo** | Lógica. |
| **Metodologia** | Folha atividade contextualizada em uma aula iterativa seguida de material lúdico. |
| **Recursos didáticos** | Material impresso, lousa e giz, material lúdico. |
| **Cronograma** | 1 aulas. |
| **Avaliação** | Será contabilizada a participação dos alunos. |
| **Observação:** | Ao final da aula os alunos responderam um questionário dando um depoimento sobre a sua opinião em relação ao aula ministrada. |

**Folha Atividade:**

## O Problema do Carteiro Chinês e o Algoritmo de Dijkstra

### 1. Problema do Carteiro Chinês

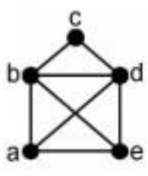
O problema do carteiro chinês se baseia em determinar um caminho fechado de comprimento mínimo que passe de um ponto a outro utilizando todas as passagens possíveis somente uma vez.

### 2. Aplicações do Problema do Carteiro Chinês

Situações como essa do problema do carteiro chinês são encontradas na distribuição de correspondência, no roteamento do ônibus escolar, no patrulhamento policial e etc.

### 3. Exemplo:

Um exemplo clássico do problema do carteiro chinês é a brincadeira de desenhar uma casinha sem tirar o lápis do papel. Você consegue?




### 4. Conceitos básicos

**Definição 1 (Grafo Euleriano):** Grafo conexo (se existe um caminho entre qualquer par de vértice (nó)) onde que contém exatamente zero ou 2 vértices de grau ímpar.

Euler provou que, para que um problema do tipo do problema do carteiro chinês tenha solução seu grafo deve ser um grafo Euleriano e que caso este fato não ocorra basta incorporar uma aresta de valor mínimo aos vértices (nó) de grau ímpar. O que talvez dificultaria a nossa vida, dependendo do número de arestas, seria encontrar a aresta de valor mínimo.

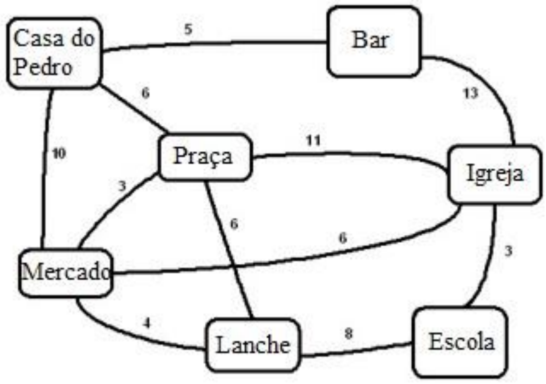
**Definição 2 (Algoritmo de Dijkstra):**

O Algoritmo de Dijkstra encontra o menor caminho entre quaisquer dois vértices (nós) de um grafo (rede), quando todos os arcos têm comprimentos não negativos. Este algoritmo utiliza um procedimento iterativo, isto é, na iteração 1 ele determina o vértice (nó) mais próximo do primeiro vértice (nó), na segunda iteração, o segundo vértice (nó) mais próximo do primeiro vértice (nó) e assim por diante.

### 5. Exercício:

O mapa a seguir mostra todas as rotas possíveis que Pedro pode fazer ao sair de sua casa e ir até a escola que estuda. Ao ver sua mãe fazer diversos caminhos diferentes em diversas oportunidades Pedro ficou curioso para saber qual caminho seria o menor. Decidiu então ligar o GPS para auxilia-lo e então foi surpreendido pela sua mãe que o desafiou a descobrir o menor caminho sem a utilização do GPS. Vamos ajudar o Pedro?

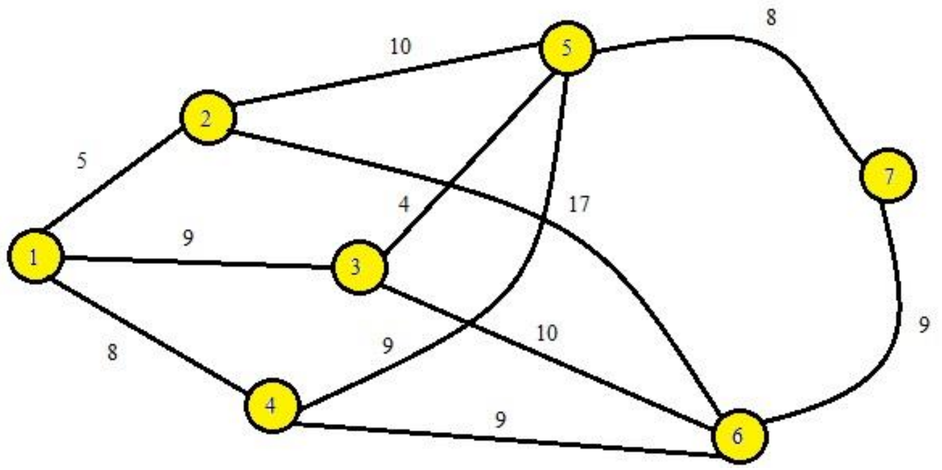
*Figura 15: Caminho de Dijkstra*




*Fonte: imagens google*

Antes de ajudar o Pedro, encontre todos os caminhos possíveis de sair do 1 e chegar ao 7 e determine o menor.

*Figura 16: Grafo de um caminho qualquer.*




Problemas como esse são muito comuns quando pessoas precisam se deslocar de um lugar para outro e existem muitos caminhos que ela pode seguir, porém seu desejo é encontrar o menor dentre eles.

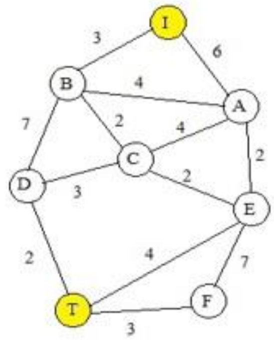
Você pôde perceber que conforme o número de rotas entre um vértice (nó) e outro aumentam surgem novas possibilidade de caminhos para serem verificados o que, ao generalizarmos, torna nosso trabalho insustentável.

Hoje em dia, existem máquinas ou programas que fazem o trabalho bruto para a gente, ou seja, imputamos o lugar de origem e o destino de chegada e o mesmo calcula a rota desejada. O interessante aqui é tentar compreender como esse processo funciona e para isso utilizaremos o Algoritmo de Dijkstra.

**ALGORITMO DE DIJKSTRA**

Para facilitar a compreensão do algoritmo iremos construir uma tabela de iterações x vértices (nós). Observe o exemplo:

*Figura 17: Exemplo tabela de Dijkstra*




**Legenda:**

(qual nó rotulou determinado nó, distância entre eles);

Nó com rótulo definitivo;

- Nós desconsiderados

* Nós que ainda não sabemos a menor distância;

Células na vertical: Iterações

Células na horizontal: Nós

| | I | A | B | C | D | E | F | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (I,0) | * | * | * | * | * | * | * |
| 2 | - | (I,6) | (I,3) | * | * | * | * | * |
| 3 | - | (I,6) | - | (B,5) | (B,10) | * | * | * |
| 4 | - | (I,6) | - | - | (C,8) | (C,7) | * | * |
| 5 | - | - | - | - | (C,8) | (C,7) | * | * |
| 6 | - | - | - | - | (C,8) | - | (E,14) | (E,11) |
| 7 | - | - | - | - | - | - | (E,14) | (D,10) |

**Regras do Algoritmo:**

1. O processo do algoritmo consiste em rotular os nós com valores temporários até que possam ser rotulados definitivamente;
2. A cada iteração alguns nós são rotulados temporariamente e somente um definitivamente;
3. O rótulo definitivo de um nó refere-se a menor distância entre o nó de origem e este;
4. O algoritmo é encerrado ao rotular definitivamente o nó de destino;
5. Se o caminho encontrado é menor do que o que você já tem então o nó deve ser rotulado novamente, caso contrário basta mantê-lo;
6. O nó inicial é um rotulo definitivo;
7. Em caso de empate, dois rótulos com mesma distância, a escolha do nó é arbitrária;
8. As distâncias que ligam os nós já utilizadas em iterações passadas devem ser desconsideradas;
9. Agora escolha um dos exemplos iniciais e resolva pelo algoritmo de Dijkstra.

**Boa sorte!**

**7. Questionário:**

1) O que você aprendeu na aula de hoje?
2) Quais conceitos você achou mais interessantes?
3) Qual parte da aula mais te chamou a atenção?
4) Essa aula fugiu aos moldes de aulas que você está acostumado a ver? Sim ou não e porquê?
5) Em sua opinião o que poderia ser colocado ou retirado dessa aula?
6) Dê uma nota de 0 a 10 a esta aula, onde 0 é muito ruim e 10 é excelente!

## O Problema da Mochila 0-1:

O problema da mochila 0-1 baseia-se em toda situação na qual tem-se que se optar pela escolha de itens com mais utilidades do que outros respeitando determinadas restrições, sendo assim e seguindo o modelo das atividades dos problemas anteriores, constrói-se uma situação que, por sorte, talvez, algum aluno poderá um dia vivencia-la, porém com certeza já a tenha acompanhada pela televisão visto que se trata de uma promoção de lojistas, o que é muito comum nos períodos sazonais.

**Plano de aula:**

**Nome do professor:** Roberto Taveira.

**Nome do curso:** O ensino da matemática por meio de problemas de otimização.

**Tema:** O problema da mochila 0-1: Promoção Super-lojão.

| | |
|---|---|
| **Objetivo** | Apresentar o conteúdo de otimização: O problema da mochila 0-1, exercitar o raciocínio, reforçar o conceito de análise combinatória e combinação. |
| **Conteúdo** | Análise combinatória, combinação e lógica . |
| **Metodologia** | Folha atividade contextualizada em uma aula iterativa seguida de material lúdico. |
| **Recursos didáticos** | Material impresso (folha atividade), lousa e giz e material lúdico. |
| **Cronograma** | 2 aulas. |
| **Avaliação** | Será contabilizada a participação dos alunos. |
| **Observação:** | Ao final da aula os alunos responderam um questionário dando um depoimento sobre a sua opinião em relação ao aula ministrada. |

**Folha Atividade:**

**Problema da Mochila**

1. **Problema da Mochila 0-1**

Problemas da mochila 0-1 envolvem a escolha de itens a serem colocados em uma “mochila” de forma a maximizar uma função de utilidade respeitando o limite suportado pela “mochila”. Ele recebe esse nome 0-1 devido ao fato de só ser possível pegar ou existir apenas uma unidade de cada item.

2. **Aplicações do Problema da Mochila 0-1**

Situações como essa do problema da mochila possuem uma aplicação prática muito vasta, podemos encaixá-lo em diversas situações, como: Investimento de capital, corte e empacotamento de itens, carregamento de veículos, orçamentos e etc.

3. **Conceitos básicos:**

**Definição 1 (Análise combinatória):** A Análise Combinatória, de maneira geral, trata de enumerar ou contar elementos de um conjunto que cumpram certas condições específicas. Os problemas de análise combinatória se dividem em três: de partição, colocação e de seleção. Para solução desses problemas utilizamos algumas ferramentas como o princípio fundamental da contagem, formulas de combinação, arranjo e permutação, além de estratégias como: o diagrama de árvore, enumeração entre outras.

**Definição 2 (combinação):** Os agrupamentos formados com os elementos de um conjunto serão considerados combinações se os elementos dos agrupamentos diferenciarem apenas pela sua natureza, isto é, na combinação a ordem dos elementos a serem agrupados não importa. Para encontrar o número total de agrupamentos formados em uma combinação basta usar a fórmula:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Onde, $x! = x.(x-1)(x-2)\ \dots\ 3.2.1.$

4. **Exercicios:**

**DESAFIO!**

Você é capaz de resolver as situações problemas propostas abaixo?

1) “Maria e Carmen têm quatro botons numerados de 1 a 4. Decidem reparti-los entre as duas (dois botons para cada uma). De quantos modos se podem repartir os objetos? Exemplo: Maria pode ficar com os botons 1 e 2, e Carmem com os 3 e 4.”

2) “Dispomos de três cartas iguais. Desejamos colocá-las em quatro envelopes das cores amarelo, branco, creme e dourado. Se cada envelope só pode conter, no máximo, uma carta, de quantas formas é possível colocar as três cartas nos quatro envelopes? Exemplo: Podemos colocar uma carta no envelope amarelo, outra no branco e outra no creme.”

3) “Se quer eleger um comitê formado por três membros: presidente, tesoureiro e secretário: Para selecioná-lo, dispomos de quatro candidatos: Arturo, Basílio, Carlos e David. Quantos comitês diferentes se podem eleger com os quatro candidatos? Exemplo: Arturo como presidente, Carlos como tesoureiro e David como secretário”

Observe que alguns exercícios podem ser resolvidos de maneiras diferentes, por exemplo, o desafio 2 acima poderia ser resolvido utilizando a fórmula da combinação ou por enumeração, veja:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_{4,3} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 4$$

Ou,

*Figura 18: Método Enumerativo de Solução.*

| ENVELOPE AMARELO | ENVELOPE BRANCO | ENVELOPE CREME | ENVELOPE DOURADO | POSSIBILIDADES |
|---|---|---|---|---|
| carta | carta | carta | vazio | CCCV |
| | | vazio | carta | CCVC |
| | vazio | carta | carta | CVCC |
| vazio | carta | carta | carta | VCCC |

Agora imagine a situação: Um alpinista precisa colocar alguns objetos em sua mochila que suporta determinado peso de acordo com a utilidade de cada objeto. Veja a tabela a seguir:

| Itens | Massa (kg) | Utilidade (0 á 10) |
|---|---|---|
| Corda | 4,0 | 7 |
| Faca | 2,0 | 3 |
| Presilhas | 0,5 | 7 |
| Lanterna | 3,0 | 2 |

Sabendo que a mochila suporta no máximo 8 kg, o que o alpinista deve colocar na mochila para que ele leve o máximo de itens com maior utilidade?

Problemas desse tipo são conhecidos como problema da mochila 0-1. Uma das maneiras de se resolver problemas assim é encontrar todas as possibilidades de agrupamentos e verificar qual maximiza a função utilidade sem ultrapassar o peso permitido, o grande empecilho é quando tivermos um grande número de itens o que tornará inviável encontrar todos os possíveis agrupamentos, para isso temos um modelo matemático:

$$\max \sum_{j=1}^{n} x_j . u_j,$$

Onde $x_j$ é 1 (um) se o objeto for escolhido e 0 (zero) se não for e $u_j$ é o valor de utilidade de cada item, com restrições:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j . p_j \leq b,$$

Onde $p_j$ é o peso de cada item e $b$ o peso suportado pela mochila.

Desta forma chegaremos à conclusão que a solução desejada com maior utilidade seria colocar os itens: Corda, Faca e as Presilhas totalizando 6,5 kg e uma utilidade de 17 unidades.

Agora, siga as instruções dadas pelo professor e através das representações com os sólidos geométricos resolva o exercício a seguir:

Imagine que a escola que você estuda tem uma parceria com uma grande loja de eletrodomésticos e que está fazendo uma promoção de aniversário. A promoção diz o seguinte: Será realizado um sorteio entre os alunos do colégio e o felizardo terá a chance de encher um carrinho de compras com os produtos disponibilizados pela loja, porém o carrinho de compras suporta apenas 70 quilos. A tabela abaixo lista os produtos disponibilizados pela loja e suas especificações. Quais itens o aluno deve colocar em seu carrinho para levar o maior valor possível?

| Produto | Quantidade | Peso (KG) | Valor (R$) |
|---|---|---|---|
| Computador | 1 | 18 | R$ 3.000,00 |
| furadeira | 1 | 12 | R$ 150,00 |
| geladeira | 1 | 49 | R$ 4.000,00 |
| microondas | 1 | 22 | R$ 600,00 |
| Televisão | 1 | 25 | R$ 2.000,00 |

**Boa sorte!**

5. **Questionário:**
   1) O que você aprendeu na aula de hoje?
   2) Quais conceitos você achou mais interessantes?
   3) Qual parte da aula mais te chamou a atenção?
   4) Essa aula fugiu aos moldes de aulas que você está acostumado a ver? Sim ou não e porquê?
   5) Em sua opinião o que poderia ser colocado ou retirado dessa aula?
   6) Dê uma nota de 0 a 10 a esta aula, onde 0 é muito ruim e 10 é excelente!

# O Problema de dimensionamento de Lotes:

O problema de dimensionamento de lotes baseia-se no contexto fabril de uma empresa. Tendo um pedido de compra haverá toda uma programação que determinará a quantidade de lotes a serem produzidos, o período que estes lotes serão produzidos, o custo de cada processo, a quantidade em estoque e etc. A ideia para este problema é criar uma dinâmica onde dividiremos a sala de aula em duas empresas, cada uma receberá um pedido de compra e a empresa vencedora será aquela que atenderá a demanda com o menor custo.

**Plano de aula:**

**Nome do professor:** Roberto Taveira.

**Nome do curso:** O ensino da matemática por meio de problemas de otimização.

**Tema:** A dinâmica empresarial.

| | |
|---|---|
| **Objetivo** | Apresentar o conteúdo de otimização: O problema do dimensionamento de lotes, exercitar o raciocínio, exercitar o trabalho em equipe, apresentar um tipo de processo fabril existente apresentar conceitos da matemática financeira. |
| **Conteúdo** | Operações numéricas e função custo, receita e lucro. |
| **Metodologia** | Folha atividade explicando o processo fabril seguida de uma dinâmica onde existirão duas equipes representando fábricas cujo objetivo é maximizar o lucro de um pedido de compra. |
| **Recursos didáticos** | Material impresso, lousa e giz, projetor. |
| **Cronograma** | 2 aulas. |
| **Avaliação** | Será contabilizada a participação dos alunos. |
| **Observação:** | Ao final da aula os alunos responderam um questionário dando um depoimento sobre a sua opinião em relação ao aula ministrada. |

**Folha Atividade:**

**Problema do dimensionamento de lotes**

1. **O Problema de dimensionamento de lotes**

É todo problema envolvido ou relacionado a produção de alguma coisa, onde o principal objetivo de estudo é, através da modelagem, maximizar os lucros ou minimizar os custos.

## 2. Aplicações do problema de dimensionamento de lotes

Toda empresa cujo ramo esteja ligado a fomento fabril.

## 3. Exercício

O funcionamento de uma empresa se baseia na produção e na venda de um bem. O segredo para uma empresa estar saudável financeiramente está em se produzir com custo mínimo e realizar uma boa venda. Para isso, planejamento, organização, direção e controle são requisitos fundamentais.

A grosso modo um processo de produção constitui-se basicamente na manipulação de uma matéria prima na cadeia de execução das tarefas que serão desenvolvidas por um grupo de operários para produção de um bem. Dependendo do produto a ser produzido, o processo de produção pode se dividir, havendo assim, diversas linhas de produção até que se tenha o bem-acabado.

Tudo começa com um pedido de compra, a partir daí se faz um planejamento imputando todos os possíveis custos (custo de produção, de matéria-prima, de estocagem, de atraso e etc) e conforme sua capacidade de produção tudo é calculado para se obter o máximo de lucro possível.

Imagine, agora, que você é o gerente de uma fábrica que produz barras de cereais. A sua tarefa é minimizar os custos para obtenção do maior lucro operacional possível. O professor lhe entregará uma folha que simulará um pedido de compra que deve ser entregue em uma semana. Nessa folha o custo de produção, custo de estocagem, custo de atraso e o valor do item acabado já serão fornecidos, cabe a você decidir como será a demanda produzida para uma maior lucratividade.

A sala será dividida em duas equipes que serão duas fábricas concorrentes, ao final da atividade a equipe que se planejou melhor vence a dinâmica.

**Boa sorte!**

Produto: Barra de cereais.

Pedido = 1000
Estoque inicial = 0
Estoque final =

| | Produção | | | | | | | | Controladoria | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Período (dias) | Quantidade produzida por periodo | Qtd em estoque | Custo por número de funcionário | Custo unitário de Produção | Custo unitário do produto parado (estoque) | Total custo prod. Parado | Custo de atraso | Preço unitário do produto acabado | Custo total da Produção | Custo total do estoque | Custo de atraso | Valor de entrada |
| 0 | | 0 | | | | | | | | | | |
| 1 | | 0 | 0 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ - | FALSO | R$ 6,00 | R$ - | R$ - | | |
| 2 | | 0 | 0 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ - | | R$ 6,00 | R$ - | R$ - | | |
| 3 | | 0 | 0 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ - | FALSO | R$ 6,00 | R$ - | R$ - | | |
| 4 | | 0 | 0 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ - | | R$ 6,00 | R$ - | R$ - | | |
| 5 | | 0 | 0 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ - | | R$ 6,00 | R$ - | R$ - | 0 | R$ 6.000,00 |
| 6 | | 0 | 0 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ - | FALSO | R$ 6,00 | R$ - | R$ - | | |
| 7 | | 0 | 0 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ - | | R$ 6,00 | R$ - | R$ - | | |
| 8 | | 0 | 0 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ - | | R$ 6,00 | R$ - | R$ - | | |
| 9 | | 0 | 0 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ - | | R$ 6,00 | R$ - | R$ - | | |
| 10 | | 0 | 0 | R$ 1,24 | R$ 0,60 | R$ - | | R$ 6,00 | R$ - | R$ - | | |
| | 0 | | Total | | | | Total | | | | | |
| | | | R$ - | Valor entrada | Custo total | Lucro | R$ - | | Custo Produção | Custo Estoque | Total | |
| | | | | R$ 6.000,00 | R$ - | R$ 6.000,00 | | | R$ - | R$ - | 0 | |

| Qtd de prod. | Número de func. | Custo |
|---|---|---|
| 1 a 50 | 4 | R$ 100,00 |
| 51 a 130 | 6 | R$ 80,00 |
| 131 a 210 | 8 | R$ 70,00 |
| 211 a 300 | 12 | R$ 170,00 |

4. **Questionário**
   1) O que você aprendeu na aula de hoje?
   2) Quais conceitos você achou mais interessantes?
   3) Qual parte da aula mais te chamou a atenção?
   4) Essa aula fugiu aos moldes de aulas que você está acostumado a ver? Sim ou não e porquê?
   5) Em sua opinião o que poderia ser colocado ou retirado dessa aula?
   6) Dê uma nota de 0 a 10 a esta aula, onde 0 é muito ruim e 10 é excelente!

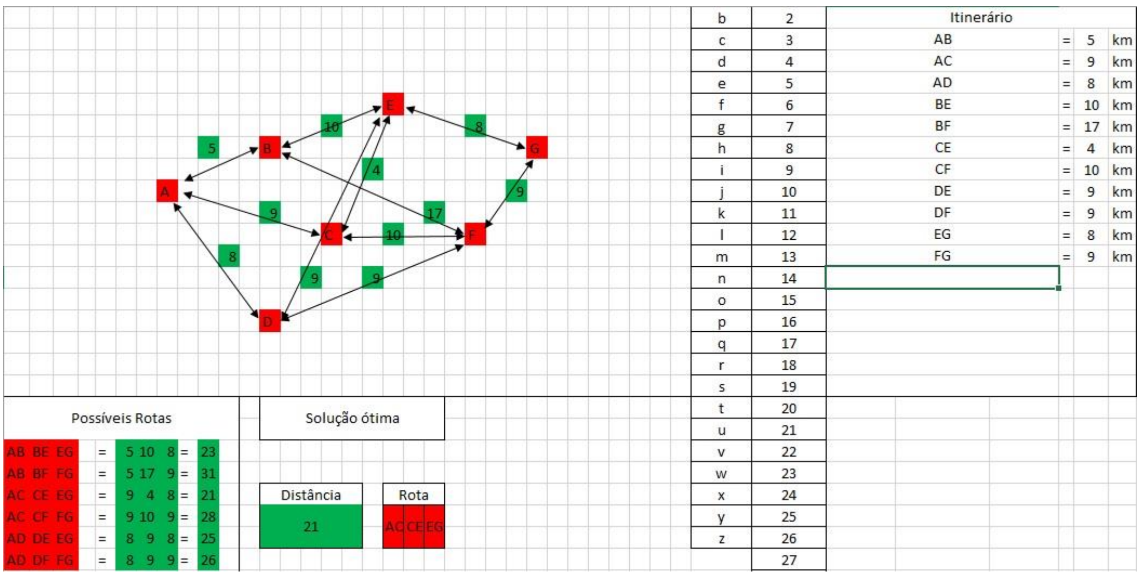
## Algoritmos e Softwares de solução:

Para melhor compreensão dos resultados esperados e da funcionalidade das propostas de atividades foram criados planílhas que determinam a solução ótima de acordo com a necessidade de cada problema proposto.

**Problema do Carteiro Chinês e Algoritmo de Dijkstra:**

Esta planilha conta com um campo para que o aluno construa um grafo que represente a situação problema, um campo que mostra todas as rotas possíveis com seus respectivos valores atribuídos e uma função menor que determinará a menor rota automaticamente.

*Figura 19: Planilha de Solução Problema do Carteiro Chinês e Algoritmo de Dijkstra*



**Problema da Mochila 0-1:**

Nesta planilha o aluno possui um campo em que deve imputar os dados do problema e todas as combinações possíveis (após calculadas através do conceito de combinação ensinado em sala de aula), em seguida a planilha automaticamente pintará de verde as células que não desrespeitam as restrições e de vermelho as que desrespeitam e então, através de uma função maior encontrará a solução ótima.

*Figura 20: Planilha de solução Problema da Mochila 0-1*

Modelagem

| Atribuição | Produto | Quantidade | Peso (KG) | Valor (R$) | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | Computador | 1 | 18 | R$ 3.000,00 | A |
| B | furadeira | 1 | 12 | R$ 150,00 | B |
| C | geladeira | 1 | 49 | R$ 4.000,00 | C |
| D | microondas | 1 | 22 | R$ 600,00 | D |
| E | Televisão | 1 | 25 | R$ 2.000,00 | E |
| | Total | 5 | 126 | R$ 9.750,00 | |

Total de combinações possíveis

| 1 produto | 2 produtos | 3 produtos | 4 produtos | 5 produtos | N de combinações |
|---|---|---|---|---|---|
| A | AB | ABC | ABCD | ABCDE | |
| B | AC | ABD | ABCE | | |
| C | AD | ABE | BCDE | | |
| D | AE | BCD | CDEA | | |
| E | BC | BCE | DEAB | | |
| | BD | CDE | | | 31 |
| | BE | CDA | | | |
| | CD | DEA | | | |
| | CE | DEB | | | |
| | DE | EAC | | | |
| 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |

Combinações com pesos e valores

| Comb. de 1 prod. | Peso (kg) | Valores (R$) |
|---|---|---|
| A | 18 | R$ 3.000,00 |
| B | 12 | R$ 150,00 |
| C | 49 | R$ 4.000,00 |
| D | 22 | R$ 600,00 |
| E | 25 | R$ 2.000,00 |

| Comb. de 2 prod. | Peso (kg) | Valores (R$) |
|---|---|---|
| AB | 30 | R$ 3.150,00 |
| AC | 67 | R$ 7.000,00 |
| AD | 40 | R$ 3.600,00 |
| AE | 43 | R$ 5.000,00 |
| BC | 61 | R$ 4.150,00 |
| BD | 34 | R$ 750,00 |
| BE | 37 | R$ 2.150,00 |
| CD | 71 | R$ 4.600,00 |
| CE | 74 | R$ 6.000,00 |
| DE | 47 | R$ 2.600,00 |

| Comb. de 3 prod. | Peso (kg) | Valores (R$) |
|---|---|---|
| ABC | 79 | R$ 7.150,00 |

| Combinações de 4 produtos | Peso (kg) | Valores (R$) |
|---|---|---|
| ABCD | 101 | R$ 7.750,00 |
| ABCE | 104 | R$ 9.150,00 |
| BCDE | 108 | R$ 6.750,00 |
| CDEA | 114 | R$ 9.600,00 |
| DEAB | 77 | R$ 5.750,00 |

| Comb. de 5 prod. | Peso (kg) | Valores (R$) |
|---|---|---|
| ABCDE | 126 | R$ 9.750,00 |

| Legenda | |
|---|---|
| Comb. cujo peso é < ou = a: | 70 |
| aparecem em verde | |
| Comb. cujo peso é > a: | 70 |
| aparecem em vermelho | |

| Solução Ótima | R$ 7.000,00 |
|---|---|
| Produtos | AC |

**Problema do Dimensionamento de Lotes:**

Esta planilha simula um relatório contábil que fornece alguns custos e cálculos de acordo com os moldes do problema. Nela o aluno deve imputar a demanda diária de produção que ela automaticamente calculará o lucro que a empresa terá. O legal desta planilha é que o professor pode colocar o “gargalo” de produção no setor que ele quiser e então cabe ao aluno analisá-la e então escolher a melhor maneira de produzir a demanda diária.

*Figura 21: Planilha de Solução do Problema de Dimensionamento de Lotes*

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Produto: Barra de cereais. | | | | | | | | | | Pedido = | 1000 | |
| | | | | | | | | | | Estoque inicial = | 0 | |
| | | | | | | | | | | Estoque final = | | |
| | Produção | | | | | | | | Controladoria | | | |
| Período (dias) | Quantidade produzida por periodo | Qtd em estoque | Custo tempo de produção | Custo unitário de Produção | Custo unitário do produto parado (estoque) | Total custo prod. Parado | Custo de atraso | Preço unitário do produto acabado | Custo total da Produção | Custo total do estoque | Custo de atraso | Valor de entrada |
| 0 | | 0 | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | R$ 2,24 | R$ 1,45 | R$ - | FALSO | R$ 10,00 | R$ - | R$ - | 0 | R$ 10.000,00 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | R$ 2,24 | R$ 1,45 | R$ - | | R$ 10,00 | R$ - | R$ - | | |
| 3 | 0 | 0 | 0 | R$ 2,24 | R$ 1,45 | R$ - | FALSO | R$ 10,00 | R$ - | R$ - | | |
| 4 | 0 | 0 | 0 | R$ 2,24 | R$ 1,45 | R$ - | | R$ 10,00 | R$ - | R$ - | | |
| 5 | 0 | 0 | 0 | R$ 2,24 | R$ 1,45 | R$ - | FALSO | R$ 10,00 | R$ - | R$ - | | |
| 6 | 0 | 0 | 0 | R$ 2,24 | R$ 1,45 | R$ - | | R$ 10,00 | R$ - | R$ - | | |
| 7 | 0 | 0 | 0 | R$ 2,24 | R$ 1,45 | R$ - | | R$ 10,00 | R$ - | R$ - | | |
| 8 | 0 | | 0 | | | | | | | | | |
| 9 | 0 | | 0 | | | | | | | | | |
| 10 | 0 | | 0 | | | | | | | | | |
| | | | Total | | | | Total | | | | | |
| Qtd de prod. | Tempo de prod. | Custo | R$ - | Valor entrada | Custo total | Lucro | R$ - | | Custo Produção | Custo Estoque | Total | |
| | | | | R$ 10.000,00 | R$ - | R$ 10.000,00 | | | R$ - | R$ - | 0 | |
| 1 a 50 | 4 horas | R$ 200,00 | | | | | | | | | | |
| 51 a 130 | 6 horas | R$ 180,00 | | | | | | | | | | |
| 131 a 210 | 8 horas | R$ 170,00 | | | | | | | | | | |
| 211 a 300 | 12 horas | R$ 370,00 | | | | | | | | | | |

# Capítulo 4 – Resultados e Conclusão:

As aulas foram ministradas em uma turma de 20 alunos com foco em treinamentos para olimpíadas que continha alunos de nono ano, primeiro e segundo colegial de uma escola particular chamada Colégio Caetano Caprício, seguiram um padrão guiado pelas folhas atividades. Ambas começavam com uma explicação ou esclarecimento do problema que seria abordado em determinada aula. Em seguida, fazia um link das aplicações de cada problema com as situações cotidianas e rotineiras nos quais se inseriam, seguidas de exemplos, das definições necessárias para a abordagem do conteúdo extracurricular e de um exercício. Esse exercício tinha o propósito de trazer algum conteúdo do ensino básico vinculado aos problemas clássicos de otimização, quando possível.

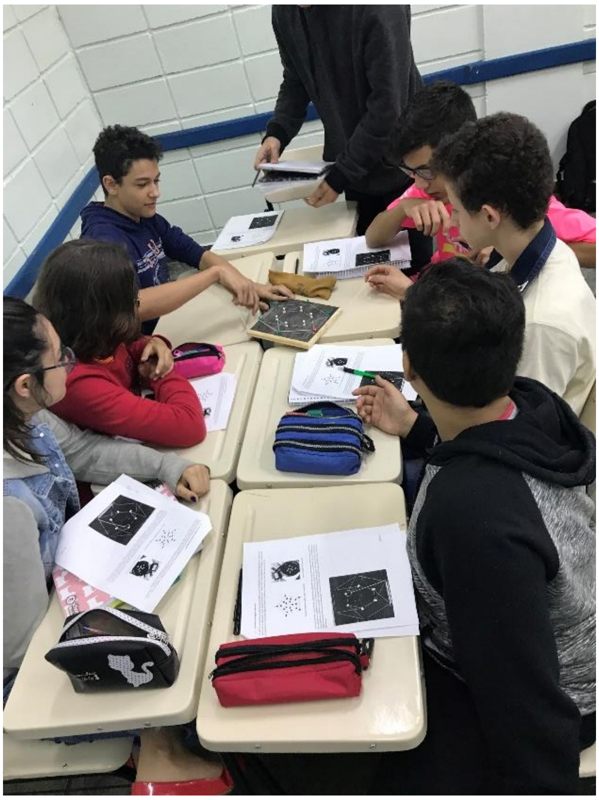
A primeira aula trouxe o problema do caixeiro viajante. Um pouco do contexto histórico e a problematização do mesmo foi explicada, em seguida, foi comentado algumas de suas aplicações e inserido duas definições fundamentais para a aula, as de: Grafo e Grafo regular. A partir daí, já estavam aptos a fazer o primeiro exercício. Esse exercício trazia um grafo regular de 4 vértices e 6 arestas e seguindo a problematização da aula, o dever de cada aluno era sair do vértice A, passar por todos os outros vértices apenas uma vez e retornar ao vértice A fazendo o menor caminho possível.

A grande maioria dos alunos conseguiu resolver o exercício pelo método de tentativa e erro (visto que se tratava de um grafo com poucos vértices o que resulta em poucas rotas), tentaram encontrar o menor caminho dentre todos os caminhos encontrados. Nesse momento, os indaguei querendo saber como tinham certeza de que encontraram todos os caminhos possíveis e então foi inserido o conceito do princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem. O segundo exercício fornecia um outro grafo regular, 5 vértices e 10 arestas, onde os alunos deveriam apenas encontrar o número que contabilizava todos os caminhos possíveis usando o princípio fundamental da contagem que haviam acabado de aprender. A tarefa foi desenvolvida com sucesso pelos alunos que perceberam que quanto maior o número de vértices do grafo regular, maior o número de rotas existentes e que já com um grafo com 6 vértices, nosso trabalho de encontrar todas as rotas a mão livre já se tornaria inviável. Nesse momento foi explicado o surgimento de um modelo matemático desenvolvido para que os computadores pudessem nós auxiliar, entendendo a situação proposta para buscar a melhor solução, já que encontrar o número total de rotas a mão livre se tornará inviável. O modelo matemático foi apenas apresentado aos alunos e brevemente comentado.

Para finalizar a aula, a sala foi dividida em duas equipes que receberam, cada uma, uma versão do jogo de Hamilton desenvolvida pelo professor. O jogo se baseia em um tabuleiro definido por um grafo regular onde os vértices são alfinetes de mapa e o menor caminho passando por todos os alfinetes e retornando ao alfinete de origem estava representado por um barbante. O objetivo era encontrar a menor rota. Um dos tabuleiros, com menos vértices, foi resolvido mais facilmente e então, após 10 minutos, os tabuleiros foram trocados de equipes e ao final da aula foi falada a resolução dos tabuleiros.

*Figura 22: Aula do Problema do Caixeiro Viajante – Folha de Atividade*

*Figura 23: Aula do Problema do Caixeiro Viajante - Tabuleiro*

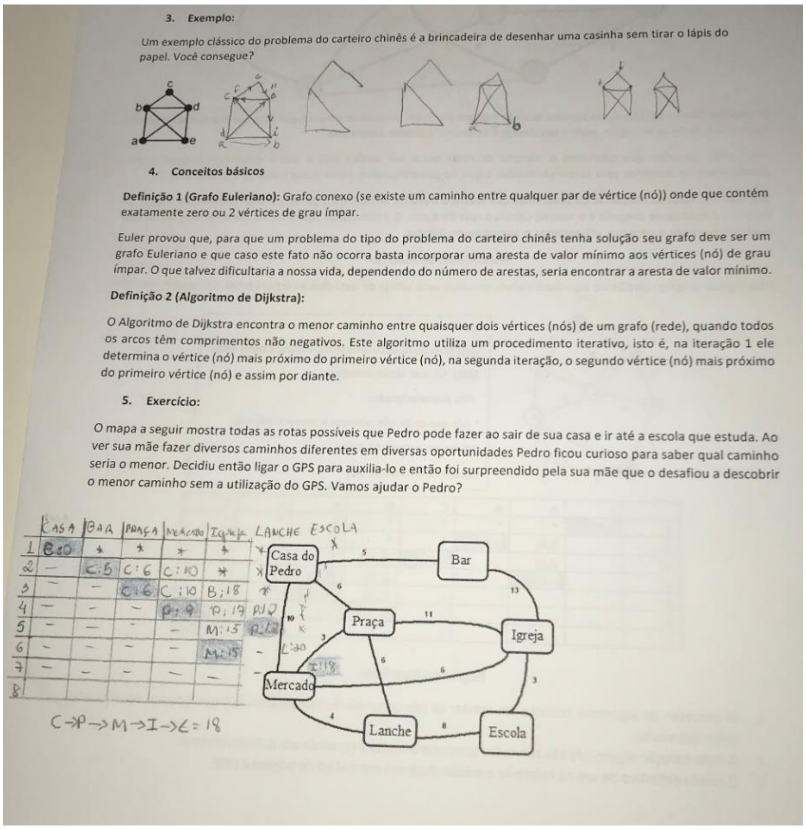


A segunda aula foi sobre o problema do carteiro chinês e o algoritmo de Dijkstra, novamente um pouco do contexto histórico (pontes de Konigsberg) motivou a definição da problematização, em seguida, cita-se algumas de suas aplicações e então apresenta-se o exemplo clássico do problema do carteiro chinês: Desenhar uma casinha sem retirar o lápis do papel. Nesse exemplo, foi dado 5 minutos para que os alunos tentassem reproduzir o desenho. Alguns conseguiram e outros não, nesse momento revelo que os alunos, que conseguiram reproduzir o desenho, só conseguiram pelo fato de terem começado por um dos vértices da base da casinha e assim insiro a definição de grafo Euleriano, informando que, para que todo problema do carteiro chinês tenha solução, seu grafo tem que ser um grafo Euleriano, mesmo que para isso tenha-se que imputar arestas de menores valores aos vértices de grau ímpar até que se tenha apenas dois ou zero vértices de grau ímpar.

Aqui surge um questionamento: Como encontrar a aresta de menor valor entre dois vértices? E então apresenta-se a segunda definição da aula, o algoritmo de Dijkstra. Logo em seguida aparece uma situação problema na qual um menino deseja se deslocar de sua casa até a escola fazendo o itinerário da melhor maneira possível. Após alguns minutos, alguns alunos conseguiram encontrar soluções, certas e erradas, novamente resolveram pelo método de tentativa e erro. Antes de fornecer a solução correta, fiz um exemplo simples com outras rotas e outros itinerários resolvendo pelo algoritmo de Dijkstra e também pelo método de tentativa e erro comparando e constatando as respostas.

Em seguida pedi para que os alunos fizessem o mesmo que eu com o exercício do menino que gostaria de ir de sua casa até a escola pelo menor caminho possível. Como já possuíam a solução encontrada pelo método de tentativa e erro, bastava encontrar a mesma solução através do algoritmo de Dijkstra. Alguns alunos concluíram o exercício fazendo um link ao funcionamento de um GPS, os demais sentiram determinadas dificuldades em alguns passos do método, mas logo as resolveram.

*Figura 24: Aula do Problema do Carteiro Chinês e Algoritmo de Djikstra- Folha de Atividade*



**3. Exemplo:**

Um exemplo clássico do problema do carteiro chinês é a brincadeira de desenhar uma casinha sem tirar o lápis do papel. Você consegue?

**4. Conceitos básicos**

**Definição 1 (Grafo Euleriano):** Grafo conexo (se existe um caminho entre qualquer par de vértice (nó)) onde que contém exatamente zero ou 2 vértices de grau ímpar.

Euler provou que, para que um problema do tipo do problema do carteiro chinês tenha solução seu grafo deve ser um grafo Euleriano e que caso este fato não ocorra basta incorporar uma aresta de valor mínimo aos vértices (nó) de grau ímpar. O que talvez dificultaria a nossa vida, dependendo do número de arestas, seria encontrar a aresta de valor mínimo.

**Definição 2 (Algoritmo de Dijkstra):**

O Algoritmo de Dijkstra encontra o menor caminho entre quaisquer dois vértices (nós) de um grafo (rede), quando todos os arcos têm comprimentos não negativos. Este algoritmo utiliza um procedimento iterativo, isto é, na iteração 1 ele determina o vértice (nó) mais próximo do primeiro vértice (nó), na segunda iteração, o segundo vértice (nó) mais próximo do primeiro vértice (nó) e assim por diante.

**5. Exercício:**

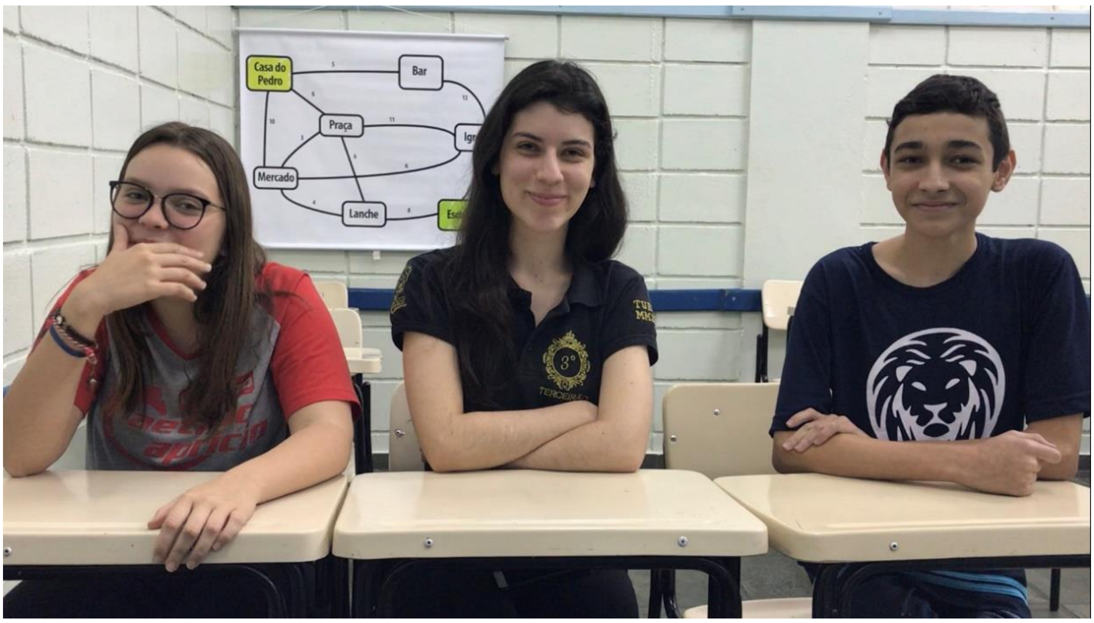
O mapa a seguir mostra todas as rotas possíveis que Pedro pode fazer ao sair de sua casa e ir até a escola que estuda. Ao ver sua mãe fazer diversos caminhos diferentes em diversas oportunidades Pedro ficou curioso para saber qual caminho seria o menor. Decidiu então ligar o GPS para auxilia-lo e então foi surpreendido pela sua mãe que o desafiou a descobrir o menor caminho sem a utilização do GPS. Vamos ajudar o Pedro?

| | CASA | BAR | PRAÇA | MERCADO | IGREJA | LANCHE | ESCOLA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | C:0 | * | * | * | * | * | X |
| 2 | — | C:5 | C:6 | C:10 | * | X | |
| 3 | — | — | C:6 | C:10 | B:18 | * | |
| 4 | — | — | — | P:9 | P:17 | P:12 | |
| 5 | — | — | — | — | M:15 | P:12 | |
| 6 | — | — | — | — | M:15 | — | |
| 7 | — | — | — | — | — | — | |
| 8 | | | | | | | |

C→P→M→I→E = 18



*Figura 25: Aula do Problema do Carteiro Chinês e Algoritmo de Djikstra*



A terceira aula foi sobre o problema da mochila 0-1. Nesta aula explica-se o contexto do problema formalizando que o 0-1 indica a versão mais simples do problema onde existem apenas uma unidade de cada item. Em seguida, fala-se sobre a versatilidade do problema e de como pode ser modelado em diversas situações cotidianas, define-se análise combinatória e combinação formalizando o que seria um número fatorial ($x! = x(x-1)(x-2)\ldots 3.2.1$) e lança-se um desafio: Três problemas de combinação, um de cada tipo (partição, colocação e seleção), para serem resolvidos.

Após 20 minutos alguns alunos concluíram o desafio encontrando algumas soluções corretas e outras erradas. O método utilizado pelos alunos foi por diagrama ou enumeração, mas alguns alunos se atentaram as condições propostas pelos exercícios e a definição de combinação apresentada e simplesmente utilizaram a fórmula e uma minoria apresentou os dois métodos.

Posteriormente apresenta-se o exemplo clássico do problema da mochila 0-1: O problema do alpinista. Em poucos minutos os alunos observaram as condições e restrições do problema e apresentaram diversas soluções utilizando novamente o método de tentativa e erro. Nesse momento mostrou-se o quão difícil seria encontrar uma solução dependendo o número de itens que se tem em cada situação e brevemente apresenta-se o modelo matemático utilizado pelos computadores para se resolver problemas desse tipo.

Então resolve-se o problema do alpinista, utilizando a combinação como ferramenta para se encontrar todas as combinações possíveis de 1, 2, 3, ... , n itens e verifica-se qual delas possuem maior utilidade sem ultrapassar o limite de peso proposto pelo exercício.

Para finalizar, dividiu-se em grupos a sala de aula e foram distribuídos sólidos geométricos que representavam produtos de uma loja (cada um com seu valor e seu peso) e então propôs-se uma situação onde um dos alunos da escola teria sido sorteado para participar de uma promoção de loja, na qual poderia pegar o utensílio que quisesse desde que disponibilizado pela loja e que não ultrapasse o peso suportado pelo carrinho. Foram instruídos para que encontrassem todas as combinações possíveis e então verificassem o maior valor adquirido sem ultrapassar a restrição do carrinho.

Os alunos, simulando o trabalho feito por um computador, desempenharam com êxito a tarefa.

*Figura 26: Aula do Problema da Mochila 0-1*

A quarta aula foi sobre o problema do dimensionamento de lotes. Segundo o mesmo roteiro das outras aulas apresenta-se a definição ou explicação do problema, mostra-se algumas aplicações e conclui-se com um exercício.

Após a explicação do funcionamento de uma empresa e de seu processo fabril a sala foi dividida em dois grupos dos quais cada um representaria uma empresa produtora de barras de cereais que deveria fazer a entrega do pedido de compra em uma semana. Na segunda página da folha atividade distribuída para cada aluno continha um pedido de compra igual para todos e uma cópia da planilha de planejamento de produção da uma empresa. Como foi explicado em sala de aula, cada aluno tinha noção de como uma empresa sobrevivia e se mantinha saudável no mercado.

A dinâmica, então, consistia em observar a planilha de planejamento, traçar estratégias para minimizar os custos, já que o valor de venda e o pedido de compra eram iguais para todos e então ordenar da melhor forma possível as demandas diárias.

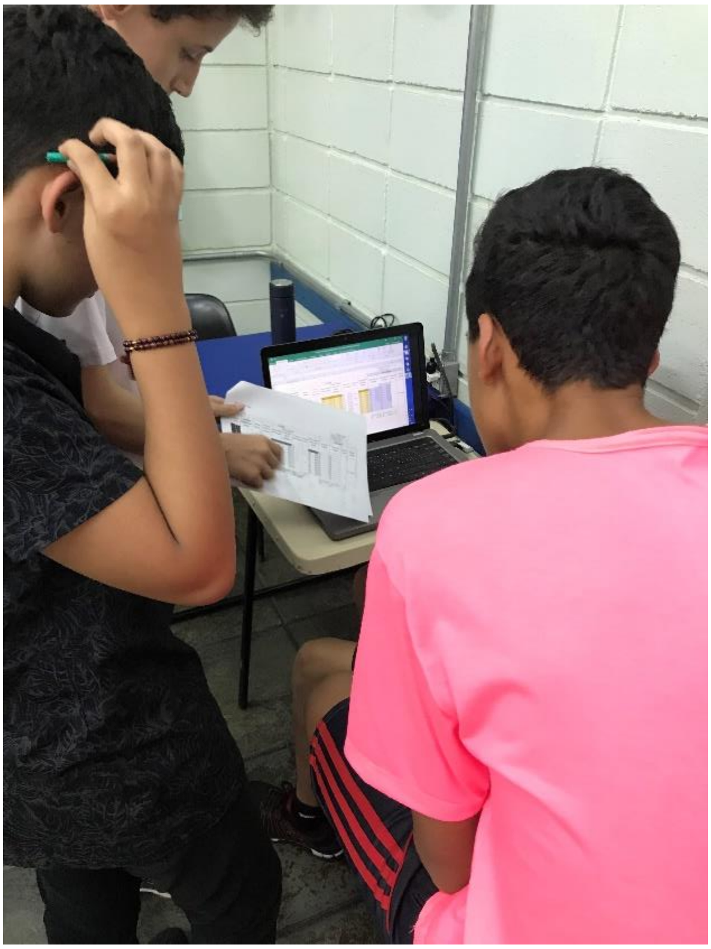
Cada empresa tinha um computador com uma planilha de planejamento, porém só poderiam utiliza-la depois de 20 minutos analisando o planejamento de produção e traçando suas estratégias.

O ponto positivo dessa atividade é que o professor pode colocar o gargalo da produção no setor que quiser, podendo utiliza-la diversas vezes com a mesma turma de alunos.

Após 50 minutos de atividade, uma das empresas descobriu o setor onde estava o gargalo da linha de produção, encontrou a melhor maneira de produzir o pedido de compra minimizando o custo do setor e obteve maior lucro que a outra empresa.

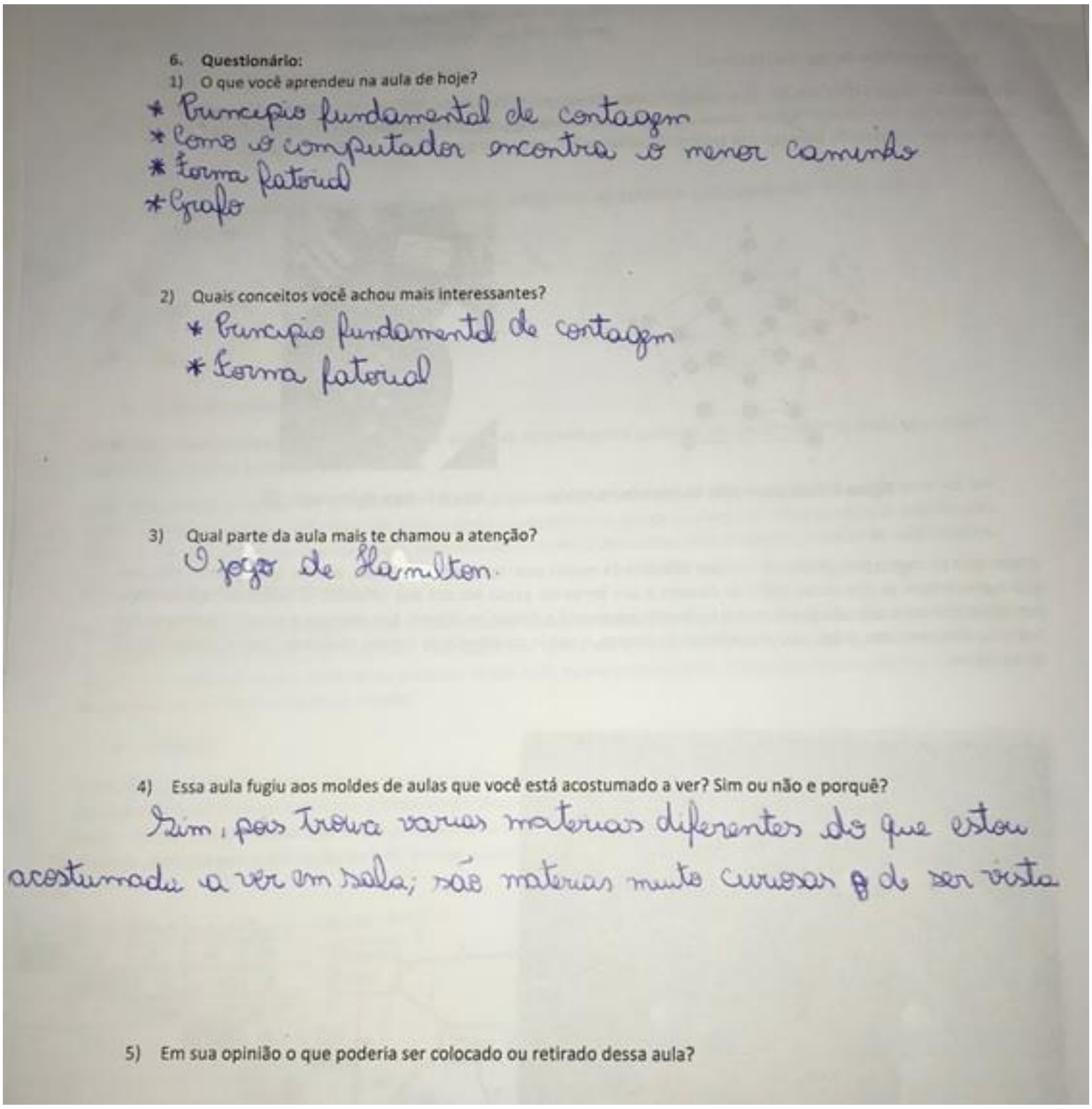
*Figura 27: Aula do Problema de Dimensionamento de Lotes*

*Figura 28: Aula do Problema de Dimensionamento de Lotes – Folha de atividade*



Ao termino de cada aula os alunos respondiam a um questionário que continha perguntas do tipo: O que você aprendeu na aula de hoje? Quais conceitos você achou mais interessante? Qual parte da aula te chamou mais a atenção? Cada aluno respondia o que quisesse, a qual questão quisesse e sempre de forma individual. O que mais chamou atenção foi o fato dê, unanimemente, a parte da aula que mais chamou a atenção deles foi a parte lúdica de cada aula, o que eles acharam mais interessante foram os conteúdos novos ou extracurriculares ligados a situações rotineiras como o possível algoritmo de um GPS ou a planilha de planejamento de uma empresa.

*Figura 29: Questionário sobre a aula do Problema do Caixeiro Viajante*



**6. Questionário:**

1) O que você aprendeu na aula de hoje?

* Princípio fundamental de contagem
* Como o computador encontra o menor caminho
* Forma fatorial
* Grafo

2) Quais conceitos você achou mais interessantes?

* Princípio fundamental de contagem
* Forma fatorial

3) Qual parte da aula mais te chamou a atenção?

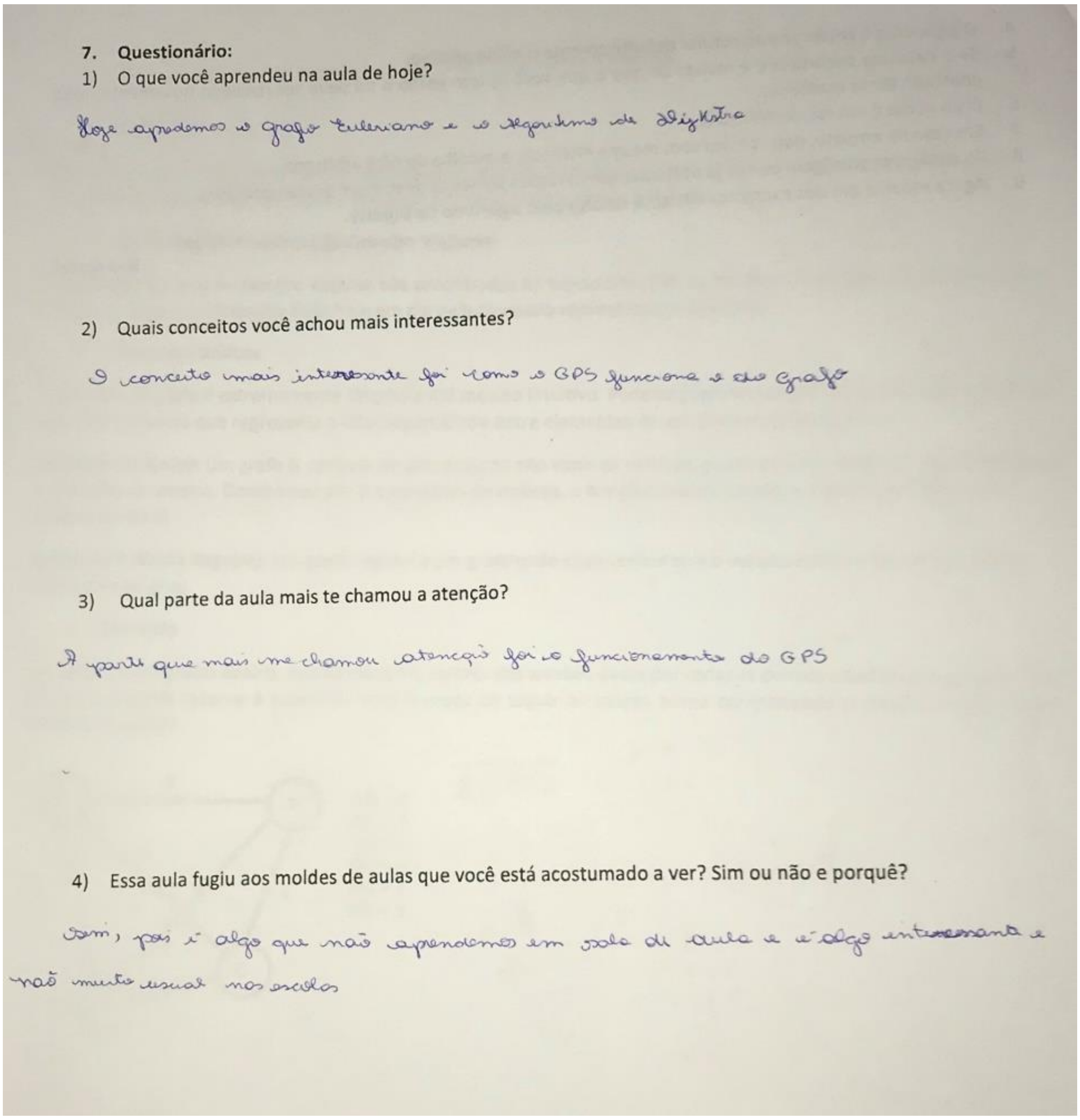
O jogo de Hamilton.

4) Essa aula fugiu aos moldes de aulas que você está acostumado a ver? Sim ou não e porquê?

Sim, pois Trouxe varias materias diferentes do que estou acostumado a ver em sala; são materias muito curiosas de ser vista

5) Em sua opinião o que poderia ser colocado ou retirado dessa aula?

*Figura 30: Questionário sobre a aula do Problema do carteiro Chinês e Algoritmo de Djikstra*



**7. Questionário:**

1) O que você aprendeu na aula de hoje?

Hoje aprendemos o grafo Euleriano e o Algoritmo de Dijkstra

2) Quais conceitos você achou mais interessantes?

O conceito mais interessante foi como o GPS funciona e de grafo

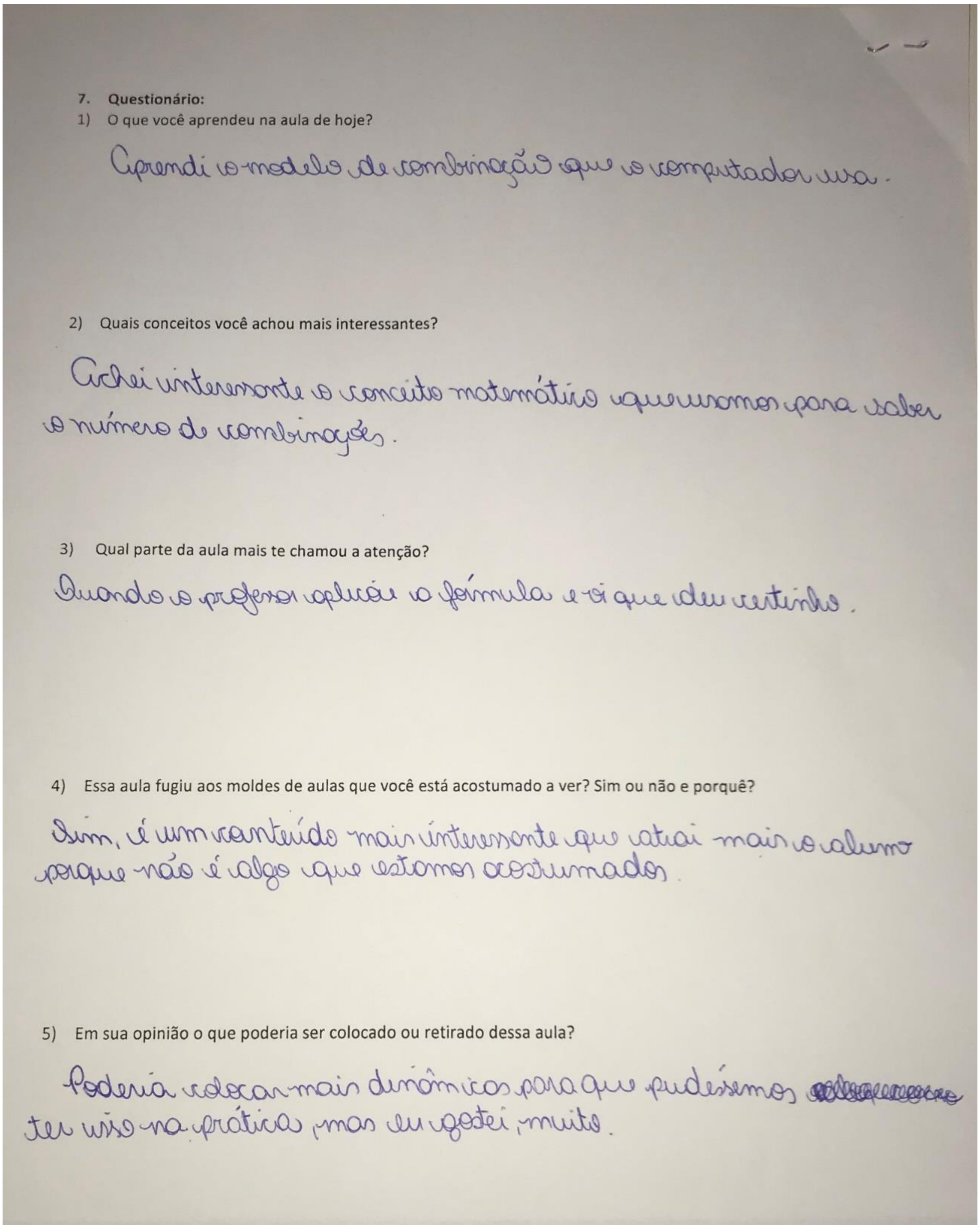
3) Qual parte da aula mais te chamou a atenção?

A parte que mais me chamou atenção foi o funcionamento do GPS

4) Essa aula fugiu aos moldes de aulas que você está acostumado a ver? Sim ou não e porquê?

Sim, pois é algo que não aprendemos em sala de aula e é algo interessante e não muito usual nas escolas

*Figura 31: Questionário sobre a aula do Problema da Mochila 0-1*



7. **Questionário:**

1) O que você aprendeu na aula de hoje?

Aprendi o modelo de combinação que o computador usa.

2) Quais conceitos você achou mais interessantes?

Achei interessante o conceito matemático que usamos para saber o número de combinações.

3) Qual parte da aula mais te chamou a atenção?

Quando o professor aplicou a fórmula e vi que deu certinho.

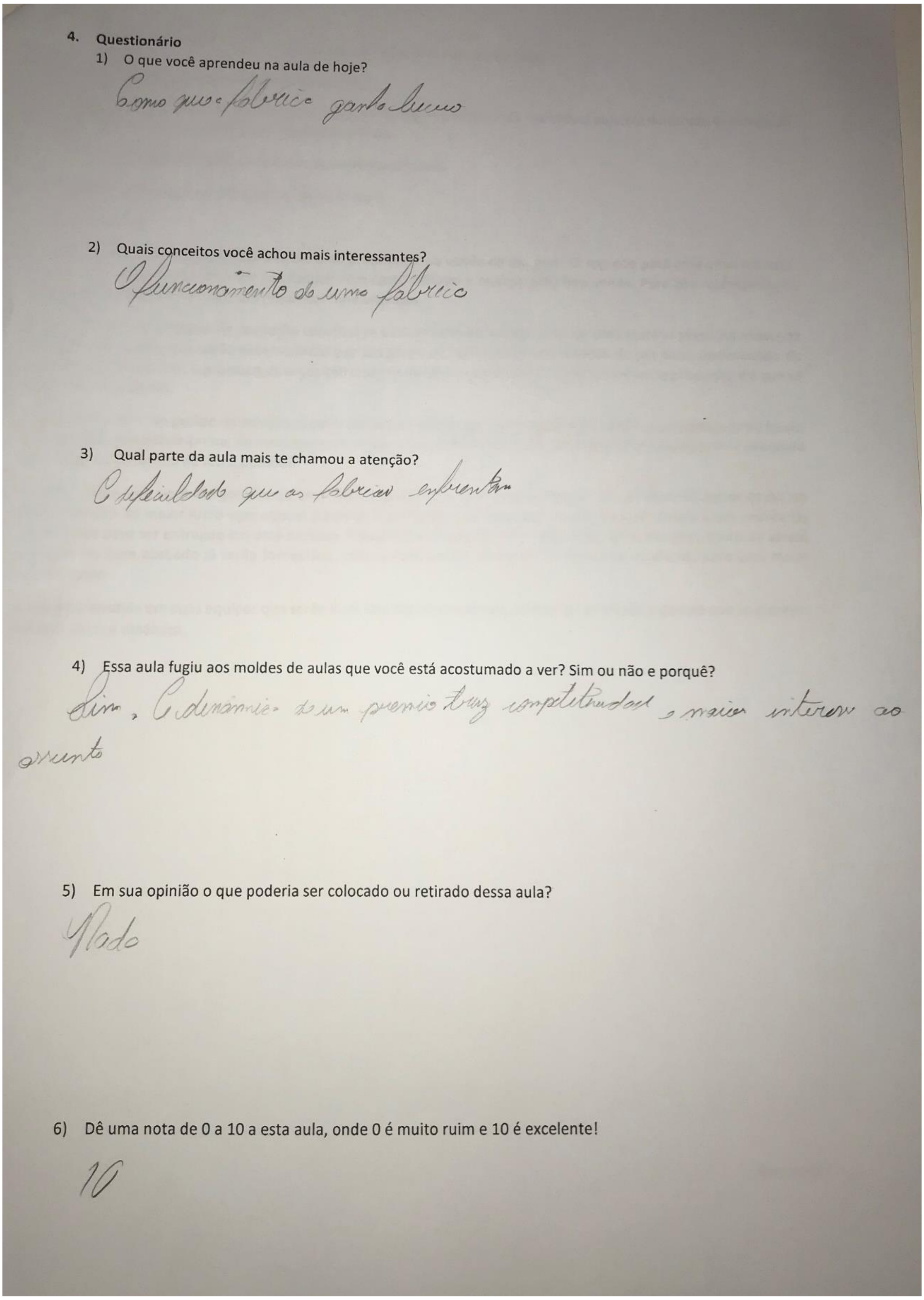
4) Essa aula fugiu aos moldes de aulas que você está acostumado a ver? Sim ou não e porquê?

Sim, é um conteúdo mais interessante que atrai mais o aluno porque não é algo que estamos acostumados.

5) Em sua opinião o que poderia ser colocado ou retirado dessa aula?

Poderia colocar mais dinâmicos para que pudéssemos ter uso na prática, mas eu gostei muito.

*Figura 32: Questionário sobre a aula do Problema de Dimensionamento de Lotes*



4. **Questionário**

1) O que você aprendeu na aula de hoje?

Como que a fabrica ganha lucro

2) Quais conceitos você achou mais interessantes?

O funcionamento de uma fabrica

3) Qual parte da aula mais te chamou a atenção?

A dificuldade que as fabricas enfrentam

4) Essa aula fugiu aos moldes de aulas que você está acostumado a ver? Sim ou não e porquê?

Sim, a dinâmica de um premio traz competitividade e maior interesse ao assunto

5) Em sua opinião o que poderia ser colocado ou retirado dessa aula?

Nada

6) Dê uma nota de 0 a 10 a esta aula, onde 0 é muito ruim e 10 é excelente!

10

# Capítulo 5: Considerações Finais

Durante as aulas surgiram algumas dificuldades, como por exemplo, os próprios modelos matemáticos dos problemas de otimização. Por se tratar de um conteúdo de pós-graduação a maioria dos alunos não estavam habituados a própria simbologia (somatórios, índices, atribuições de variáveis, entre outros), o que dificultou a apresentação dos modelos, mas como o foco não era esse não prejudicou em nada as aulas.

Outra dificuldade existente foi no cronograma, algumas aulas que necessitariam de mais tempo tiveram que ser refeitas e reprogramadas de acordo com a disponibilidade da escola. Contudo, de maneira geral, o objetivo do trabalho foi concluído, visto que, as aulas ministradas tiveram os problemas clássicos da otimização como motivação de estudo trazendo a realidade para dentro da sala de aula, novas metodologias foram instauradas, conciliando material lúdico e recursos computacionais.

Desta forma, percebe-se que a mudança de metodologia faz com que o aluno acione um “sinal de alerta” de forma positiva, transmitir um conteúdo de maneira lúdica, mais palpável, se torna menos maçante e produz o mesmo efeito das metodologias tradicionais. A escola precisa deixar o papel de lugar obrigatório e assumir o papel de lugar desejável. A incorporação dos adventos tecnológicos se faz essencial, precisa-se caminhar de acordo a evolução das gerações.

# Referências:


- [1] M. C. Goldbarg, H. Pacca e L. Luna. Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos. Elsevier, Rio de Janeiro, 2005.
- [2] A. M. Rocha. Problemas de Otimização Envolvendo a Matemática do Ensino Médio, Dissertação de Mestrado em Matemática Profissional (PROFMAT), Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
- [3] Educação é a base. Base Nacional Comum Curricular. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 03/05/2019.
- [4] M. Arenales, V. Armentano, R Morabito e H. Yanasse. Pesquisa Operacional. Elsevier, Rio de janeiro, 2007.
- [5] R. Rech. Resolvendo Problemas de Otimização no Ensino Médio. Disponível em: < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/705-4.pdf>. Acesso em 7 maio 2019.
- [6] L. L. S. Neto. Pesquisa Operacional no Ensino Médio. Mini curso, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: < file:///C:/Users/User/Downloads/811-2519-1-PB%20(1).pdf >. Acesso em 2 abril 2019.
- [7] Pardini, Dhiego. O Problema do Dimensionamento de Lotes (Lot-Sizing) – Modelagem, conceitos e exemplos Excel e GLPK. Otimização na prática. Disponível em: < https://otimizacaonapratica.com>. Acesso em 15 abril de 2019.